



Imię i nazwisko autora rozprawy: **Natalia Lasowicz**

Dyscyplina naukowa: **Budownictwo**

## **ROZPRAWA DOKTORSKA**

Tytuł rozprawy w języku polskim: **Badanie efektywności zastosowania tłumików polimerowych do redukcji drgań tymczasowych trybun metalowych poddanych oddziaływaniom dynamicznym wywołanym zachowaniem widzów**

Tytuł rozprawy w języku angielskim: **The effectiveness of polymer dampers in reduction of temporary metal grandstand vibrations under dynamic loads induced by spectators**

Promotor
<i>podpis</i>
prof. dr hab. inż. Robert Jankowski, prof. zw. PG
Promotor pomocniczy
<i>podpis</i>
dr hab. inż. Arkadiusz Kwiecień, prof. nadzw. PK

Gdańsk, rok 2018

*Autorka pragnie podziękować wszystkim osobom,  
bez których ta praca nie mogłaby powstać.*

*Promotorowi prof. dr hab. inż. Robertowi Jankowskiemu  
za wszelką pomoc, poświęcony czas, wyrozumiałość i cenne rady.*

*Promotorowi pomocniczemu dr hab. inż. Arkadiuszowi Kwietniowi, prof. PK  
za poświęcony czas, wsparcie i sugestie dotyczące prowadzonych badań.*

*Słowa podziękowania kierowane są również do dr inż. Bogusława Zajęca  
za pomoc oraz cenne uwagi przy wykonaniu badań eksperymentalnych.*

*Szczególnie jednak pragnę podziękować ukochanemu Mężowi  
za wsparcie duchowe.*

*Pracę dedykuję Mężowi i Synowi.*



## OŚWIADCZENIE

Autor rozprawy doktorskiej: mgr inż. Natalia Lasowicz

Ja, niżej podpisany(a), wyrażam zgodę/~~nie wyrażam zgody~~\* na bezpłatne korzystanie z mojej rozprawy doktorskiej zatytułowanej:

**Badanie efektywności zastosowania tłumików polimerowych do redukcji drgań tymczasowych trybun metalowych poddanych oddziaływaniom dynamicznym wywołanym zachowaniem widzów**

do celów naukowych lub dydaktycznych.<sup>1</sup>

Gdańsk, dnia .....

.....  
*podpis doktoranta*

Świadomy(a) odpowiedzialności karnej z tytułu naruszenia przepisów ustawy z dnia 4 lutego 1994 r. o prawie autorskim i prawach pokrewnych (Dz. U. Z 2006 r., nr 90, poz. 631) i konsekwencji dyscyplinarnych określonych w ustawie Prawo o szkolnictwie wyższym (Dz. U. Z 2012 r., poz. 572 z późn. Zm.),<sup>2</sup> a także odpowiedzialności cywilno-prawnej oświadczam, że przedkładana rozprawa doktorska została napisana przeze mnie samodzielnie.

Oświadczam, że treść rozprawy opracowana została na podstawie wyników badań prowadzonych pod kierunkiem i w ścisłej współpracy z promotorem prof. dr hab. inż. Robertem Jankowskim, promotorem pomocniczym dr hab. inż. Arkadiuszem Kwietniem, prof. PK.

Niniejsza rozprawa doktorska nie była wcześniej podstawą żadnej innej urzędowej procedury związanej z nadaniem stopnia doktora.

Wszystkie informacje umieszczone w ww. rozprawie uzyskane ze źródeł pisanych i elektronicznych, zostały udokumentowane w wykazie literatury odpowiednimi odnośnikami zgodnie z art. 34 ustawy o prawie autorskim i prawach pokrewnych.

Potwierdzam zgodność niniejszej wersji pracy doktorskiej z załączoną wersją elektroniczną.

Gdańsk, dnia .....

.....  
*podpis doktoranta*

Ja, niżej podpisany(a), wyrażam zgodę/~~nie wyrażam zgody~~\* na umieszczenie ww. rozprawy doktorskiej w wersji elektronicznej w otwartym, cyfrowym repozytorium instytucjonalnym Politechniki Gdańskiej, Pomorskiej Bibliotece Cyfrowej oraz poddawania jej procesom weryfikacji i ochrony przed przywłaszczeniem jej autorstwa.

Gdańsk, dnia .....

.....  
*podpis doktoranta*

\*) niepotrzebne skreślić

<sup>1</sup> Zarządzenie Rektora Politechniki Gdańskiej nr 34/2009 z 9 listopada 2009 r., załącznik nr 8 do instrukcji archiwalnej PG.

<sup>2</sup> Ustawa z dnia 27 lipca 2005 r. Prawo o szkolnictwie wyższym: Rozdział 7 Odpowiedzialność dyscyplinarna doktorantów, Art. 226.



## **OPIS ROZPRAWY DOKTORSKIEJ**

**Autor rozprawy doktorskiej:** mgr inż. Natalia Lasowicz

**Tytuł rozprawy doktorskiej w języku polskim:** Badanie efektywności zastosowania tłumików polimerowych do redukcji drgań tymczasowych trybun metalowych poddanych oddziaływaniom dynamicznym wywołanym zachowaniem widzów

**Tytuł rozprawy w języku angielskim:** The effectiveness of polymer dampers in reduction of temporary metal grandstand vibrations under dynamic loads induced by spectators

**Język rozprawy doktorskiej:** polski

**Promotor rozprawy doktorskiej:** prof. dr hab. inż. Robert Jankowski, prof. zw. PG

**Promotor pomocniczy rozprawy doktorskiej:** dr hab. inż. Arkadiusz Kwiecień, prof. nadzw. PK

**Data obrony:**

**Słowa kluczowe rozprawy doktorskiej w języku polski:** trybuny tymczasowe, obciążenie tłumem, tłumik polimerowy

**Słowa kluczowe rozprawy doktorskiej w języku angielskim:** temporary grandstand, crowd load, polymer damper





**Streszczenie rozprawy w języku polskim:** Niegdyś trybuny metalowe wykorzystywane były tylko podczas wydarzeń sportowych. Dziś, wykorzystuje się je podczas koncertów muzycznych, festiwali oraz wydarzeń, w których uczestniczy duża liczba ludzi. Jednocześnie, użycie lekkich i smukłych elementów konstrukcyjnych prowadzi do redukcji wartości częstotliwości drgań własnych konstrukcji, przez co łatwiej wzbudzić ją do drgań. Konsekwencją tej sytuacji może być wystąpienie zjawiska rezonansu w przypadku obciążeń dynamicznych wywołanych zachowaniem widzów (np. podskoki), którego skutki prowadzić mogą nawet do awarii trybuny. Drgania konstrukcji przyczyniają się także do obniżenia komfortu i samopoczucia widzów. Celem niniejszej dysertacji jest określenie efektywności zastosowania tłumików polimerowych jako elementów tłumiących drgania tymczasowych trybun metalowych poddanych oddziaływaniom dynamicznym. W pracy opisano badania eksperymentalne i analizy numeryczne dotyczące konstrukcji wyposażonej w dwa różne rodzaje elementów stężających, tj. w typowe elementy stężające o przekroju rurowym oraz w zaproponowane tłumiki polimerowe. Uzyskane wyniki pokazują znaczną różnicę w odpowiedzi tymczasowej trybuny metalowej wyposażonej w dwa różne typy elementów stężających. Zastosowanie tłumików polimerowych prowadzi do wzrostu liczby tłumienia konstrukcji i w konsekwencji do znacznej redukcji jej drgań. Dodatkowo, redukcja wartości przyspieszeń trybuny wyposażonej w tłumiki polimerowe umożliwia zachowanie komfortu i samopoczucia widzów na odpowiednim poziomie.

**Streszczenie rozprawy w języku angielskim:** In the past, metal grandstands were mainly used during sport events. Nowadays, these types of structures are commonly applied for music concerts, festivals or other events with large number of participants. Moreover, the use of lighter and slender structural members leads to the reduction in values of natural frequencies and that is why such structures are more easily induced to vibrations. As a result of this situation, a resonance may occur in the case of dynamic loads due to behaviour of spectators (e.g. jumping) which may even cause severe damages to the grandstand. Structural vibrations also lead to the reduction in comfort of spectators. The aim of this dissertation is to verify the effectiveness of polymer dampers in reduction of vibrations of temporary metal grandstands subjected to dynamic loads. The work describes experimental studies and numerical analyses concerning the structure equipped with two different bracing systems, i.e. typical stiffeners with tubular cross section and the proposed polymer dampers. The results of the study show that the response of structure equipped with two analyzed bracing systems is different. The application of the polymer dampers leads to the increase in the damping ratio and therefore results in substantial reduction in structural vibrations. Moreover, the decrease in values of accelerations of the grandstand with polymer dampers allows us to maintain comfort of spectators at acceptable level.

---

**SPIS TREŚCI**

<b>1</b>	<b>WSTĘP .....</b>	<b>9</b>
1.1	CEL, TEZA I STRUKTURA PRACY.....	15
<b>2</b>	<b>CHARAKTERYSTYKA TRYBUN METALOWYCH .....</b>	<b>18</b>
2.1	FUNKCJONALNOŚĆ TRYBUN METALOWYCH .....	18
2.2	ESTETYKA TRYBUN METALOWYCH .....	22
2.3	PROJEKTOWANIE TRYBUN NA ODDZIAŁYWANIA DYNAMICZNE WYWOŁANE ZACHOWANIEM WIDZÓW .....	23
<b>3</b>	<b>POLIMER – ANALIZA MATERIAŁU .....</b>	<b>30</b>
3.1	RODZINA POLIURETANÓW JAKO BAZA DLA POLIMERÓW ...	30
3.2	WŁAŚCIWOŚCI POLIMERÓW .....	31
3.2.1	ZALEŻNOŚĆ OD TEMPERATURY .....	32
3.2.2	WŁAŚCIWOŚCI REOLOGICZNE .....	33
3.2.3	WŁAŚCIWOŚCI DYNAMICZNE .....	35
3.3	WŁAŚCIWOŚCI ANALIZOWANEGO POLIMERU I JEGO MODELOWANIE .....	36
<b>4</b>	<b>BADANIA ALUMINIOWYCH BELEK WSPORNIKOWYCH .....</b>	<b>40</b>
4.1	ETAP I - BADANIA EKSPERYMENTALNE .....	40
4.1.1	PRZEDMIOT BADAŃ .....	40
4.1.2	WYNIKI BADAŃ DLA ALUMINIOWEJ BELKI WSPORNIKOWEJ .....	42
4.1.3	WYNIKI BADAŃ DLA ALUMINIOWEJ BELKI WSPORNIKOWEJ Z WARSTWĄ POLIMERU .....	59
4.2	ETAP I – ANALIZA NUMERYCZNA .....	78
4.2.1	WYNIKI ANALIZY MODALNEJ DLA ALUMINIOWEJ BELKI WSPORNIKOWEJ .....	80
4.2.2	WYNIKI ANALIZY MODALNEJ DLA ALUMINIOWEJ BELKI WSPORNIKOWEJ Z WARSTWĄ POLIMERU .....	81



---

4.3	ETAP II – BADANIA EKSPERYMENTALNE .....	83
4.3.1	PRZEDMIOT BADAŃ .....	83
4.3.2	WYNIKI BADAŃ DLA POJEDYNCZEJ ALUMINIOWEJ BELKI WSPORNIKOWEJ .....	84
4.3.3	WYNIKI BADAŃ DLA ZŁOŻONEJ BELKI WSPORNIKOWEJ Z WARSTWĄ POLIMERU O GRUBOŚCI 0,5 .....	94
4.3.4	WYNIKI BADAŃ DLA ZŁOŻONEJ BELKI WSPORNIKOWEJ Z WARSTWĄ POLIMERU O GRUBOŚCI 1,2 MM .....	107
4.3.5	WYNIKI BADAŃ DLA ZŁOŻONEJ BELKI WSPORNIKOWEJ Z WARSTWĄ POLIMERU O GRUBOŚCI 1,75 MM .....	120
4.3.6	WYNIKI BADAŃ DLA ZŁOŻONEJ BELKI WSPORNIKOWEJ Z WARSTWĄ POLIMERU O GRUBOŚCI 3,1 MM .....	133
4.3.7	WYNIKI BADAŃ DLA ZŁOŻONEJ BELKI WSPORNIKOWEJ Z WARSTWĄ POLIMERU O GRUBOŚCI 5 MM .....	146
4.4	ETAP II – ANALIZA NUMERYCZNA .....	159
4.4.1	WYNIKI ANALIZY MODALNEJ DLA POJEDYNCZEJ ALUMINIOWEJ BELKI WSPORNIKOWEJ .....	160
4.4.2	WYNIKI ANALIZY MODALNEJ DLA ZŁOŻONEJ BELKI WSPORNIKOWEJ Z WARSTWĄ POLIMERU .....	161
<b>5</b>	<b>BADANIA FRAGMENTU TYMCZASOWEJ TRYBUNY STALOWEJ .....</b>	<b>164</b>
5.1	BADANIA EKSPERYMENTALNE .....	164
5.1.1	PRZEDMIOT BADAŃ .....	164
5.1.2	BADANIA TRYBUNY ZE STĘŻENIEM RUROWYM .....	171
5.1.3	BADANIA TRYBUNY Z TŁUMIKIEM POLIMEROWYM JAKO ELEMENTEM STĘŻAJĄCYM .....	175
5.2	ANALIZA NUMERYCZNA .....	180
5.2.1	ANALIZA MODALNA .....	182
5.2.2	ANALIZA DYNAMICZNA .....	187
<b>6</b>	<b>ANALIZA NUMERYCZNA WIELKOGABARYTOWEJ TYMCZASOWEJ TRYBUNY STALOWEJ .....</b>	<b>191</b>

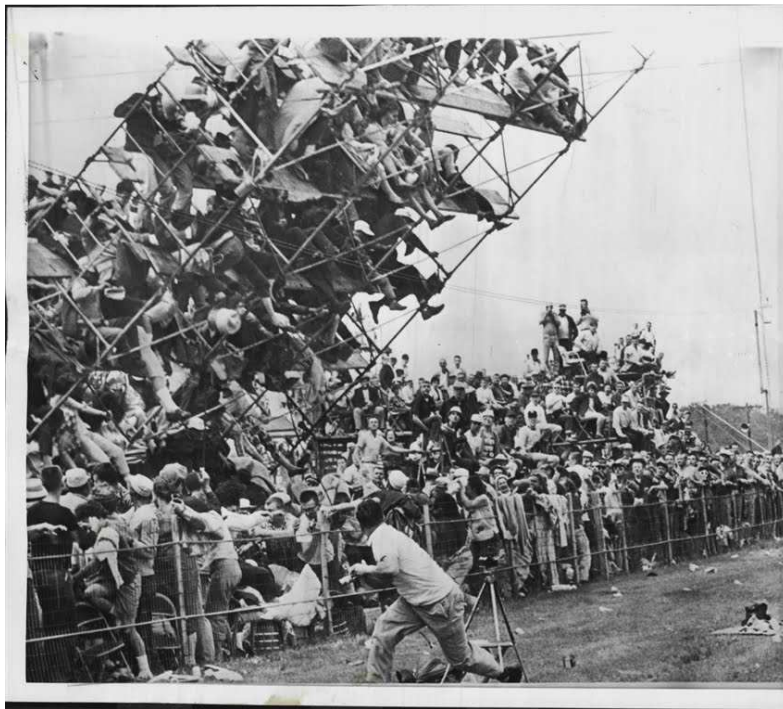
6.1	PRZEDMIOT ANALIZY .....	191
6.2	ANALIZA MODALNA .....	195
6.2.1	WYNIKI DLA TRYBUNY ZE STEŻENIAMI RUROWYMI .....	195
6.2.2	WYNIKI DLA TRYBUNY Z TŁUMIKAMI POLIMEROWYMI .....	197
6.3	ANALIZA DYNAMICZNA .....	199
6.3.1	WYNIKI DLA TRYBUNY ZE STEŻENIAMI RUROWYMI .....	200
6.3.2	WYNIKI DLA TRYBUNY Z TŁUMIKAMI POLIMEROWYMI .....	207
<b>7</b>	<b>PODSUMOWANIE .....</b>	<b>214</b>
7.1	WNIOSKI KOŃCOWE .....	214
7.2	ORYGINALNE ELEMENTY PRACY .....	216
	<b>BIBLIOGRAFIA .....</b>	<b>217</b>
	LITERATURA .....	217
	NORMY I WYTYCZNE DO PROJEKTOWANIA .....	225
	STRONY INTERNETOWE .....	225
	<b>ZAŁĄCZNIK 1 .....</b>	<b>227</b>
	<b>ZAŁĄCZNIK 2 .....</b>	<b>232</b>
	<b>ZAŁĄCZNIK 3 .....</b>	<b>237</b>
	<b>ZAŁĄCZNIK 4 .....</b>	<b>243</b>
	<b>ZAŁĄCZNIK 5 .....</b>	<b>249</b>
	<b>ZAŁĄCZNIK 6 .....</b>	<b>255</b>
	<b>ZAŁĄCZNIK 7 .....</b>	<b>261</b>
	<b>ZAŁĄCZNIK 8 .....</b>	<b>267</b>

## 1 WSTĘP

Trybuna tymczasowa (demontowalna) to konstrukcja rzędowa zbudowana z dostępnych na rynku elementów, które można wielokrotnie demontować i składać, przemieszczać z miejsca na miejsce i rozmieszczać w różnych układach pod przykryciem i na wolnym powietrzu tak, aby utworzyć stojące bądź siedzące miejsca dla widzów (PN-EN 13200 1-6). Niegdyś, metalowe trybuny demontowalne wykorzystywane były tylko podczas wydarzeń sportowych. Na przestrzeni lat zmieniły swoje pierwotne przeznaczenie dzięki swym licznym zaletom. Dziś spotkać możemy je podczas różnego rodzaju imprez masowych, np.: koncertów muzycznych, wystaw, festiwali (Reynolds i in. 2005). Kilkudziesięciorzędowe trybuny, mogące pomieścić ogromną liczbę widzów, wykorzystywane są w wielkogabarytowych halach widowiskowo-sportowych oraz w miejscach organizowania prestiżowych wydarzeń, takich jak np. zimowe igrzyska olimpijskie.

Niestety na przestrzeni lat obserwowano przypadki tragicznych w skutkach awarii trybun demontowalnych. W 1960 roku w Indianapolis podczas wyścigów samochodowych runęła aluminiowa konstrukcja tymczasowej trybuny wznoszonej za pomocą systemu rusztowań (zob. Fot. 1.1 i 1.2), na której przebywało około 125 widzów. W wyniku tej katastrofy dwie osoby zginęły, a ponad 82 zostało rannych (Jacobs 1996). Z analiz przeprowadzonych w 2009 roku wykazano, że w latach 1889 – 2008 miało miejsce ponad 90 awarii trybun demontowalnych, w których zginęło ponad 85 osób, a około 6350 zostało rannych (Brito i Pimentel 2009). Najbardziej tragiczny w skutkach wypadek w tym okresie wydarzył się w 1992 roku w Bastii (Korsyka). Zawalenie się trybuny podczas meczu piłki nożnej doprowadziło do śmierci 20 osób oraz zraniło ponad 1300. Synchroniczne podskoki widzów spowodowały zawalenie się tylnego sektora konstrukcji (uszkodzenia trybuny powstałe w wyniku tej katastrofy przedstawiono na Fot. 1.3 i 1.4). Po tym wypadku rozważano wycofanie się z użytkowania konstrukcji tymczasowych podczas organizacji wydarzeń sportowych kumulujących ogromną liczbę widzów (New York Times 1992). W 1994 roku w Londynie podczas koncertu znanej grupy muzycznej Pink Floyd doszło do awarii konstrukcji trybuny demontowalnej (zob. Fot. 1.5) mieszczącej około 1200 widzów.

W wyniku tej tragedii ponad 50 osób zostało rannych. Z kolei, w 2004 roku podczas koncertu religijnego w Lincolnshire (wschodnia Anglia) zawaliła się tymczasowa konstrukcja trybuny stalowej (zob. Fot. 1.6) raniąc ponad 60 osób. Prowadzący zachęcał widzów do uczestnictwa w wydarzeniu poprzez ich synchroniczne podskoki w rytm rozbrzmiewającej muzyki, co doprowadziło do awarii konstrukcji trybuny. Innym tragicznym w skutkach zdarzeniem była awaria konstrukcji trybuny jaka miała miejsce w 2009 roku w Ohio na torze wyścigowym Columbus Motor Speedway, w wyniku której kilkanaście osób zostało rannych. W 2010 roku w stanie Parana (Brazylia) podczas wyścigów samochodowych runęła konstrukcja tymczasowej trybuny stalowej, raniąc ponad 100 osób, z czego 22 były w stanie krytycznym.



**Fot. 1.1** Awaria trybuny metalowej wznoszonej za pomocą systemu rusztowań w Indianapolis w 1960 roku (<http://sports.usatoday.com>).





**Fot. 1.2** Awaria trybuny metalowej wznoszonej za pomocą systemu rusztowań w Indianapolis w 1960 roku (<http://indymotorspeedway.com>).



**Fot. 1.3** Awaria tymczasowej konstrukcji trybuny na Korsyce w 1992 roku (<http://www.stadiumguide.com> ).

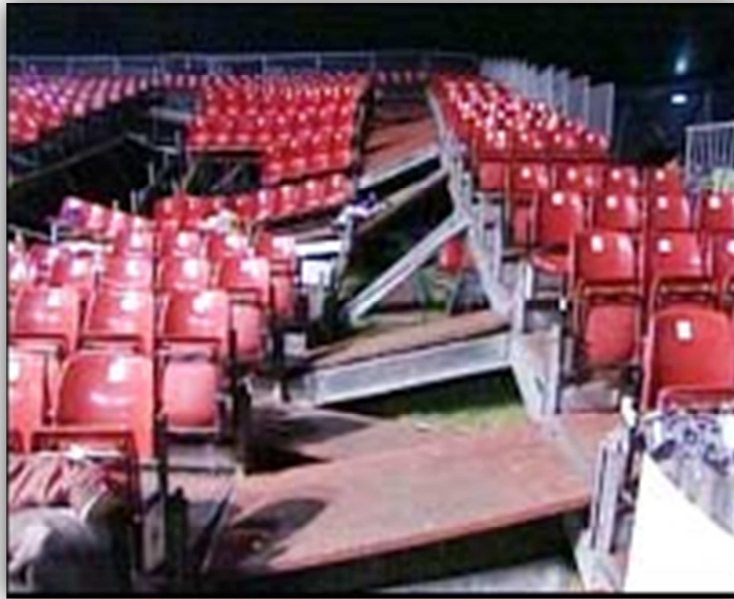


**Fot. 1.4** Awaria tymczasowej konstrukcji trybuny na Korsycy w 1992 roku (<http://www.stadiumguide.com>).



**Fot. 1.5** Awaria tymczasowej konstrukcji trybuny stalowej w Londynie w 1994 roku (<https://www.diomedia.com>).





**Fot. 1.6** Awaria tymczasowej konstrukcji trybuny stalowej w Lincolnshire w 2004 roku (<http://news.bbc.co.uk>).

Na podstawie przeprowadzonych analiz (zob. Brito i Pimentel 2009) ustalono najczęściej powtarzające się przyczyny awarii tymczasowych konstrukcji trybun. Około 21% katastrof związana była z niepoprawnym sposobem posadowienia konstrukcji, podczas gdy około 14% wypadków wywołanych było niewłaściwym sposobem połączenia elementów składowych. Błędnie przyjęty układ stężający, którego głównym zadaniem jest zapewnienie sztywności konstrukcji, był przyczyną ok. 14% awarii. W wyniku wad materiałowych, 7% analizowanych konstrukcji uległo uszkodzeniu, bądź zawaleniu, podczas gdy około 2% awarii związanych było z błędami już na etapie montażu. Jednakże, jednym z głównych powodów analizowanych katastrof trybun tymczasowych jest obecność nie uwzględnionego na etapie projektowania obciążenia dynamicznego wywołanego zachowaniem się widzów przebywających na obiekcie (Littler 2000, Marinho i in. 2003). Rytmiczne podskoki ludzi mogą spowodować wzbudzenie konstrukcji do niebezpiecznych drgań. Jednocześnie zauważa się stałą tendencję do projektowania i wznoszenia konstrukcji wyższych, lżejszych, wykonanych z materiałów o większej wytrzymałości i optymalnie zaprojektowanych. Niestety, użycie lekkich i smukłych elementów konstrukcyjnych czyni konstrukcję jeszcze bardziej podatną na oddziaływania dynamiczne (Ellis i in. 2000, Ibrahim i in. 2004, Ibrahim 2006). Obciążenie wywołane tłumem ludzi ma charakter dynamiczny. Niejednokrotnie udowodniono, że rodzaj aktywności (podskoki, taniec, bieg, itp.), masa

widza, jak i stosunek masy tłumy do całkowitej masy konstrukcji ma ogromny wpływ na odpowiedź konstrukcji (zob. np. Ellis i in. 2000, Reynolds i in. 2005, Nhleko i in. 2009, Żółtowski 2007, Noss 2012, Wilde i in. 2013).

Badania demontowalnych trybun metalowych prowadzone są w różnych ośrodkach na całym świecie od około 30 lat. Dotyczą one przede wszystkim określenia wpływu oddziaływania tłumy widzów na konstrukcję oraz metod mających na celu redukcję drgań wywołanych tego typu obciążeniami dynamicznymi. W przypadku trybun demontowalnych, skutecznym sposobem redukcji drgań jest zastosowanie odpowiedniego układu stężającego (Ji i Ellis 1997). Zastosowanie stężeń ma na celu zwiększenie sztywności konstrukcji w kierunku poprzecznym, podłużnym i pionowym. Pokazano, że brak odpowiedniego układu stężającego może prowadzić do stanów awaryjnych konstrukcji trybun (Bolton 1992, Błażejowski i Marcinowski 2011). Powszechnie stosowane w trybunach stałych pionowe elementy stężające okazują się jednak niewystarczające dla konstrukcji tymczasowych, które są szczególnie narażone na drgania podłużne i poprzeczne (Crick i Grondin 2008). Dlatego też, w przypadku tych konstrukcji konieczne jest zastosowanie również poziomych elementów stężających. Z powodu coraz częstszego wykorzystywania trybun tymczasowych, wynikającego z rodzaju wydarzenia, warunków ukształtowania terenu, wymagań klienta czy chociażby pogody, układ stężający stał się indywidualną kwestią każdej konstrukcji, a jego poprawne zaprojektowanie jest dużym wyzwaniem dla projektantów.

Inną metodą redukcji drgań konstrukcji jest zastosowanie tłumików drgań, których głównym zadaniem jest zwiększenie możliwości rozpraszania energii. Wyróżniamy kilka rodzajów tłumików (pasywne, aktywne, półaktywne i hybrydowe) umożliwiających efektywną redukcję drgań konstrukcji spowodowanych różnymi rodzajami oddziaływań (Housner i in. 1997). Najczęściej stosowana w konstrukcjach rzeczywistych (mosty, kładki dla pieszych, wysokie budynki, maszty, wieże, kominy czy trybuny stadionów sportowych) jest metoda pasywna. Cechą wyróżniającą tłumiki pasywne jest to, że wykorzystuje się drgania konstrukcji do wywołania dodatkowych sił tłumiących bez konieczności dostarczania energii zewnętrznej do układu (Wielgos 2010). Przykładem metody pasywnej redukcji drgań jest zastosowanie lepko-sprężystego tłumika drgań (Lewandowski i Pawlak 2011). Może to być tłumik wiskotyczny, składający się z cylindra wypełnionego cieczą o dużej lepkości, w której porusza się tłok z otworami, a energia rozpraszana jest na skutek tarcia pomiędzy cząsteczkami

płynu a tłokiem. Może to być również tłumik, w którym element tłumiący wykonany jest z substancji szklanych lub kopolimerów, a rozpraszanie energii odbywa się w trakcie zmian postaciowych (Wielgos 2010). Zazwyczaj taki tłumik składa się z dwu płyt przymocowanych do płyt stalowych. Kolejnym przykładem tłumika pasywnego jest strojony tłumik masowy TMD (nazywany dynamicznym tłumikiem drgań), który składa się z dodatkowej masy dołączonej do konstrukcji za pomocą więzów o właściwościach sprężystych oraz tłumiących. Tłumiki TMD wykorzystuje się do tłumienia drgań kładek dla pieszych, mostów czy wieżowców (Weber i Maślanka 2012). Jeden z najbardziej znanych przykładów zastosowania układów TMD dotyczy kładki dla pieszych Millenium w Londynie czy wieżowca Taipei w Tajwanie. Tłumiki te znalazły także swoje zastosowanie w konstrukcjach trybun stałych do redukcji drgań pionowych układów wspornikowych (zob. Sacks i in. 2005).

Metody aktywnej redukcji drgań są skuteczniejsze od metod pasywnych, wymagają natomiast zainstalowania dodatkowych urządzeń na konstrukcji (czujniki, wzбудniki, komputer sterujący). Cechą charakterystyczną tego rodzaju tłumików jest konieczność dostarczenia do wzбудników energii zewnętrznej. Z kolei, metoda półaktywnej redukcji drgań wykorzystuje zmianę w czasie parametrów zainstalowanych pasywnych tłumików drgań (Wielgos 2010). Metoda hybrydowa jest metodą mieszaną łączącą elementy metody aktywnej i pasywnej. Przykładem zastosowania tej metody jest zainstalowanie hybrydowego tłumika drgań na konstrukcji trybuny stadionu piłkarskiego w Wielkiej Brytanii (Noormohammadi i Reynolds 2012).

Problemy związane z drganiami metalowych trybun tymczasowych nabierają coraz większego znaczenia praktycznego ze względu na stałą tendencję do budowy coraz to lżejszych i optymalnie zaprojektowanych konstrukcji oraz coraz większe zainteresowanie tego typu rozwiązaniami.

## **1.1 CEL, TEZA I STRUKTURA PRACY**

### Cel pracy:

Celem niniejszej pracy jest określenie na drodze eksperymentalnej i numerycznej efektywności zastosowania tłumików polimerowych do redukcji drgań tymczasowych trybun metalowych poddanych oddziaływaniom dynamicznym wywołanym zachowaniem widzów.

Teza pracy:

Na podstawie wstępnie przeprowadzonych badań i analiz numerycznych postawiono następującą tezę: „Zastosowanie tłumików polimerowych prowadzi do wzrostu tłumienia drgań tymczasowej trybuny metalowej, co skutkuje znacznym zwiększeniem odporności dynamicznej konstrukcji”.

Struktura pracy:

Praca składa się z następujących rozdziałów:

W **rozdziale 1** opisano zagadnienie problemu drgań tymczasowych trybun metalowych. Ponadto przedstawiono cel, tezę i strukturę pracy.

Charakterystykę trybun metalowych opisano w **rozdziale 2**, gdzie przedstawiono podział trybun z uwagi na ich budowę, przeznaczenie, miejsce organizowanego wydarzenia. Przedstawiono także liczne zalety tych konstrukcji potwierdzające ich powszechne stosowanie. W rozdziale tym dokonano także przeglądu literatury dotyczącej projektowania tymczasowych trybun metalowych poddanych oddziaływaniom dynamicznym.

W **rozdziale 3** przedstawiono charakterystykę oraz właściwości mechaniczne poliuretanów należących do grupy polimerów oraz omówiono parametry i sposób modelowania polimeru o specjalnych właściwościach tłumiących, który jest elementem składowym analizowanego w pracy tłumika polimerowego.

W **rozdziale 4** szczegółowo opisano wstępne badania eksperymentalne oraz analizy numeryczne dotyczące aluminiowych belek wspornikowych. Badania przeprowadzono w dwóch etapach. W pierwszym z nich analizowano dwie pojedyncze belki, do jednej z których podklejono od dołu warstwę polimeru. W drugim etapie, testom poddano belkę składającą się z dwóch płaskowników sklejonych ze sobą warstwą polimeru o różnej grubości. Belki wzbudzone były do drgań poprzez odchylenie pionowe, a następnie puszczenie ich swobodnego końca oraz poprzez uderzenie w środku ich rozpiętości młotkiem modalnym. Analizowano ich odpowiedź pod dodatkowym obciążeniem. Na podstawie uzyskanych wyników określono efektywność zastosowania polimeru, jako warstwy tłumiącej.

W **rozdziale 5** zaprezentowano wyniki badań eksperymentalnych i numerycznych fragmentu konstrukcji tymczasowej trybuny stalowej wyposażonej w dwa różne elementy stężające (powszechnie stosowany element o przekroju rurowym

oraz zaproponowany tłumik polimerowy). Testy eksperymentalne wykonano wzbudzając konstrukcję do drgań poprzez odchylenie poziome i puszczenie końca najwyższego elementu pionowego oraz poprzez rozkołysanie przez jedną osobę stojącą na najwyższym podeście. Analizy numeryczne przeprowadzono z wykorzystaniem Metody Elementów Skończonych (MES). W pierwszym etapie wykonano analizę modalną celem weryfikacji dokładności utworzonego modelu numerycznego poprzez porównanie otrzymanych wartości częstotliwości drgań własnych z wartościami uzyskanymi w czasie badań eksperymentalnych. Następnie przeprowadzono analizę dynamiczną, której celem było określenie zachowania się konstrukcji pod obciążeniem wywołanym podskokami widzów.

W **rozdziale 6** przedstawiono wyniki przeprowadzonych analiz numerycznych dla wielkogabarytowej tymczasowej trybuny stalowej wyposażonej w analizowane wcześniej dwa różne typy elementów stężających. W pierwszej kolejności przeprowadzono analizę modalną celem wyznaczenia dominujących częstotliwości drgań własnych konstrukcji. W kolejnym etapie badań przeprowadzono analizę dynamiczną mającą na celu wyznaczenie odpowiedzi konstrukcji, wyposażonej w typowe elementy stężające o przekroju rurowym oraz w tłumiki polimerowe poddanej oddziaływaniom dynamicznym wywołanym zachowaniem widzów.

Pracę kończy **rozdział 7**, który zawiera wnioski końcowe oraz oryginalne elementy pracy.

## 2 CHARAKTERYSTYKA TRYBUN METALOWYCH

Trybuny są konstrukcjami, które zapewniają miejsca widzom podczas różnego rodzaju imprez masowych. Wydarzenia te gromadzą coraz to większą liczbę ludzi. Dzięki prostej i szybkiej budowie, częściej i chętniej stają się wyposażeniem różnych obiektów sportowych i nie tylko. Stosowane są zarówno niewielkie kilkurzędowe trybuny, ale także konstrukcje, które są w stanie pomieścić dziesiątki tysięcy widzów. Spośród szerokiej oferty dostępnej na rynku, prym wiodą trybuny metalowe. Łatwość montażu oraz niski koszt produkcji stały się głównymi atutami tego typu konstrukcji. Ponadto, właściwości materiału konstrukcyjnego oraz rodzaj elementów składowych przyczyniły się do znacznego podwyższenia estetyki.

### 2.1 FUNKCJONALNOŚĆ TRYBUN METALOWYCH

Z uwagi na zmianę funkcjonalności obiektów sportowych na przestrzeni lat, trybuny wykorzystywane są nie tylko podczas wydarzeń sportowych, ale także kulturowych i rozrywkowych. Jeszcze do niedawna najczęściej stosowanymi trybunami były konstrukcje żelbetowe (Wirszylło 1982, Wojdak 2010). Trybuny żelbetowe są obiektami masywnymi, na trwale związanych z podłożem w konkretnej lokalizacji, z określoną od samego początku funkcjonalnością, którą trudno jest w późniejszym czasie zmienić czy nawet zmodyfikować. Problemy te z powodzeniem rozwiązały trybuny metalowe z uwagi na swoją lekkość, mobilność i demontowalność. Możliwość organizacji widowiska w dowolnie wybranym miejscu oraz wielokrotne użycie tej samej konstrukcji sprawiło, że trybuny metalowe stały się alternatywą dla konstrukcji żelbetowych.

Ze względu na swoją budowę, trybuny metalowe możemy podzielić na (Jones i in. 2011): stałe (Fot. 2.1), tymczasowe (demontowalne) (Fot.2.2) i teleskopowe (jezdne) (Fot. 2.3). Trybuny te różnią się między sobą przede wszystkim elementami konstrukcyjnymi, rodzajem ich połączenia oraz sposobem posadowienia. Trybuny teleskopowe montowane są wewnątrz budynków sportowych stając się nierozłącznym elementem wyposażenia hal sportowych, widowiskowych, itp. Z kolei, trybuny stałe



i tymczasowe odnajdują swoje zastosowanie zarówno wewnątrz jak i na zewnątrz obiektów sportowych oraz w miejscach organizacji imprez masowych.



**Fot. 2.1** Metalowa trybuna stała ([www.trybunysportowe.pl](http://www.trybunysportowe.pl)).



**Fot. 2.2** Metalowa trybuna demontowalna ([www.trybunysportowe.pl](http://www.trybunysportowe.pl)).



**Fot. 2.3** Metalowa trybuna teleskopowa (www.trybunysportowe.pl).

Wielkość konstrukcji, a co za tym idzie jej pojemność, nie jest żadnym ograniczeniem dla trybun metalowych. Najmniejsze z nich – kilkurzędowe o dowolnej długości, chętnie stają się wyposażeniem mniejszych stadionów sportowych, czy boisk szkolnych. Kilkudziesięciorzędowe trybuny, mogące pomieścić ogromną liczbę widzów, wykorzystywane są w wielkogabarytowych halach widowiskowo-sportowych oraz w miejscach organizowania prestiżowych imprez masowych. Przykładem mogą tu być Zimowe Igrzyska Olimpijskie w Salt Lake City w 2001 roku (Crick i Grondin 2008).

Do wzniesienia konstrukcji trybuny na pewną wysokość, a także do umiejscowienia jej w niedogodnych warunkach ukształtowania terenu (nachylenie bądź nierówność terenu), służą podpory trójkątne lub system rusztowań (zob. Fot. 2.4 i 2.5). Przeszkody, takie jak maszty, płoty czy drzewa, również można obudować systemem rusztowań. Sposób łączenia elementów jest prosty, bezpieczny i znacznie skraca czas wznoszenia konstrukcji. Zalety te spowodowały rozpowszechnienie zastosowania trybun metalowych podczas organizowania imprez masowych na dużą skalę.





**Fot. 2.4** Trybuna metalowa usytuowana na pochyłym terenie ([www.wamat.com.pl](http://www.wamat.com.pl)).



**Fot. 2.5** Trybuna metalowa wznoszona za pomocą systemu rusztowań ([www.pro-construction.com](http://www.pro-construction.com)).

Dzięki swojej modułowej konstrukcji, trybuny metalowe są konstrukcjami wielokrotnie składanymi i demontowanymi w bardzo krótkim czasie przy użyciu prostych narzędzi. Istotną zaletą jest możliwość zastosowania tej samej konstrukcji podczas większej liczby imprez. Kolejnym atutem trybun metalowych jest też niski koszt budowy.

## 2.2 ESTETYKA TRYBUN METALOWYCH

Funkcjonalność obiektu nie jest jedynym celem jaki stawiają sobie dzisiejsi architekci i inżynierowie. Połączenie tej jakże ważnej cechy wraz z estetyką konstrukcji jest głównym atutem nowo powstających i projektowanych obiektów budowlanych.

Trybuny stałe i demontowalne to konstrukcje o układzie prętowym. Z uwagi na niski koszt i estetyczny wygląd, kształtowniki o przekroju rur okrągłych, prostokątnych bądź kwadratowych są najczęściej i najchętniej stosowanymi profilami. Zastosowanie smukłych prętów metalowych jako elementów konstrukcyjnych oraz krat pomostowych przyczynia się do znacznej poprawy wyglądu stadionów sportowych jak i podnosi prestiż widowiska.

W przypadku trybun metalowych, drewniane ławki zastąpiono wygodnymi plastikowymi siedzeniami, które wpływają na podwyższenie estetyki i komfortu użytkowania. Elementy te są również odporne na szkodliwe działania czynników atmosferycznych. Szeroka gama kolorów pozwala na nadanie wyrazistości i indywidualności zarówno konstrukcji jak i całemu kompleksowi. Wymogi ergonomiczne, takie jak: szerokości pomostów, rozstawy między sąsiednimi siedziskami, nachylenie konstrukcji, zapewniają komfort i odpowiednią widoczność widzom. Zastosowanie stali czy aluminium ułatwia ponadto eksploatację oraz utrzymanie trybuny w czystości. Ogniowo ocynkowana stal, będąca głównym materiałem konstrukcyjnym, pozwala na wykorzystanie trybuny przez wiele lat w różnych warunkach atmosferycznych.

Trybuny stalowe wyposażone są w barierki ochronne, które zapobiegają upadkom widzów z wysokości. W przypadku boisk szkolnych są niezwykle istotnym elementem z uwagi na obecność małych dzieci. Trybuny metalowe mogą być również wyposażone w zadaszenie (Fot. 2.7). Takie rozwiązanie pozwala na organizację imprez masowych niezależnie od warunków pogodowych, np. podczas deszczu. Z uwagi na zastosowanie smukłych i lekkich elementów możliwe jest stworzenie estetycznej i ekonomicznej konstrukcji.



Fot. 2.6 Trybuna metalowa z zadaszeniem (www.wamat.com.pl).

### 2.3 PROJEKTOWANIE TRYBUN NA ODDZIAŁYWANIA DYNAMICZNE WYWOŁANE ZACHOWANIEM WIDZÓW

Jeszcze pod koniec XVIII wieku trybuny sportowe nie były konstrukcjami, których sposób projektowania wymagałby szczegółowego usystematyzowania w normach budowlanych (Jones i in. 2011). Jednakże już w 1932 roku zaobserwowano i udokumentowano fakt, iż oddziaływania dynamiczne wywołane zachowaniem widzów mogą powodować niebezpieczne drgania konstrukcji (Homan i in. 1932). W 1980 roku, kanadyjska organizacja Canadian Standards Association wyróżniła obciążenia wywołane różnymi rodzajami aktywności ludzi, jakie mogą oddziaływać na obiekty budowlane, jednakże nie odniesiono ich do trybun sportowych. W Polsce obowiązująca wówczas norma PN-82/02003 z 1982 roku zalecała wykonanie specjalnej analizy dynamicznej lub przyjęcie obciążenia dynamicznego działającego na konstrukcję w postaci iloczynu obciążenia statycznego i współczynnika dynamicznego. Jednak norma ta nie określała wartości tego współczynnika w przypadku tłumu zgromadzonego na trybunie. W tamtym czasie, żadna norma na świecie nie definiowała sposobu obciążenia konstrukcji tłumem ludzi. Dla różnych aktywności ruchowej człowieka (chód, bieg, podskoki, taniec) określono jednak przedział częstotliwości, który należy wziąć pod uwagę przy projektowaniu konstrukcji (Bachmann 1995) – zob. Tab. 2.1.

Jednocześnie, badania przeprowadzone na osobach tańczących (pojedyncza osoba, kilkanaście osób oraz duża grupa ludzi) podczas 210 popularnych utworów muzycznych umożliwiły określenie wartości częstotliwości, jakie towarzyszą danemu rodzajowi grupy (Ginty i in. 2001) – zob. Tab. 2.2.

**Tab. 2.1** Klasyfikacja aktywności ruchowej człowieka (Bachmann 1995).

Rodzaj aktywności	Przedział częstotliwości [Hz]
chód	1,6 – 2,4
bieg	2,0 – 3,5
podskoki	1,8 – 3,4
taniec	1,5 – 3,0

**Tab. 2.2** Klasyfikacja aktywności ruchowej tańczących ludzi (Ginty i in. 2001).

Rodzaj grupy	Przedział częstotliwości [Hz]
pojedyncza osoba	1,2 – 2,8
mała grupa	1,5 – 2,5
duża grupa	1,8 – 2,3

W 1997 roku, organizacja BRE Digest wydała uzupełnienie do obowiązującej w Wielkiej Brytanii normy BS 6399-1:1996, w której zaproponowano model obciążenia wywołanego aktywnością widza, jednak okazał on się trudny do wykorzystania w rzeczywistości. W 1997 roku, w oparciu o obserwację istniejących trybun, określono i udokumentowano (Green Guide 1997) graniczne wartości częstotliwości drgań własnych, jakich nie powinna osiągnąć konstrukcja trybuny poddana oddziaływaniom dynamicznym wywołanym zachowaniem się tłumu. Po dodatkowych analizach i próbach wykorzystania tych zaleceń w praktyce, wydano na koniec 2008 roku piątą, poprawioną edycję wytycznych (Green Guide 2008).

Wytyczne dotyczące projektowania trybun poddanych oddziaływaniom dynamicznym obejmują zarówno konstrukcje stałe, jak i tymczasowe. Jednakże, w porównaniu z trybunami stałymi, w przypadku trybun tymczasowych stosuje się lżejsze i smuklejsze elementy. Ponadto, konstrukcje te wznoszone są z myślą o konkretnym wydarzeniu, więc projektowane są często z uwzględnieniem minimalnych współczynników bezpieczeństwa (Crick i Grondin 2008). Rzeczywiste obciążenia stałe i użytkowe, działanie wiatru oraz inne obciążenia dynamiczne nie zawsze są uwzględniane podczas projektowania tego typu konstrukcji. Wartość

obciążenia użytkowego zależna jest od rodzaju konstrukcji, jednocześnie np. norma brytyjska (BS 6399-1:1996) i chińska (HK Loading Code 2011) określają jej wartość minimalną. Z kolei, w przypadku działania wiatru, rozpatrzeć należy dwa przypadki. Pierwszy z nich uwzględnia maksymalną wartość prędkości wiatru przy pustej trybunie, drugi – minimalną wartość prędkości wiatru przy trybunie pełnej widzów (Dickie 1983). Trybuny poddawane są dodatkowo obciążeniom poziomym wywołanym oddziaływaniem widzów, jak i imperfekcjami geometrycznymi, brakiem ustawienia w linii pionowych elementów, które przenoszą obciążenia z pomostu na podłoże (Ellis i in. 1994). Konsekwencją tego jest uwzględnienie na etapie projektowania dodatkowego obciążenia na kierunku poziomym o wartości równej 6% wartości pionowych obciążeń (odnosi się to do wszystkich kategorii obciążeń). Z kolei, norma brytyjska BS 6399-1:1996 określa nieco większą wartość obciążeń poziomych, jakie powinny zostać uwzględnione, tj. 10% wartości obciążeń pionowych.

W wyniku przeprowadzonych badań zaobserwowano, że w przypadku trybun stałych, które często projektowane są z elementów nośnych wspornikowych o dużych długościach, dominujące są drgania pionowe (Manheim i Honeck 1987). Z kolei, w przypadku trybun tymczasowych decydujące okazują się zazwyczaj drgania podłużne i poprzeczne (Ji i Ellis 1997), a wyznaczenie skorelowanych z nimi wartości częstotliwości drgań jest kluczowe podczas projektowanie tego typu konstrukcji. Fakt ten spowodował, iż konieczne było opracowanie oddzielnych wytycznych dotyczących projektowania trybun tymczasowych. Od ponad dekady w Wielkiej Brytanii opublikowano szereg prac dotyczących projektowania tego typu konstrukcji, a organizacja Institution of Structural Engineers (IStructE) wydała zalecenia do ich projektowania uwzględniające oddziaływania dynamiczne wywołane nieprzewidywalnym zachowaniem widzów.

Na podstawie przeprowadzonych badań eksperymentalnych zaproponowano następujące minimalne wartości częstotliwości drgań pionowych i poziomych dla tymczasowych konstrukcji trybun (Bachmann i in. 1995, Ji i Ellis 1997, BRE Digest 1997):

- **3,4 Hz** – częstotliwość drgań pionowych trybuny wypełnionej widzami w przypadku jej wykorzystania podczas „spokojnego” koncertu muzycznego;



- **6,5 Hz** – częstotliwość drgań pionowych trybuny wypełnionej widzami w przypadku jej wykorzystania podczas "hałaśliwego" koncertu muzycznego;
- **2,5 Hz** – częstotliwość drgań poziomych trybuny wypełnionej widzami w przypadku jej wykorzystania podczas "hałaśliwego" koncertu muzycznego;
- **8,4 Hz** – częstotliwość drgań pionowych pustej trybuny;
- **4 Hz** – częstotliwość drgań poziomych pustej trybuny.

W Polsce, trybuny metalowe projektowane są w oparciu o normy budowlane (zob. np. PN-EN 13200 1-6, PN-EN 1991 1-1, PN-EN 1993 1-1, ISO 2631-1: 1997) i muszą posiadać odpowiednie atesty i certyfikaty. Norma PN-EN 1991-1-1:2004, zaleca, aby rozważyć prawdopodobieństwo wzbudzenia rezonansu wraz z podaniem sposobu zapobiegania temu zjawisku, a także aby model obliczeniowy był określony na podstawie analizy dynamicznej. W normie PN-EN 13200 1-6, dotyczącej projektowania trybun tymczasowych, nadmieniono, że *„są to konstrukcje względnie podatne na oddziaływania dynamiczne wywołane zachowaniem widowni i zaleca się, aby wytyczne mające na celu zapewnienie trwałości trybuny podano w dokumentacji projektowej.”* Zgodnie z normą PN-EN 13200 1-6, obciążenia pionowe należy brać pod uwagę jako oddziaływania quasi-statyczne, a modele obciążenia mogą obejmować efekty dynamiczne jeżeli nie ma ryzyka wystąpienia zjawiska rezonansu lub innych znaczących reakcji dynamicznych konstrukcji.

Obciążenie dynamiczne wywołane zachowaniem się widzów staje się niezwykle niebezpieczne w przypadku synchronicznych i cyklicznych podskoków tłumu (Ellis i Ji 1997, Comer i in. 2007). W przypadku stanu granicznego użyteczności norma PN-EN 1990:2004 podaje iż: *„W celu nieprzekroczenia stanów granicznych użyteczności, konstrukcji lub elementu konstrukcji z uwagi na drgania zaleca się utrzymanie częstotliwości drgań własnych konstrukcji lub elementu konstrukcji powyżej odpowiedniej wartości, zależnych od przeznaczenia użytkowego budynku i źródła drgań, oraz uwzględnionych z inwestorem i/lub właściwymi władzami.”* Ponadto: *„Jeżeli częstotliwość drgań własnych konstrukcji jest niższa od odpowiedniej wartości, zaleca się dokonanie bardziej szczegółowej analizy odpowiedzi konstrukcji, z uwzględnieniem tłumienia.”* W normie PN-EN 13200 1-6, obciążenie wywołane tłumem widzów



uwzględnia się poprzez dodanie pionowego obciążenia równomiernie rozłożonego (statycznego) o wartości  $4,0 \text{ kN/m}^2$  (kategoria C2 – obszar z przymocowanymi siedzeniami), bądź  $5,0 \text{ kN/m}^2$  (kategoria C5 – duże trybuny podatne na przepelnienie).

Obciążenie wywołane podskokiem widza można zdefiniować dokładnie, np. jako funkcję periodyczną, która składa się z fazy kontaktu i z fazy lotu, opisując ją za pomocą szeregu Fouriera (Ellis i in 2000, zob. także Tataro i Ptasznik 2015):

$$F_s(t) = G_s \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( r_n \sin \frac{2n\pi}{T_p} t + \varphi_n \right) \right) \quad (2.1)$$

gdzie:

$F_s(t)$  – obciążenie dynamiczne;

$G_s$  – ciężar widza;

$n$  – liczba wyrazów szeregu Fouriera;

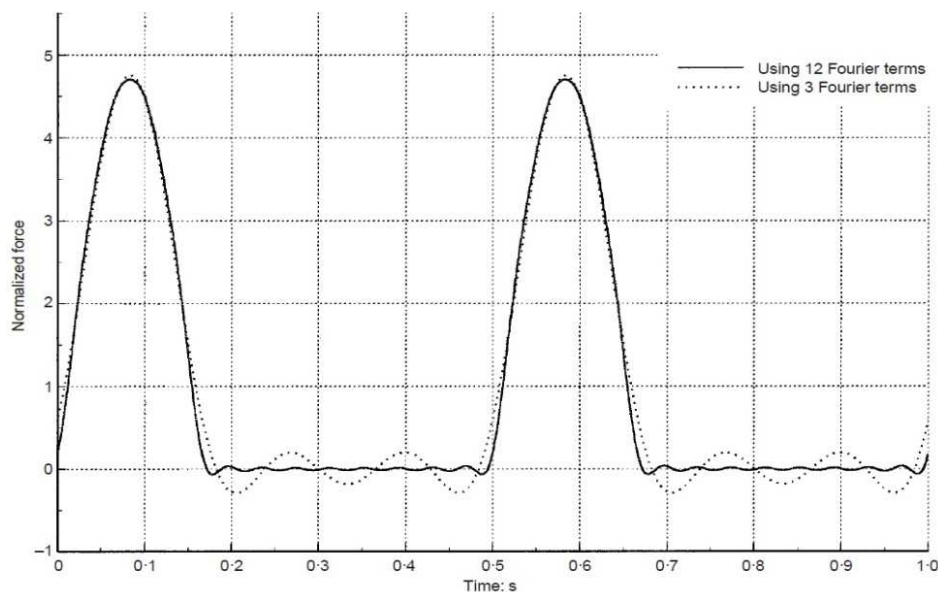
$r_n$  – współczynnik Fouriera  $n$ -tego wyrazu;

$T_p$  – okres drgań obciążenia wywołanego podskokiem widza;

$t$  – czas;

$\varphi_n$  – przesunięcie fazowe  $n$ -tego wyrazu.

Na Rys. 2.1 przedstawiono wykres funkcji opisanej równaniem (2.1) podczas dwóch pełnych cykli rytmicznych podskoków widza z typową częstotliwością wynoszącą 2 Hz (Ellis i in. 2000). Podkreślić należy, iż sposób definiowania obciążenia wywołany podskokiem widza nie został zawarty w żadnej z obowiązujących polskich norm do projektowania tymczasowych konstrukcji trybun. Uwzględniono go natomiast w wytycznych do projektowania w Danii, Szwajcarii, Wielkiej Brytanii i Szwecji (Crick i Grondin 2008).



**Rys. 2.1** Przebieg czasowy obciążenia podczas dwóch rytmicznych podskoków widza z częstotliwością 2 Hz (Ellis i in. 2000).

Drgania konstrukcji wywołane zachowaniem się widzów mają ogromny wpływ nie tylko na bezpieczeństwo konstrukcji (zob. Marcinowski 2012), ale także na komfort ludzi (Żółtowski 2007). Stan graniczny użyteczności z uwagi na drgania jest określany na podstawie oszacowania poziomu komfortu oraz identyfikacji wielkości i charakteru obciążenia, z jakim widzowie oddziałują na obiekt (Allen i Rainer 1975, Simiu i Scanlan 1986, Nhleko i in. 2000). Drgania trybuny przyczyniają się do obniżenia komfortu i samopoczucia widzów (Ji i Ellis 1993, Jones i in. 2011, Salyards i Firman 2012). Wrażliwość człowieka na drgania związana jest z częstotliwościami rezonansowymi jego części ciała (Bachmann 1987). Najbardziej dokuczliwe dla ludzi są drgania organów wewnętrznych (jamy brzusznej i klatki piersiowej).

W celu określenia poziomu komfortu widzów przebywających na trybunie tymczasowej, oraz sprawdzenia czy odczuwalny przez nich poziom drgań jest akceptowalny, wskazane jest wyznaczenie wartości ekstremalnej przyspieszeń konstrukcji. Wartości graniczne przyspieszeń dla poszczególnych poziomów komfortu zestawiono w Tab. 2.3 (Kasperski 1996). Zbyt duże przyspieszenia konstrukcji są odczuwane przez ludzi, źle wpływają na ich samopoczucie i wywołują uczucie zagrożenia (nawet jeśli nie ma zagrożenia dla bezpiecznej pracy samej konstrukcji).



**Tab. 2.3** Poziomy komfort widzów dla różnych wartości przyspieszeń (Kasperski 1996).

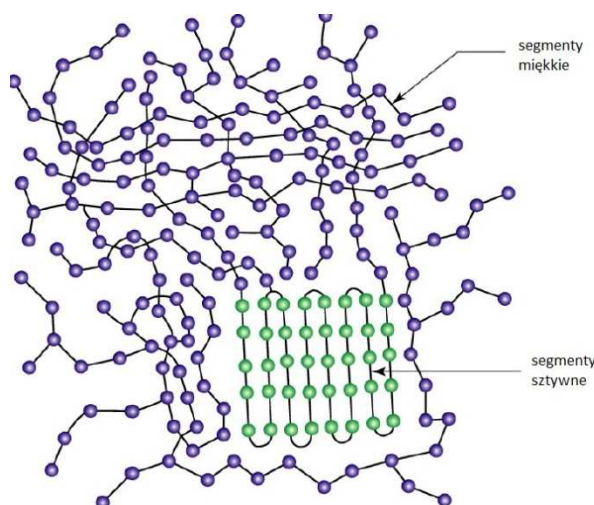
Przyspieszenie	Poziom komfortu
<5%g	dopuszczalny
<18%g	uciążliwy
<35%g	nieakceptowalny
>35%g	wywołujący panikę
g – przyspieszenie ziemskie	

### 3 POLIMER – ANALIZA MATERIAŁU

#### 3.1 RODZINA POLIURETANÓW JAKO BAZA DLA POLIMERÓW

Poliuretany są grupą polimerów o najbardziej wszechstronnych właściwościach i dlatego odnajdują swoje zastosowanie niemalże w każdej dziedzinie gospodarki. Zaletą poliuretanów jest możliwość sterowania ich parametrami fizykomechanicznymi już na etapie produkcji, dzięki czemu na rynku występuje bardzo dużo produktów o silnie zróżnicowanych właściwościach. Na tej podstawie możliwy jest odpowiedni dobór polimeru w zależności od wymagań.

Poliuretany są kopolimerami o losowo rozłożonych segmentach sztywnych i giętkich (patrz Rys. 3.1), niemieszających się ze sobą, tworzących dwufazową mikrostrukturę heterogeniczną o dużej wytrzymałości mechanicznej (Dzierża 1980). Segment sztywny nadaje poliuretanom wytrzymałość zarówno mechaniczną jak i termiczną, a także duży moduł sprężystości. Wytrzymałość mechaniczna segmentów sztywnych związana jest głównie z występowaniem wiązań wodorowych oraz oddziaływań dipol-dipol. Segmenty giętkie odpowiadają za miękkość i elastyczność poliuretanów, duże wydłużanie przy zerwaniu oraz odporność w niskiej temperaturze. Dzięki regularnej budowie, materiał jest bardziej wytrzymały oraz zwiększona jest jego krystaliczność (Wirpsza 2001, 2002).



**Rys. 3.1** Schematyczny obraz molekularny elastomeru z domenami segmentów sztywnych i miękkich (Callister 2001).

Poliuretany charakteryzują się silnie nieliniowym zachowaniem pod obciążeniem statycznym, objawiającym się dużymi odkształceniami oraz nieliniową charakterystyką naprężenie-odkształcenie. Na charakterystykę pracy poliuretanu wpływa między innymi struktura materiału, w której mogą występować defekty w postaci mikropęknięć lub pęcherzy gazowych (Kwiecień 2012a). W początkowej fazie obciążania, poliuretany wykazują liniową sprężystość, która szybko przechodzi w stan nieliniowy wynikający ze zmian strukturalnych w materiale. Pod wpływem naprężeń rozciągających dochodzi do powstawania drobnych pęknięć, które umożliwiają ciągłe powstawanie wydłużeń elastycznych. Dalsze wydłużanie polimeru powoduje łączenie się tych pęknięć w większe mikropęknięcia, które przy dalszym odkształcaniu rozprzestrzeniają się, co ostatecznie prowadzi do całkowitego pęknięcia badanego elementu (Ashby i Jones 1996). W przypadku ściskania poliuretanu, możliwe są duże odkształcenia dzięki występowaniu pasm ścinania (Nowak i Pęcherski 2002). Wraz ze wzrostem takich pasm zwiększa się odkształcenie całkowite (Ashby i Jones 1996). Po przekroczeniu pewnego ich poziomu dochodzi do wyboczenia ścian polimerowych pomiędzy pasmami ścinania i zagęszczenia materiału, co skutkuje gwałtownym przyrostem naprężeń ściskających przy niewielkim wzroście odkształcenia (Janowski 1998).

### 3.2 WŁAŚCIWOŚCI POLIMERÓW

Polimery pracujące z budowlanymi materiałami konstrukcyjnymi powinny posiadać dobrą przyczepność oraz zdolność do przenoszenia obciążeń (ściskających, rozciągających i ścinających), gdyż poddawane są w czasie eksploatacji działaniu różnych naprężeń i odkształceń (Janowski 1998).

Polimery traktuje się na ogół jak tzw. materiały lepko-sprężyste, pośrednie pomiędzy sprężystymi ciałami stałymi a lepkiemi cieczami (Ward i Sweeney 2004). Im szybsze jest odkształcanie, tym materiał zachowuje się bardziej sprężyste, natomiast im odkształcanie jest wolniejsze tym materiał jest bardziej lepki, co wynika z budowy cząsteczkowej materiału (Wilczyński 2001).

Stosując polimer, który pracuje z budowlanymi materiałami konstrukcyjnymi należy pamiętać o tym, że pod obciążeniem odkształca się on coraz bardziej wraz ze wzrostem czasu obciążenia,  $t$ , i temperatury,  $T$ . Odkształcenie mając charakter lepko-

sprężysty, zanika po zdjęciu obciążenia (Kwiecień 2012a). W celu sprawdzenia, czy dany polimer jest w stanie sprostać warunkom eksploatacji, poddaje się go różnym badaniom wytrzymałościowym, polegającym najczęściej na odkształceniu próbek z określoną prędkością aż do chwili zniszczenia.

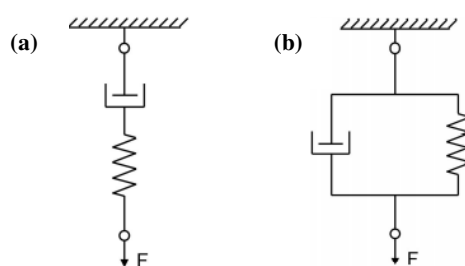
### 3.2.1 ZALEŻNOŚĆ OD TEMPERATURY

Poniżej pewnej wartości temperatury, polimery wykazują właściwości charakterystyczne dla kruchych ciał stałych lub szkła (Haponiuk 2011). W określonej temperaturze, zwanej temperaturą zeszklenia,  $T_g$ , właściwości polimeru ulegają zmianie. Zmieniają się prawie wszystkie jego cechy, np. przewodnictwo cieplne, objętość właściwa, rozszerzalność termiczna, moduł sprężystości, czy ciepło właściwe. Temperatura zeszklenia,  $T_g$ , jest temperaturą przejścia ze stanu wysokoelastycznego w stan szklisty i obserwowana jest podczas chłodzenia. Jest ona identyfikowana również z temperaturą mięknienia,  $T_m$ , oznaczaną podczas ogrzewania, tj. temperaturą, w której następuje wyraźna makroskopowa zmiana twardości polimeru (Ođian 2004).

Stan lepko-sprężysty polimeru charakteryzuje się sprężysto-lepką odpowiedzią na przyłożoną siłę w temperaturach pomiędzy temperaturą kruchości i zeszklenia ( $T_{kruch} \leq T \leq T_g$ ). Segmenty miękkie cechują się niską temperaturą zeszklenia,  $T_g$ , i są elastyczne w temperaturze pokojowej, natomiast segmenty twarde wysoką temperaturą zeszklenia i są sztywne w temperaturze pokojowej. Ich połączenie pozwala uzyskać polimery o różnym module sztywności, a nawet o różnych wartościach  $T_g$ , a zachowanie mechaniczne polimeru zależne jest od stosunku temperatury otoczenia do temperatury zeszklenia (Ashby 1998). Poniżej temperatury  $T_g$  polimery są twarde i kruche, zaś wszystkie makrocząsteczki zachowują względem siebie niezmiennie położenie. Łańcuchy są unieruchomione i nie wykonują żadnych ruchów. Możliwe są jedynie drgania oscylacyjne i rotacyjne poszczególnych grup atomów. Powyżej temperatury  $T_g$ , polimer jest miękki i elastyczny, gdyż poszczególne segmenty łańcuchów polimeru uzyskują pewną swobodę ruchów rotacyjnych (Carragher 2012). Jest to spowodowane pokonaniem bariery energetycznej w wyniku dostarczonej energii cieplnej.

### 3.2.2 WŁAŚCIWOŚCI REOLOGICZNE

Jedną z charakterystycznych właściwości polimerów jest relatywnie długi i powolny (w porównaniu z materiałami sprężystymi) proces zaniku odkształceń po ustaniu działania sił, które je spowodowały, zwany procesem relaksacji (Bednarek 2005). Materiały lepko-sprężyste wykazują jeszcze jedną, godną uwagi właściwość, a mianowicie pełzanie odkształcenia. Niektóre polimery ulegają pełzaniu nawet pod wpływem własnego ciężaru (Dalrymple i Choi 2007). Relaksacja i pełzanie przyczyniają się do występowania w polimerach histerezy odkształcenia, czyli jego opóźnienia względem zmian siły powodującej to odkształcenie (Bednarek 2005). Do opisu pełzania lub relaksacji polimerów, często wykorzystuje się proste modele uogólnionego ciała Maxwella lub Kelvina-Voigta (Haponiuk 2011) (patrz Rys. 3.2).



**Rys. 3.2** Model materiału lepko-sprężystego: (a) Maxwella; (b) Kelvina-Voigta (Ward i Sweeney 2004).

Model Maxwella jest złożony z szeregowo połączonych elementów ciała idealnie sprężystego i lepkiego. Odkształcenie układu opisuje równanie stanu (Haponiuk 2011):

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{1}{\eta} \tau + \frac{1}{G} \frac{d\tau}{dt} \quad (3.1)$$

gdzie:

$\gamma$  – jednostkowe odkształcenie poprzeczne;

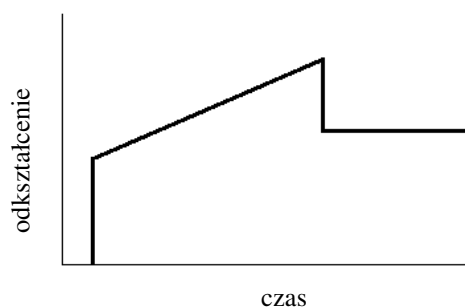
$\tau$  – naprężenie styczne;

$\eta$  – lepkość postaciowa;

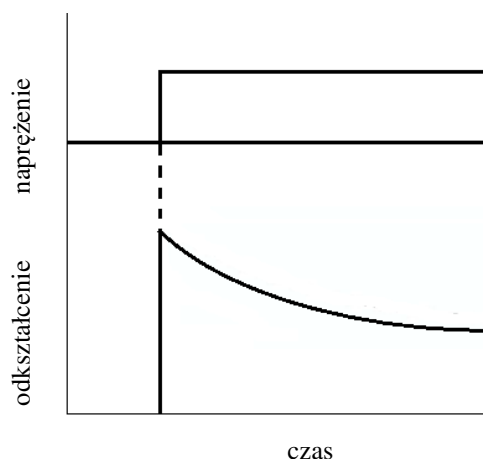
$G$  – moduł sprężystości postaciowej;

$t$  – czas.

Krzywe pełzania i relaksacji opisujące polimer według modelu Maxwella przedstawiono odpowiednio na Rys. 3.3 i 3.4. Działanie stałego naprężenia powoduje natychmiastowe odkształcenie sprężyste, a następnie układ zaczyna płynąć nieograniczenie w sposób liniowy w czasie. Po zdjęciu obciążenia, w układzie pozostaje stałe odkształcenie (Ward i Sweeney 2004).



**Rys. 3.3** Krzywa pełzania materiału lepko-sprężystego modelu Maxwella (Ward i Sweeney 2004).

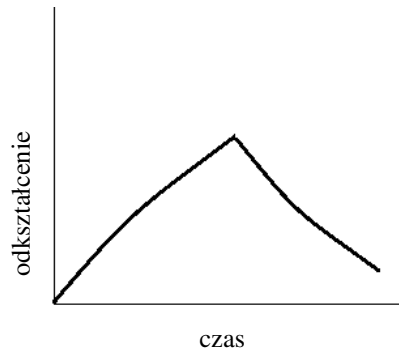


**Rys. 3.4** Krzywa relaksacji materiału lepko-sprężystego modelu Maxwella (Ward i Sweeney 2004).

Model Kelvina-Voigta jest złożony z równolegle połączonych elementów modelu ciała sprężystego i lepkiego i jest opisany równaniem stanu (Haponiuk 2011):

$$\tau = G\gamma + \eta \frac{d\gamma}{dt} \quad (3.2)$$

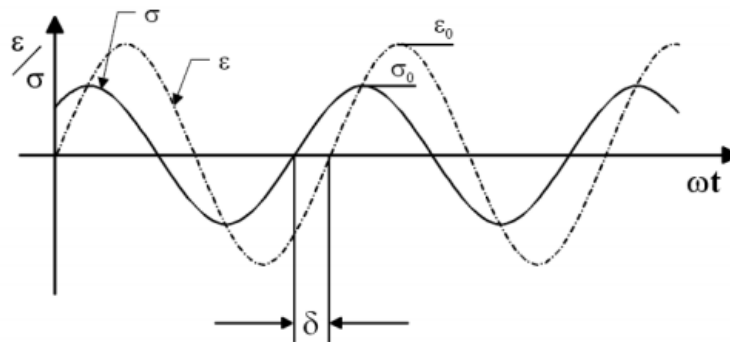
Krzywą pełzania opisującą polimer według modelu Kelvina-Voigta przedstawiono na Rys. 3.5. Pod wpływem naprężenia, powstające natychmiastowe odkształcenie powoduje, że całkowite odkształcenie jest nieliniowe w czasie (Ward i Sweeney 2004).



Rys. 3.5 Krzywa pełzania materiału lepko-sprężystego modelu Kelvina-Voigta (Ward i Sweeney 2004).

### 3.2.3 WŁAŚCIWOŚCI DYNAMICZNE

Dynamiczna analiza mechaniczna (DMA) umożliwia określanie mechanicznych właściwości polimerów w zależności od temperatury i częstotliwości odkształceń (Wetton i Marsch 1991). W badaniach tych najczęściej wykorzystuje się metodę sinusoidalnego odkształcenia i rejestrowania reakcji materiału. Właściwości lepko-sprężyste polimerów uwidaczniają się tym, że jeśli próbkę podda się drganiom sinusoidalnym zmiennym w czasie (patrz Rys. 3.6) to powstające naprężenie jest przesunięte w fazie (w stosunku do wywołanego odkształcenia) o pewien kąt delta,  $\delta$ , zwany przesunięciem fazowym (Macioce 2003).



Rys. 3.6 Zależność naprężenie-odkształcenie dla materiału lepko-sprężystego poddanego drganiom sinusoidalnym zmiennym w czasie (Macioce 2003).

Podczas badań DMA przy wykorzystaniu metody sinusoidalnego odkształcenia mierzone jest naprężenie zgodnie z równaniami (Macioce 2003):

$$\sigma(t) = \sigma_0 \sin(\omega t + \delta) \quad (3.3)$$

$$\sigma(t) = \varepsilon_0 E' \sin \omega t + \varepsilon_0 E'' \cos \omega t \quad (3.4)$$

$$E' = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \cos\delta \text{ oraz } E'' = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \sin\delta \quad (3.5)$$

gdzie:

$\sigma_0$  – amplituda naprężenia;

$\omega$  – częstotliwość;

$t$  – czas;

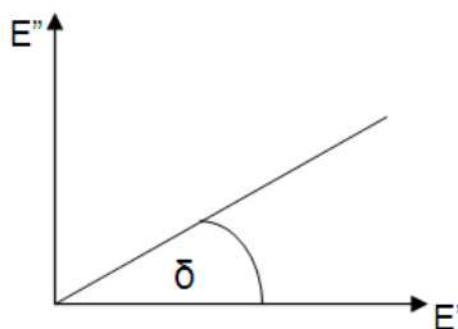
$\delta$  – kąt przesunięcia fazowego;

$\varepsilon_0$  – amplituda odkształcenia;

$E'$  – moduł dynamiczny części rzeczywistej;

$E''$  – moduł dynamiczny części urojonej.

Moduł części rzeczywistej,  $E'$ , związany jest z zachowaniem i oddawaniem energii podczas odkształceń i jest modułem zachowawczym lub dynamicznym modułem sprężystości. Moduł części urojonej,  $E''$ , jest modułem stratności lub dynamicznym modułem lepkości i określa rozproszenie energii podczas odkształcenia (Haponiuk 2011). Stosunek  $E'$  do  $E''$  odpowiada tangensowi kąta przesunięcia fazowego,  $\delta$  (współczynnik strat mechanicznych) i wyznaczany jest z diagramu Arganda (patrz Rys. 3.7). W badaniach DMA, moduł  $E'$  i  $\tan \delta$  mierzone są w zależności od temperatury i częstotliwości zmiany odkształcenia (Haponiuk 2011).



**Rys. 3.7** Diagram Arganda definiujący sprzężony moduł sprężystości (Haponiuk 2011, Piszczyk i in. 2014).

### 3.3 WŁASCIWOŚCI ANALIZOWANEGO POLIMERU I JEGO MODELOWANIE

Polimer wykorzystany w badaniach opisanych w niniejszej rozprawie doktorskiej jest elastycznym dwuskładnikowym materiałem klejącym na bazie



poliuretanów (SIKA 2014). Materiał ten odznacza się dobrymi właściwościami dźwiękochłonnymi oraz tłumiącymi drgania (Falborski i Jankowski 2013). Jest materiałem elastyczno-ściśliwym o doskonałej przyczepności do stali i betonu, charakteryzuje się dużą odkształcalnością oraz specjalnie dobranymi parametrami wytrzymałościowymi (Kwiecień 2012a). W Tab. 3.1 przedstawiono parametry materiałowe analizowanego polimeru (Kwiecień 2012b).

**Tab. 3.1** Parametry materiałowe analizowanego polimeru (Kwiecień 2012b).

Moduł Young'a [MPa]	6
Wytrzymałość na rozciąganie [MPa]	2,5
Wytrzymałość na ścinanie [MPa]	1,2
Wydłużenie względne przy zerwaniu [%]	110
Twardość Shore'a A [°Sh]	75

Wyniki badań eksperymentalnych (zob. Kwiecień 2012a, Falborski i in. 2012) w zakresie statycznego rozciągania jak i ściskania potwierdzają nieliniowe zachowanie się materiału. Przy rozciąganiu, zwiększenie prędkości odkształcenia wpływa na wzrost odkształcalności granicznej polimeru i jego wytrzymałości oraz sztywności. Z kolei, przy ściskaniu, obserwowany jest wzrost sztywności polimeru wraz ze wzrostem prędkości odkształcenia.

Z uwagi na dużą odkształcalność, nieliniowe zachowanie, właściwości tłumiące oraz zależność od temperatury, modelowanie polimerów jest niezwykle trudne (Finney 2001). Zachowanie się analizowanego polimeru odpowiada koncepcji Greena, która przyjmuje, że dla nieliniowego materiału sprężystego istnieje funkcja jednostkowa energii sprężystej ciała,  $W$ , wyrażona równaniem (3.6), nazywana także potencjałem sprężystym (Jemioło 2002).

$$W = \rho_0 e \quad (3.6)$$

gdzie:

- $\rho_0$  – gęstość ośrodka w konfiguracji początkowej;
- $e$  – gęstość energii wewnętrznej (odkształcenia).

Szczegółowe informacje dotyczące ograniczeń nakładanych na postać funkcji jednostkowej energii odkształcenia,  $W$ , przedstawiono w pracach Ogdena (1984) i Treloar'a (1975). Aby poprawnie zamodelować materiał hipersprężysty, jakim jest analizowany polimer, należy dobrać na początku odpowiednią funkcję energii odkształcenia oraz prawidłowo wyznaczyć stałą materiałową dla wybranej funkcji. W obrębie teorii sprężystości dysponujemy wieloma modelami, które opisują zachowanie się ośrodków hipersprężystych (Major i Różycka 2011). Jednym z najbardziej popularnych modeli jest model Mooneya-Rivlina, który opisuje nieściśliwe materiały gumowe i gumopochodne. Model ten jest szczególnym przypadkiem będącym wynikiem ogólnej postaci funkcji energii sprężystej określonej przez Rivlina i Saundersa, zaproponowanej przez Mooneya empirycznej postaci funkcji energii odkształceń (Finney 2001). Model ten opisuje równanie:

$$W(I_1, I_2) = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) \quad (3.7)$$

gdzie:

$I_1, I_2$  – niezmienniki tensora deformacji;

$C_{10}, C_{01}$  – stałe materiałowe, które można wyznaczać w teście jednoosiowego rozciągania.

Stale materiałowe  $C_{10}$  i  $C_{01}$  są parametrami funkcji liniowej umożliwiającej nieskomplikowaną identyfikację. Na podstawie wyznaczonych parametrów  $C_{10}$  i  $C_{01}$  oszacowane są (Hu i Desai 2004): początkowy moduł ścinania  $G_0$  i początkowy moduł sprężystości podłużnej,  $E_0$ , które opisane są zależnościami:

$$G_0 = 2(C_{10} + C_{01}) \quad (3.8)$$

$$E_0 = 3G = 6(C_{10} + C_{01}) \quad (3.9)$$

Szeroki zakres modelu Mooneya-Rivlina opisał Jemioło (2002). Dwuparametrowy model jest zasadny w zakresie odkształceń nie przekraczających 100% przy rozciąganiu oraz 30% przy ściskaniu. Z kolei, użycie pięcio-parametrowego modelu Mooneya-Rivlina pozwala na uzyskanie dokładniejszych wyników przy większych odkształceniach materiału (Kim i in. 2012). Ta forma uogólnionego modelu materiału Mooneya-Rivlina (Finney i Kumar 1988) wyrażona jest równaniem:

$$W(I_1, I_2) = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) + C_{11}(I_1 - 3)(I_2 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 + C_{30}(I_1 - 3)^3 \quad (3.10)$$

W niniejszej pracy wykorzystano ten właśnie pięcio-parametrowy model analizowanego polimeru, dla którego stałe materiałowe (Tab. 3.2) określono na podstawie badań eksperymentalnych (zob. Falborski i in. 2012).

**Tab. 3.2** Stałe materiałowe analizowanego polimeru (Falborski i in. 2012).

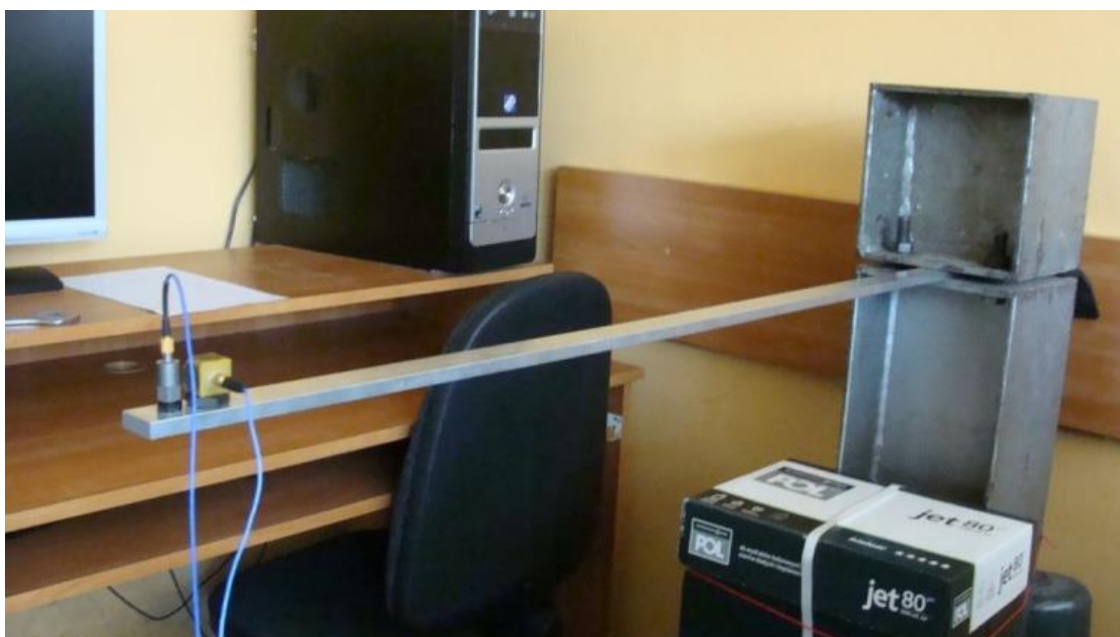
Stała materiałowa	Wartość [kPa]
$C_{01}$	-245 840
$C_{10}$	889 490
$C_{11}$	93 876
$C_{20}$	-155 310
$C_{30}$	11 148

## 4 BADANIA ALUMINIOWYCH BELEK WSPORNIKOWYCH

### 4.1 ETAPI - BADANIA EKSPERYMENTALNE

#### 4.1.1 PRZEDMIOT BADAŃ

Przedmiotem wstępnych badań eksperymentalnych były dwie aluminiowe belki wspornikowe o całkowitej długości 965 mm, szerokości 30mm i wysokości 9 mm. Badaniom poddano pojedynczą belkę (patrz Fot. 4.1) oraz belkę, do której podklejono od dołu warstwę polimeru o grubości 7 mm (patrz Fot. 4.2).



**Fot. 4.1** Aluminiowa belka wspornikowa.

Głównym celem wstępnych badań eksperymentalnych było określenie efektywności zastosowania warstwy polimeru do redukcji drgań aluminiowych belek wspornikowych. W tym celu wyznaczono parametry dynamiczne w postaci wartości częstotliwości drgań własnych oraz liczb tłumienia rozpatrywanych elementów. Przeprowadzono szereg pomiarów, które polegały na wzbudzaniu każdej belki do drgań

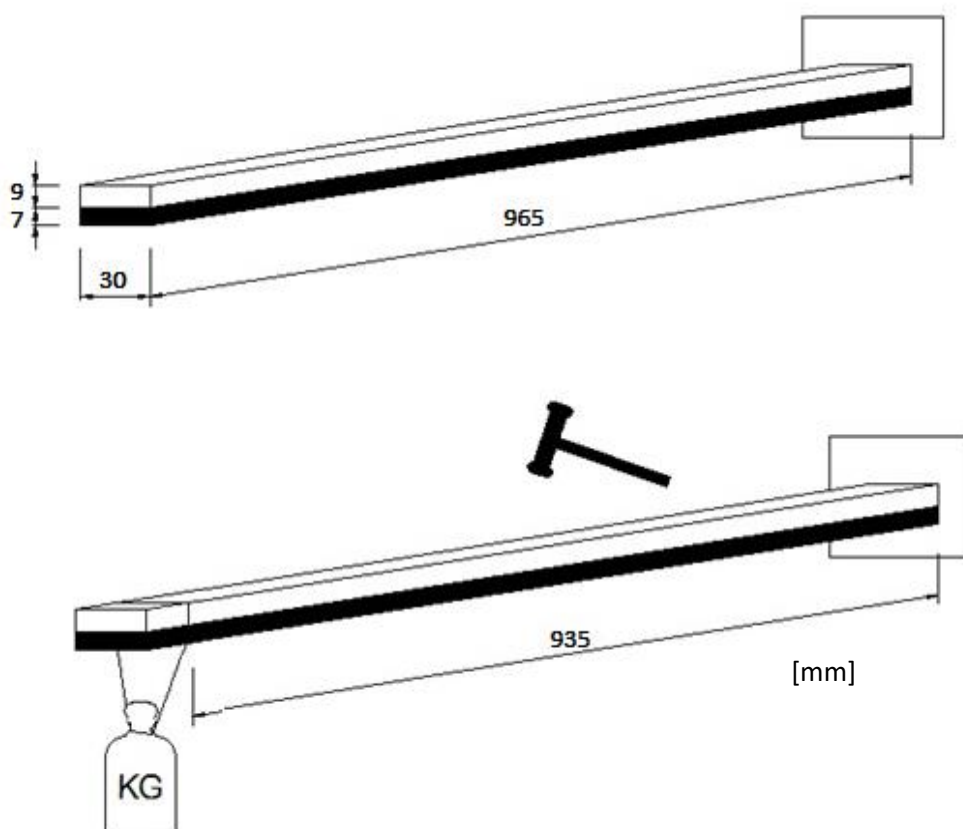
poprzez przemieszczenie pionowe i zwolnienie jej swobodnego końca oraz poprzez uderzenia w środku jej rozpiętości młotkiem modalnym typu PCB 086C01 o masie równej 0,1 kg z siłą zmienną w czasie o maksymalnej wartości  $F=15$  N. Całkowity czas pomiaru wynosił 12,5 s. W wyniku pierwszej metody wzbudzania aluminiowej belki wspornikowej spodziewano się uzyskać jedynie pierwszą postać jej drgań, podczas gdy w przypadku uderzenia młotkiem modalnym możliwe było wzbudzenie dwóch pierwszych postaci drgań.



Fot. 4.2 Aluminiowa belka wspornikowa z podklejoną od dołu warstwą polimeru.

Dwa czujniki przyspieszeń (w tym jeden trójosiowy) umieszczono na końcu każdej belki. Młotkiem modalnym uderzano zawsze w część aluminiowej belki, nigdy w warstwę polimeru. W badaniach uwzględniono pomiary wykonane dla dwóch belek, do których końców przyłożono dodatkowe obciążenie w postaci odważników o masie: 1; 2,5; 3,5; 5 i 6 kg podczepionych w odległości 935 mm od podpory. Dla każdego przypadku obciążenia wykonano sześć powtórzeń, które posłużyły do wyznaczenia wartości średnich częstotliwości drgań własnych i liczb tłumienia. Schematyczny rysunek aluminiowej belki z podklejoną warstwą polimeru oraz sposób jego wzbudzania młotkiem modalnym przedstawiono na Rys. 4.1.

Właściwości materiałowe aluminium, z którego wykonano belki wspornikowe przedstawiono w Tab. 4.1. Jednocześnie, parametry materiałowe analizowanego polimeru zestawiono w Tab. 3.1.



**Rys. 4.1** Schemat aluminiowej belki wspornikowej z podklejoną warstwą polimeru oraz sposób jej wzbudzania do drgań przy użyciu młotka modalnego.

**Tab. 4.1** Właściwości materiałowe aluminium belek wspornikowych.

Właściwości materiałowe	Aluminium
Moduł Young'a $E$ [GPa]	70
Współczynnik Poisson'a $\nu$ [-]	0,3
Gęstość objętościowa $\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	3200

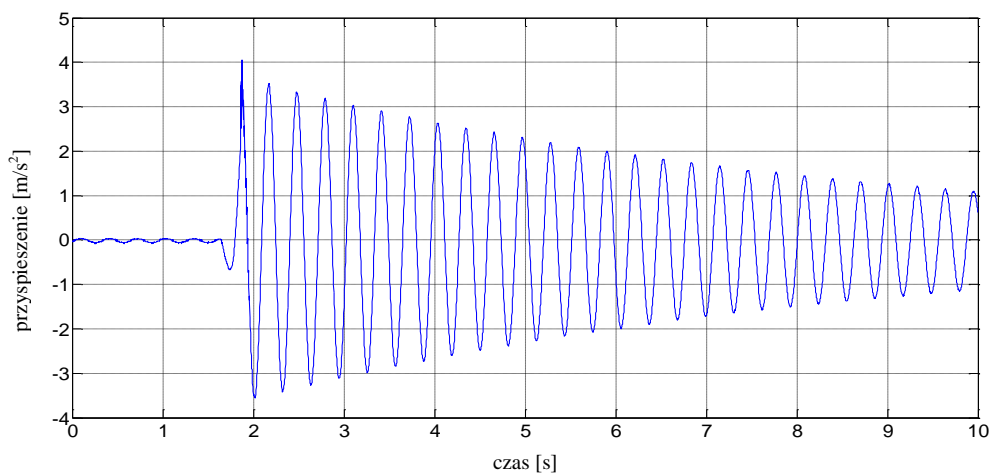
## 4.1.2 WYNIKI BADAŃ DLA ALUMINIOWEJ BELKI WSPORNIKOWEJ

### 4.1.2.1 SPOSÓB WZBUDZANIA BELKI - PRZEMIESZCZENIE PIONOWE I ZWOLNIENIE JEJ SWOBODNEGO KOŃCA

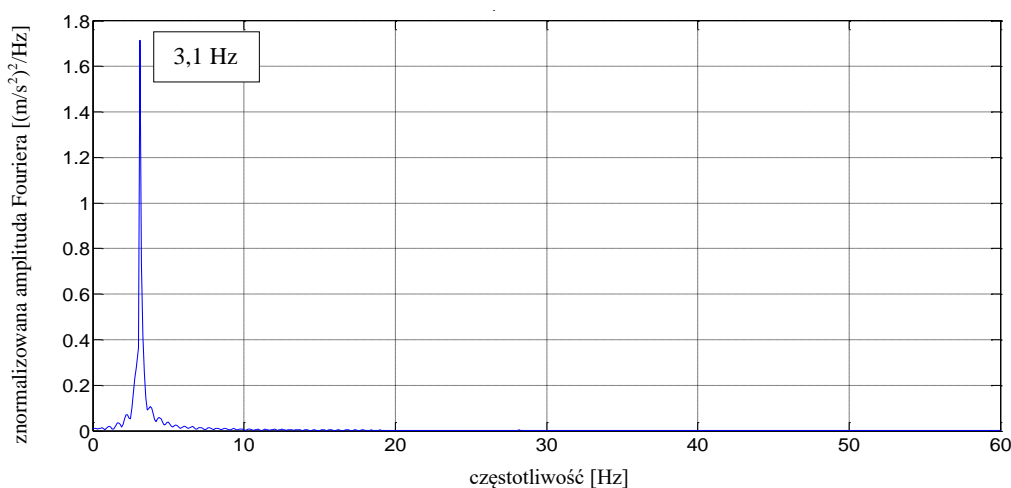
Na Rys. 4.2 przedstawiono reprezentatywny przebieg czasowy przyspieszeń otrzymany dla pojedynczej aluminiowej belki wspornikowej (bez warstwy polimeru)



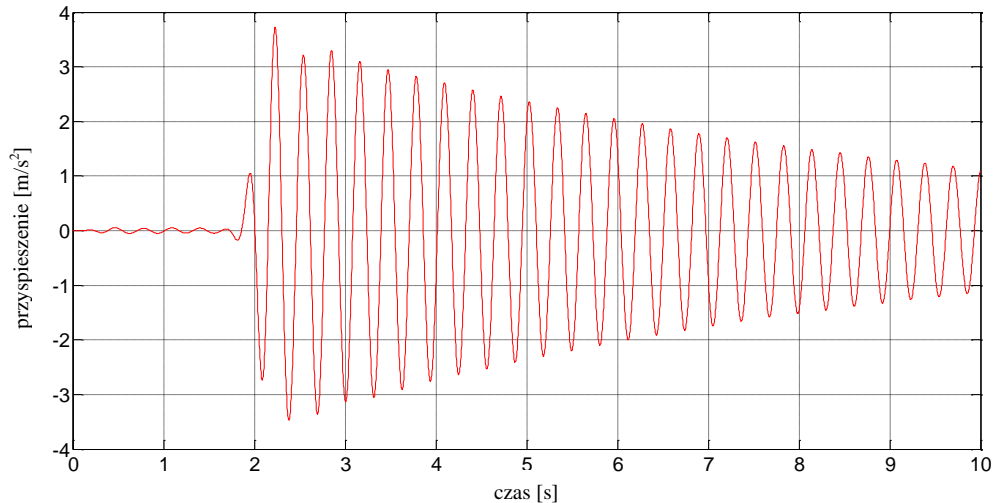
pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 1 kg), wzbudzonej do drgań swobodnych poprzez przemieszczenie pionowe, a następnie zwolnienie jej swobodnego końca. Dla przebiegu czasowego wykonano szybką transformatę Fouriera (patrz Rys. 4.3), która ujawniła dominującą częstotliwość drgań własnych o wartości 3,1 Hz. Na Rys. 4.4 przedstawiono przebieg czasowy przyspieszeń po odfiltrowaniu w zakresie podstawowej częstotliwości drgań analizowanej belki.



Rys. 4.2 Przebieg czasowy przyspieszeń końca aluminiowej belki wspornikowej pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 1 kg).



Rys. 4.3 Transformata Fouriera dla aluminiowej belki wspornikowej pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 1 kg).



**Rys. 4.4** Przebieg czasowy przyspieszeń (po odfiltrowaniu w zakresie pierwszej częstotliwości drgań) aluminiowej belki wspornikowej pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 1 kg).

Dla odfiltrowanego przebiegu czasowego wyznaczono liczbę tłumienia  $\xi$  korzystając z następujących równań (Chopra 1995):

$$\delta = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \ln \left( \frac{a_j}{a_{j+1}} \right) \quad (4.1)$$

$$\xi = \frac{\delta}{2\pi n} \quad (4.2)$$

czyli:

$$\xi = \frac{1}{2\pi n} \left[ \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \ln \left( \frac{a_j}{a_{j+1}} \right) \right] \quad (4.3)$$

gdzie:

$\delta$  – logarytmiczny dekrement tłumienia;

$n$  – liczba cykli;

$a_j$  – amplituda drgań dla  $j$ -tego cyklu;

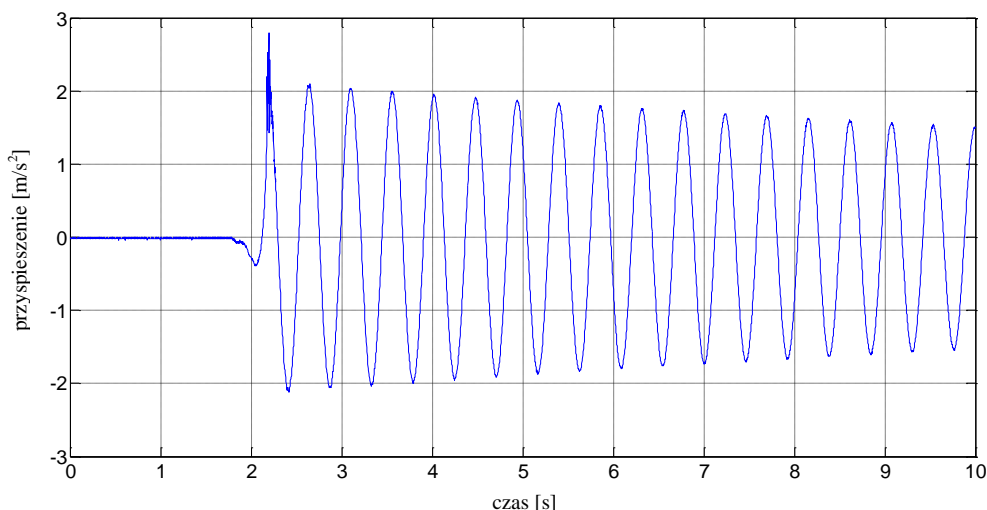
$a_{j+1}$  – amplituda drgań dla  $j + 1$  cyklu.

Dla analizowanej aluminiowej belki wspornikowej wzbudzanej do drgań poprzez pionowe przemieszczenie i zwolnienie jej swobodnego końca, dodatkowo obciążonej odważnikiem o masie 1 kg, liczba tłumienia podstawowej częstotliwości drgań własnych wyniosła 0,36%.

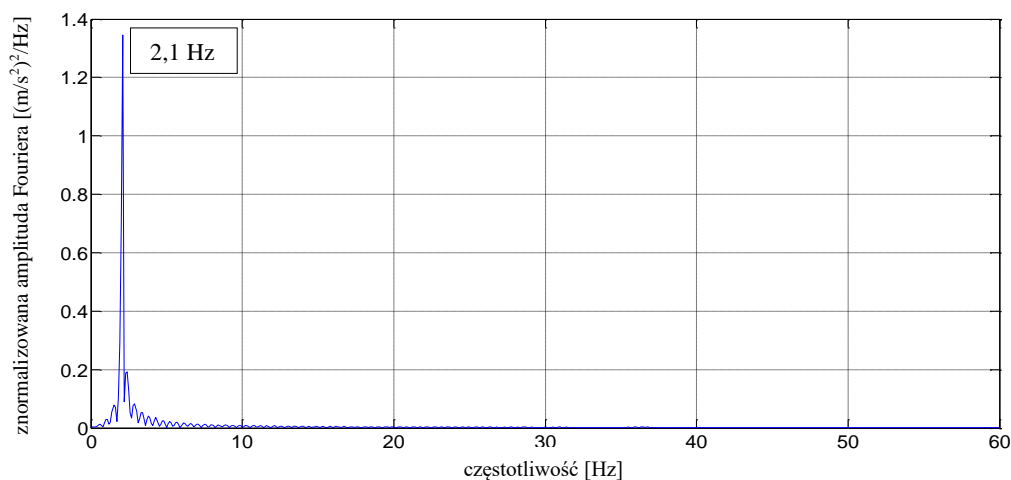
Wyniki w postaci przebiegów czasowych przyspieszeń, transformat Fouriera oraz przebiegów czasowych po odfiltrowaniu w zakresie ujawnionych częstotliwości drgań otrzymane dla pojedynczej aluminiowej, dodatkowo obciążonej odważnikami o różnych masach, przedstawiono na kolejnych rysunkach:

- Rys. 4.5–4.7 – odważnik o masie 2,5 kg;
- Rys. 4.8–4.10 – odważnik o masie 3,5 kg;
- Rys. 4.11–4.13 – odważnik o masie 5 kg;
- Rys. 4.14–4.16 – odważnik o masie 6 kg.

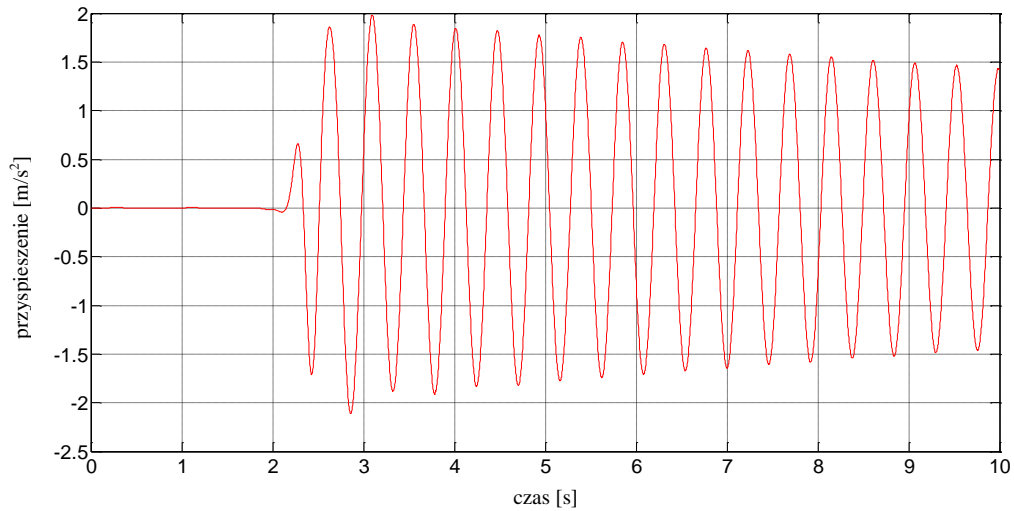
Dodatkowo, wartości wszystkich otrzymanych częstotliwości drgań własnych wyznaczone dla aluminiowej belki wspornikowej, wzbudzonej do drgań poprzez pionowe przemieszczenie i zwolnienie jej swobodnego końca, zestawiono w Tab. 4.2.



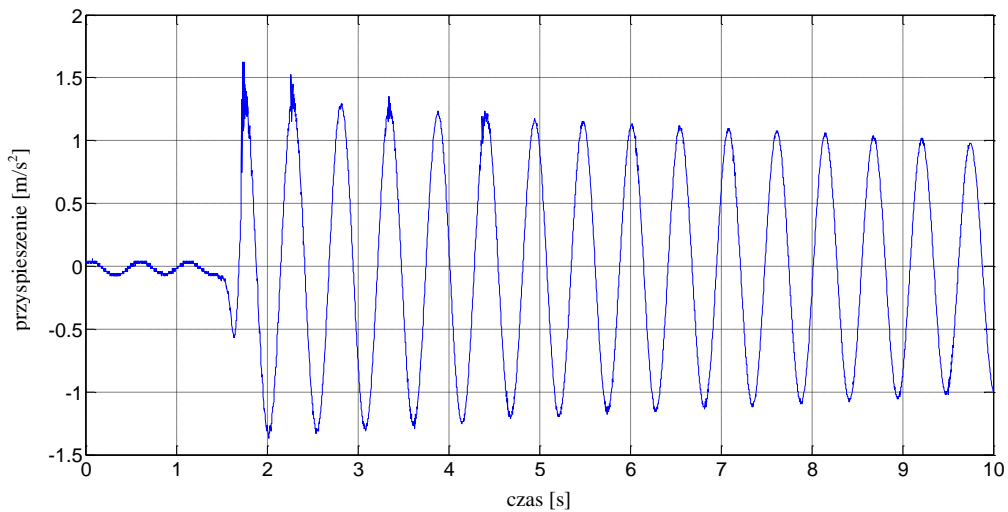
**Rys. 4.5** Przebieg czasowy przyspieszeń końca aluminiowej belki wspornikowej pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 2,5 kg).



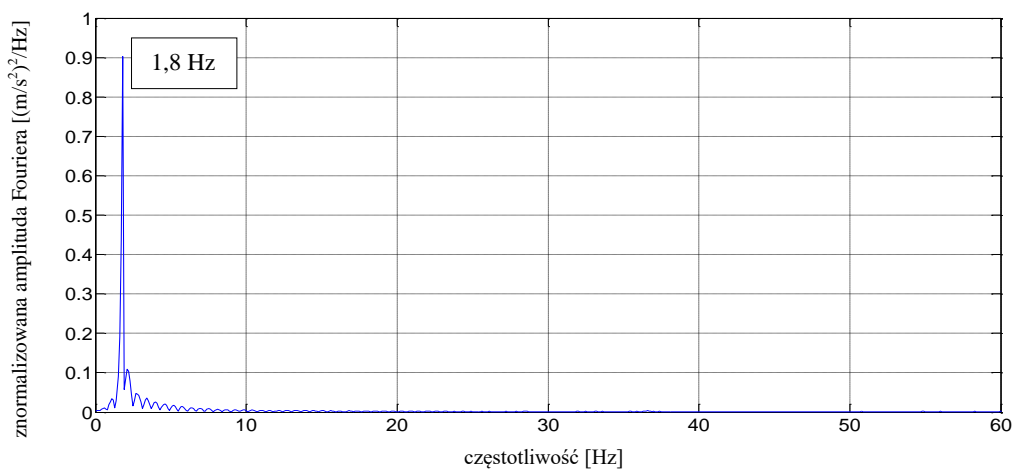
**Rys. 4.6** Transformata Fouriera dla aluminiowej belki wspornikowej pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 2,5 kg).



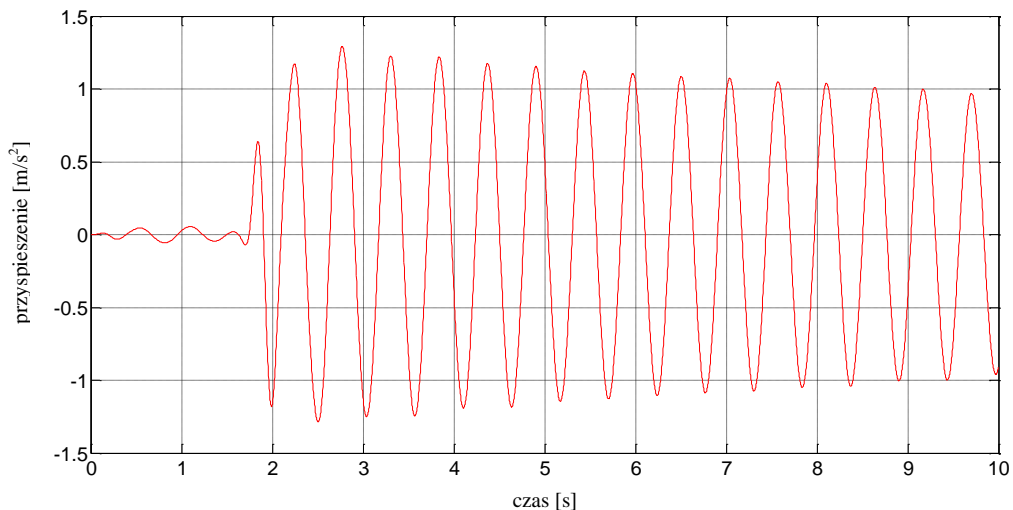
**Rys. 4.7** Przebieg czasowy przyspieszeń (po odfiltrowaniu w zakresie pierwszej częstotliwości drgań) aluminiowej belki wspornikowej pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 2,5 kg).



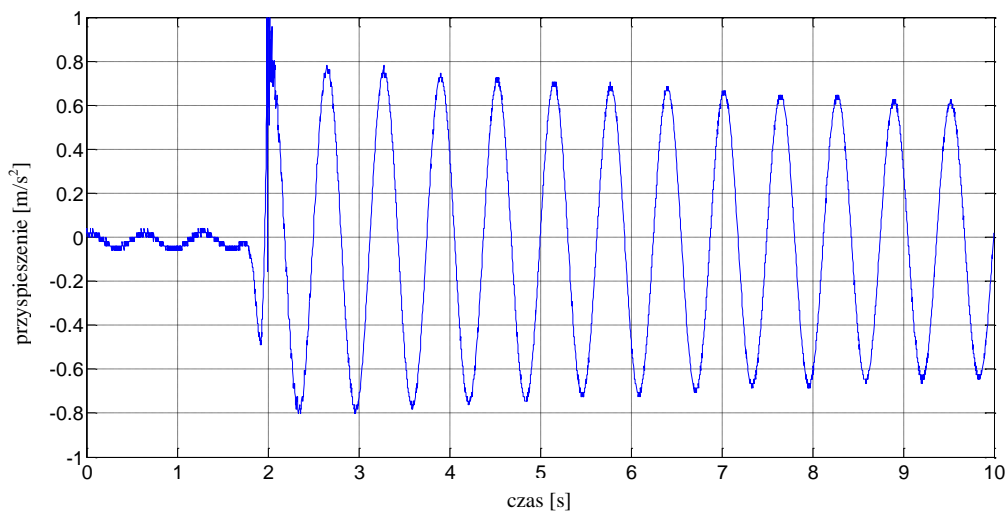
**Rys. 4.8** Przebieg czasowy przyspieszeń końca aluminiowej belki wspornikowej pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 3,5 kg).



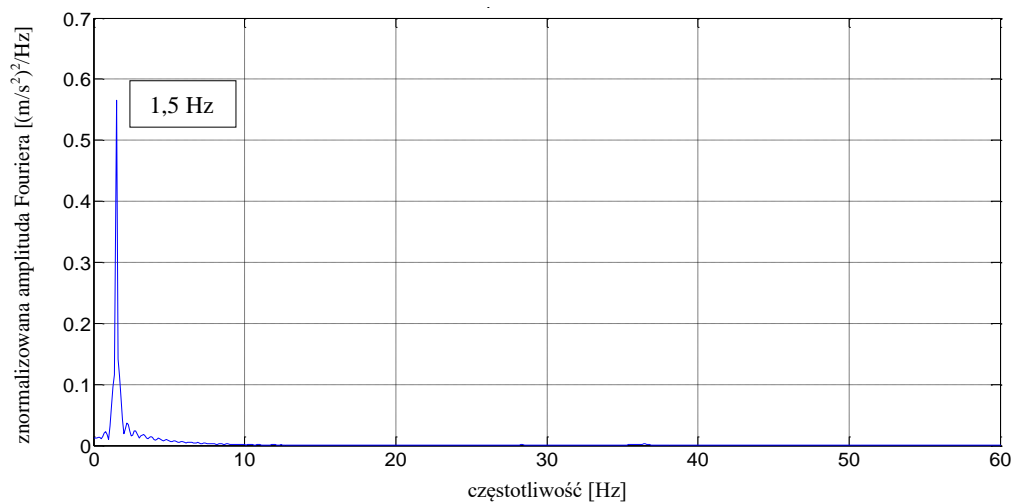
**Rys. 4.9** Transformata Fouriera dla aluminiowej belki wspornikowej pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 3,5 kg).



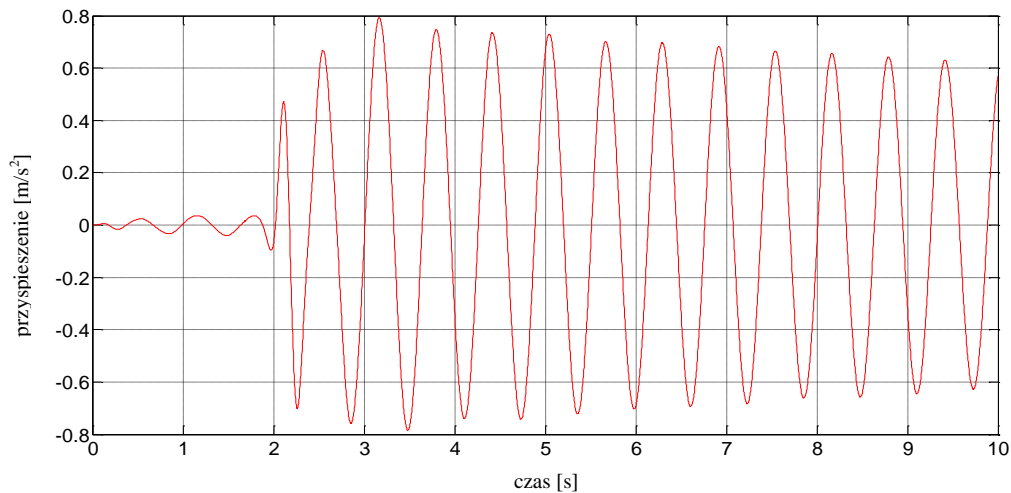
**Rys. 4.10** Przebieg czasowy przyspieszeń (po odfiltrowaniu w zakresie pierwszej częstotliwości drgań) aluminiowej belki wspornikowej pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 3,5 kg).



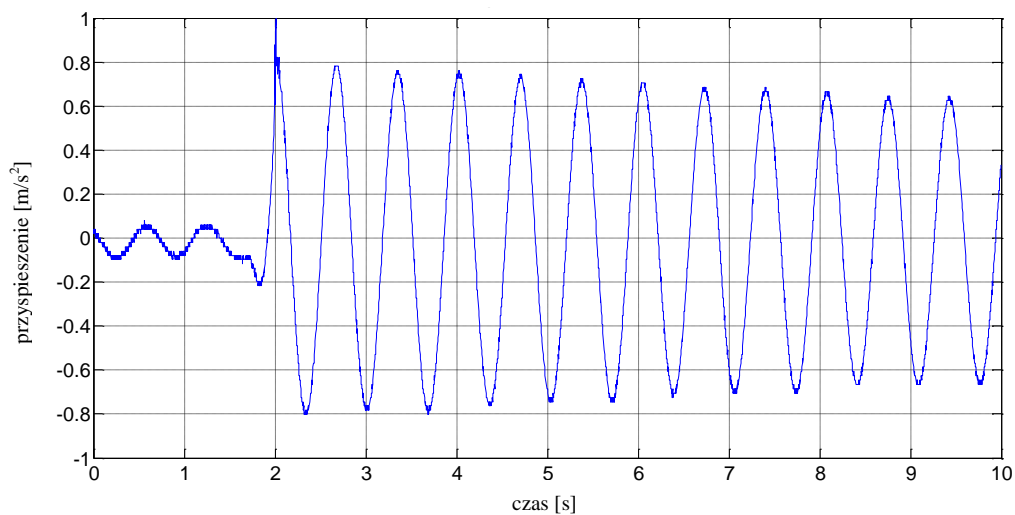
**Rys. 4.11** Przebieg czasowy przyspieszeń końca aluminiowej belki wspornikowej pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 5 kg).



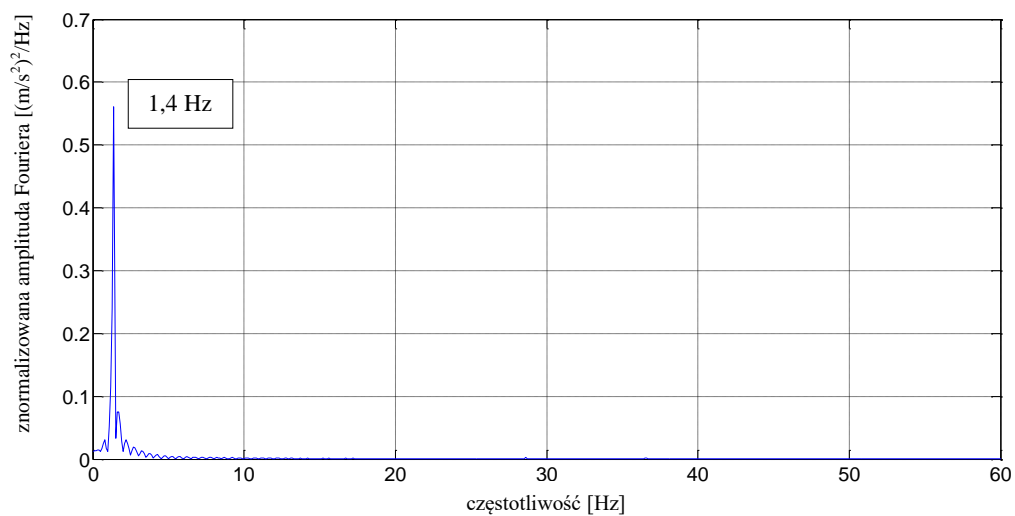
**Rys. 4.12** Transformata Fouriera dla aluminiowej belki wspornikowej pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 5 kg).



**Rys. 4.13** Przebieg czasowy przyspieszeń (po odfiltrowaniu w zakresie pierwszej częstotliwości drgań) aluminiowej belki wspornikowej pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 5 kg).

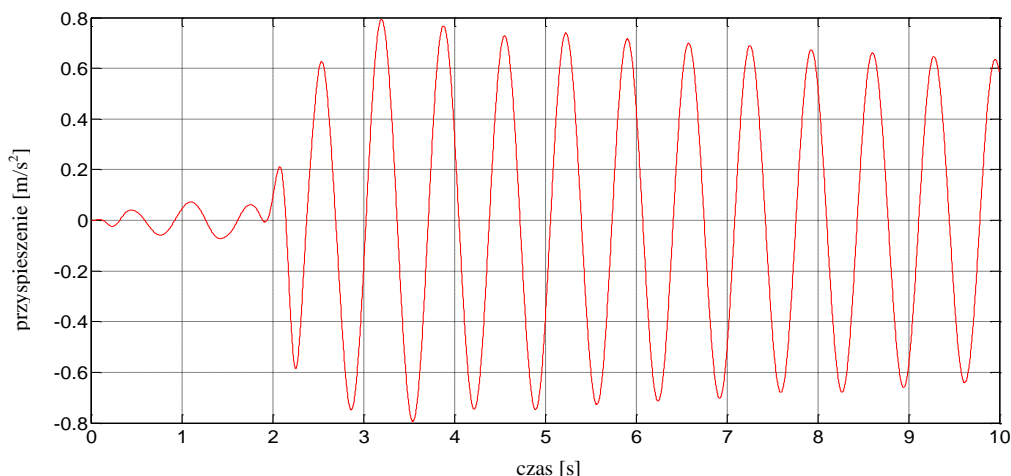


**Rys. 4.14** Przebieg czasowy przyspieszeń końca aluminiowej belki wspornikowej pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 6 kg).



**Rys. 4.15** Transformata Fouriera dla aluminiowej belki wspornikowej pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 6 kg).





**Rys. 4.16** Przebieg czasowy przyspieszeń (po odfiltrowaniu w zakresie pierwszej częstotliwości drgań) aluminiowej belki wspornikowej pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 6 kg).

**Tab. 4.2** Częstotliwości drgań poprzecznych aluminiowej belki wspornikowej.

Dodatkowe obciążenie - masa odważnika [kg]	Częstotliwość drgań poprzecznych [Hz]
1,0	3,1
2,5	2,1
3,5	1,8
5,0	1,5
6,0	1,4

W wyniku przeprowadzonych badań zaobserwowano, że przyłożenie dodatkowego obciążenia w postaci odważników o różnych masach prowadzi do istotnego spadku wartości podstawowej częstotliwości drgań aluminiowej belki wspornikowej (patrz Tab. 4.2). W przypadku zamocowania odważnika o masie 6 kg zaobserwowano przesunięcie podstawowej częstotliwości w kierunku pasm o niższej wartości o ponad 55% w porównaniu z belką obciążoną dodatkowym odważnikiem o masie 1 kg.

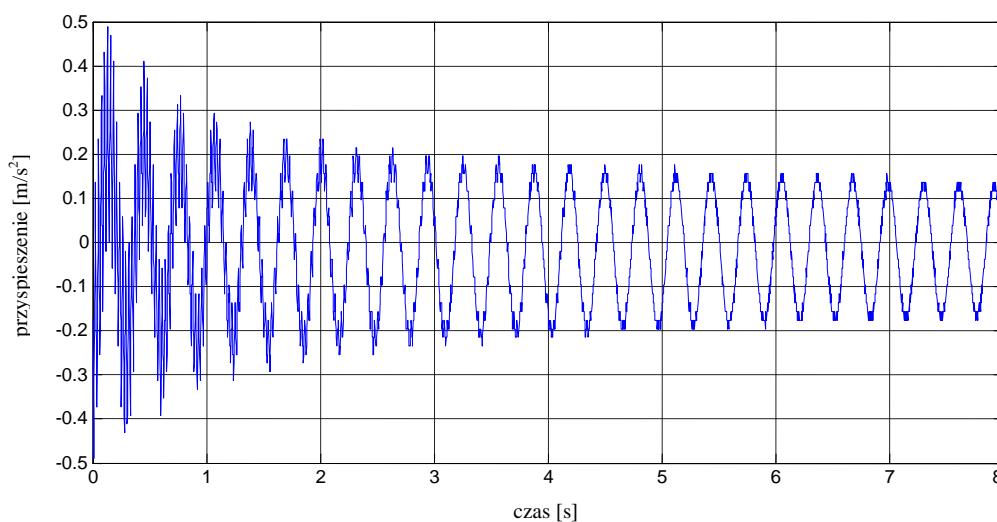
W Tab. 4.3 przedstawiono, wyznaczone na podstawie równania (4.3), liczby tłumienia dla wcześniej zaprezentowanych przebiegów czasowych przyspieszeń po odfiltrowaniu w zakresie ujawnionych częstotliwości drgań analizowanej belki. Z Tab. 4.3 można zaobserwować, że wyznaczone liczby tłumienia aluminiowej belki wspornikowej, dodatkowo obciążonej odważnikami o różnych masach są na podobnym poziomie, a ich wartości wahają się pomiędzy 0,24 a 0,36%.

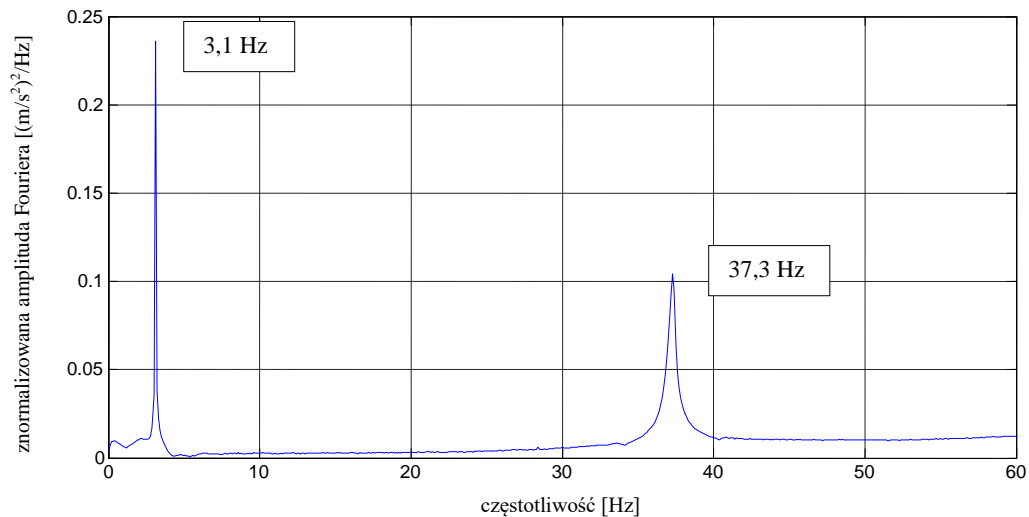
**Tab. 4.3** Liczby tłumienia drgań poprzecznych aluminiowej belki wspornikowej.

Dodatkowe obciążenie - masa odważnika [kg]	Liczba tłumienia [%]
1,0	0,36
2,5	0,30
3,5	0,24
5,0	0,29
6,0	0,32

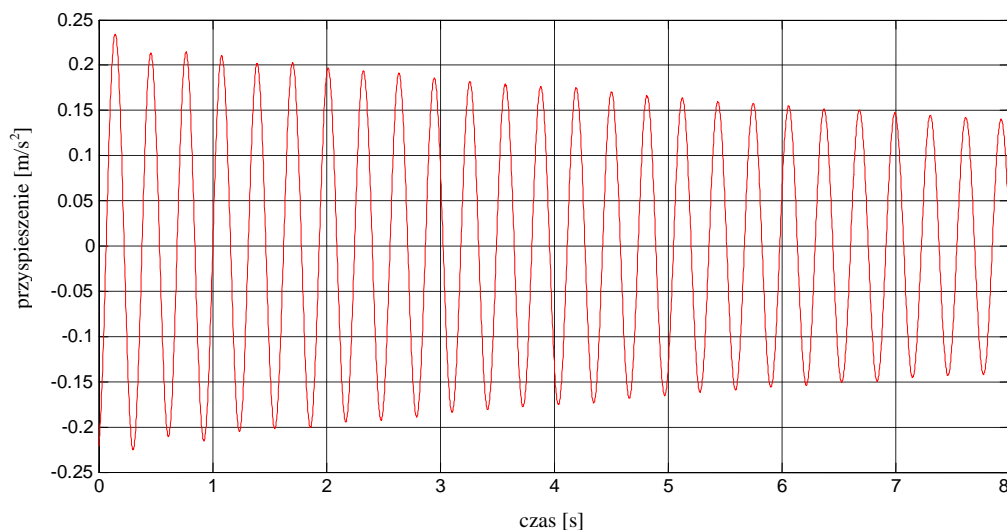
#### 4.1.2.2 SPOSÓB WZBUDZANIA BELKI - UDERZENIE MŁOTKIEM MODALNYM

Drugim sposobem wzbudzania aluminiowej belki do drgań swobodnych było uderzenie w środku jej rozpiętości młotkiem modalnym. Na Rys. 4.17 przedstawiono reprezentatywny przebieg czasowy przyspieszeń otrzymany dla aluminiowej belki wspornikowej pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 1 kg). Dla przebiegu czasowego wykonano szybką transformatę Fouriera (patrz Rys. 4.18), która ujawniła dwie dominujące częstotliwości drgań własnych aluminiowej belki wspornikowej o wartościach 3,1 Hz i 37,3 Hz, z których każda z osobna została szczegółowo przeanalizowana. Na Rys. 4.19 i 4.20 przedstawiono przebiegi czasowe przyspieszeń po odfiltrowaniu w zakresie pierwszej i drugiej częstotliwości drgań analizowanej belki.

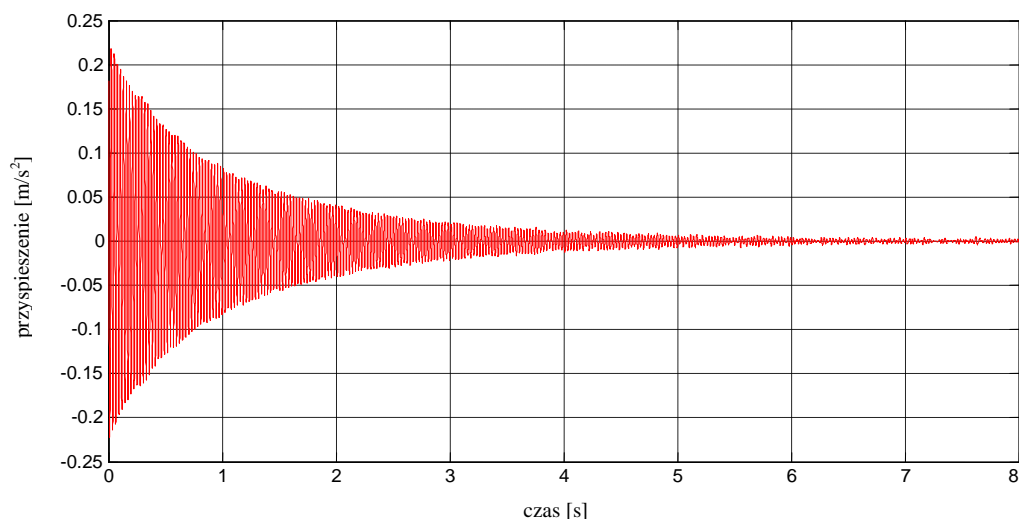
**Rys. 4.17** Przebieg czasowy przyspieszeń końca aluminiowej belki wspornikowej pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 1 kg).



**Rys. 4.18** Transformata Fouriera dla aluminiowej belki wspornikowej pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 1 kg).



**Rys. 4.19** Przebieg czasowy przyspieszeń (po odfiltrowaniu w zakresie pierwszej częstotliwości drgań) aluminiowej belki wspornikowej pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 1 kg).



**Rys. 4.20** Przebieg czasowy przyspieszeń (po odfiltrowaniu w zakresie drugiej częstotliwości drgań) aluminiowej belki wspornikowej pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 1 kg).

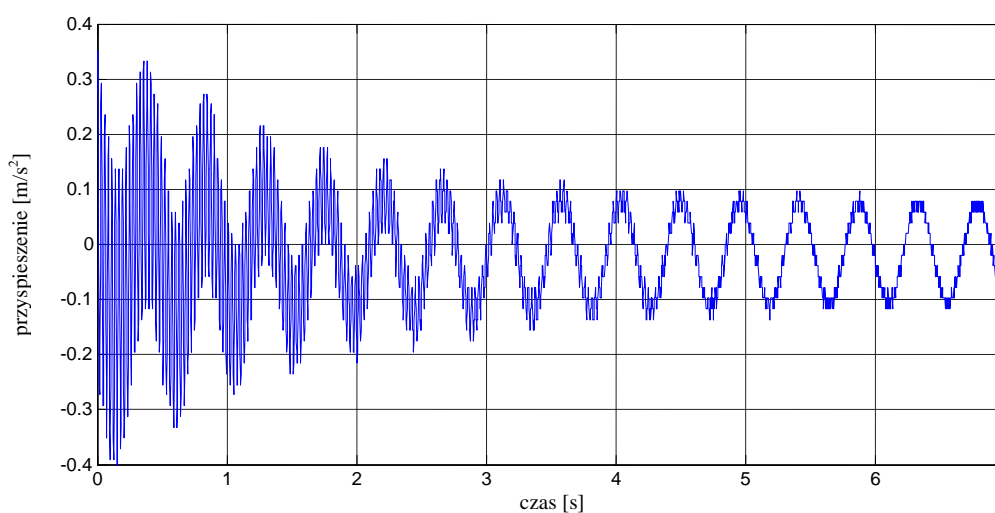


Dla odfiltrowanych przebiegów czasowych przyspieszeń wyznaczono liczby tłumienia, korzystając z równania (4.3). Dla analizowanej belki wspornikowej wzbudzanej do drgań przy użyciu młotka modalnego, dodatkowo obciążonej odważnikiem o masie 1 kg, wartości średnie liczb tłumienia z sześciu powtórzeń wyniosły: 0,27% i 0,48%, odpowiednio dla pierwszej i drugiej częstotliwości (zob. Tab. Z.1.1 w załączniku nr 1).

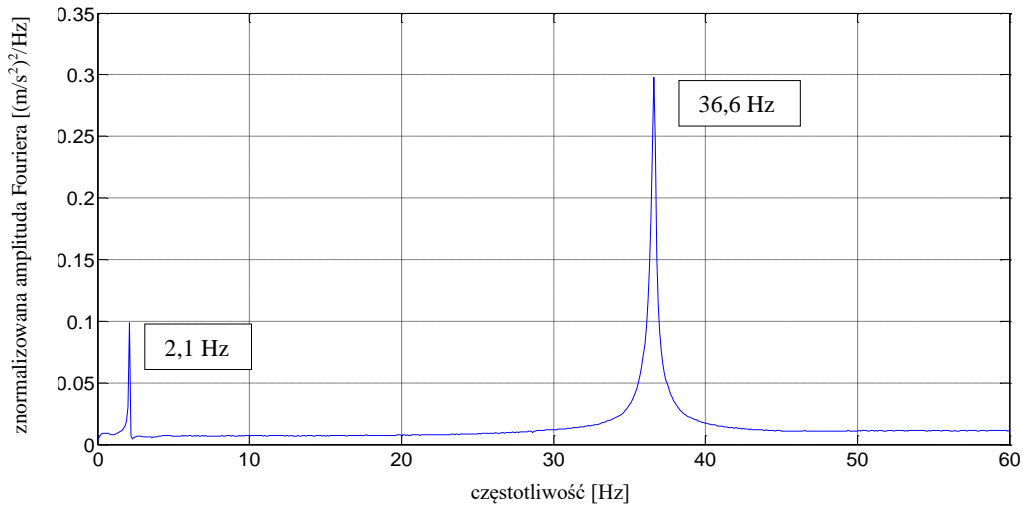
Wyniki w postaci przebiegów czasowych przyspieszeń, transformat Fouriera oraz przebiegów czasowych po odfiltrowaniu w zakresie ujawnionych częstotliwości drgań otrzymane dla pojedynczej aluminiowej belki wspornikowej, dodatkowo obciążonej odważnikami o różnych masach, przedstawiono na rysunkach:

- Rys. 4.21–4.24 – odważnik o masie 2,5 kg;
- Rys. 4.25–4.28 – odważnik o masie 3,5 kg;
- Rys. 4.29–4.32 – odważnik o masie 5 kg;
- Rys. 4.33–4.36 – odważnik o masie 6 kg.

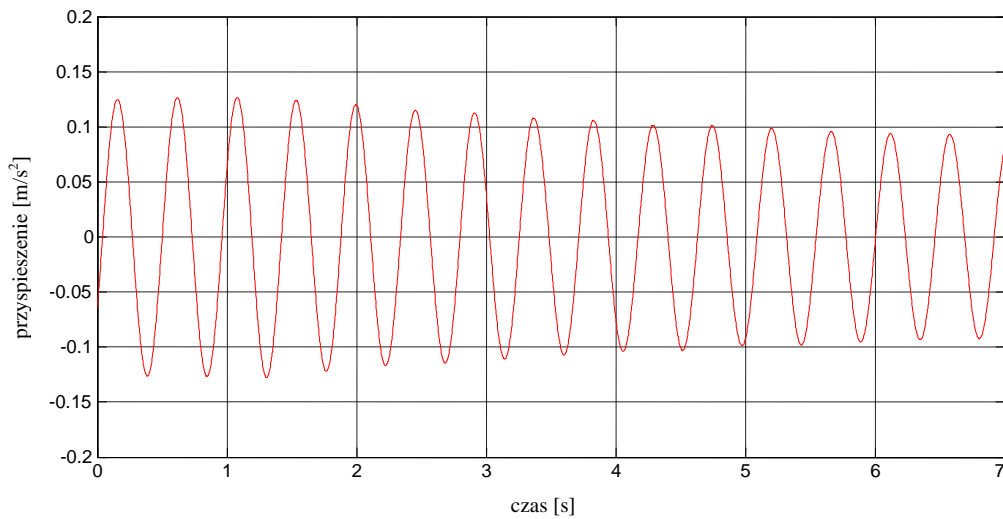
Dodatkowo, wartości średnie wszystkich częstotliwości wyznaczone dla aluminiowej belki wspornikowej wzbudzanej do drgań poprzez uderzenie młotkiem modalnym w środku jej rozpiętości zestawiono w Tab. 4.4 (por. załącznik nr 1).



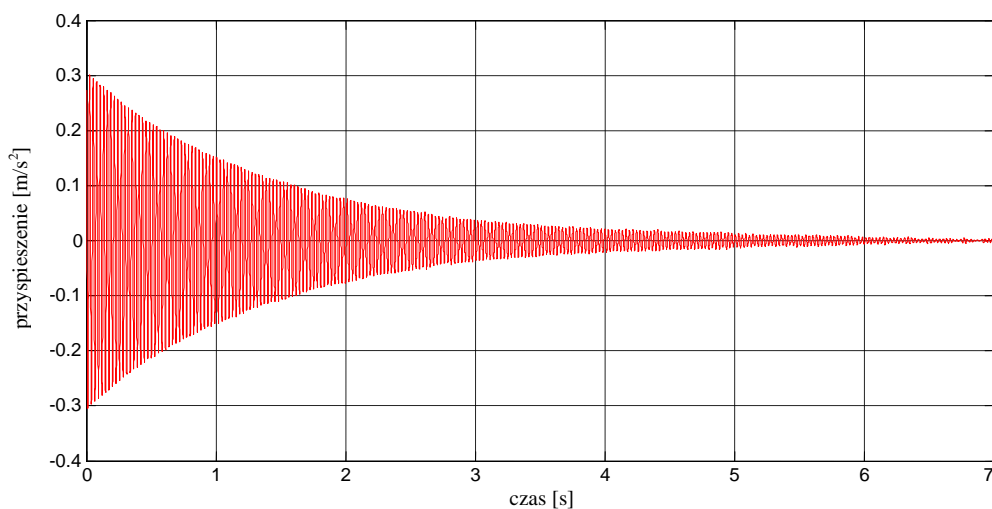
**Rys. 4.21** Przebieg czasowy przyspieszeń końca aluminiowej belki wspornikowej pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 2,5 kg).



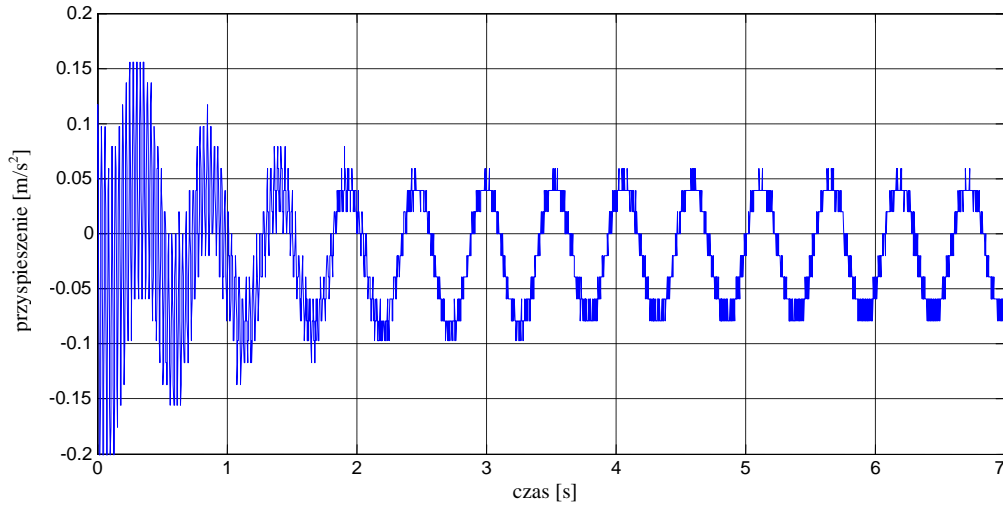
**Rys. 4.22** Transformata Fouriera dla aluminiowej belki wspornikowej pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 2,5 kg).



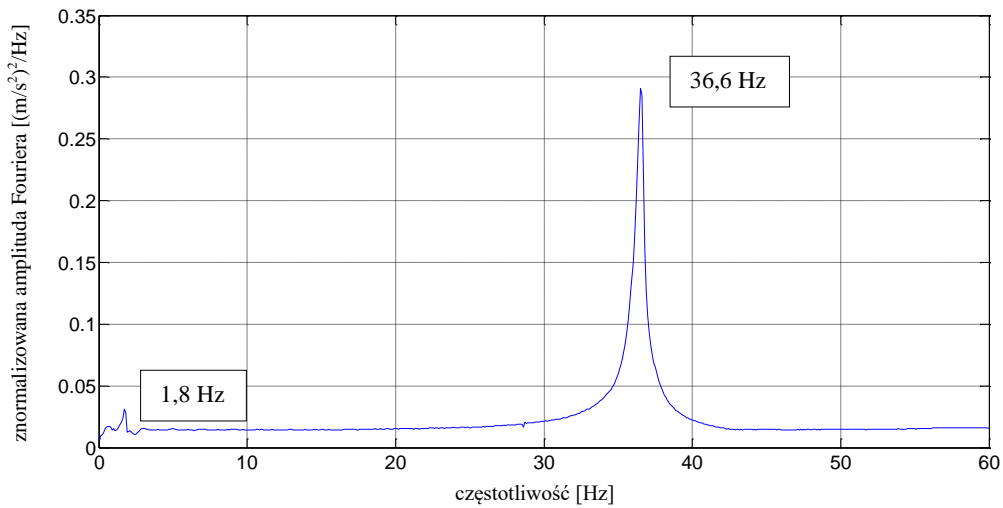
**Rys. 4.23** Przebieg czasowy przyspieszeń (po odfiltrowaniu w zakresie pierwszej częstotliwości drgań) aluminiowej belki wspornikowej pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 2,5 kg).



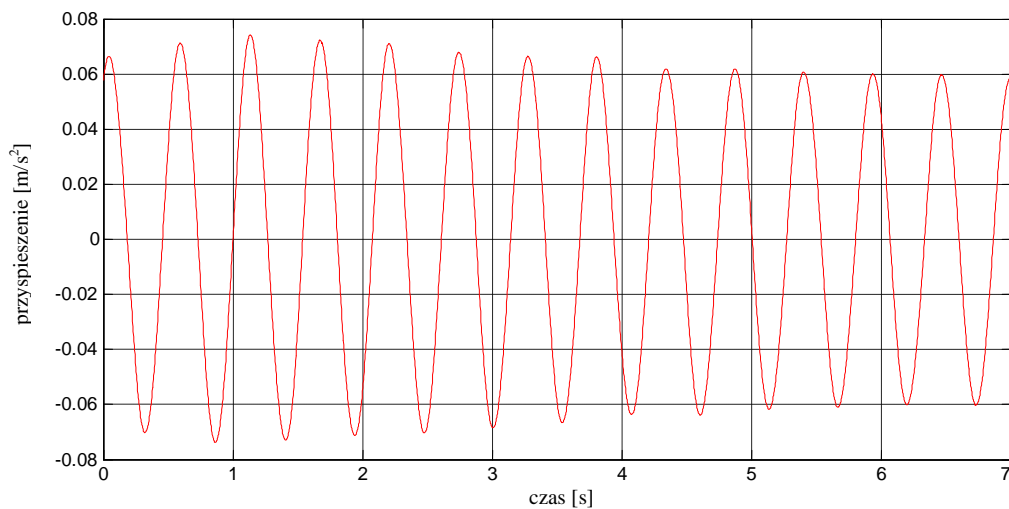
**Rys. 4.24** Przebieg czasowy przyspieszeń (po odfiltrowaniu w zakresie drugiej częstotliwości drgań) aluminiowej belki wspornikowej pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 2,5 kg).



**Rys. 4.25** Przebieg czasowy przyspieszeń końca aluminiowej belki wspornikowej pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 3,5 kg).

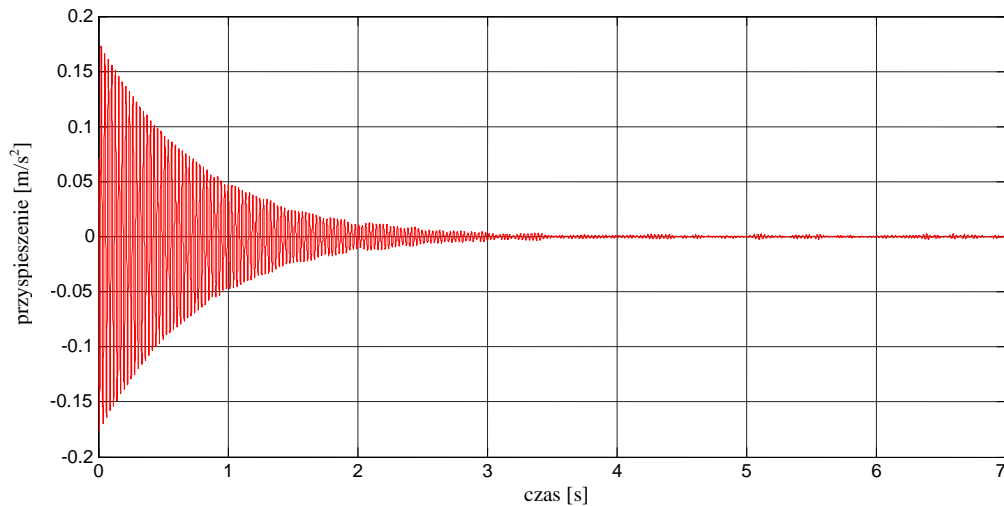


**Rys. 4.26** Transformata Fouriera dla aluminiowej belki wspornikowej pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 3,5 kg).

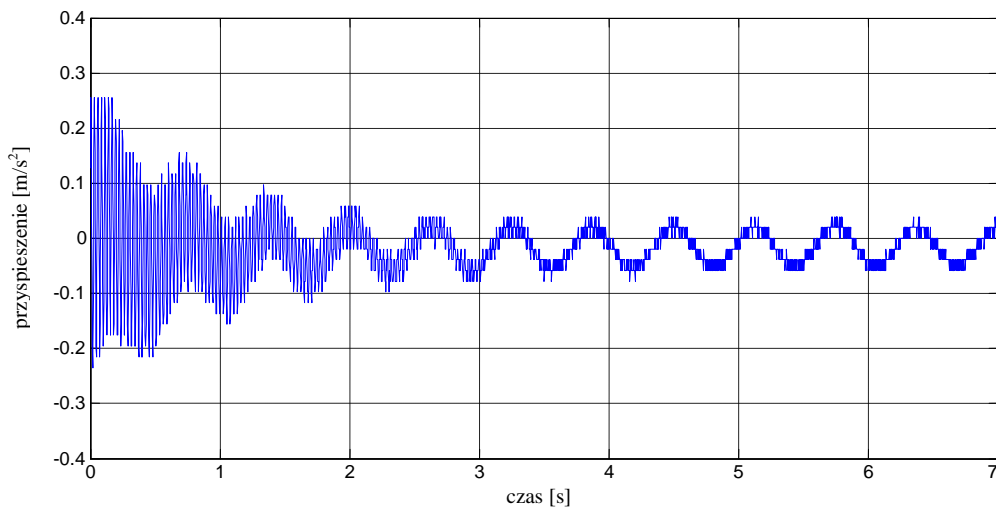


**Rys. 4.27** Przebieg czasowy przyspieszeń (po odfiltrowaniu w zakresie pierwszej częstotliwości drgań) aluminiowej belki wspornikowej pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 3,5 kg).

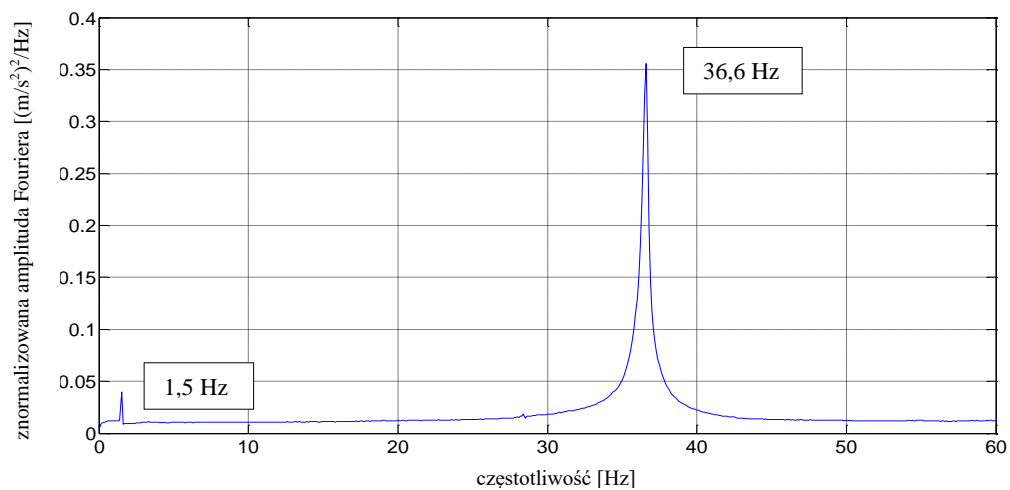




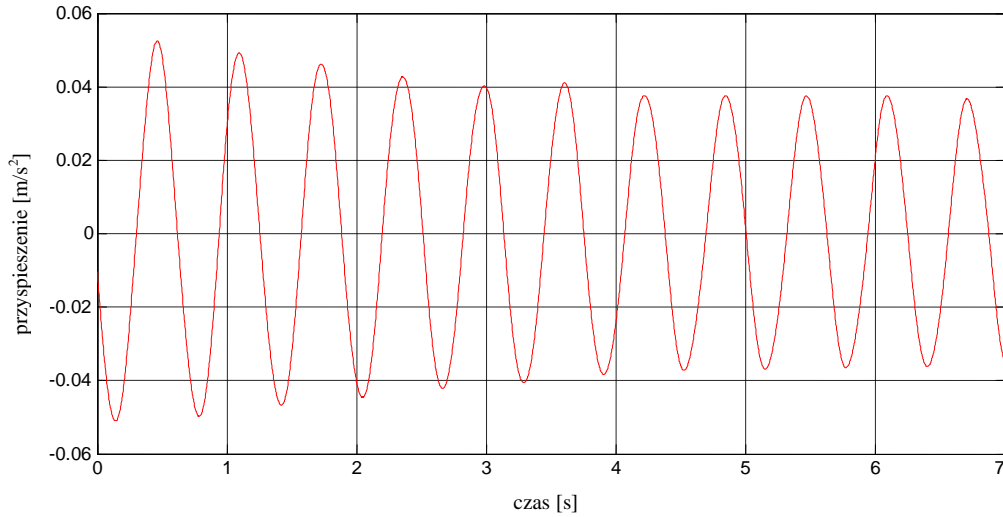
**Rys. 4.28** Przebieg czasowy przyspieszeń (po odfiltrowaniu w zakresie drugiej częstotliwości drgań) aluminiowej belki wspornikowej pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 3,5 kg).



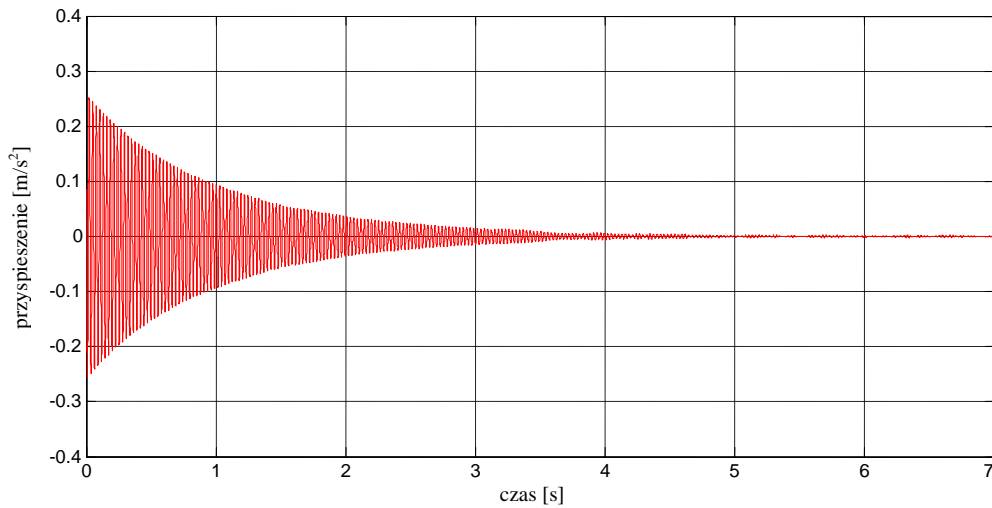
**Rys. 4.29** Przebieg czasowy przyspieszeń końca aluminiowej belki wspornikowej pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 5 kg).



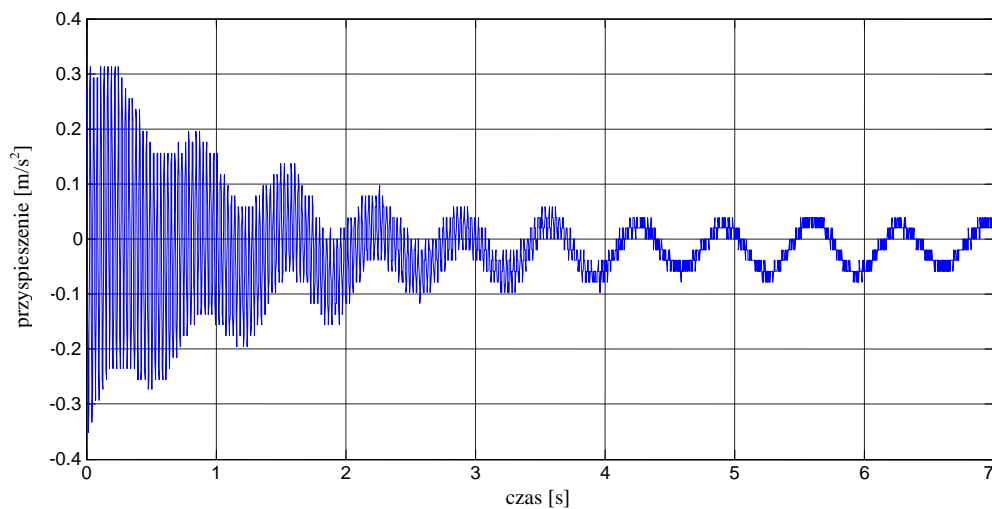
**Rys. 4.30** Transformata Fouriera dla aluminiowej belki wspornikowej pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 5 kg).



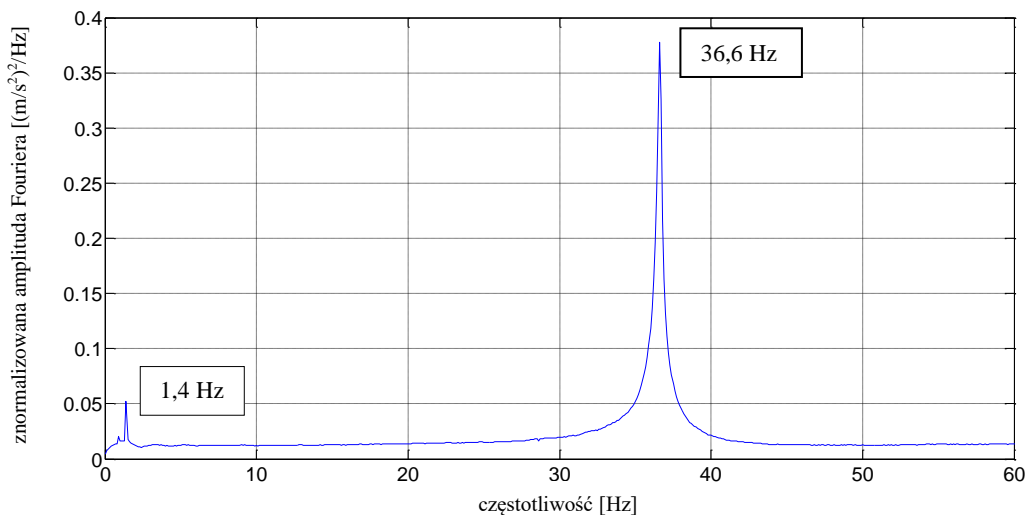
**Rys. 4.31** Przebieg czasowy przyspieszeń (po odfiltrowaniu w zakresie pierwszej częstotliwości drgań) aluminiowej belki wspornikowej pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 5 kg).



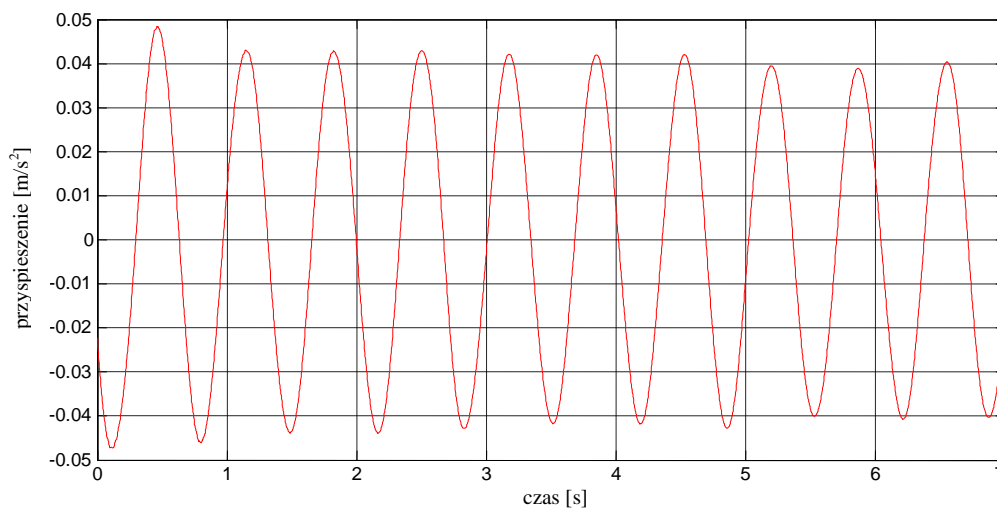
**Rys. 4.32** Przebieg czasowy przyspieszeń (po odfiltrowaniu w zakresie drugiej częstotliwości drgań) aluminiowej belki wspornikowej pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 5 kg).



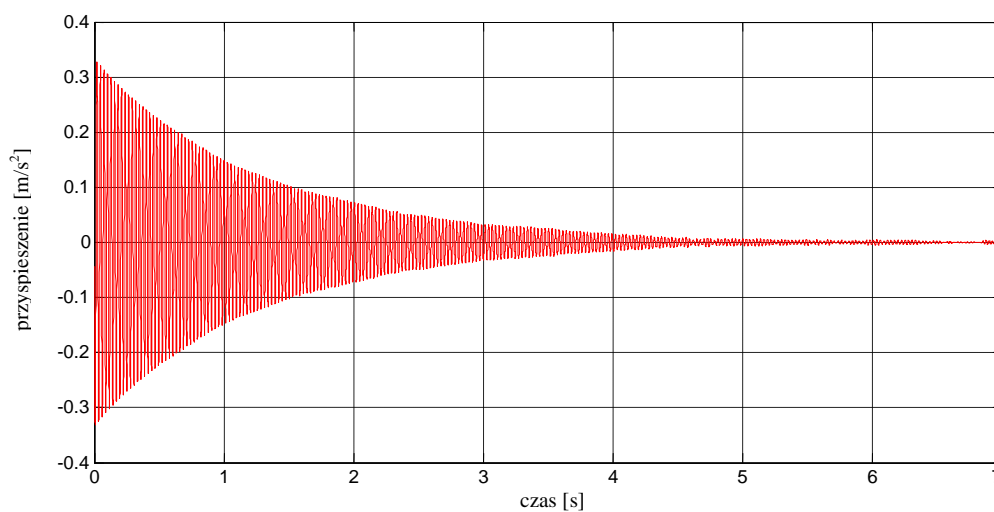
**Rys. 4.33** Przebieg czasowy przyspieszeń końca aluminiowej belki wspornikowej pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 6 kg).



**Rys. 4.34** Transformata Fouriera dla aluminiowej belki wspornikowej pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 6 kg).



**Rys. 4.35** Przebieg czasowy przyspieszeń (po odfiltrowaniu w zakresie pierwszej częstotliwości drgań) aluminiowej belki wspornikowej pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 6 kg).



**Rys. 4.36** Przebieg czasowy przyspieszeń (po odfiltrowaniu w zakresie drugiej częstotliwości drgań) aluminiowej belki wspornikowej pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 6 kg).

**Tab. 4.4** Częstotliwości drgań poprzecznych aluminiowej belki wspornikowej wzbudzonej młotkiem modalnym.

Dodatkowe obciążenie - masa odważnika [kg]	Częstotliwość drgań poprzecznych [Hz]	
	Pierwsza postać drgań	Druga postać drgań
1,0	3,1	37,3
2,5	2,1	36,6
3,5	1,8	36,6
5,0	1,5	36,6
6,0	1,4	36,6

Podobnie jak poprzednio, w wyniku przeprowadzonych badań zaobserwowano istotny spadek wartości częstotliwości drgań aluminiowej belki wspornikowej wywołanej przyłożeniem dodatkowego obciążenia w postaci odważników o różnych masach. W przypadku pierwszej postaci drgań, zamocowanie odważnika o masie 6 kg przyczyniło się do przesunięcia podstawowej częstotliwości w kierunku pasm o niższych wartościach o 55% w porównaniu z zamocowaniem odważnika o masie 1 kg, podczas gdy w przypadku drugiej postaci przesunięcie to wyniosło niespełna 2%.

Tab. 4.5 przedstawiono wartości średnie z sześciu pomiarów liczb tłumienia dla przebiegów czasowych przyspieszeń po odfiltrowaniu w zakresie pierwszej i drugiej częstotliwości drgań aluminiowej belki wspornikowej, wyznaczone na podstawie równania (4.3) (por. załącznik nr 1). Z Tab. 4.5 można zaobserwować, że wyznaczone liczby tłumienia aluminiowej belki wspornikowej, dodatkowo obciążonej odważnikami o różnych masach, są na podobnym poziomie, a ich wartości wahają się pomiędzy 0,27 a 0,38% w przypadku pierwszej postaci drgań oraz pomiędzy 0,34 a 0,54% w przypadku drugiej postaci drgań.

**Tab. 4.5** Liczby tłumienia drgań poprzecznych aluminiowej belki wspornikowej.

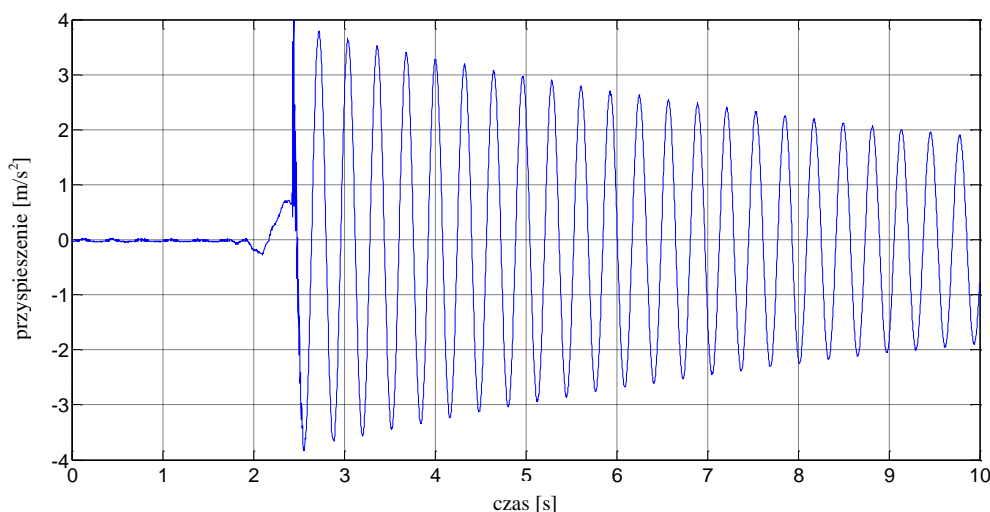
Dodatkowe obciążenie - masa odważnika [kg]	Liczba tłumienia [%]	
	Pierwsza postać drgań	Druga postać drgań
1,0	0,27	0,48
2,5	0,33	0,36
3,5	0,30	0,54
5,0	0,38	0,45
6,0	0,38	0,34

### 4.1.3 WYNIKI BADAŃ DLA ALUMINIOWEJ BELKI WSPORNIKOWEJ Z WARSTWĄ POLIMERU

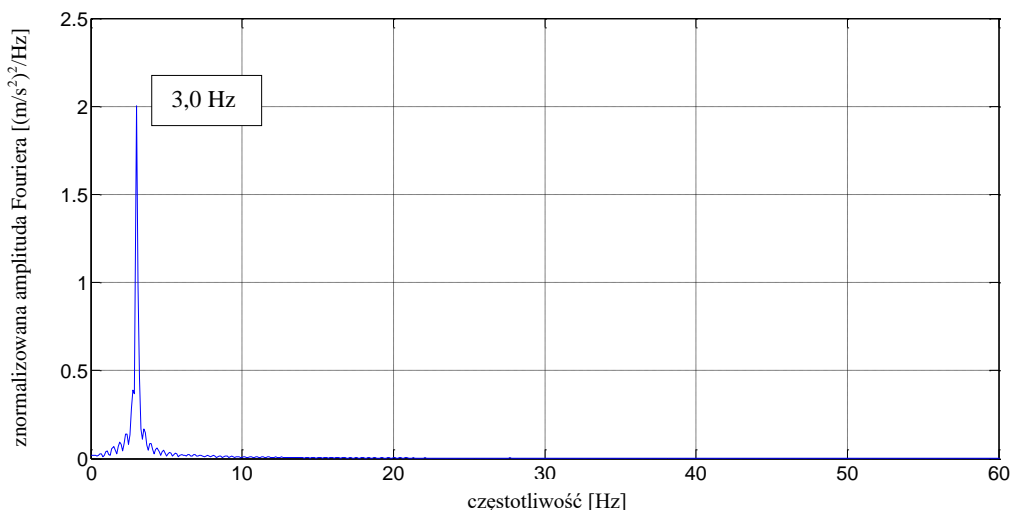
W dalszej części badań przeanalizowano aluminiową belkę wspornikową z podklejoną od dołu warstwą polimeru (Fot. 4.2). Sposób wzbudzenia elementu do drgań oraz wartość dodatkowego obciążenia przyjęto identycznie jak w przypadku pojedynczej belki (patrz rozdział 4.1.2).

#### 4.1.3.1 SPOSÓB WZBUDZANIA BELKI - PRZEMIESZCZENIE PIONOWE I ZWOLNIENIE JEJ SWOBODNEGO KOŃCA

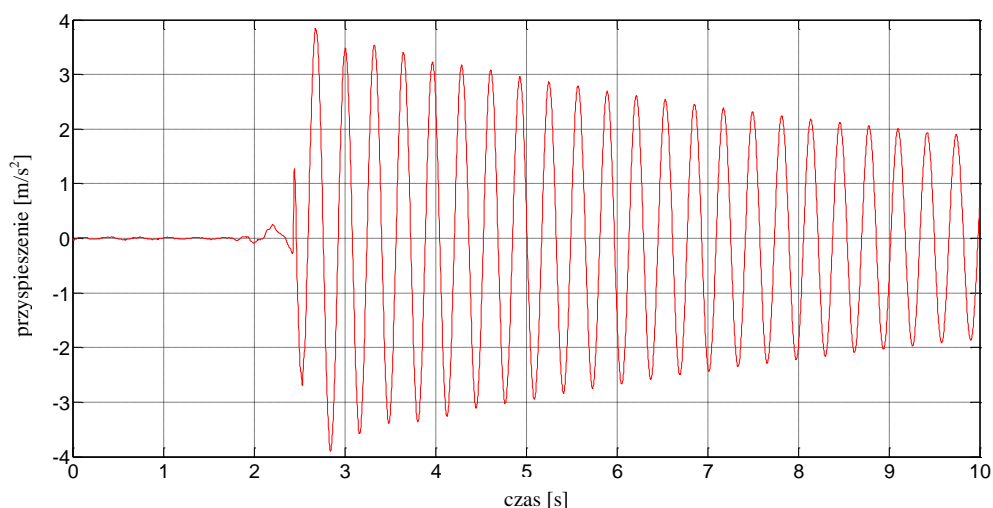
Na Rys. 4.37 przedstawiono reprezentatywny przebieg czasowy przyspieszeń otrzymany dla aluminiowej belki wspornikowej z podklejoną warstwą polimeru pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 1 kg) wzbudzonej do drgań swobodnych poprzez przemieszczenie pionowe, a następnie zwolnienie jej swobodnego końca. W celu wyznaczenia dominujących wartości częstotliwości wyznaczono transformatę Fouriera przebiegu, którą przedstawiono na Rys. 4.38. Na Rys. 4.39 przedstawiono przebieg czasowy przyspieszeń po odfiltrowaniu w zakresie podstawowej częstotliwości poprzecznej drgań równej 3 Hz.



**Rys. 4.37** Przebieg czasowy przyspieszeń końca aluminiowej belki wspornikowej z warstwą polimeru pod dodatkowym obciążeniem (masa odważnika 1 kg).



**Rys. 4.38** Transformata Fouriera dla aluminiowej belki wspornikowej z warstwą polimeru pod dodatkowym obciążeniem (masa odważnika 1 kg).



**Rys. 4.39** Przebieg czasowy przyspieszeń (po odfiltrowaniu w zakresie pierwszej częstotliwości drgań) aluminiowej belki wspornikowej z warstwą polimeru pod dodatkowym obciążeniem (masa odważnika 1 kg).

Dla odfiltrowanego przebiegu czasowego przyspieszeń wyznaczono liczbę tłumienia, korzystając z równania (4.3). Dla analizowanej belki wspornikowej wzbudzanej do drgań poprzez przemieszczenie pionowe i zwolnienie jej swobodnego końca wartość ta wyniosła 0,51%.

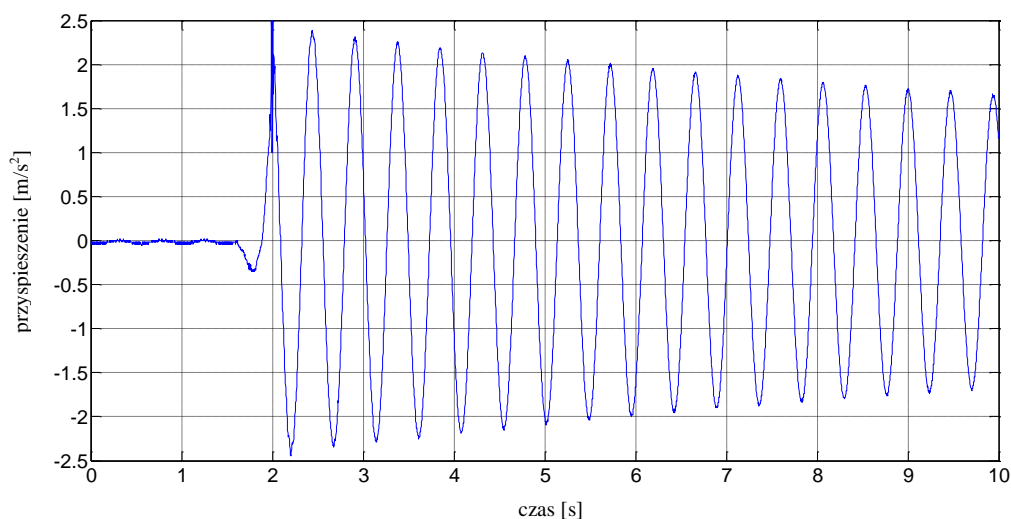
Wyniki w postaci przebiegów czasowych przyspieszeń, transformat Fouriera oraz przebiegów czasowych po odfiltrowaniu w zakresie ujawnionych częstotliwości drgań otrzymane dla aluminiowej belki wspornikowej z warstwą polimeru, dodatkowo obciążonej odważnikami o różnych masach, przedstawiono na rysunkach:

- Rys. 4.40–4.42 – odważnik o masie 2,5 kg;
- Rys. 4.43–4.45 – odważnik o masie 3,5 kg;

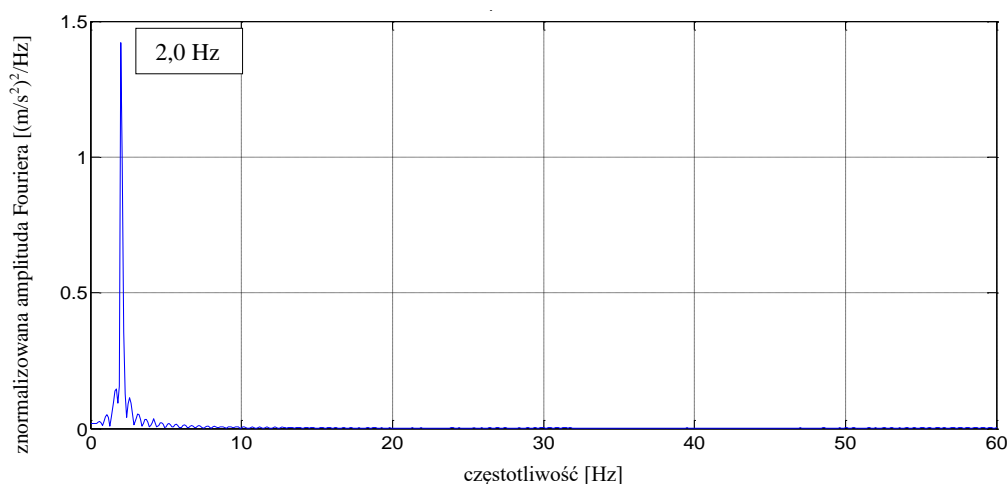


- Rys. 4.46–4.48 – odważnik o masie 5 kg;
- Rys. 4.49–4.51 – odważnik o masie 6 kg.

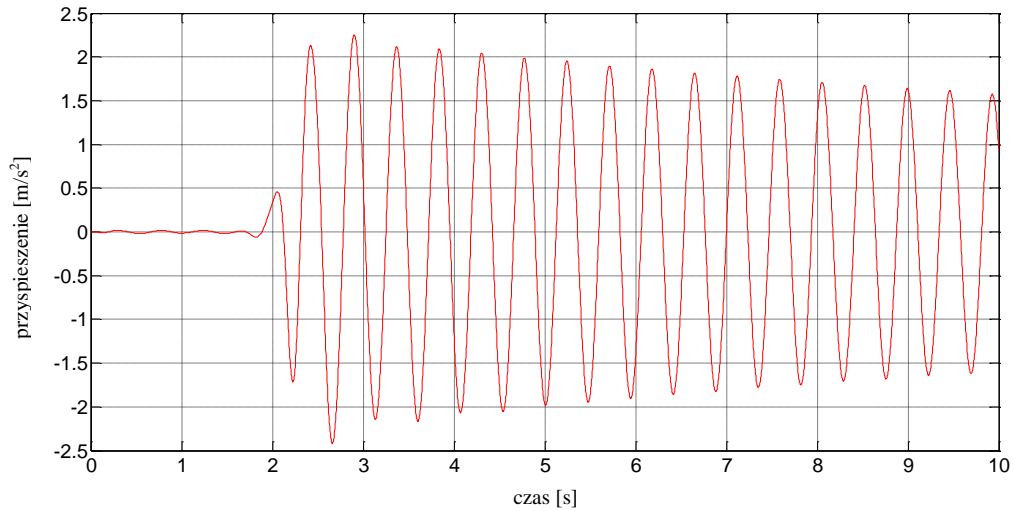
Dodatkowo, wartości wszystkich otrzymanych częstotliwości aluminiowej belki wspornikowej z warstwą polimeru, wzbudzanej do drgań poprzez przemieszczenie pionowe i zwolnienie jej swobodnego końca, przedstawiono w Tab. 4.6. Jednocześnie na Rys. 4.52 przedstawiono porównanie wartości częstotliwości odpowiadające pierwszej postaci drgań aluminiowych belek wspornikowych (bez oraz z warstwą polimeru) wraz z funkcjami aproksymującymi postaci  $y = ax^b$ , dla których parametry  $a$  i  $b$  wyznaczono poprzez minimalizację średniego błędu kwadratowego (Bendat i Piersol 1971).



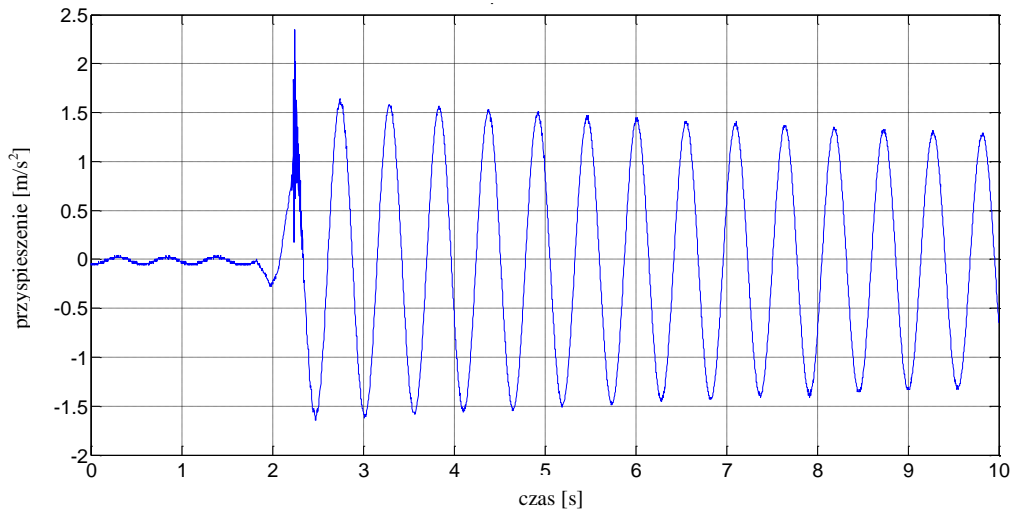
**Rys. 4.40** Przebieg czasowy przyspieszeń końca aluminiowej belki wspornikowej z warstwą polimeru pod dodatkowym obciążeniem (masa odważnika 2,5 kg).



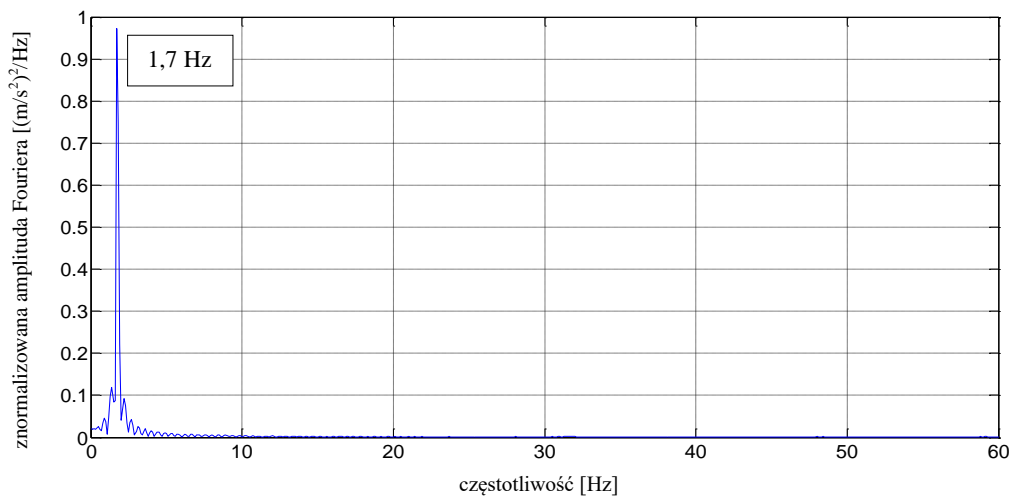
**Rys. 4.41** Transformata Fouriera dla aluminiowej belki wspornikowej z warstwą polimeru pod dodatkowym obciążeniem (masa odważnika 2,5 kg).



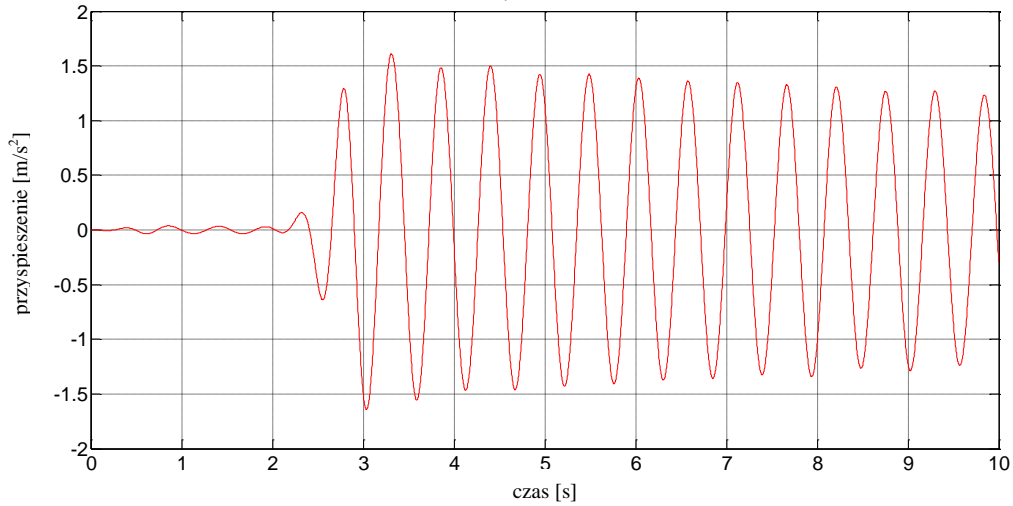
**Rys. 4.42** Przebieg czasowy przyspieszeń (po odfiltrowaniu w zakresie pierwszej częstotliwości drgań) aluminiowej belki wspornikowej z warstwą polimeru pod dodatkowym obciążeniem (masa odważnika 2,5 kg).



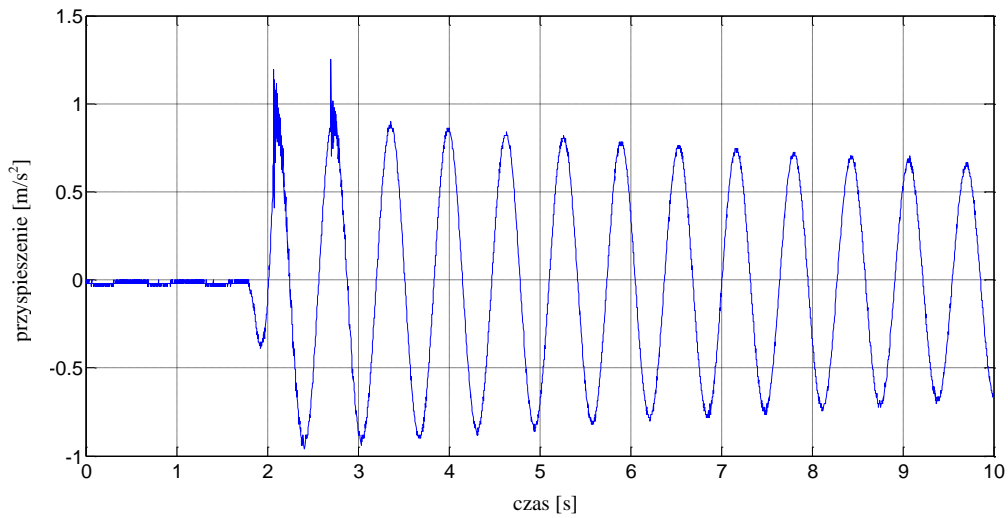
**Rys. 4.43** Przebieg czasowy przyspieszeń końca aluminiowej belki wspornikowej z warstwą polimeru pod dodatkowym obciążeniem (masa odważnika 3,5 kg).



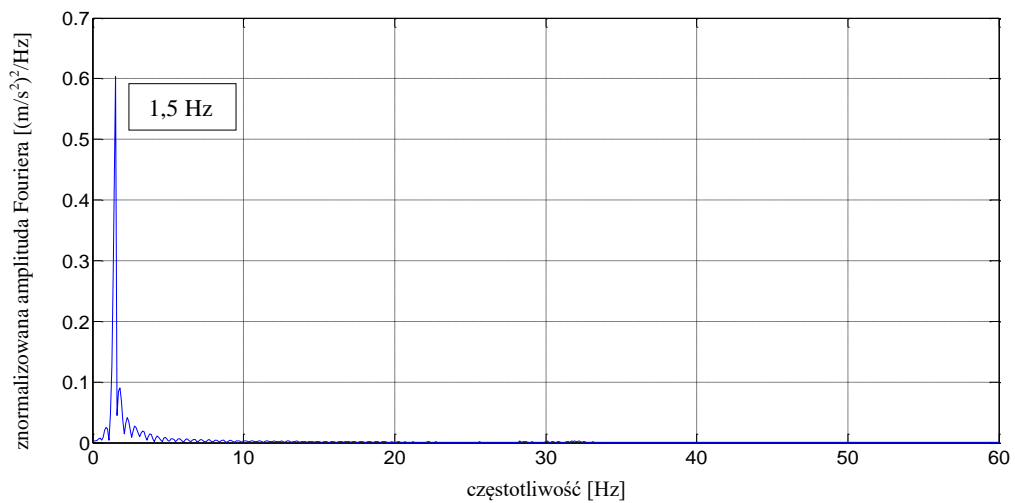
**Rys. 4.44** Transformata Fouriera dla aluminiowej belki wspornikowej z warstwą polimeru pod dodatkowym obciążeniem (masa odważnika 3,5 kg).



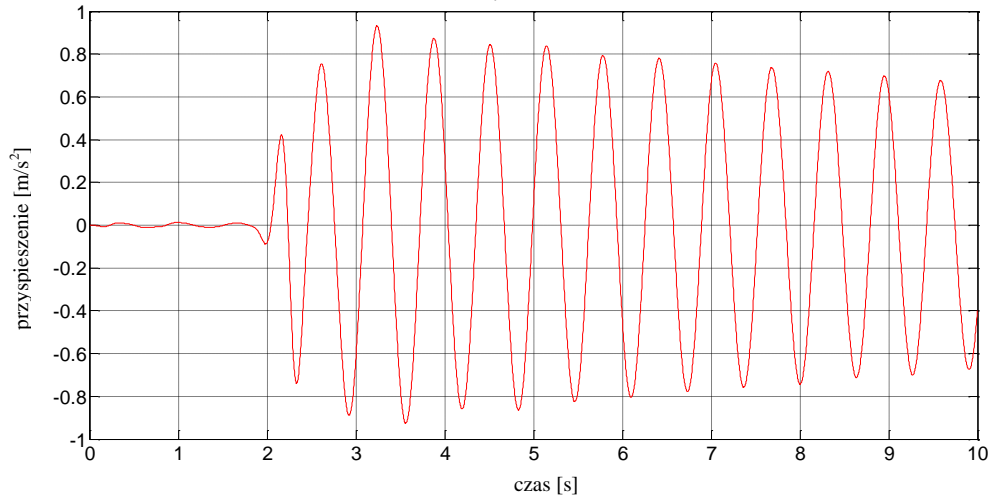
**Rys. 4.45** Przebieg czasowy przyspieszeń (po odfiltrowaniu w zakresie pierwszej częstotliwości drgań) aluminiowej belki wspornikowej z warstwą polimeru pod dodatkowym obciążeniem (masa odważnika 3,5 kg).



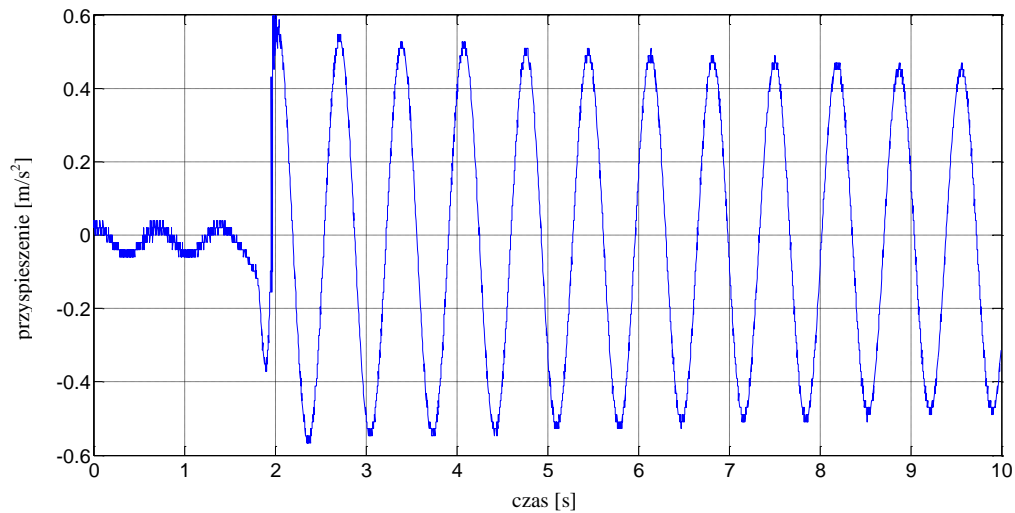
**Rys. 4.46** Przebieg czasowy przyspieszeń końca aluminiowej belki wspornikowej z warstwą polimeru pod dodatkowym obciążeniem (masa odważnika 5 kg).



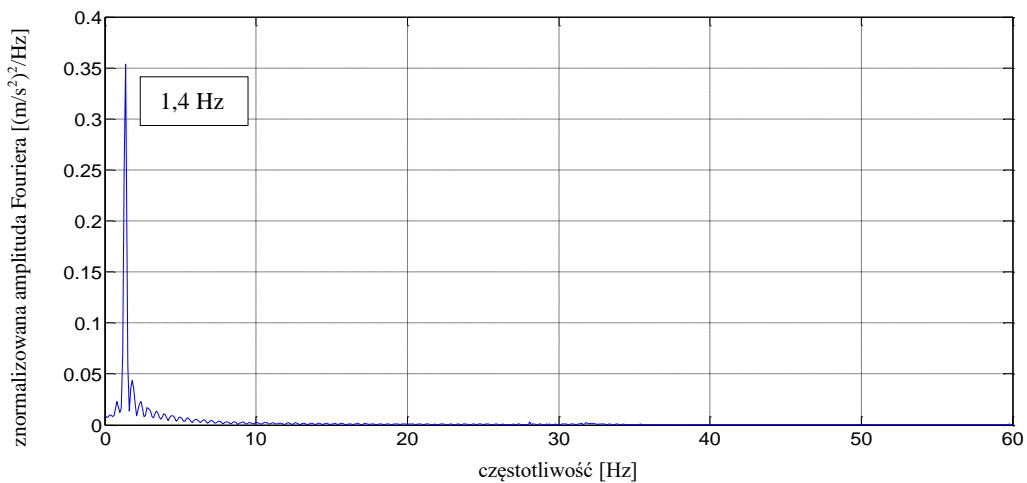
**Rys. 4.47** Transformata Fouriera dla aluminiowej belki wspornikowej z warstwą polimeru pod dodatkowym obciążeniem (masa odważnika 5 kg).



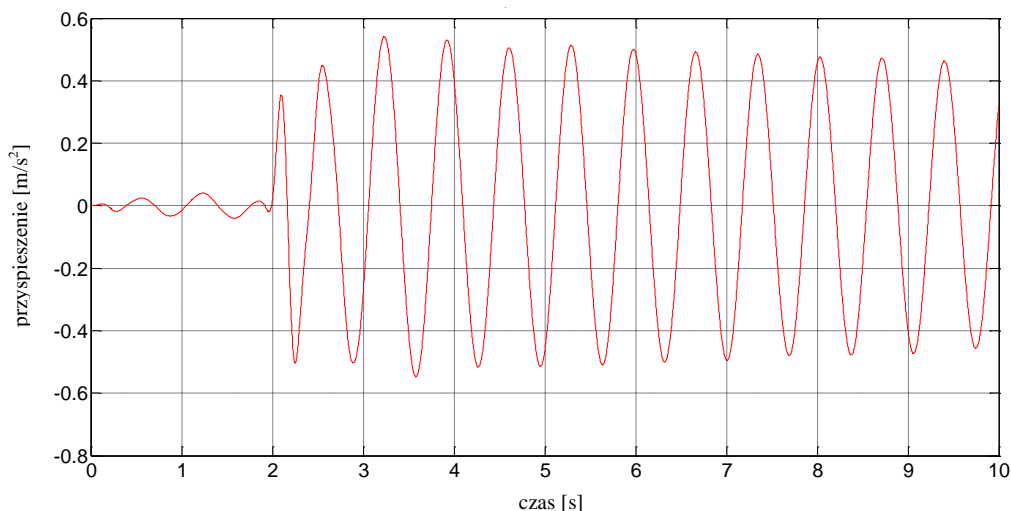
**Rys. 4.48** Przebieg czasowy przyspieszeń (po odfiltrowaniu w zakresie pierwszej częstotliwości drgań) aluminiowej belki wspornikowej z warstwą polimeru pod dodatkowym obciążeniem (masa odważnika 5 kg).



**Rys. 4.49** Przebieg czasowy przyspieszeń końca aluminiowej belki wspornikowej z warstwą polimeru pod dodatkowym obciążeniem (masa odważnika 6 kg).



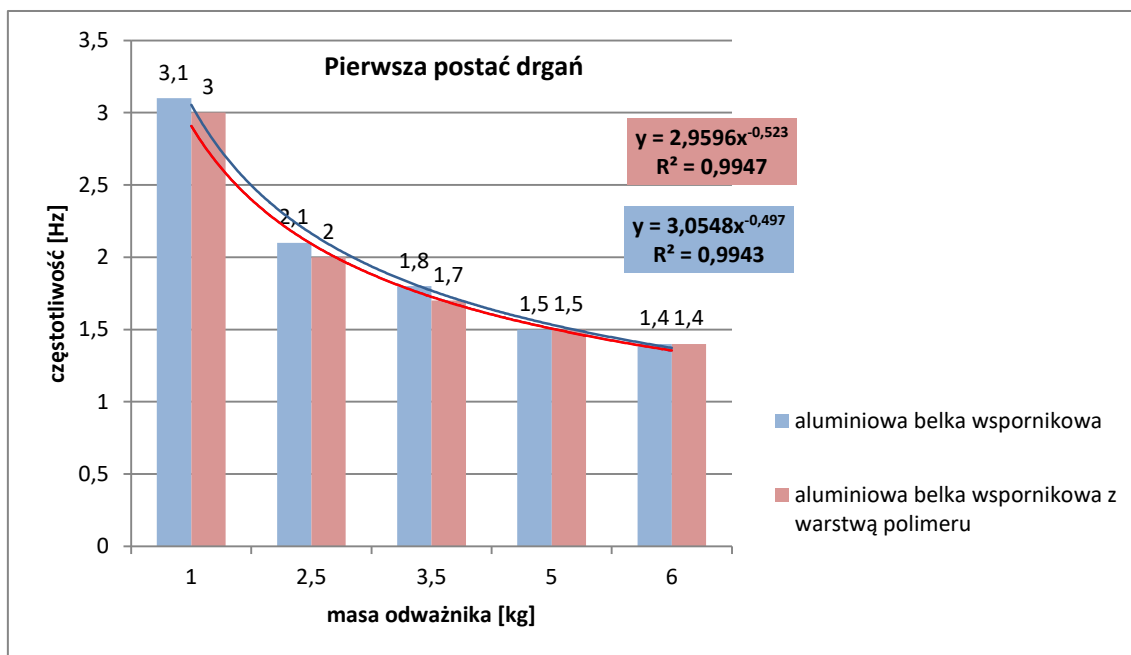
**Rys. 4.50** Transformata Fouriera dla aluminiowej belki wspornikowej z warstwą polimeru pod dodatkowym obciążeniem (masa odważnika 6 kg).



**Rys. 4.51** Przebieg czasowy przyspieszeń (po odfiltrowaniu w zakresie pierwszej częstotliwości drgań) aluminiowej belki wspornikowej z warstwą polimeru pod dodatkowym obciążeniem (masa odważnika 6 kg).

**Tab. 4.6** Częstotliwości drgań poprzecznych aluminiowej belki wspornikowej z warstwą polimeru.

Dodatkowe obciążenie - masa odważnika [kg]	Częstotliwość drgań poprzecznych [Hz]
1,0	3,0
2,5	2,0
3,5	1,7
5,0	1,5
6,0	1,4



**Rys. 4.52** Wartości częstotliwości drgań odpowiadające pierwszej postaci drgań analizowanych belek wspornikowych z uwzględnieniem dodatkowego obciążenia.

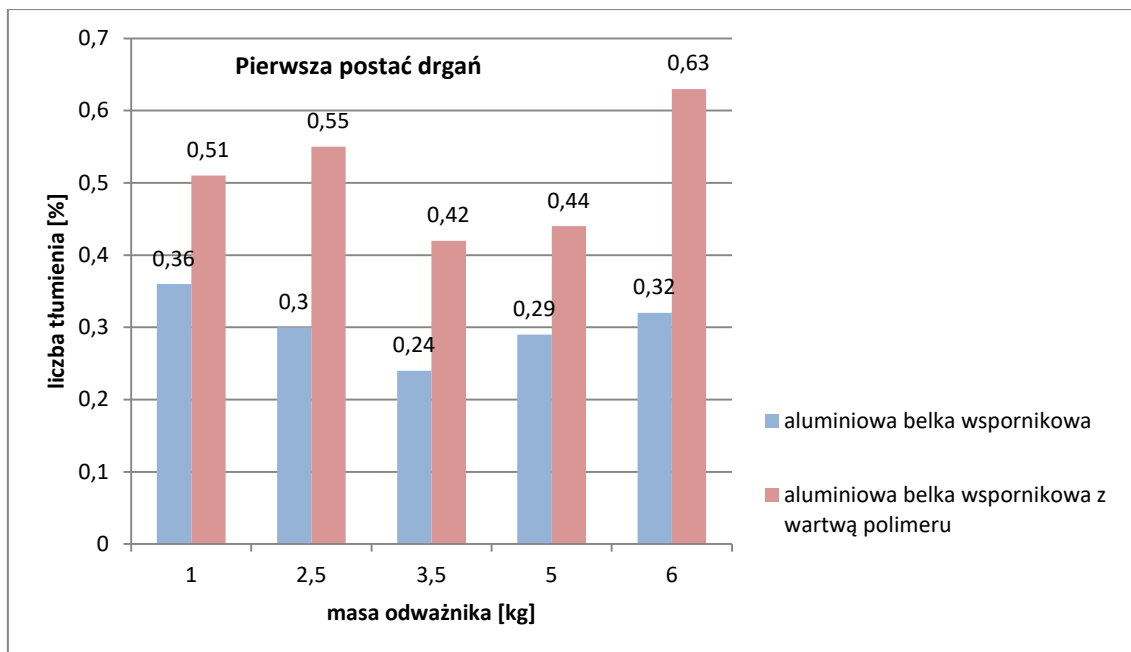
Wyniki przedstawione w Tab. 4.6 pokazują, że masa mocowanych na końcu aluminiowej belki odważników ma istotny wpływ na wartości częstotliwości drgań. Zaobserwowano spadek częstotliwości o 53% w przypadku zamocowania odważnika o masie 6 kg w porównaniu z belką obciążoną dodatkowym odważnikiem o masie 1 kg. Jednocześnie Rys. 4.52 wskazuje na niewielkie przesunięcie podstawowej częstotliwości drgań w kierunku pasm o niższej wartości w przypadku belki z podklejoną warstwą polimeru. Największe przesunięcie (o 6%) odnotowano dla odważnika o masie 3,5 kg.

W celu określenia efektywności zastosowania warstwy polimeru do redukcji drgań aluminiowych belek wspornikowych wyznaczono liczby tłumienia, zgodnie z równaniem (4.3). W Tab. 4.7 przedstawiono wartości tego parametru dynamicznego wyznaczone dla wcześniej zaprezentowanych przebiegów czasowych przyspieszeń po odfiltrowaniu w zakresie ujawnionych częstotliwości drgań aluminiowych belek wspornikowych. Jednocześnie na Rys. 4.53 przedstawiono porównanie wartości liczb tłumienia dla analizowanych belek (bez oraz z warstwą polimeru).

**Tab. 4.7** Liczby tłumienia częstotliwości drgań poprzecznych aluminiowej belki wspornikowej z warstwą polimeru.

Dodatkowe obciążenie - masa odważnika [kg]	Liczba tłumienia [%]
1,0	0,51
2,5	0,55
3,5	0,42
5,0	0,44
6,0	0,63

Otrzymane wartości liczb tłumienia dla belki z warstwą polimeru znajdują się w przedziale od 0,44% do 0,63%. Jednocześnie Rys. 4.53 wskazuje na znaczny wzrost liczb tłumienia tych belek w stosunku do elementów bez warstwy polimeru. Największy wzrost (o 97%) odnotowano w przypadku belki dodatkowo obciążonej odważnikiem o masie 6 kg, podczas gdy najmniejszy (o 42%) w przypadku zamocowania odważnika o masie 1 kg (zob. także Lasowicz i in. 2014).

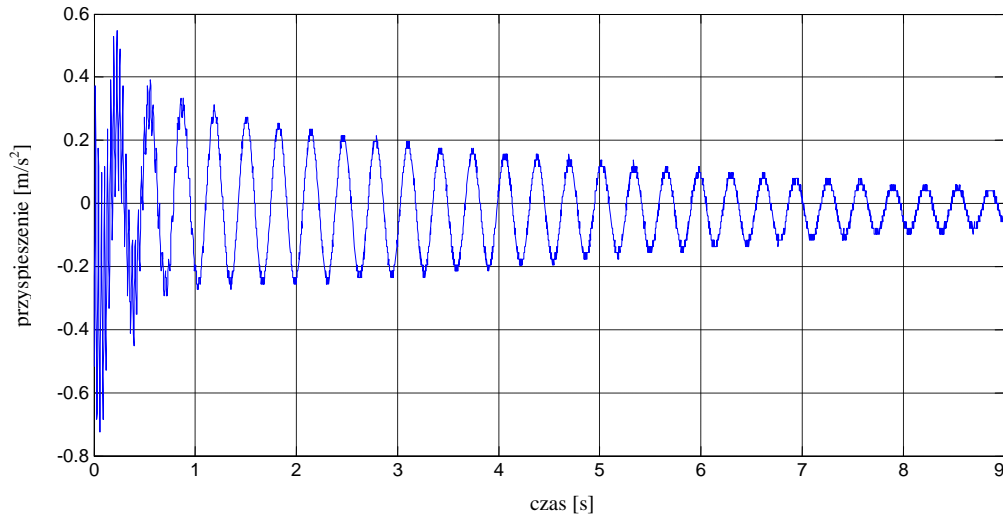


Rys. 4.53 Wartości częstotliwości drgań odpowiadające drugiej postaci drgań aluminiowych belek wspornikowych z uwzględnieniem dodatkowego obciążenia.

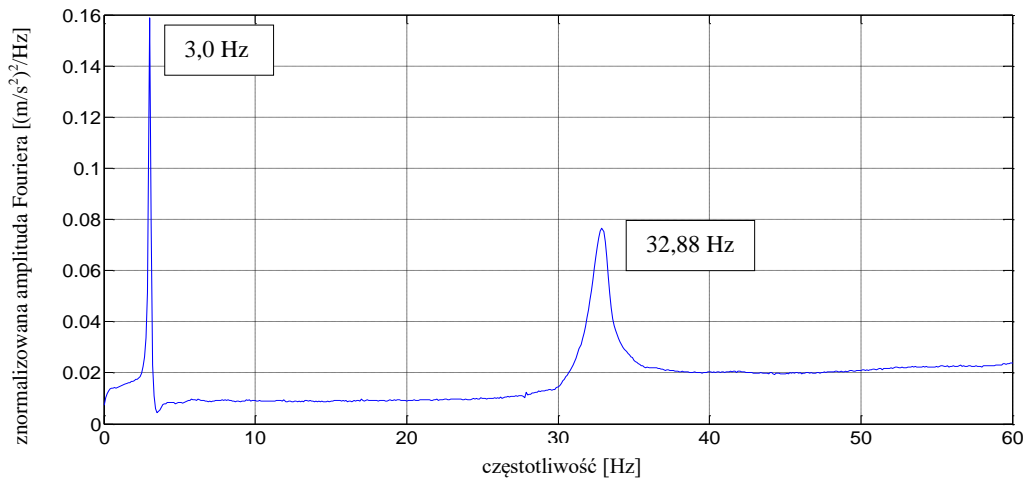
#### 4.1.3.2 SPOSÓB WZBUDZANIA BELKI - UDERZENIE MŁOTKIEM MODALNYM

Na Rys. 4.54 przedstawiono reprezentatywny przebieg czasowy przyspieszeń otrzymany dla obciążonej aluminiowej belki wspornikowej z podklejoną warstwą polimeru pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 1 kg). Dla przebiegu czasowego wykonano szybką transformatę Fouriera (patrz Rys. 4.55), która ujawniła dwie dominujące częstotliwości drgań własnych aluminiowej belki wspornikowej o wartościach 3 Hz i 32,88 Hz, z których każda z osobna została szczegółowo przeanalizowana. Na Rys. 4.56 i 4.57 przedstawiono przebiegi czasowe przyspieszeń po odfiltrowaniu w zakresie pierwszej i drugiej częstotliwości drgań analizowanej belki.

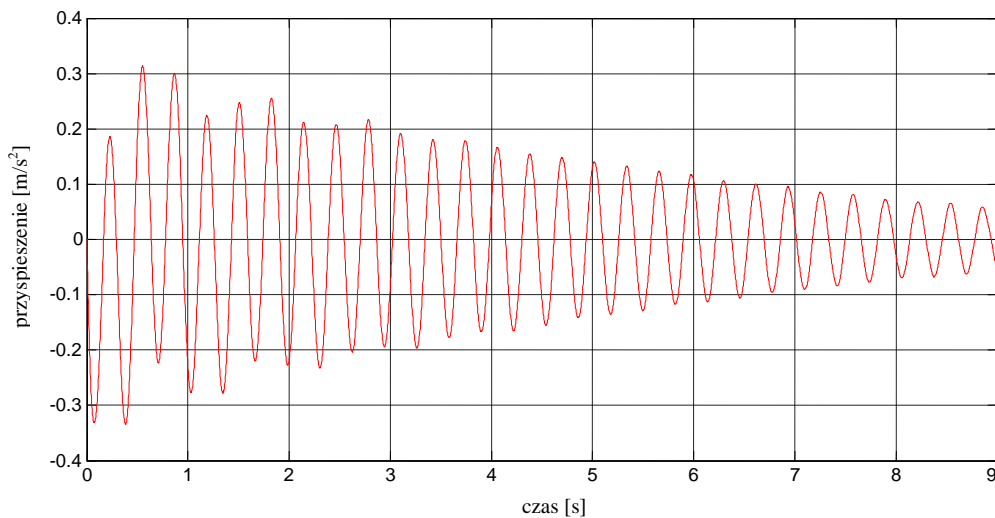




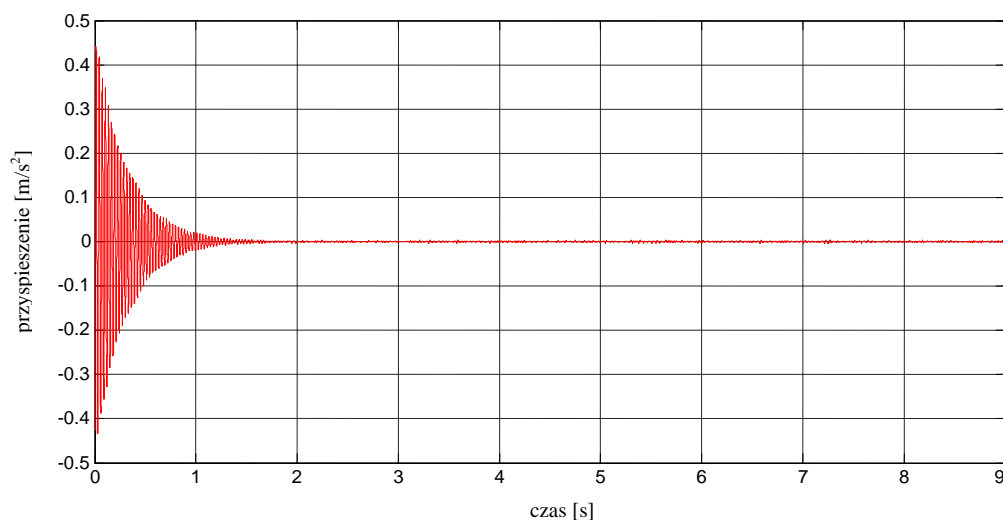
**Rys. 4.54** Przebieg czasowy przyspieszeń końca aluminiowej belki wspornikowej z warstwą polimeru pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 1 kg).



**Rys. 4.55** Transformata Fouriera dla aluminiowej belki wspornikowej z warstwą polimeru pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 1 kg).



**Rys. 4.56** Przebieg czasowy przyspieszeń (po odfiltrowaniu w zakresie pierwszej częstotliwości drgań) aluminiowej belki wspornikowej z warstwą polimeru pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 1 kg).



**Rys. 4.57** Przebieg czasowy przyspieszeń (po odfiltrowaniu w zakresie drugiej częstotliwości drgań) aluminiowej belki wspornikowej z warstwą polimeru pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 1 kg).

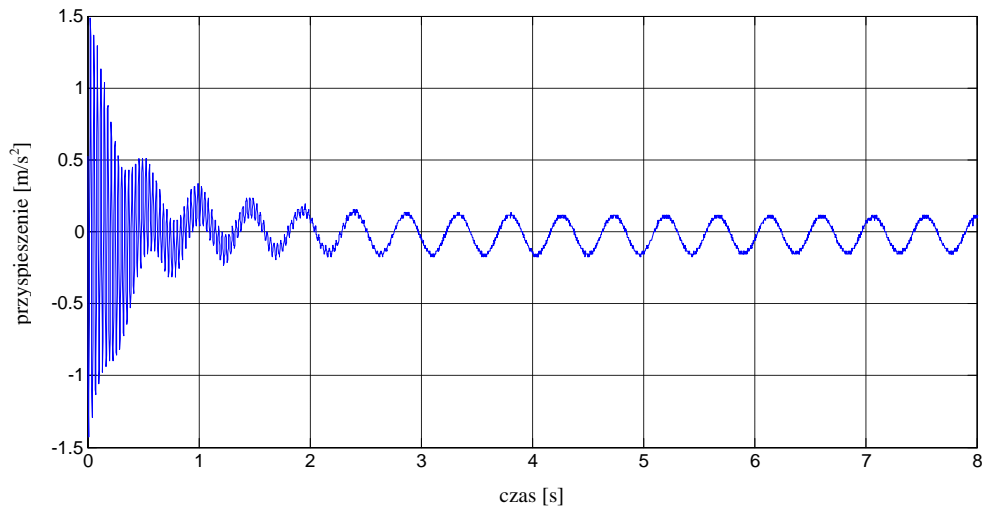
Dla odfiltrowanych przebiegów czasowych przyspieszeń wyznaczono liczby tłumienia, korzystając z równania (4.3). Dla analizowanej belki wspornikowej wzbudzanej do drgań poprzez uderzenie młotkiem modalnym, dodatkowo obciążonej odważnikiem o masie 1 kg, wartości średnie liczb tłumienia z sześciu powtórzeń wyniosły: 0,92 i 1,44%, odpowiednio dla pierwszej i drugiej częstotliwości (por. Tab. Z.2.1 w załączniku nr 2).

Wyniki w postaci przebiegów czasowych przyspieszeń, transformat Fouriera oraz przebiegów czasowych po odfiltrowaniu w zakresie ujawnionych częstotliwości drgań otrzymane dla aluminiowej belki wspornikowej z warstwą polimeru, dodatkowo obciążonej odważnikami o różnych masach przedstawiono na rysunkach:

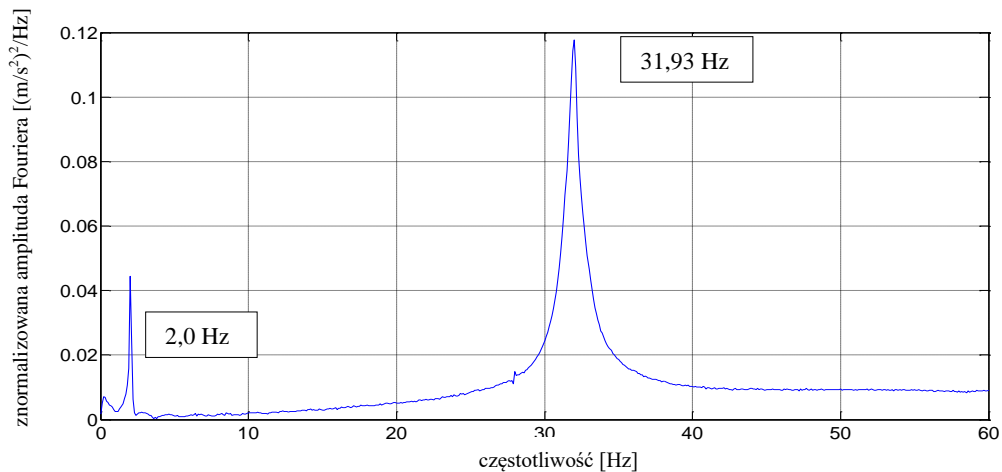
- Rys. 4.58 – 4.61 – odważnik o masie 2,5 kg;
- Rys. 4.62 – 4.65 – odważnik o masie 6,5 kg;
- Rys. 4.66 – 4.69 – odważnik o masie 5 kg;
- Rys. 4.70 – 4.73 – odważnik o masie 6 kg.

Dodatkowo, wartości średnie z sześciu pomiarów wszystkich częstotliwości drgań aluminiowej belki wspornikowej z warstwą polimeru wzbudzanej do drgań poprzez uderzenie młotkiem modalnym przedstawiono w Tab. 4.8 (por. załącznik nr 2). Jednocześnie na Rys. 4.74 i 4.75 przedstawiono porównanie wartości częstotliwości odpowiadające pierwszej i drugiej postaci drgań aluminiowych belek wspornikowych (bez oraz z warstwą polimeru) wraz z funkcjami aproksymującymi postaci  $y = ax^b$ , dla

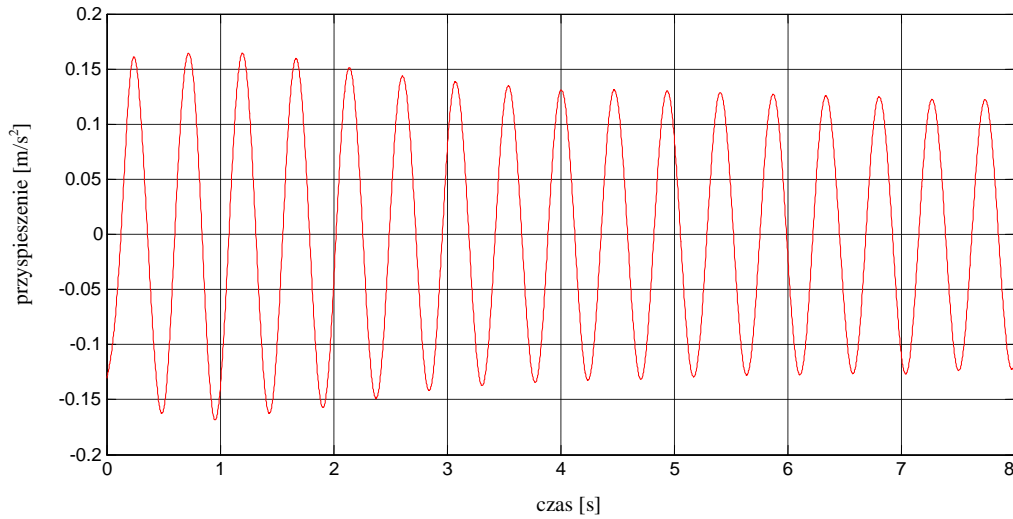
których parametry  $a$  i  $b$  wyznaczono poprzez minimalizację średniego błędu kwadratowego (Bendat i Piersol 1971).



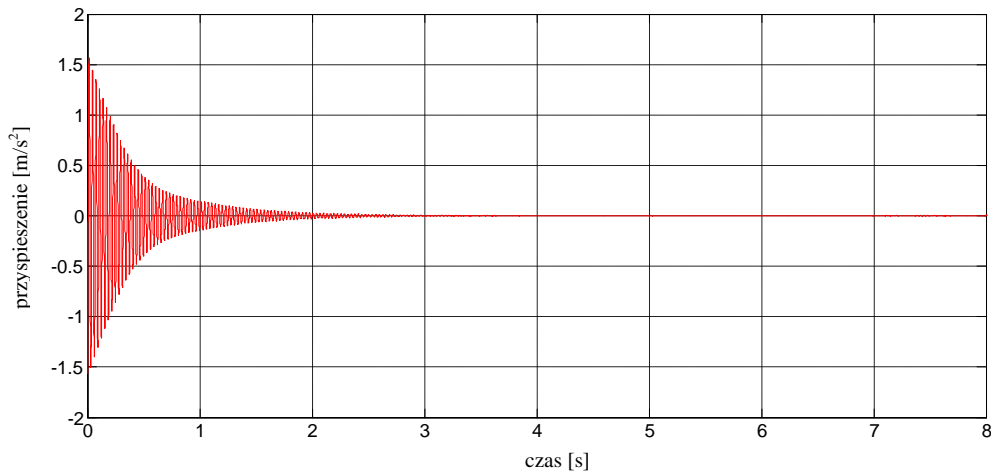
**Rys. 4.58** Przebieg czasowy przyspieszeń końca aluminiowej belki wspornikowej z warstwą polimeru pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 2,5 kg).



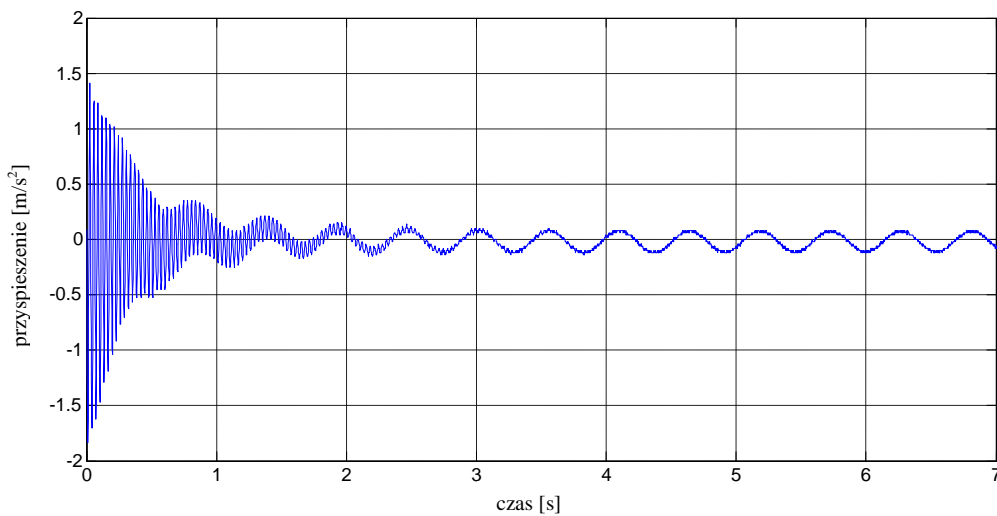
**Rys. 4.59** Transformata Fouriera dla aluminiowej belki wspornikowej z warstwą polimeru pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 2,5 kg).



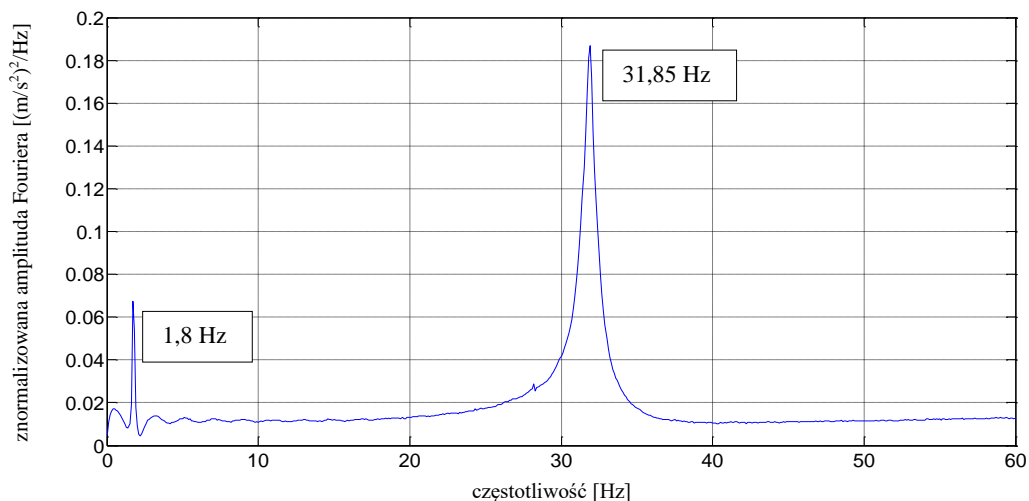
**Rys. 4.60** Przebieg czasowy przyspieszeń (po odfiltrowaniu w zakresie pierwszej częstotliwości drgań) aluminiowej belki wspornikowej z warstwą polimeru pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 2,5 kg).



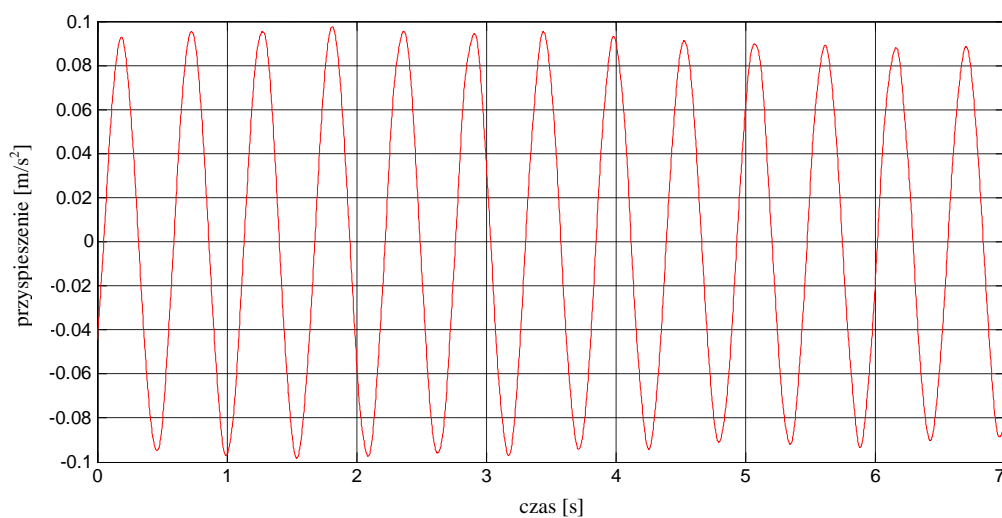
**Rys. 4.61** Przebieg czasowy przyspieszeń (po odfiltrowaniu w zakresie drugiej częstotliwości drgań) aluminiowej belki wspornikowej z warstwą polimeru pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 2,5 kg).



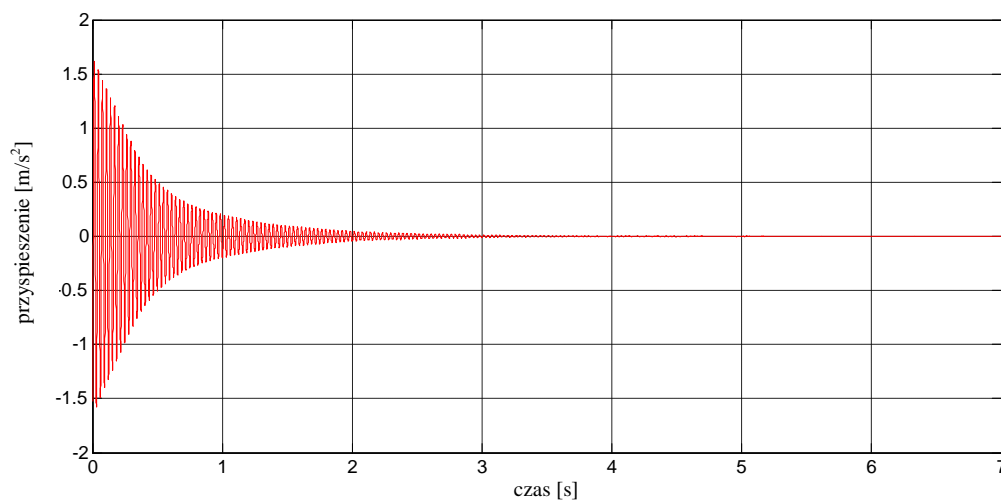
**Rys. 4.62** Przebieg czasowy przyspieszeń końca aluminiowej belki wspornikowej z warstwą polimeru pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 3,5 kg).



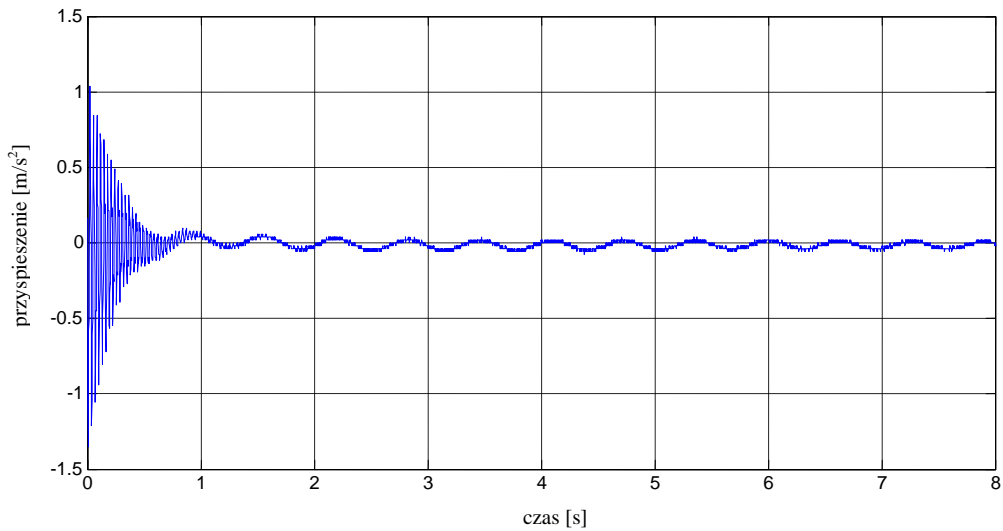
**Rys. 4.63** Transformata Fouriera dla aluminiowej belki wspornikowej z warstwą polimeru pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 3,5 kg).



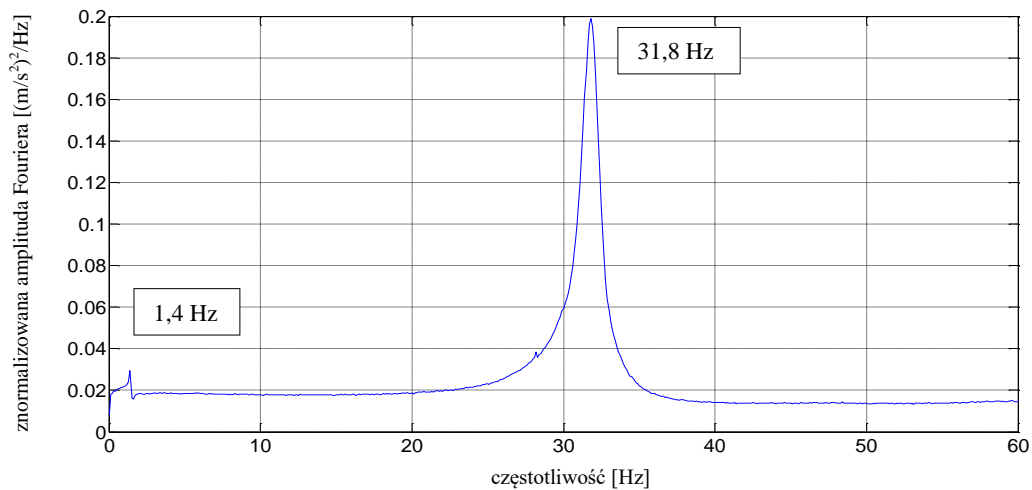
**Rys. 4.64** Przebieg czasowy przyspieszeń (po odfiltrowaniu w zakresie pierwszej częstotliwości drgań) aluminiowej belki wspornikowej z warstwą polimeru pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 3,5 kg).



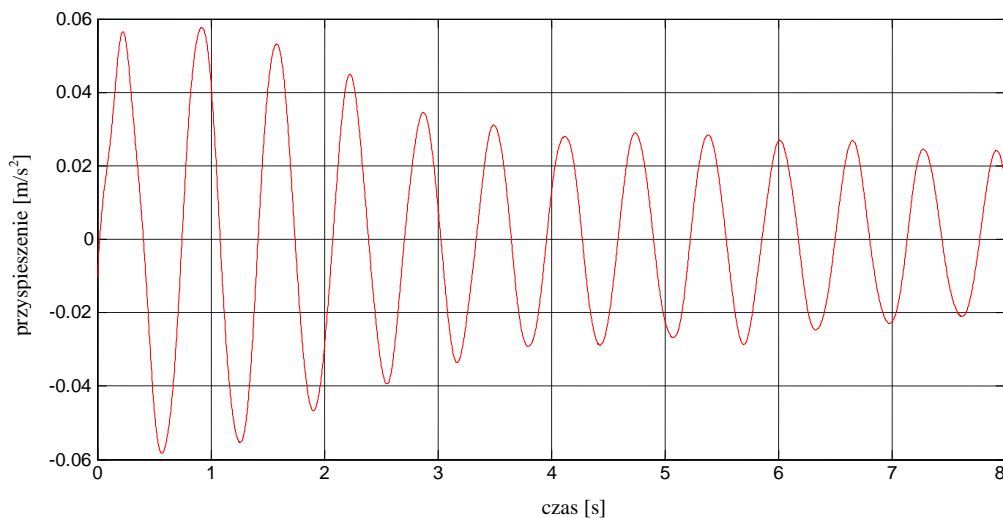
**Rys. 4.65** Przebieg czasowy przyspieszeń (po odfiltrowaniu w zakresie drugiej częstotliwości drgań) aluminiowej belki wspornikowej z warstwą polimeru pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 3,5 kg).



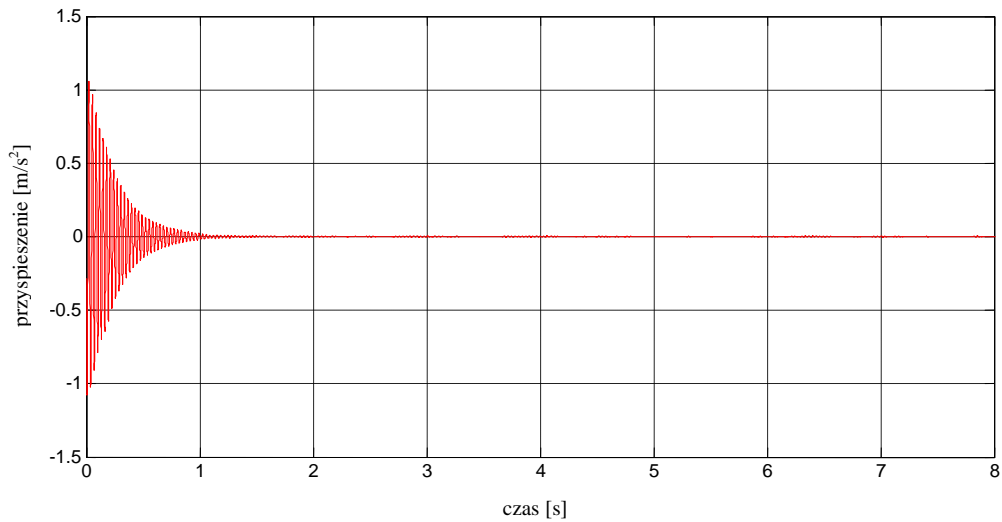
**Rys. 4.66** Przebieg czasowy przyspieszeń końca aluminiowej belki wspornikowej z warstwą polimeru pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 5 kg).



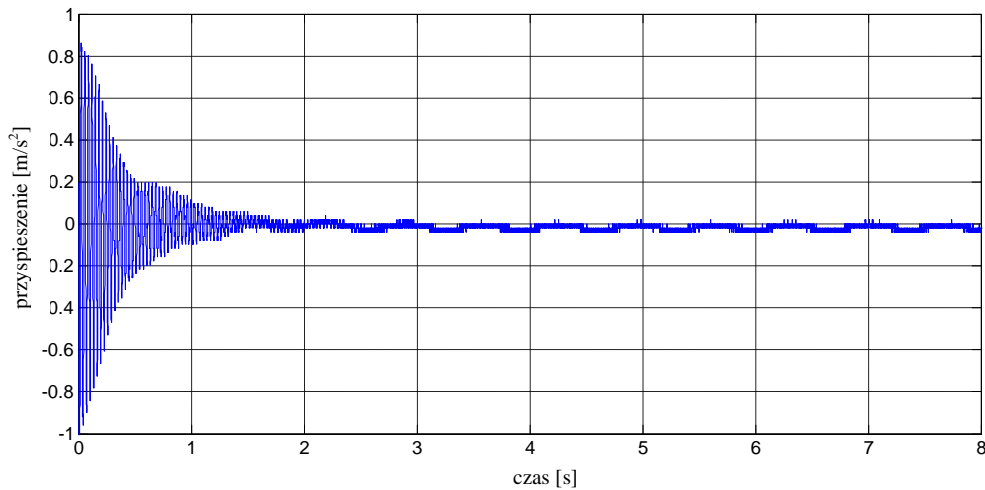
**Rys. 4.67** Transformata Fouriera dla aluminiowej belki wspornikowej z warstwą polimeru pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 5 kg).



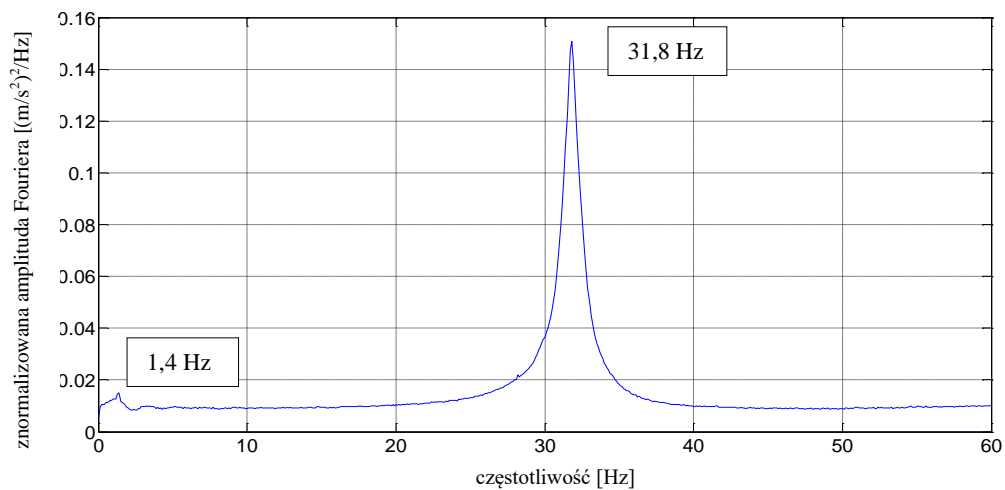
**Rys. 4.68** Przebieg czasowy przyspieszeń (po odfiltrowaniu w zakresie pierwszej częstotliwości drgań) aluminiowej belki wspornikowej z warstwą polimeru pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 5 kg).



**Rys. 4.69** Przebieg czasowy przyspieszeń (po odfiltrowaniu w zakresie drugiej częstotliwości drgań) aluminiowej belki wspornikowej z warstwą polimeru pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 5 kg).

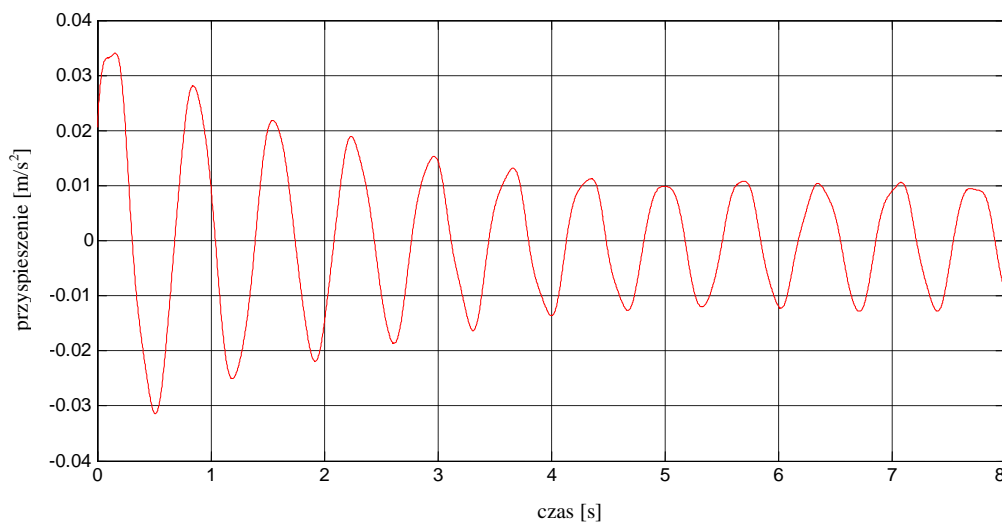


**Rys. 4.70** Przebieg czasowy przyspieszeń końca aluminiowej belki wspornikowej z warstwą polimeru pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 6 kg).

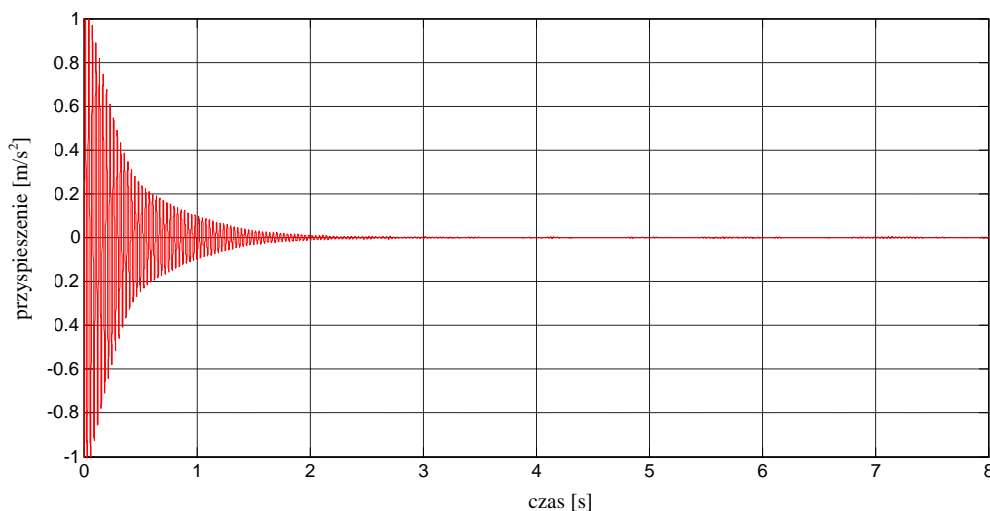


**Rys. 4.71** Transformata Fouriera dla aluminiowej belki wspornikowej z warstwą polimeru pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 6 kg).





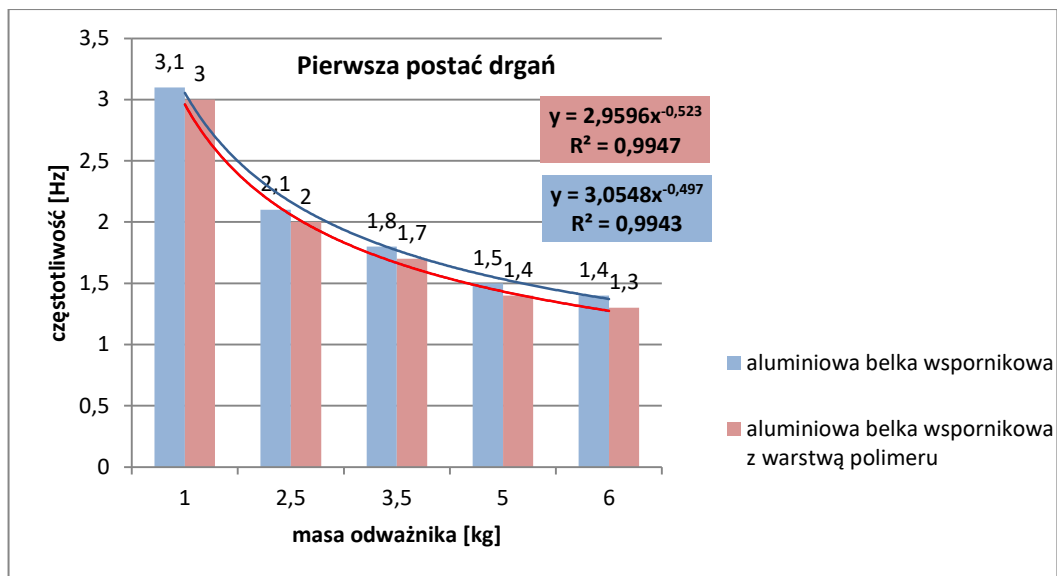
**Rys. 4.72** Przebieg czasowy przyspieszeń (po odfiltrowaniu w zakresie pierwszej częstotliwości drgań) aluminiowej belki wspornikowej z warstwą polimeru pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 6 kg).



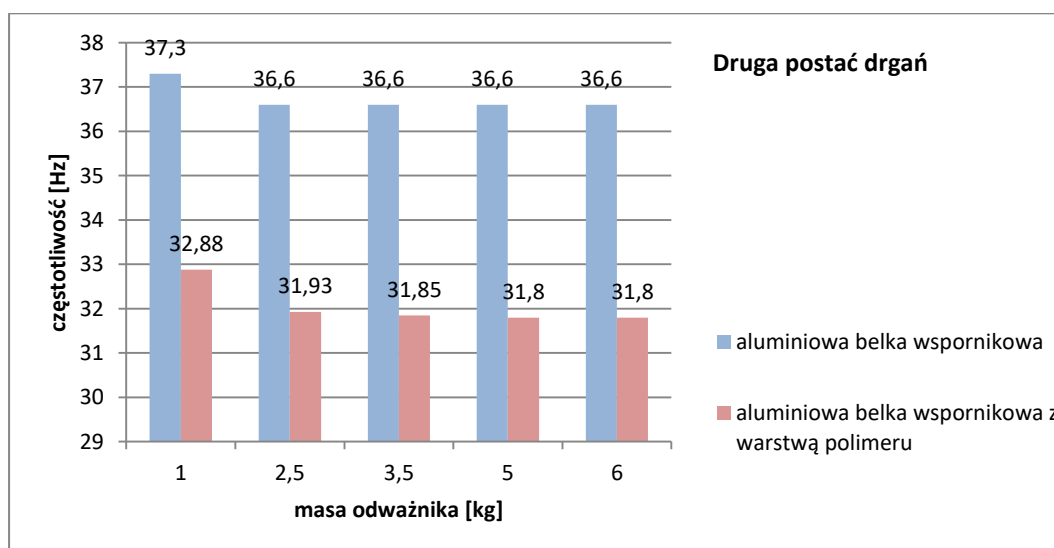
**Rys. 4.73** Przebieg czasowy przyspieszeń (po odfiltrowaniu w zakresie drugiej częstotliwości drgań) aluminiowej belki wspornikowej z warstwą polimeru pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 6 kg).

**Tab. 4.8** Częstotliwości drgań poprzecznych aluminiowej belki wspornikowej z warstwą polimeru.

Dodatkowe obciążenie - masa odważnika [kg]	Częstotliwość drgań poprzecznych [Hz]	
	Pierwsza postać drgań	Druga postać drgań
1,0	3,0	32,88
2,5	2,0	31,93
3,5	1,7	31,85
5,0	1,4	31,8
6,0	1,3	31,8



**Rys. 4.74** Wartości częstotliwości drgań odpowiadające pierwszej postaci drgań aluminiowych belek wspornikowych z uwzględnieniem dodatkowego obciążenia (uderzenie młotkiem modalnym).



**Rys. 4.75** Wartości częstotliwości drgań odpowiadające drugiej postaci drgań aluminiowych belek wspornikowych z uwzględnieniem dodatkowego obciążenia (uderzenie młotkiem modalnym).

Z Tab. 4.8 można zaobserwować, że masa mocowanych na końcu aluminiowej belki odważników ma istotny wpływ na wartości częstotliwości drgań. Zaobserwowano spadek częstotliwości o 57% w przypadku pierwszej postaci drgań i zamocowania odważnika o masie 6 kg w porównaniu z belką obciążoną dodatkowym odważnikiem o masie 1 kg. W przypadku drugiej postaci drgań spadek ten wyniósł niespełna 4%. Jednocześnie, Rys. 4.74 i 4.75 wskazuje na niewielkie przesunięcie podstawowej częstotliwości drgań w kierunku pasm o niższej wartości w przypadku belki z warstwą polimeru. Największe zaobserwowane przesunięcie wartości częstotliwości

odpowiadającej pierwszej postaci drgań wyniosło 7%, podczas gdy w przypadku drugiej postaci drgań równe było 13%.

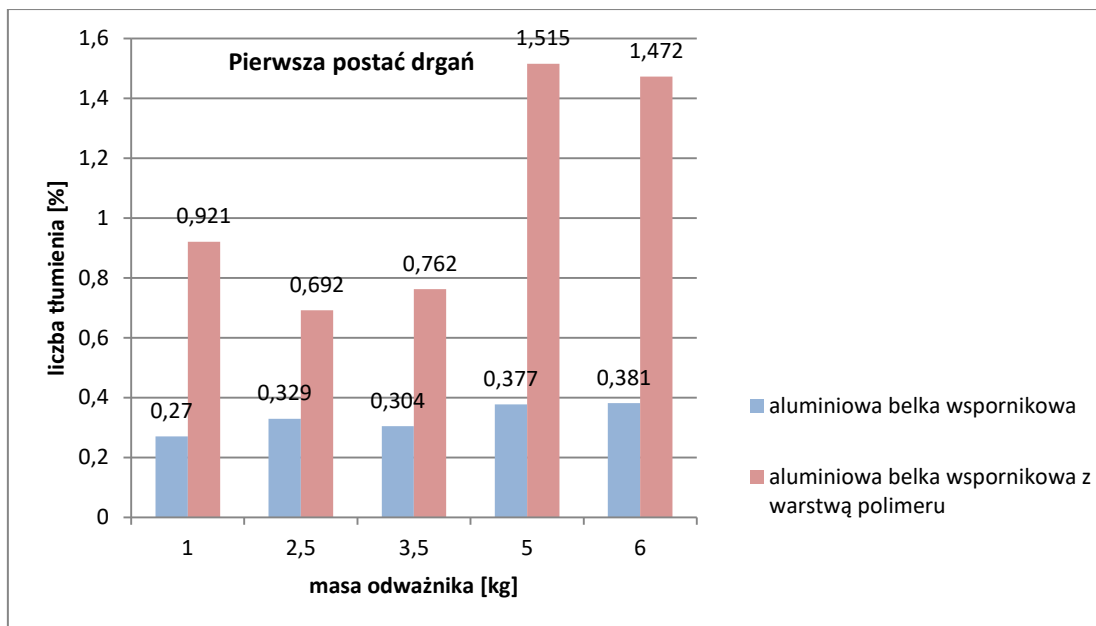
W celu określenia efektywności zastosowania warstwy polimeru do redukcji drgań aluminiowych belek wspornikowych wyznaczono, zgodnie z równaniem (4.3), wartości liczb tłumienia (por. załącznik nr 2). W Tab. 4.9 przedstawiono wartości średnie z sześciu pomiarów tego parametru dynamicznego dla przebiegów czasowych przyspieszeń odpowiadających pierwszej oraz drugiej postaci drgań aluminiowych belek wspornikowych. Jednocześnie, na Rys. 4.76 i 4.77 przedstawiono porównanie wartości liczb tłumienia dla analizowanych belek (bez oraz z warstwą polimeru).

**Tab. 4.9** Liczby tłumienia drgań poprzecznych aluminiowej belki wspornikowej z warstwą polimeru.

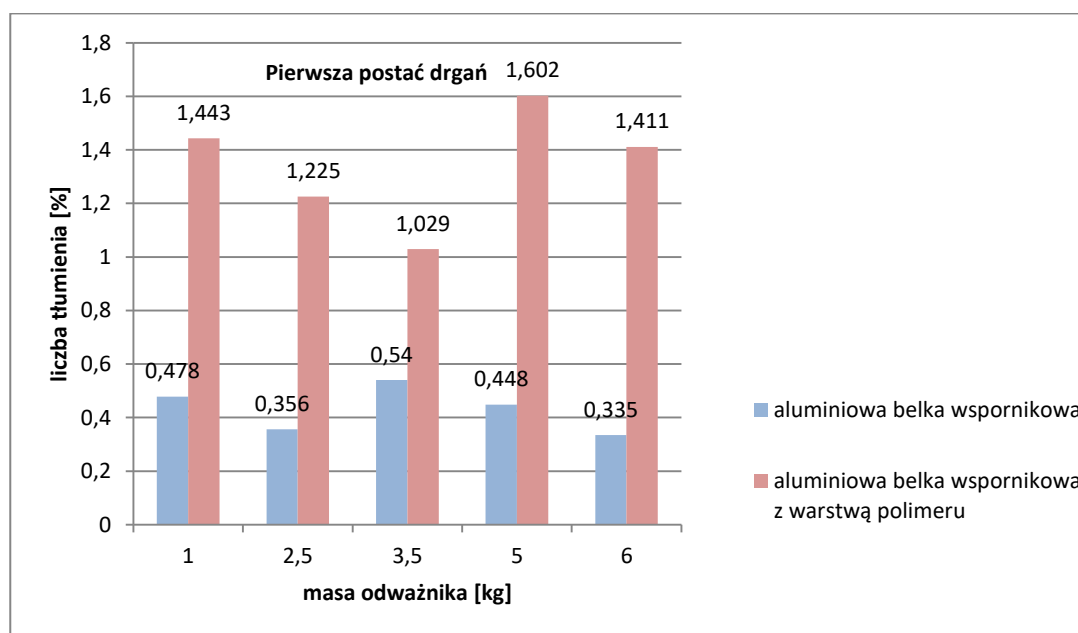
Dodatkowe obciążenie - masa odważnika [kg]	Liczba tłumienia [%]	
	Pierwsza postać drgań	Druga postać drgań
1,0	0,92	1,44
2,5	0,69	1,23
3,5	0,77	1,03
5,0	1,52	1,60
6,0	1,47	1,41

Otrzymane wartości liczb tłumienia dla belki z warstwą polimeru znajdują się w przedziale od 0,77 do 1,52% w przypadku pierwszej postaci oraz wahają się pomiędzy wartościami 1,03 a 1,44% w przypadku drugiej postaci drgań. Rys. 4.76 i 4.77 wskazuje na znaczny wzrost liczb tłumienia tych belek w stosunku do elementów bez warstwy polimeru. Największy wzrost (o 300%) liczby tłumienia pierwszej postaci drgań odnotowano w przypadku belki dodatkowo obciążonej odważnikiem o masie 5 kg, podczas gdy najmniejszy (o 110%) w przypadku zamocowania odważnika o masie 2,5 kg. Największy wzrost (o 315%) liczby tłumienia drugiej postaci drgań odnotowano w przypadku belki dodatkowo obciążonej odważnikiem o masie 6 kg, podczas gdy najmniejszy (o 91%) w przypadku zamocowania odważnika o masie 3,5 kg.

Wyniki przeprowadzonych badań eksperymentalnych pokazują jednoznacznie, że zastosowanie masy polimerowej prowadzi do znacznego wzrostu liczby tłumienia analizowanej aluminiowej belki wspornikowej.



**Rys. 4.76** Liczby tłumienia dla pierwszej częstotliwości drgań aluminiowych belek wspornikowych z uwzględnieniem dodatkowego obciążenia (uderzenie młotkiem modalnym).

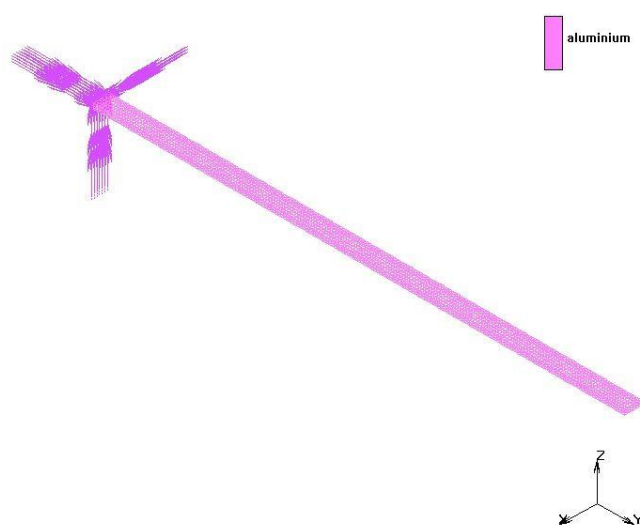


**Rys. 4.77** Liczby tłumienia dla drugiej częstotliwości drgań aluminiowych belek wspornikowych z uwzględnieniem dodatkowego obciążenia (uderzenie młotkiem modalnym).

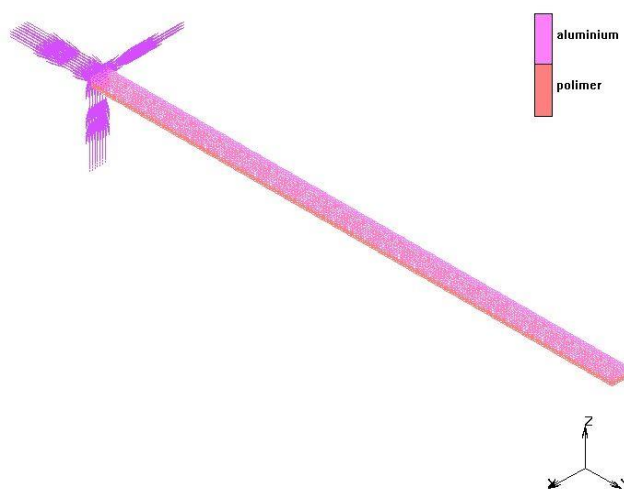
## 4.2 ETAPI – ANALIZA NUMERYCZNA

Drugim etapem rozważań było przeprowadzenie modalnej analizy numerycznej analizowanych w rozdziale 4.1 aluminiowych belek wspornikowych. W tym celu utworzono, w programie komercyjnym MSC Marc wykorzystującym Metodę

Elementów Skończonych (MES), dwa modele numeryczne. Pierwszy z nich przedstawiał pojedynczą aluminiową belkę wspornikową, drugi zaś odzwierciedlał tą samą aluminiową belkę wspornikową, do której podklejono od dołu warstwę polimeru. Modele numeryczne zbudowano ze standardowych ośmiowęzłowych elementów bryłowych (sześć stopni swobody w każdym węźle). Oba modele przedstawiono na Rys. 4.78 i 4.79.



Rys. 4.78 Model numeryczny aluminiowej belki wspornikowej.

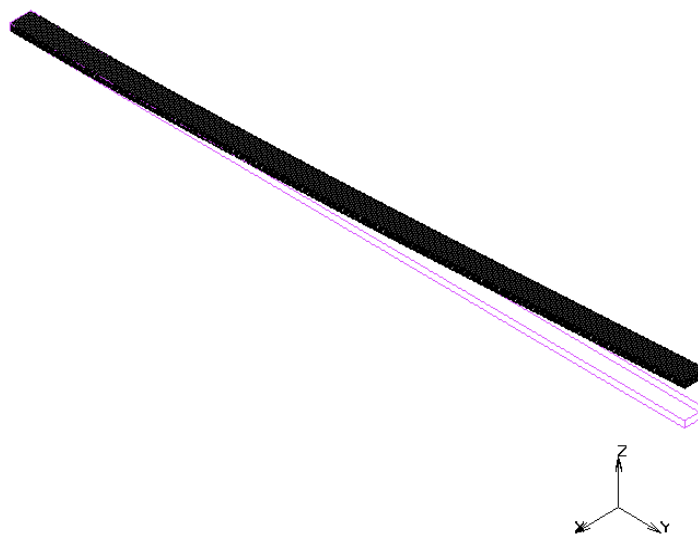


Rys. 4.79 Model numeryczny aluminiowej belki wspornikowej z warstwą polimeru.

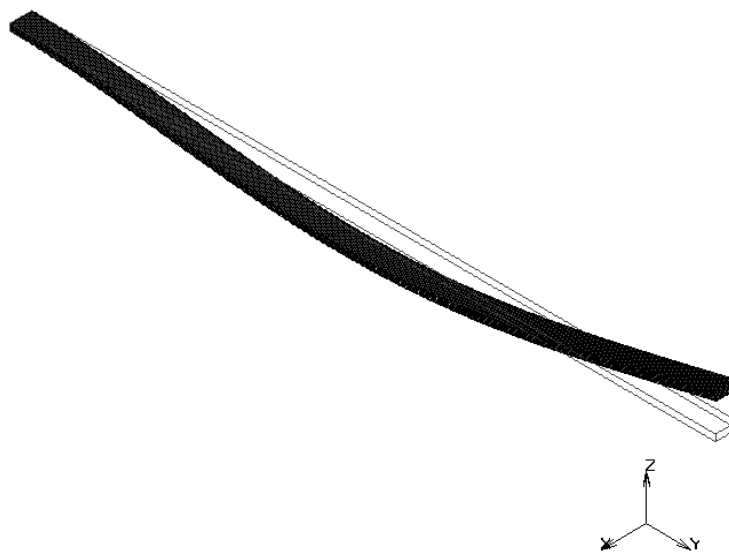
Właściwości materiałowe aluminium uwzględnione w analizie numerycznej były zgodne z parametrami przedstawionymi w Tab. 4.1. Jednocześnie, polimer zdefiniowano w programie MSC Marc jako materiał Mooneya-Rivlina, którego parametry zestawiono w Tab. 3.2.

#### 4.2.1 WYNIKI ANALIZY MODALNEJ DLA ALUMINIOWEJ BELKI WSPORNIKOWEJ

Na Rys. 4.80 i 4.81 przedstawiono dwie pierwsze poprzeczne postaci drgań własnych aluminiowej belki wspornikowej dodatkowo obciążonej na jej końcu odważnikami o różnych masach. Jednocześnie w Tab. 4.10 zestawiono wartości częstotliwości drgań otrzymane dla aluminiowej belki wspornikowej.



**Rys. 4.80** Pierwsza postać poprzeczna drgań własnych pojedynczej aluminiowej belki wspornikowej.



**Rys. 4.81** Druga postać poprzeczna drgań własnych pojedynczej aluminiowej belki wspornikowej.

**Tab. 4.10** Wartości częstotliwości odpowiadające pierwszej i drugiej postaci drgań własnych dla pojedynczej aluminiowej belki wspornikowej.

Dodatkowe obciążenie – masa odważnika [kg]	Częstotliwość drgań [Hz]	
	Pierwsza postać drgań	Druga postać drgań
1,0	3,16	35,80
2,5	2,07	34,56
3,5	1,77	34,15
5,0	1,55	33,77
6,0	1,43	33,50

Porównując Tab. 4.10 z Tab. 4.4 można zauważyć, że wartości częstotliwości drgań wyznaczone z badań eksperymentalnych i z analizy numerycznej różnią się nieznacznie. W przypadku pierwszej poprzecznej postaci dla obu modeli aluminiowych belek różnica ta wyniosła maksymalnie 3,3% (zamocowanie odważnika o masie 5 kg). W przypadku drugiej poprzecznej postaci drgań maksymalna różnica osiągnęła wartość 8,5% (zamocowanie odważnika o masie 6 kg). Zgodność ta potwierdza poprawność wygenerowanych modeli numerycznych.

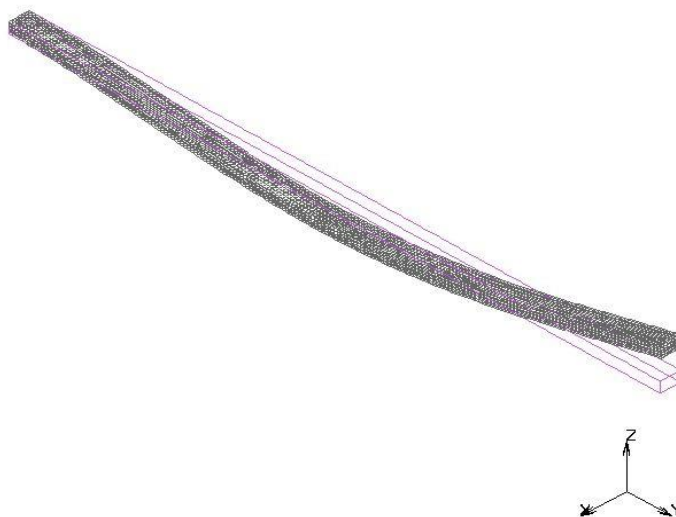
#### 4.2.2 WYNIKI ANALIZY MODALNEJ DLA ALUMINIOWEJ BELKI WSPORNIKOWEJ Z WARSTWĄ POLIMERU

Na Rys. 4.82 i 4.83 przedstawiono dwie pierwsze poprzeczne postaci drgań własnych aluminiowej belki wspornikowej z podklejoną od dołu warstwą polimeru dodatkowo obciążonej odważnikami o różnych masach. Z kolei, w Tab. 4.11 zestawiono wartości częstotliwości drgań własnych otrzymane dla tej belki.





**Rys. 4.82** Pierwsza postać poprzeczna drgań własnych aluminiowej belki wspornikowej z warstwą polimeru.



**Rys. 4.83** Druga postać poprzeczna drgań własnych aluminiowej belki wspornikowej z warstwą polimeru.

**Tab. 4.11** Wartości częstotliwości odpowiadające pierwszej i drugiej postaci drgań własnych dla aluminiowej belki wspornikowej z podklejoną od dołu warstwą polimeru.

Dodatkowe obciążenie – masa odważnika [kg]	Częstotliwość drgań [Hz]	
	Pierwsza postać drgań	Druga postać drgań
1,0	3,06	31,16
2,5	2,05	29,97
3,5	1,76	29,62
5,0	1,54	29,33
6,0	1,42	29,13

Porównując Tab. 4.11 z Tab. 4.8 można zauważyć, że wartości częstotliwości drgań wyznaczone z badań eksperymentalnych i z analizy numerycznej różnią się nieznacznie. W przypadku pierwszej poprzecznej postaci drgań dla obu modeli aluminiowych belek różnica ta wyniosła maksymalnie 9% (zamocowanie odważnika o masie 5 kg). W przypadku drugiej poprzecznej postaci drgań maksymalna różnica osiągnęła wartość 8% (zamocowanie odważnika o masie 6 kg). Zgodność ta potwierdza poprawność wygenerowanych modeli numerycznych, w tym zastosowanie modelu Mooneya-Rivlina do analizy polimeru.

### 4.3 ETAP II – BADANIA EKSPERYMENTALNE

#### 4.3.1 PRZEDMIOT BADAŃ

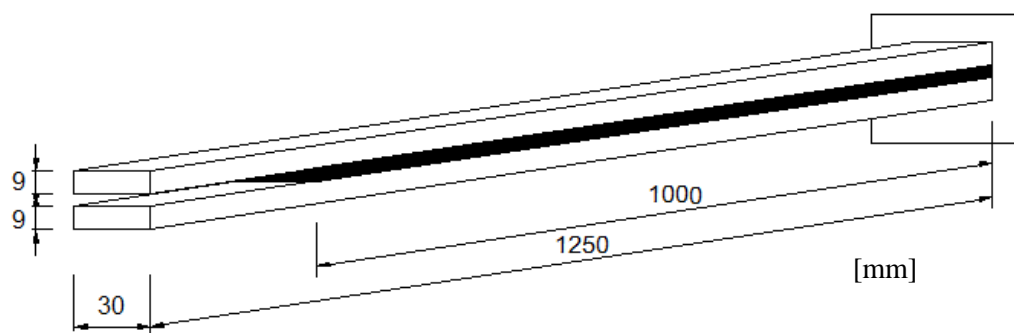
W kolejnym etapie badań eksperymentalnych, testom poddano dwie belki wspornikowe o całkowitej długości 1250 mm i szerokości 30 mm. Pierwsza z nich to pojedynczy aluminiowy płaskownik o grubości 9 mm, podczas gdy druga to belka złożona z dwóch aluminiowych płaskowników, które sklejono ze sobą warstwą polimeru (por. Hulimka i Kałuża 2017, Kałuża i Hulimka 2017) o grubości: 0,5; 1,2; 1,75; 3,1 i 5 mm (zob. Fot. 4.3).



**Fot. 4.3** Złożona belka wspornikowa - dwa aluminiowe płaskowniki sklejone warstwą polimeru.

Głównym celem badań eksperymentalnych było określenie efektywności zastosowania warstwy polimeru do redukcji drgań aluminiowych belek wspornikowych. W tym celu wyznaczono parametry dynamiczne w postaci wartości częstotliwości drgań własnych oraz liczb tłumienia rozpatrywanych elementów. Przeprowadzono szereg pomiarów, które polegały na wzbudzaniu każdej belki do drgań poprzez uderzenie

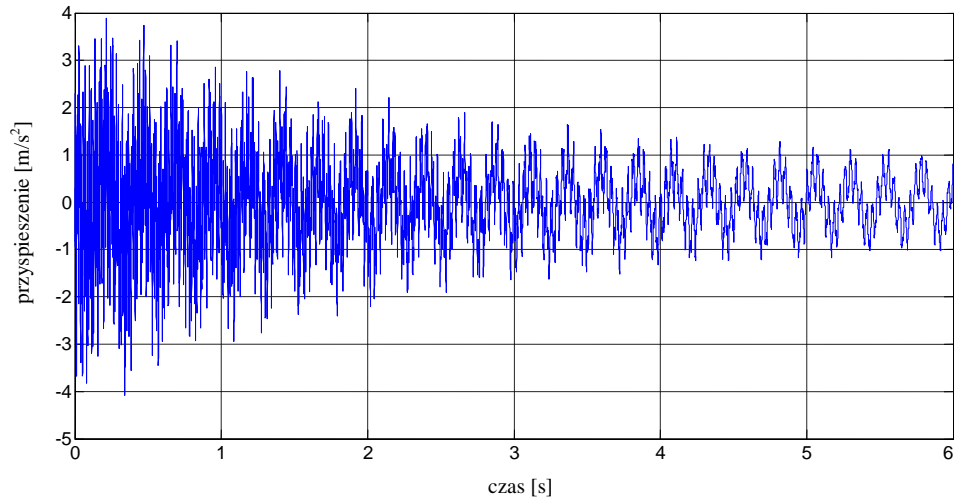
w środku jej rozpiętości młotkiem modalnym typu PCB 086C01 o masie równej 0,1 kg z siłą zmienną w czasie o maksymalnej wartości  $F=15$  N. Całkowity czas pomiaru wynosił 12,5 s. Sygnał rejestrowano przy użyciu trójosiowego czujnika przyspieszeń umieszczonego na końcu każdej belki. W badaniach uwzględniono pomiary wykonane dla dwóch belek, do końców których przyłożono dodatkowe obciążenie w postaci odważników o masie: 1; 2,5; 3,5; 5 i 6 kg podczepionych w odległości 1220 mm od podpory. Dla każdego przypadku obciążenia wykonano sześć powtórzeń, które posłużyły do wyznaczenia wartości średnich częstotliwości drgań własnych i liczb tłumienia. Schematyczny rysunek złożonej belki wspornikowej przedstawiono na Rys. 4.84. Właściwości materiałowe aluminium i polimeru, z których wykonano belki wspornikowe przedstawiono w Tab. 4.1 i 3.1.



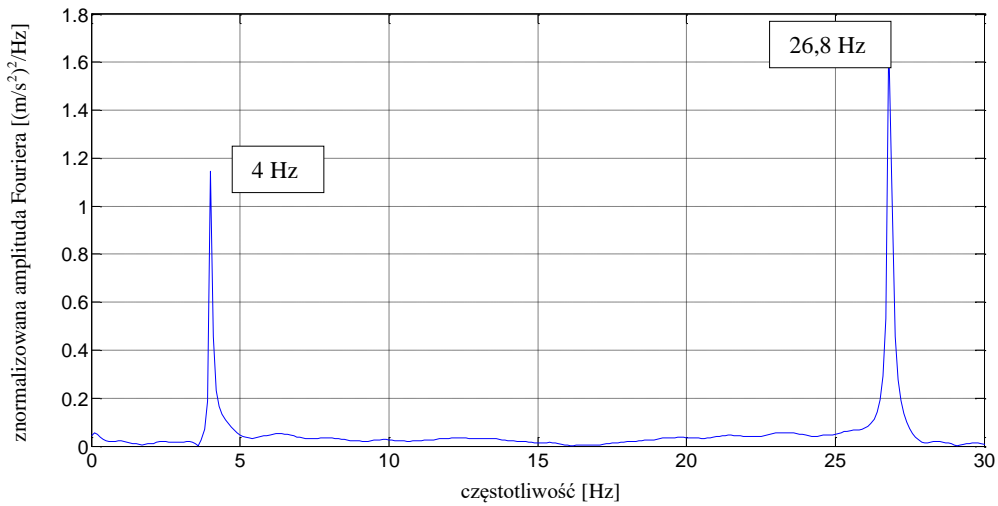
**Rys. 4.84** Schemat złożonej belki wspornikowej oraz sposób jej wzbudzenia do drgań przy użyciu młotka modalnego.

#### 4.3.2 WYNIKI BADAŃ DLA POJEDYNCZEJ ALUMINIOWEJ BELKI WSPORNIKOWEJ

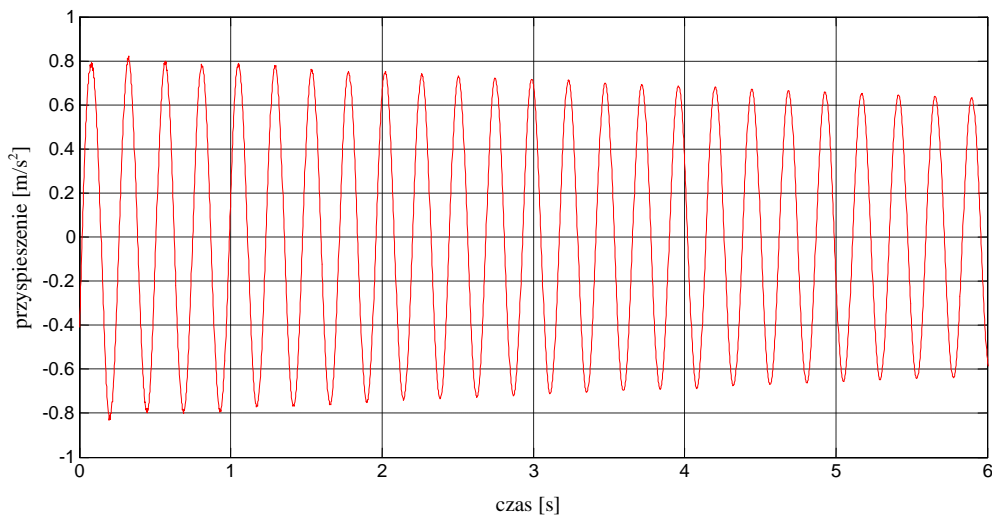
Na Rys. 4.85 przedstawiono reprezentatywny przebieg czasowy przyspieszeń uzyskany dla pojedynczej aluminiowej belki wspornikowej (bez warstwy tłumiącej i bez dodatkowego obciążenia), wzbudzanej do drgań poprzez uderzenie w środku jej rozpiętości młotkiem modalnym. Dla przebiegu czasowego wykonano szybką transformację Fouriera (patrz Rys. 4.86), która ujawniła dwie dominujące częstotliwości drgań własnych o wartościach 4 Hz i 26,8 Hz. Na Rys. 4.87 i 4.88 przedstawiono przebiegi czasowe przyspieszeń po odfiltrowaniu w zakresie pierwszej i drugiej częstotliwości drgań analizowanej belki.



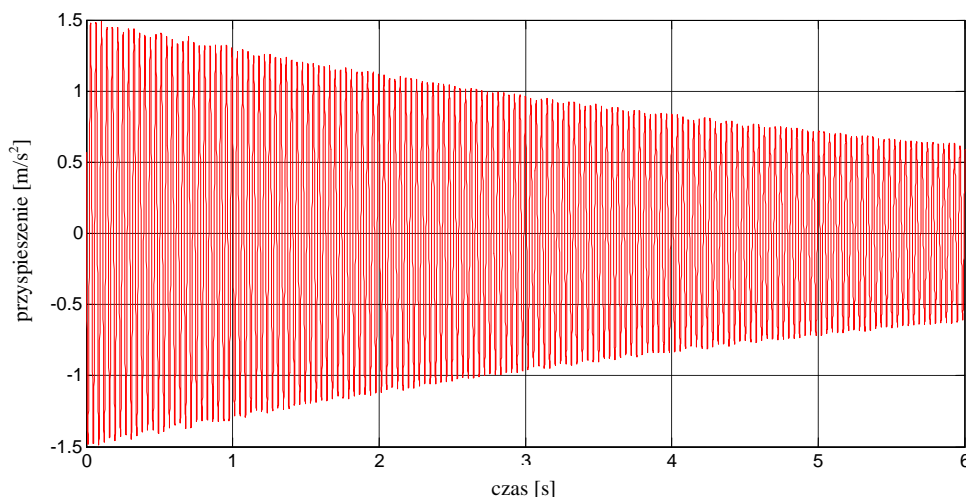
**Rys. 4.85** Przebieg czasowy przyspieszeń końca pojedynczej aluminiowej belki wspornikowej.



**Rys. 4.86** Transformata Fouriera dla pojedynczej aluminiowej belki wspornikowej.



**Rys. 4.87** Przebieg czasowy przyspieszeń (po odfiltrowaniu w zakresie pierwszej częstotliwości drgań) pojedynczej aluminiowej belki wspornikowej.



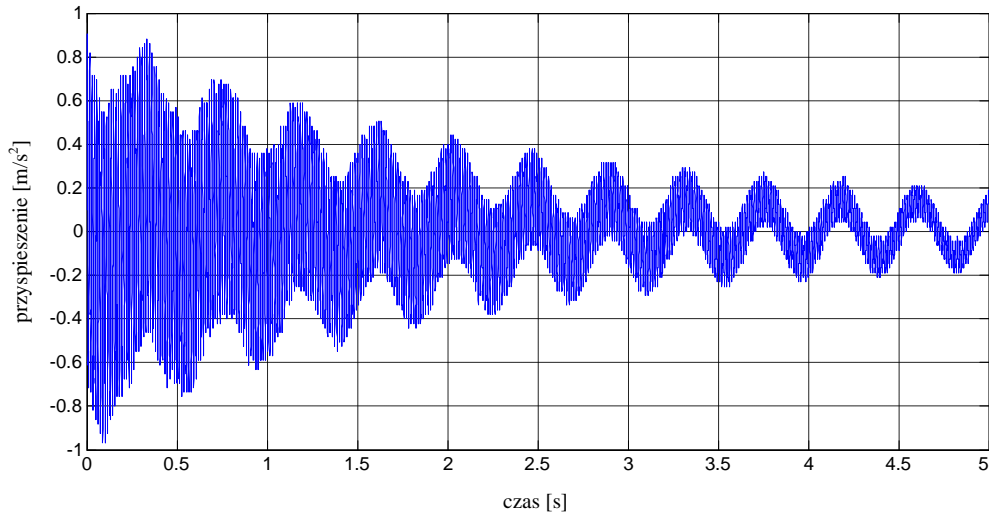
**Rys. 4.88** Przebieg czasowy przyspieszeń (po odfiltrowaniu w zakresie drugiej częstotliwości drgań) pojedynczej aluminiowej belki wspornikowej.

Dla analizowanej belki wspornikowej wartości średnie liczb tłumienia z sześciu powtórzeń wyniosły: 0,17% i 0,08%, odpowiednio dla pierwszej i drugiej częstotliwości (zob. Tab. Z.3.1 w załączniku nr 3).

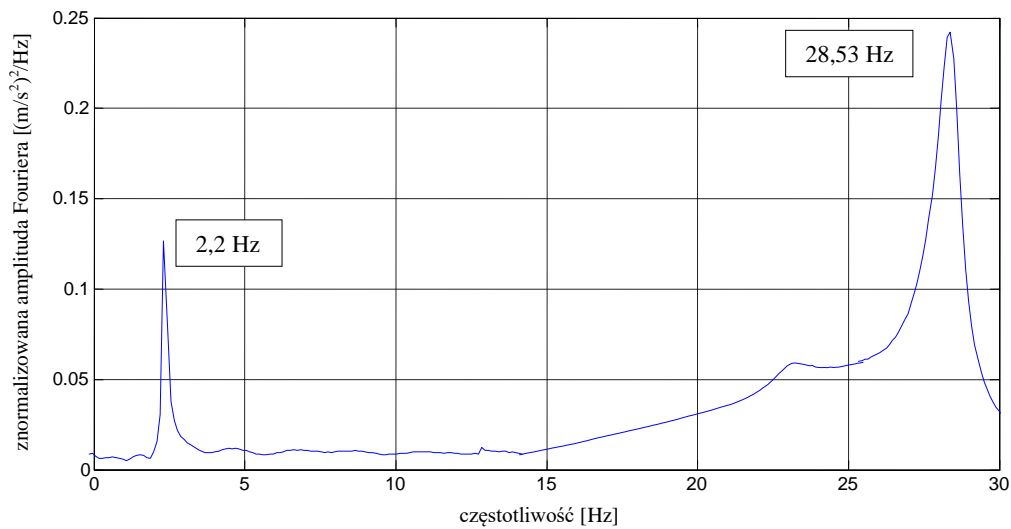
Wyniki w postaci przebiegów czasowych przyspieszeń, transformat Fouriera oraz przebiegów czasowych po odfiltrowaniu w zakresie ujawnionych częstotliwości drgań otrzymane dla pojedynczej aluminiowej belki bez warstwy tłumiącej, dodatkowo obciążonej odważnikami o różnych masach, przedstawiono na kolejnych rysunkach:

- Rys. 4.89–4.92 – odważnik o masie 1 kg;
- Rys. 4.93–4.96 – odważnik o masie 2,5 kg;
- Rys. 4.97–4.100 – odważnik o masie 3,5 kg;
- Rys. 4.101–4.104 – odważnik o masie 5 kg;
- Rys. 4.105–4.108 – odważnik o masie 6 kg.

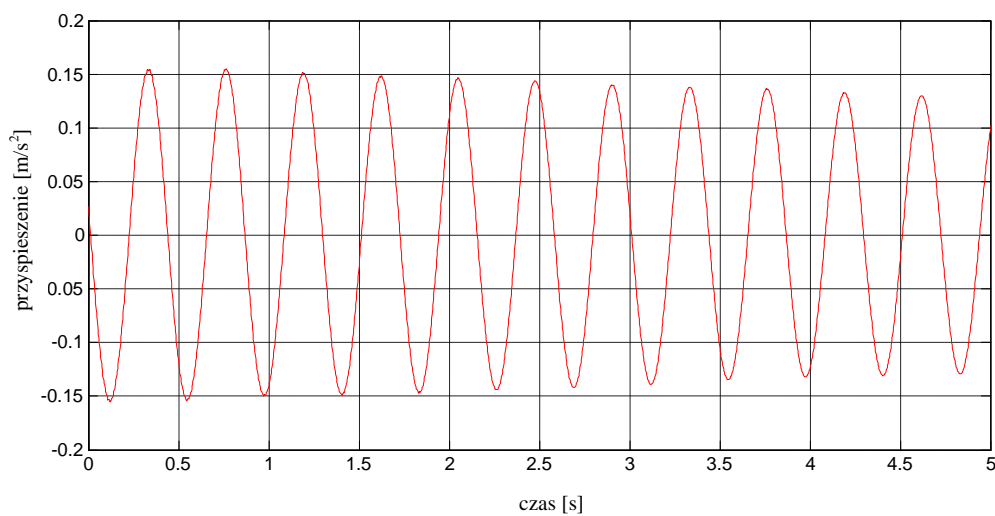
Dodatkowo, wartości średnie wszystkich częstotliwości drgań własnych wyznaczone dla aluminiowej belki wspornikowej wzbudzonej do drgań poprzez uderzenie młotkiem modalnym w środku jej rozpiętości zestawiono w Tab. 4.12 (por. załącznik nr 3).



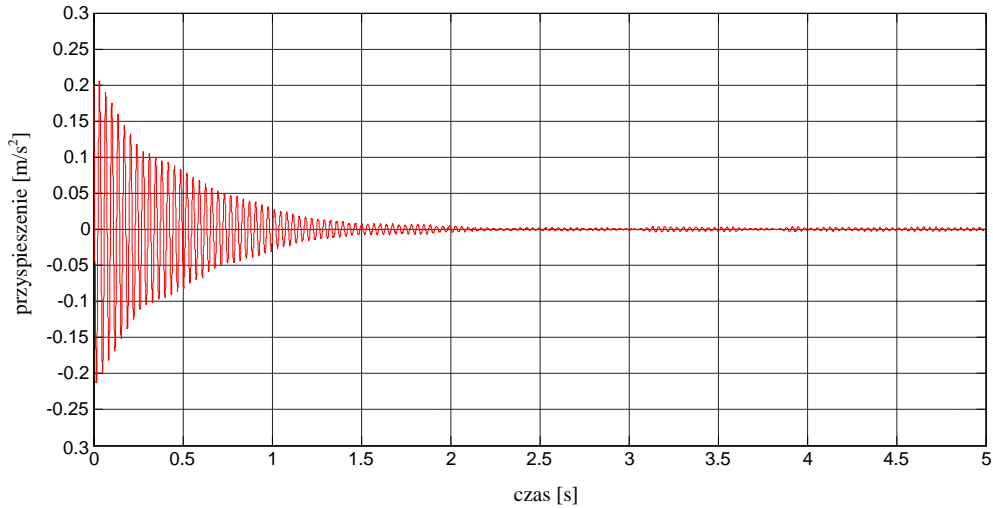
**Rys. 4.89** Przebieg czasowy przyspieszeń końca pojedynczej aluminiowej belki wspornikowej pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 1 kg).



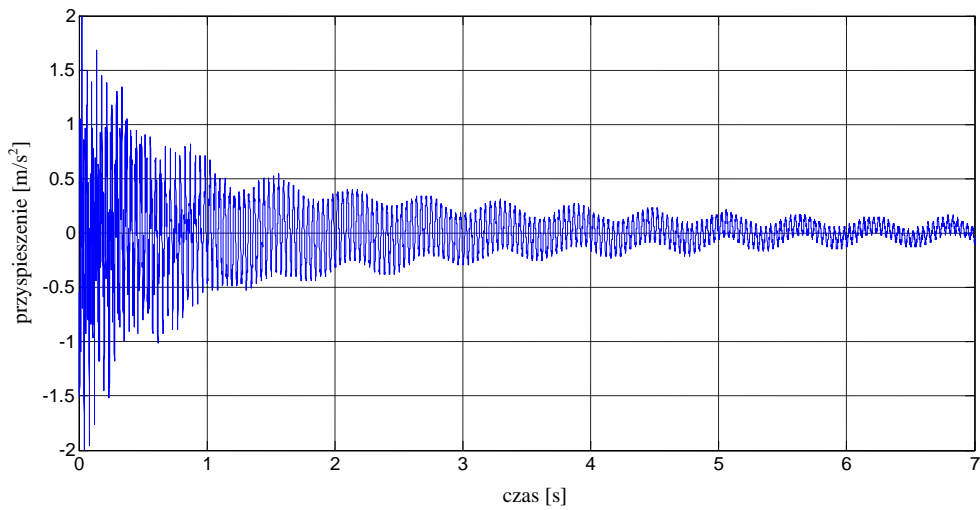
**Rys. 4.90** Transformata Fouriera dla pojedynczej aluminiowej belki wspornikowej pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 1 kg).



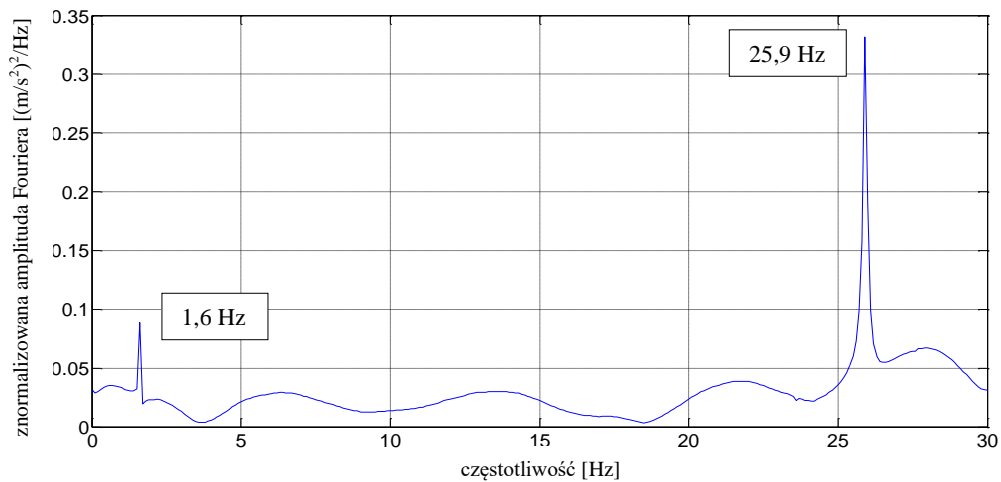
**Rys. 4.91** Przebieg czasowy przyspieszeń (po odfiltrowaniu w zakresie pierwszej częstotliwości drgań) pojedynczej aluminiowej belki wspornikowej pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 1 kg).



**Rys. 4.92** Przebieg czasowy przyspieszeń (po odfiltrowaniu w zakresie drugiej częstotliwości drgań) pojedynczej aluminiowej belki wspornikowej pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 1 kg).

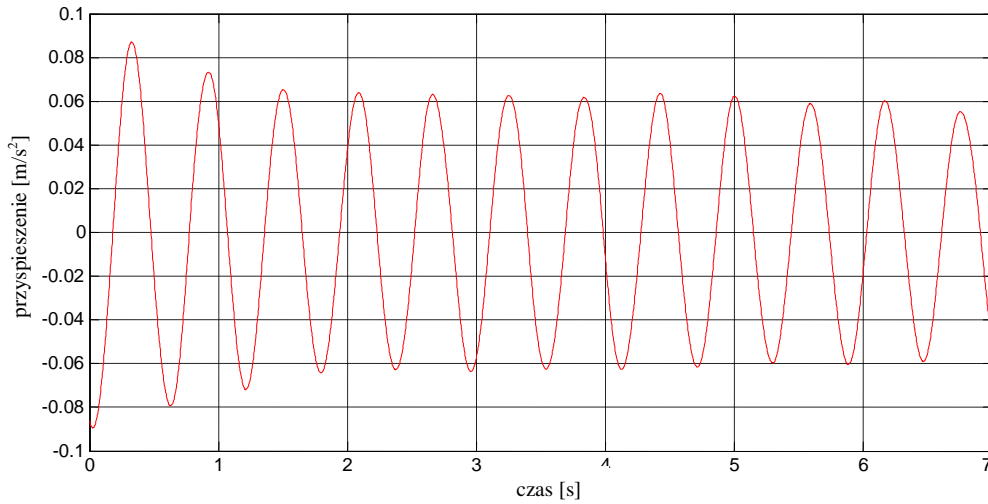


**Rys. 4.93** Przebieg czasowy przyspieszeń końca pojedynczej aluminiowej belki wspornikowej pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 2,5 kg).

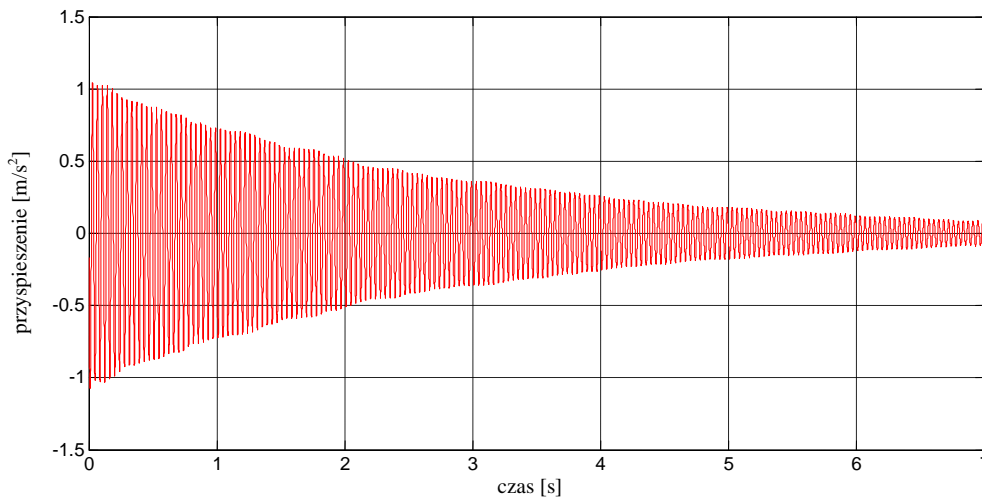


**Rys. 4.94** Transformata Fouriera dla pojedynczej aluminiowej belki wspornikowej pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 2,5 kg).

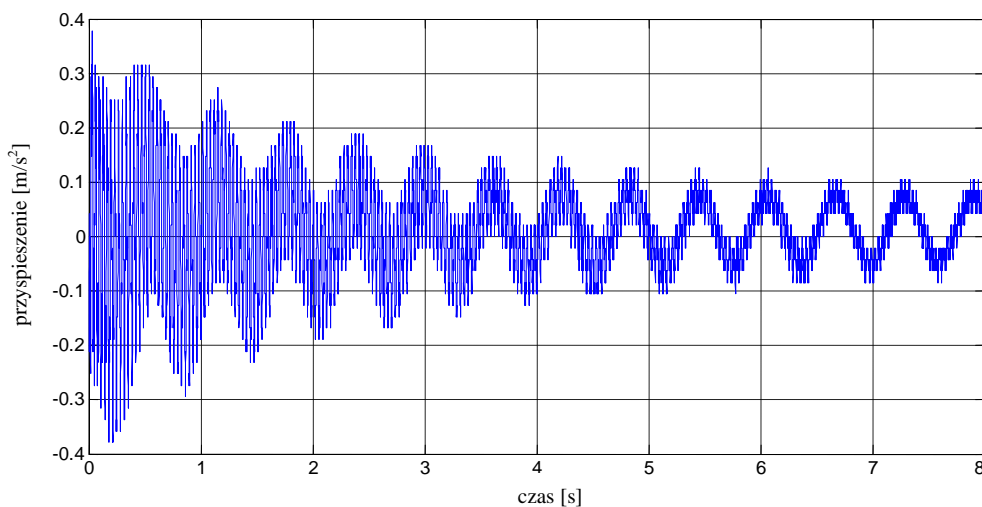




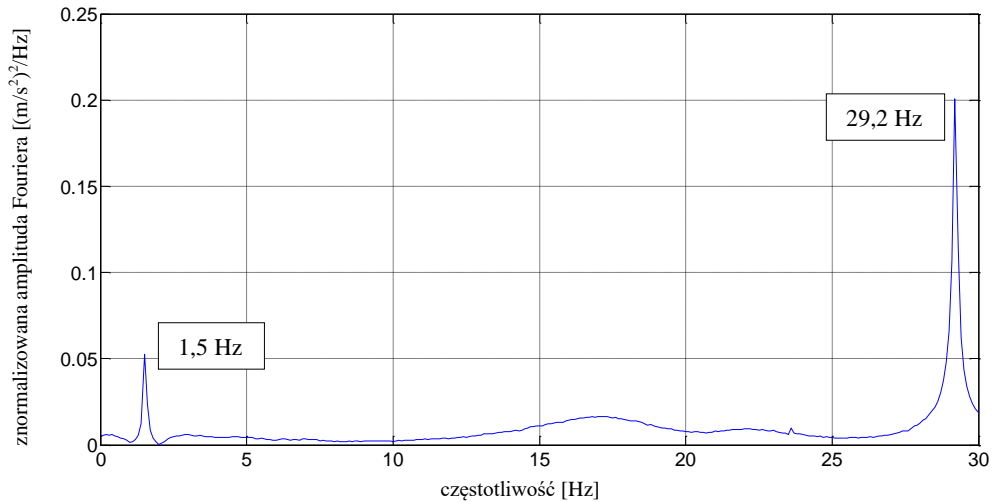
**Rys. 4.95** Przebieg czasowy przyspieszeń (po odfiltrowaniu w zakresie pierwszej częstotliwości drgań) pojedynczej aluminiowej belki wspornikowej pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 2,5 kg).



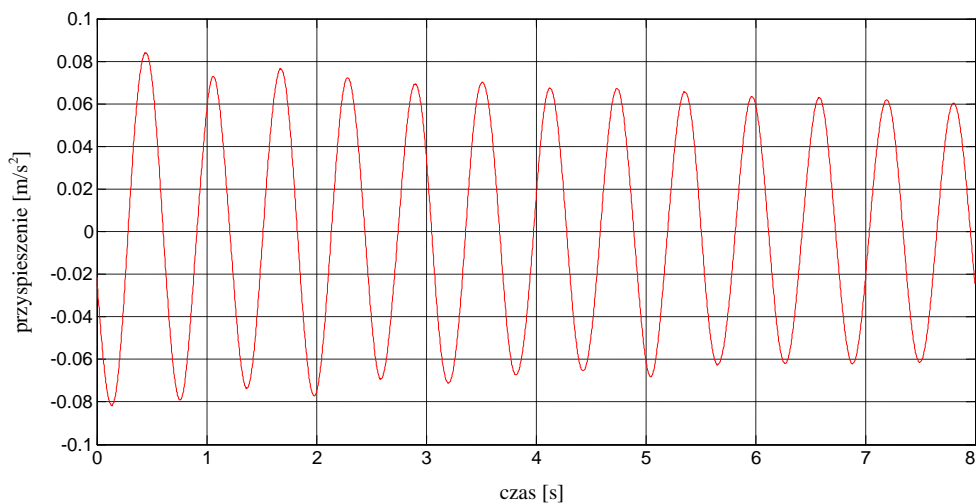
**Rys. 4.96** Przebieg czasowy przyspieszeń (po odfiltrowaniu w zakresie drugiej częstotliwości drgań) pojedynczej aluminiowej belki wspornikowej pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 2,5 kg).



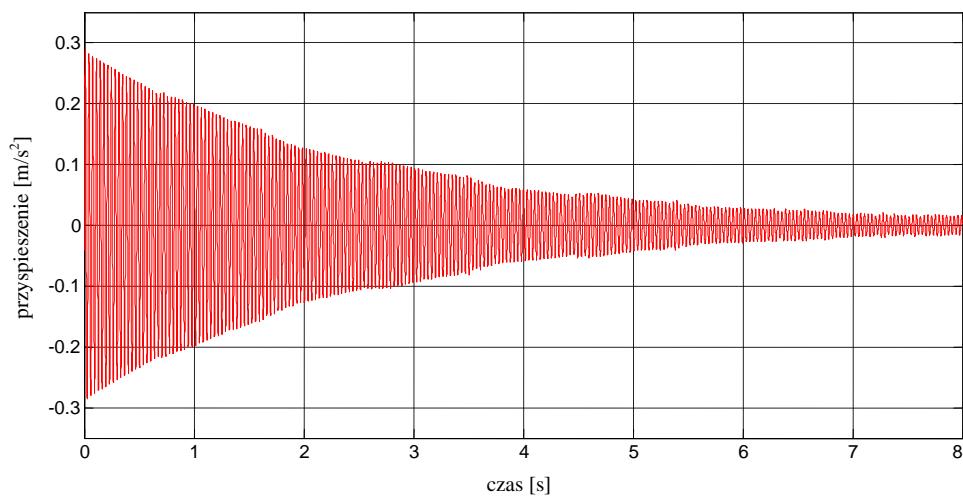
**Rys. 4.97** Przebieg czasowy przyspieszeń końca pojedynczej aluminiowej belki wspornikowej pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 3,5 kg).



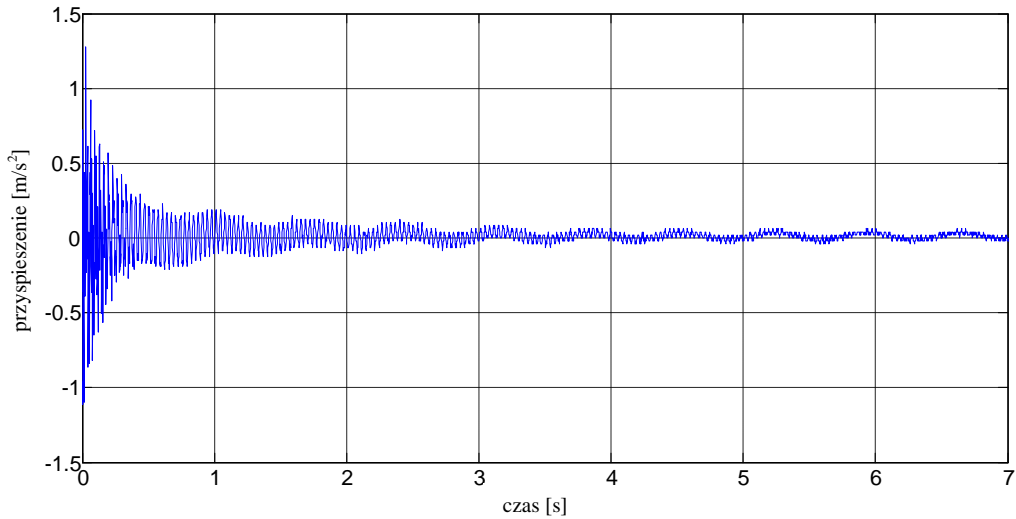
**Rys. 4.98** Transformata Fouriera dla pojedynczej aluminiowej belki wspornikowej pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 3,5 kg).



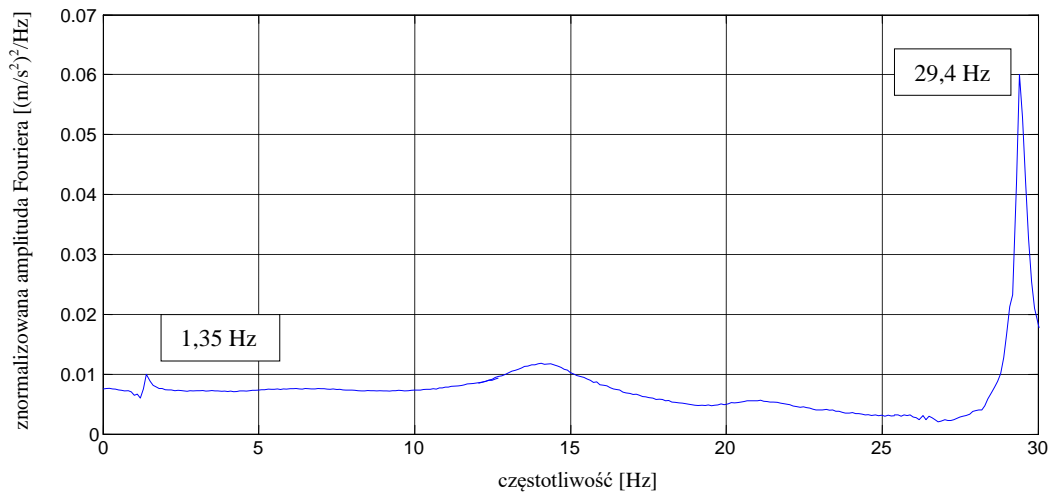
**Rys. 4.99** Przebieg czasowy przyspieszeń (po odfiltrowaniu w zakresie pierwszej częstotliwości drgań) pojedynczej aluminiowej belki wspornikowej pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 3,5 kg).



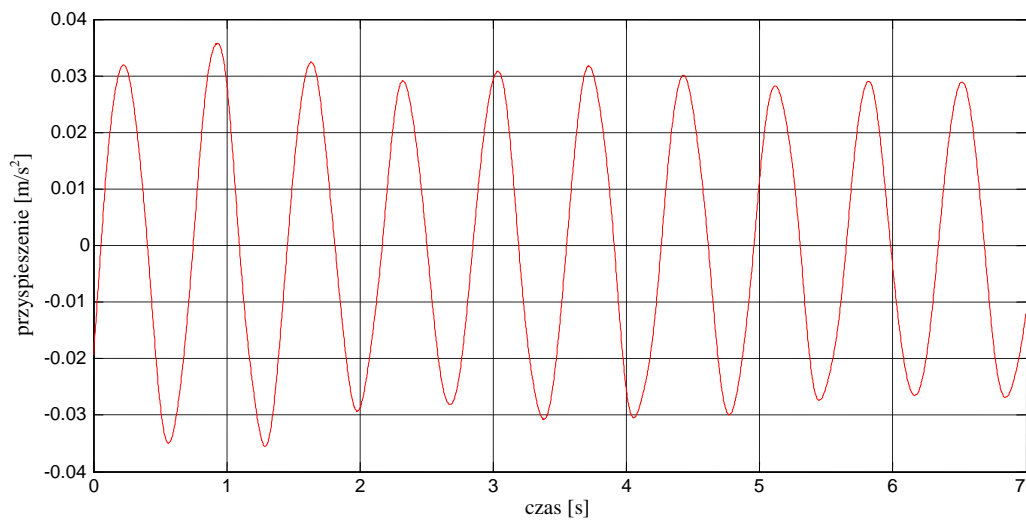
**Rys. 4.100** Przebieg czasowy przyspieszeń (po odfiltrowaniu w zakresie drugiej częstotliwości drgań) pojedynczej aluminiowej belki wspornikowej pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 3,5 kg).



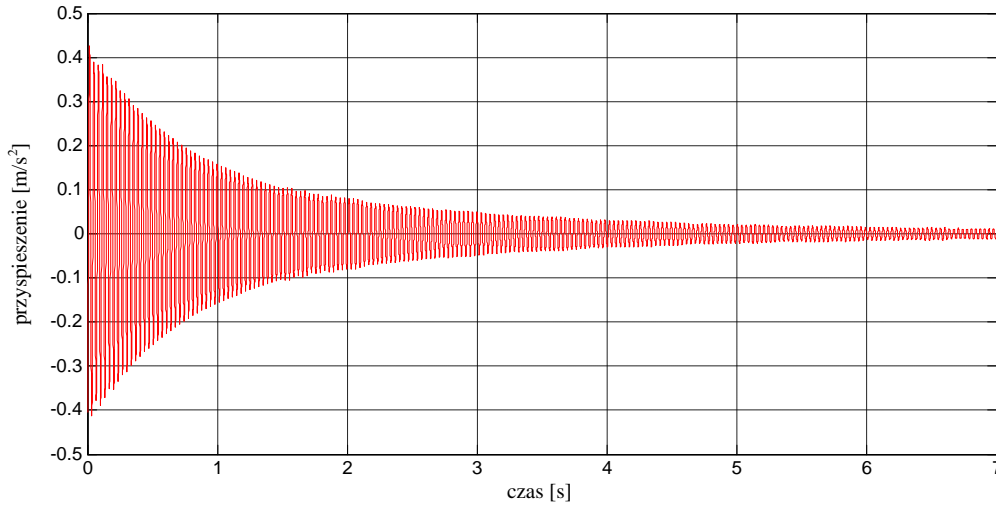
**Rys. 4.101** Przebieg czasowy przyspieszeń końca pojedynczej aluminiowej belki wspornikowej pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 5 kg).



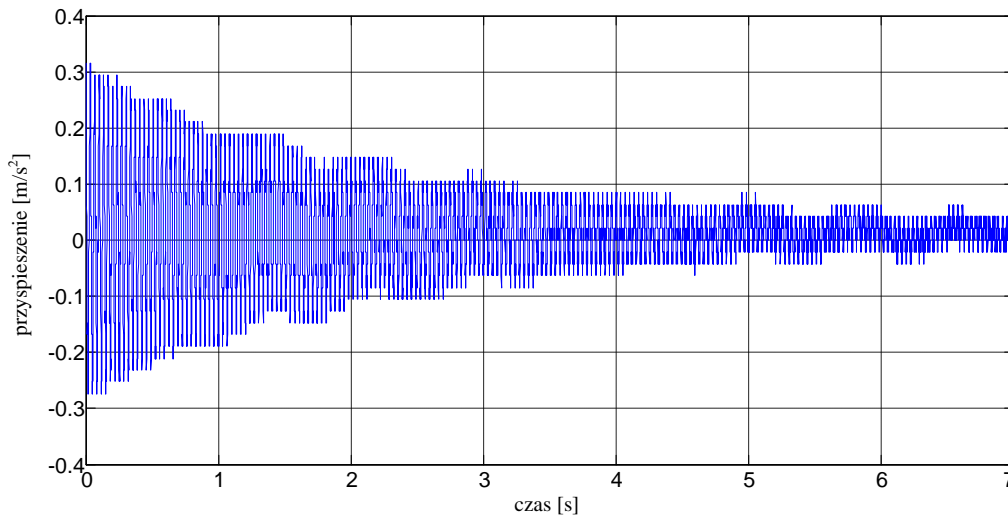
**Rys. 4.102** Transformata Fouriera dla pojedynczej aluminiowej belki wspornikowej pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 5 kg).



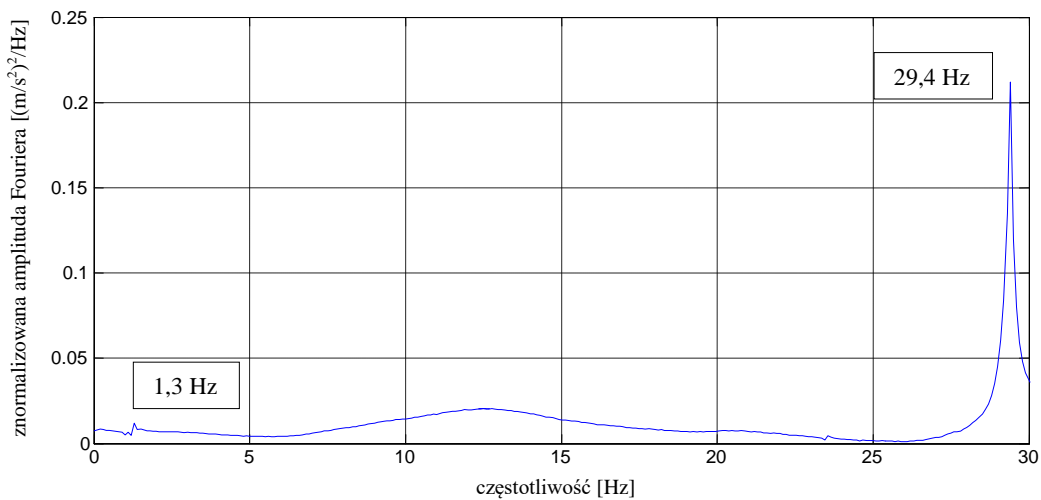
**Rys. 4.103** Przebieg czasowy przyspieszeń (po odfiltrowaniu w zakresie pierwszej częstotliwości drgań) pojedynczej aluminiowej belki wspornikowej pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 5 kg).



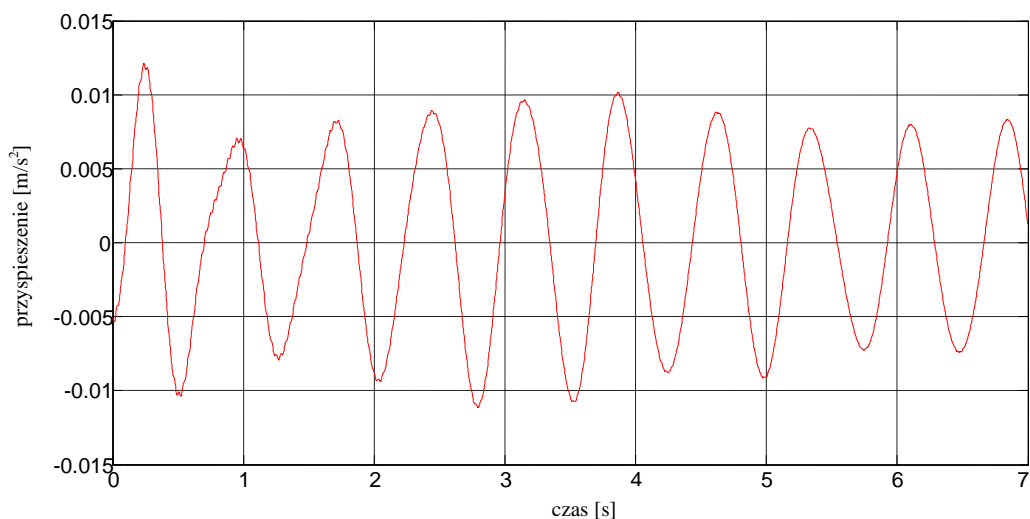
**Rys. 4.104** Przebieg czasowy przyspieszeń (po odfiltrowaniu w zakresie drugiej częstotliwości drgań) pojedynczej aluminiowej belki wspornikowej pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 5 kg).



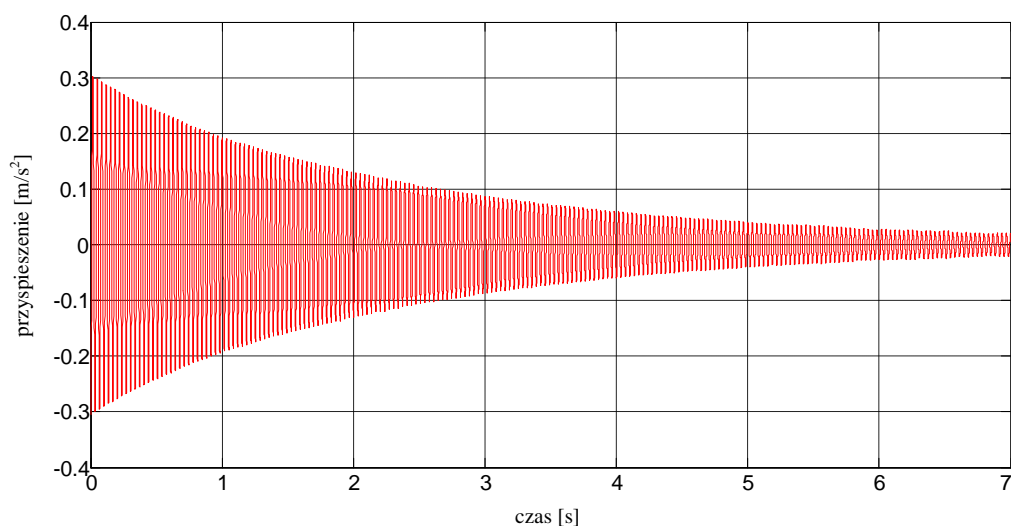
**Rys. 4.105** Przebieg czasowy przyspieszeń końca pojedynczej aluminiowej belki wspornikowej pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 6 kg).



**Rys. 4.106** Transformata Fouriera dla pojedynczej aluminiowej belki wspornikowej pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 6 kg).



**Rys. 4.107** Przebieg czasowy przyspieszeń (po odfiltrowaniu w zakresie pierwszej częstotliwości drgań) pojedynczej aluminiowej belki wspornikowej pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 6 kg).



**Rys. 4.108** Przebieg czasowy przyspieszeń (po odfiltrowaniu w zakresie drugiej częstotliwości drgań) pojedynczej aluminiowej belki wspornikowej pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 6 kg).

**Tab. 4.12** Częstotliwości drgań poprzecznych pojedynczej aluminiowej belki wspornikowej

Dodatkowe obciążenie - masa odważnika [kg]	Częstotliwość drgań poprzecznych [Hz]	
	Pierwsza postać drgań	Druga postać drgań
brak	4,00	26,80
1,0	2,20	28,53
2,5	1,60	25,90
3,5	1,50	29,20
5,0	1,35	29,40
6,0	1,30	29,40

W wyniku przeprowadzonych badań zaobserwowano, że przyłożenie dodatkowego obciążenia w postaci odważników o różnych masach prowadzi do

istotnego spadku wartości podstawowej częstotliwości drgań aluminiowej belki wspornikowej (patrz Tab. 4.12). W przypadku pierwszej postaci i zamocowania odważnika o masie 6 kg zaobserwowano przesunięcie podstawowej częstotliwości w kierunku pasm o niższej wartości o 68% w porównaniu z belką nieobciążoną. Z kolei, wartości średnie częstotliwości drgań odpowiadające drugiej postaci drgań własnych utrzymują się na podobnym poziomie wahając się pomiędzy 25,9 a 29,4 Hz.

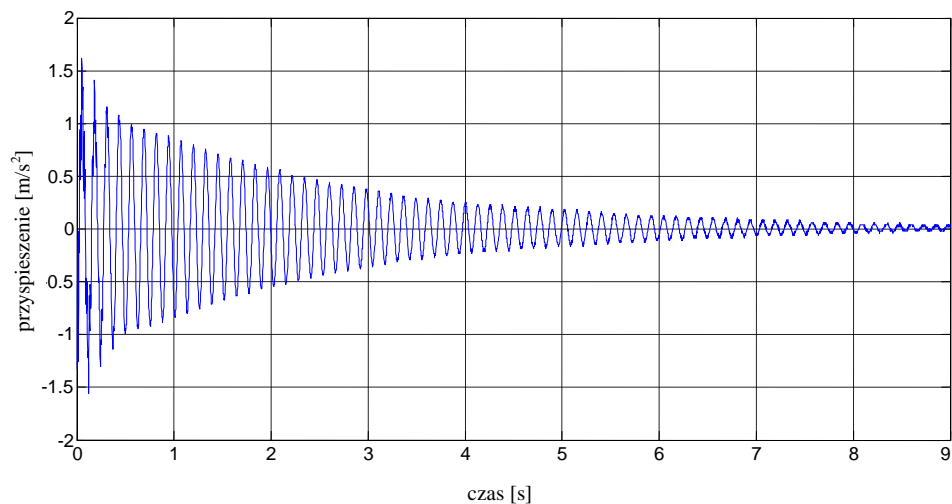
W Tab. 4.13 przedstawiono, wyznaczone na podstawie równania (4.3), wartości średnie liczb tłumienia dla wcześniej zaprezentowanych przebiegów czasowych przyspieszeń po odfiltrowaniu w zakresie ujawnionych częstotliwości drgań analizowanej belki. Z Tab. 4.13 można zaobserwować, że wyznaczone średnie wartości liczby tłumienia pojedynczej aluminiowej belki wspornikowej wahają się pomiędzy 0,17 a 0,50% w przypadku pierwszej postaci drgań oraz pomiędzy 0,08 a 1,16% w przypadku drugiej postaci drgań własnych.

**Tab. 4.13** Liczby tłumienia dwóch pierwszych częstotliwości drgań poprzecznych pojedynczej aluminiowej belki wspornikowej.

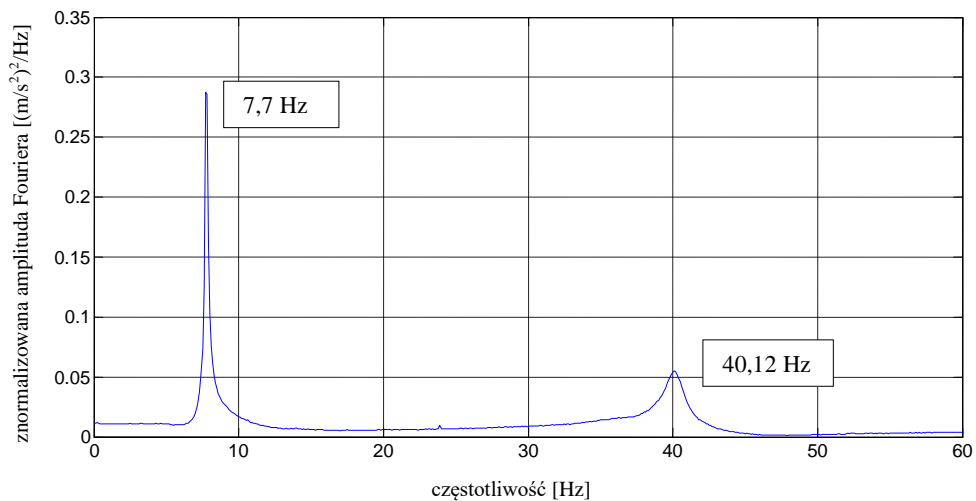
Dodatkowe obciążenie - masa odważnika [kg]	Liczba tłumienia [%]	
	Pierwsza postać drgań	Druga postać drgań
Brak	0,17	0,08
1,0	0,29	0,71
2,5	0,45	0,18
3,5	0,37	0,19
5,0	0,50	0,35
6,0	0,19	0,20

### 4.3.3 WYNIKI BADAŃ DLA ZŁOŻONEJ BELKI WSPORNIKOWEJ Z WARSTWĄ POLIMERU O GRUBOŚCI 0,5 MM

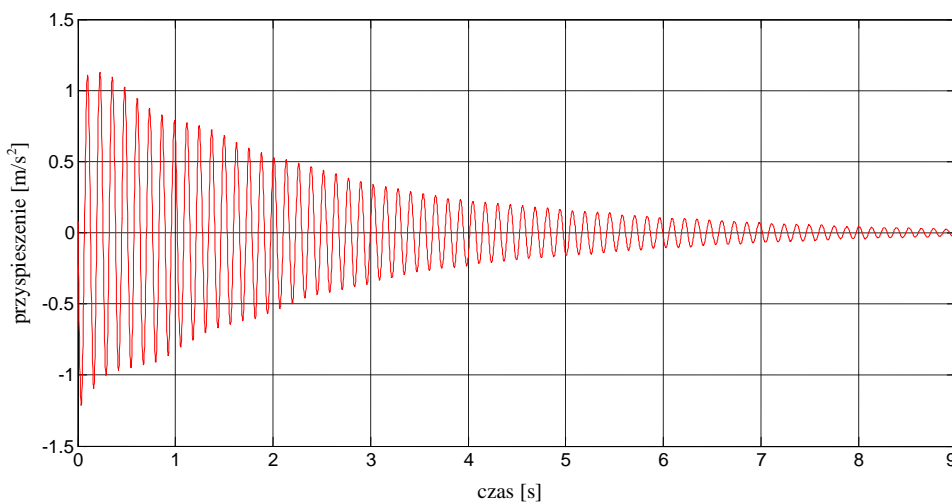
Na Rys. 4.109 przedstawiono reprezentatywny przebieg czasowy przyspieszeń uzyskany dla belki wspornikowej złożonej z dwóch aluminiowych płaskowników sklejonych warstwą polimeru o grubości 0,5 mm, wzbudzanej do drgań poprzez uderzenie w środku jej rozpiętości młotkiem modalnym. Dla przebiegu czasowego wykonano szybką transformatę Fouriera (patrz Rys. 4.110), która ujawniła dwie dominujące częstotliwości drgań własnych o wartościach 7,7 Hz oraz 40,12 Hz. Na Rys. 4.111 i 4.112 przedstawiono przebiegi czasowe przyspieszeń po odfiltrowaniu w zakresie pierwszej i drugiej częstotliwości drgań analizowanej belki.



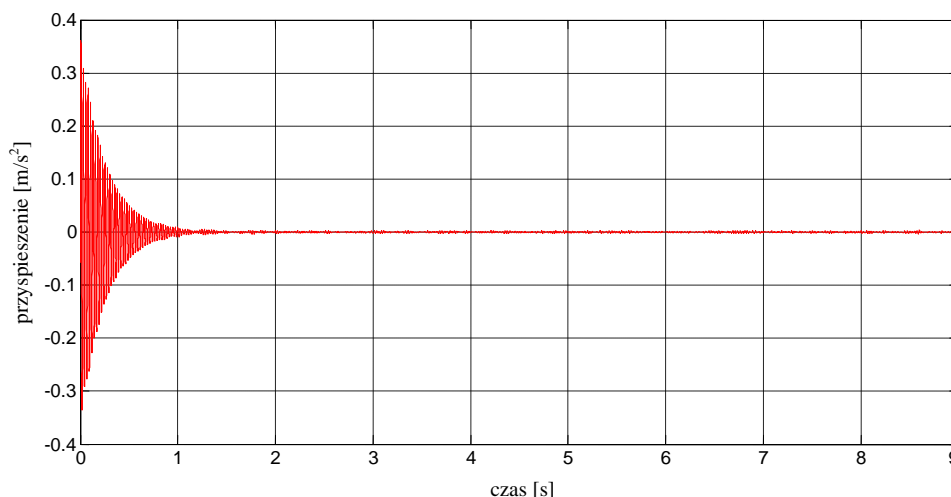
**Rys. 4.109** Przebieg czasowy przyspieszeń końca złożonej belki wspornikowej (grubość polimeru 0,5 mm).



**Rys. 4.110** Transformata Fouriera dla złożonej belki wspornikowej (grubość polimeru 0,5 mm).



**Rys. 4.111** Przebieg czasowy przyspieszeń (po odfiltrowaniu w zakresie pierwszej częstotliwości drgań) złożonej belki wspornikowej (grubość polimeru 0,5 mm).



**Rys. 4.112** Przebieg czasowy przyspieszeń (po odfiltrowaniu w zakresie drugiej częstotliwości drgań) złożonej belki wspornikowej (grubość polimeru 0,5 mm).

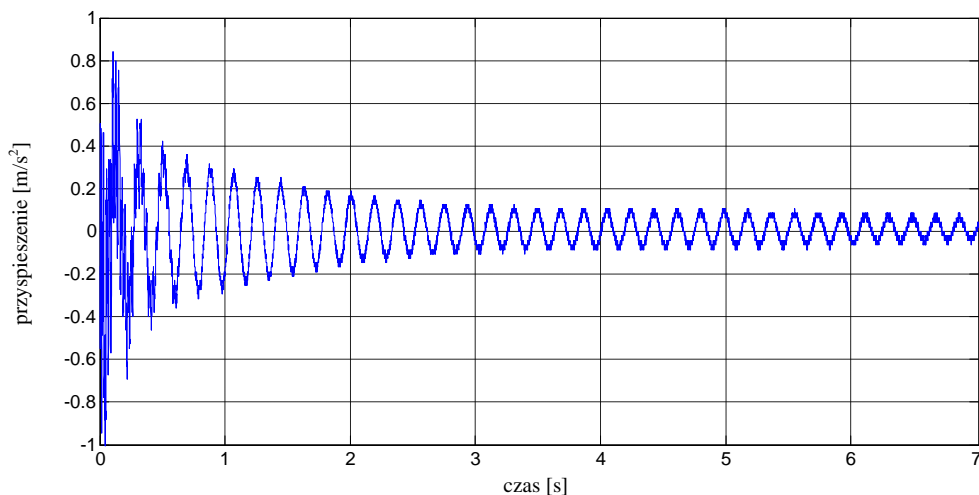
Dla analizowanej belki wspornikowej wartości średnie liczb tłumienia z sześciu powtórzeń wyniosły: 0,76% i 1,37%, odpowiednio dla pierwszej i drugiej częstotliwości (zob. Tab. Z.4.1 w załączniku nr 4).

Wyniki w postaci przebiegów czasowych przyspieszeń, transformat Fouriera oraz przebiegów czasowych po odfiltrowaniu w zakresie ujawnionych częstotliwości drgań otrzymane dla złożonej belki wspornikowej, dodatkowo obciążonej odważnikami o różnych masach, przedstawiono na kolejnych rysunkach:

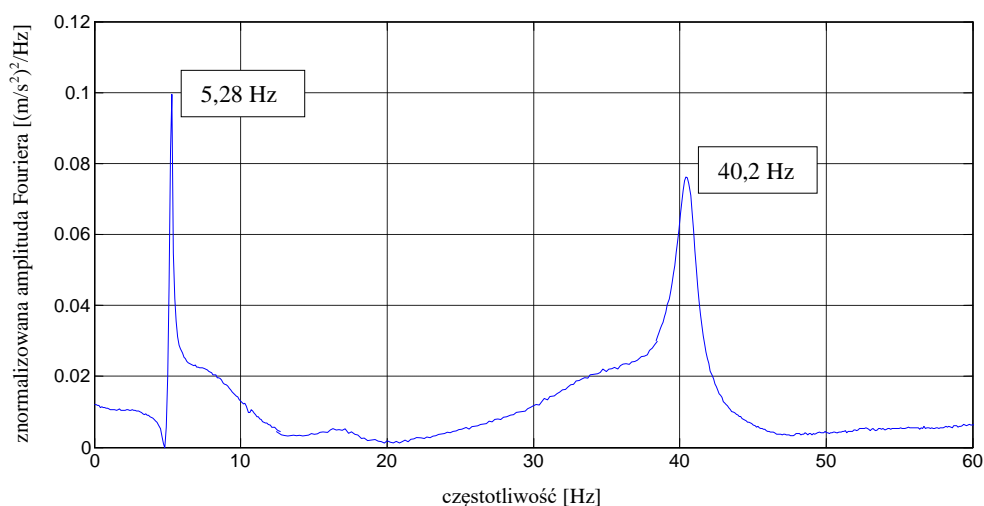
- Rys. 4.113–4.116 – odważnik o masie 1 kg;
- Rys. 4.117–4.120 – odważnik o masie 2,5 kg;
- Rys. 4.121–4.124 – odważnik o masie 3,5 kg;
- Rys. 4.125–4.128 – odważnik o masie 5 kg;
- Rys. 4.129–4.132 – odważnik o masie 6 kg.

Dodatkowo, wartości średnie wszystkich otrzymanych częstotliwości drgań własnych wyznaczone dla złożonej belki wspornikowej, zestawiono w Tab. 4.14 (por. załącznik nr 4). Jednocześnie na Rys. 4.133 i 4.134 przedstawiono porównanie wartości częstotliwości odpowiadające pierwszej i drugiej postaci drgań belek wspornikowych (bez oraz z warstwą polimeru) wraz z funkcjami aproksymującymi postaci  $y = ax^b$ , dla których parametry  $a$  i  $b$  wyznaczono poprzez minimalizację średniego błędu kwadratowego (Bendat i Piersol 1971).

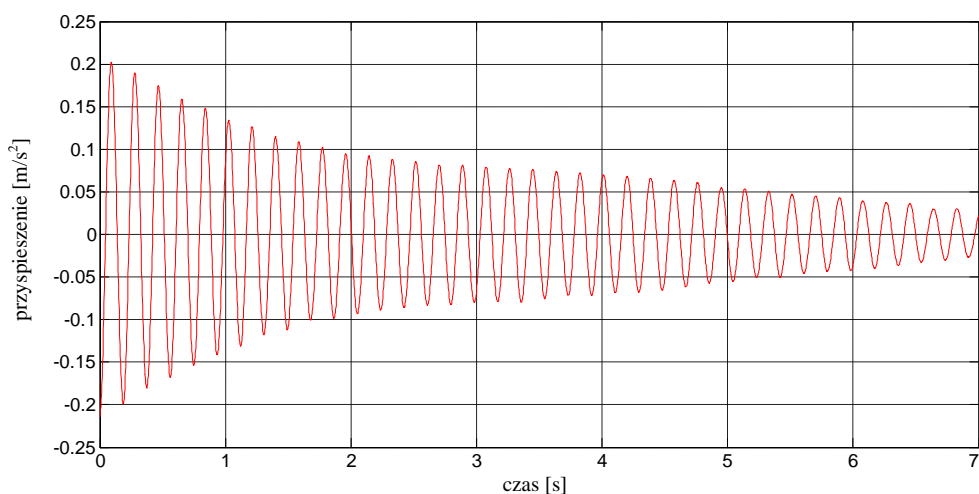




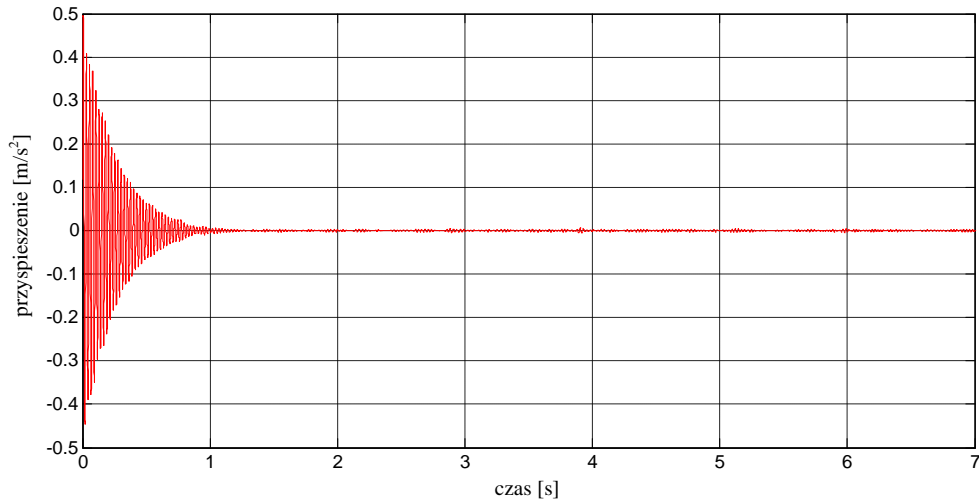
**Rys. 4.113** Przebieg czasowy przyspieszeń końca złożonej belki wspornikowej (grubość polimeru 0,5 mm) pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 1 kg).



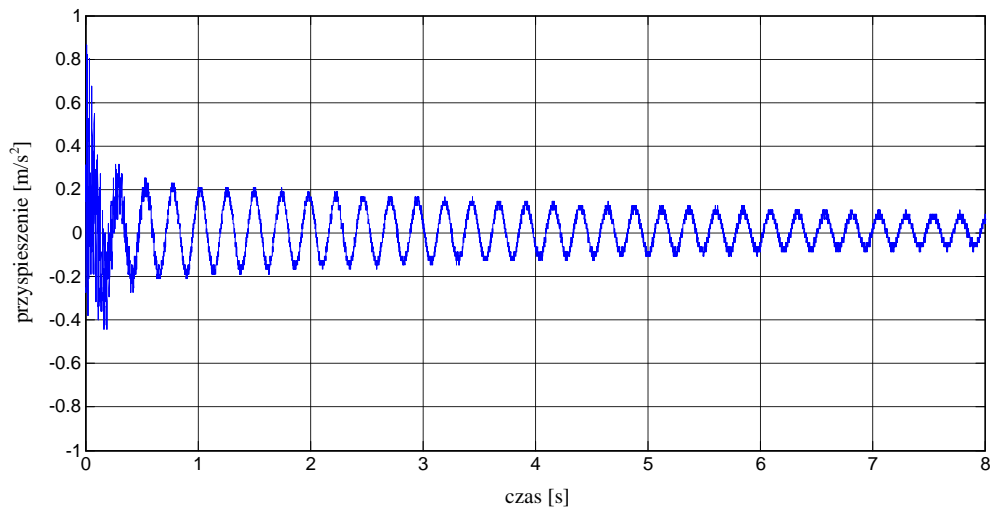
**Rys. 4.114** Transformata Fouriera dla złożonej belki wspornikowej (grubość polimeru 0,5 mm) pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 1 kg).



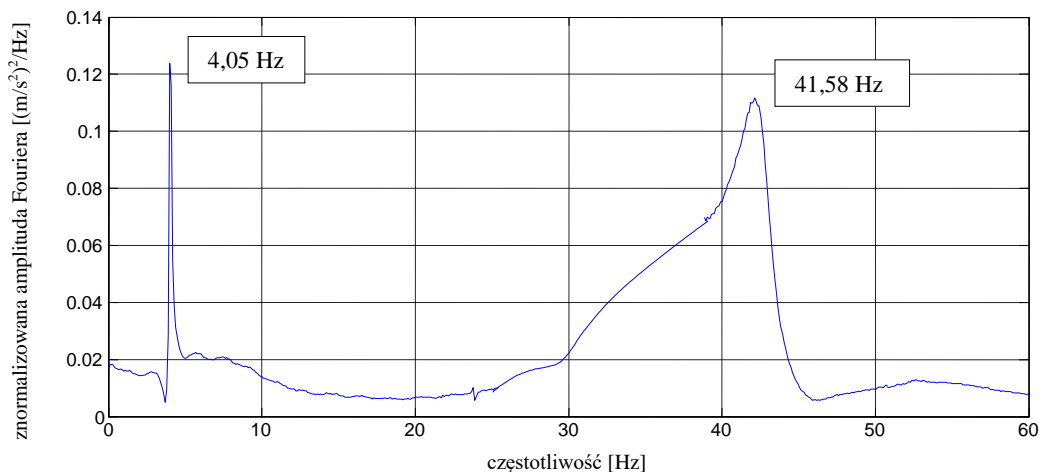
**Rys. 4.115** Przebieg czasowy przyspieszeń (po odfiltrowaniu w zakresie pierwszej częstotliwości drgań) złożonej belki wspornikowej (grubość polimeru 0,5 mm) pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 1 kg).



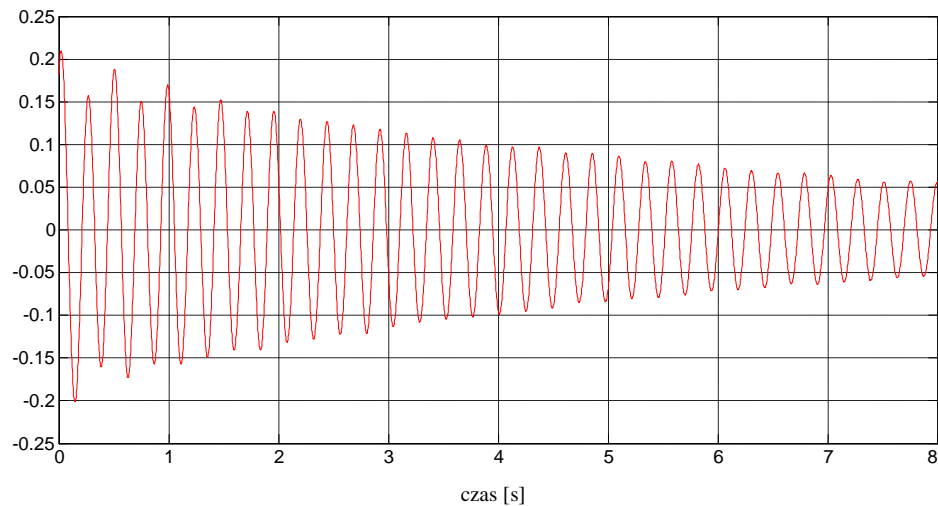
**Rys. 4.116** Przebieg czasowy przyspieszeń (po odfiltrowaniu w zakresie drugiej częstotliwości drgań) złożonej belki wspornikowej (grubość polimeru 0,5 mm) pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 1 kg).



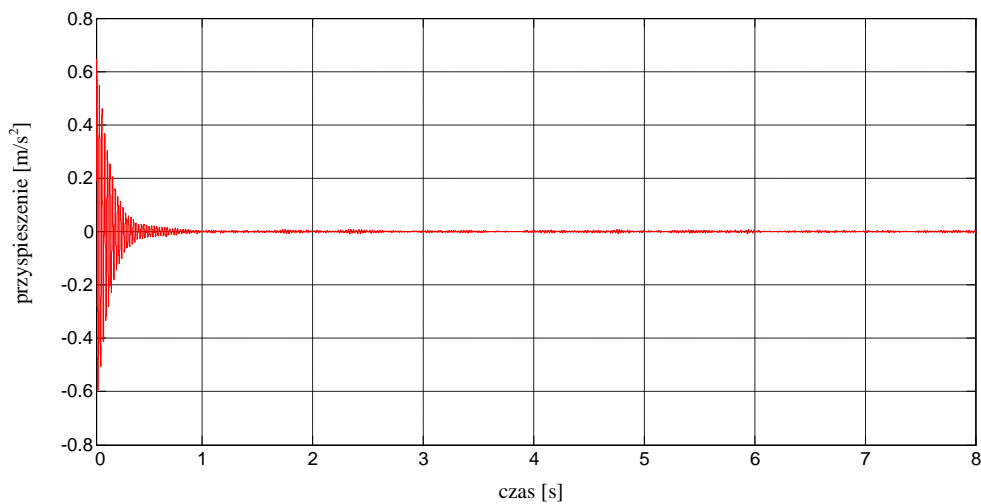
**Rys. 4.117** Przebieg czasowy przyspieszeń końca złożonej belki wspornikowej (grubość polimeru 0,5 mm) pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 2,5 kg).



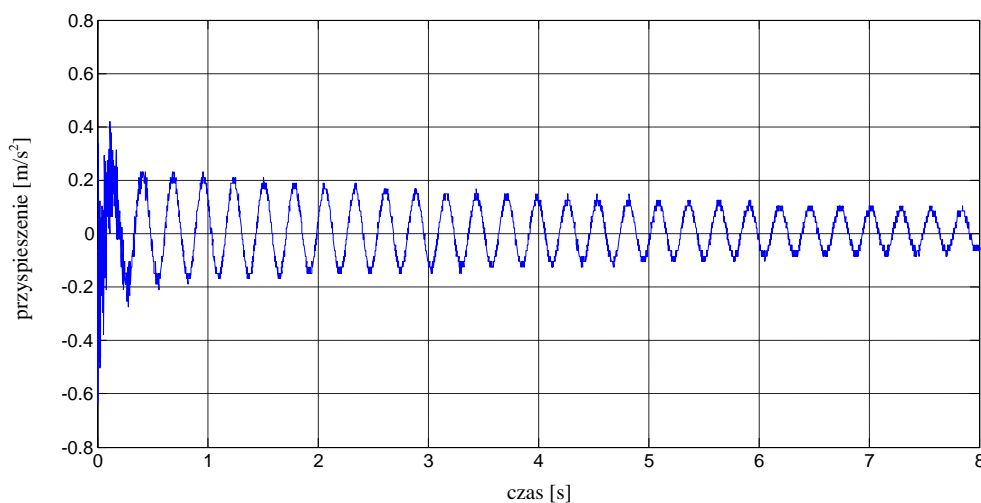
**Rys. 4.118** Transformata Fouriera dla złożonej belki wspornikowej (grubość polimeru 0,5 mm) pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 2,5 kg).



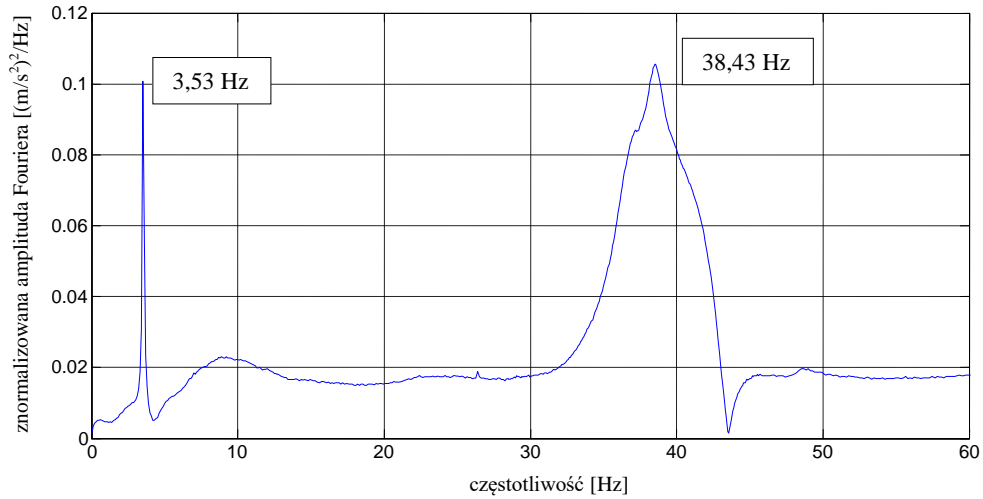
**Rys. 4.119** Przebieg czasowy przyspieszeń (po odfiltrowaniu w zakresie pierwszej częstotliwości drgań) złożonej belki wspornikowej (grubość polimeru 0,5 mm) pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 2,5 kg).



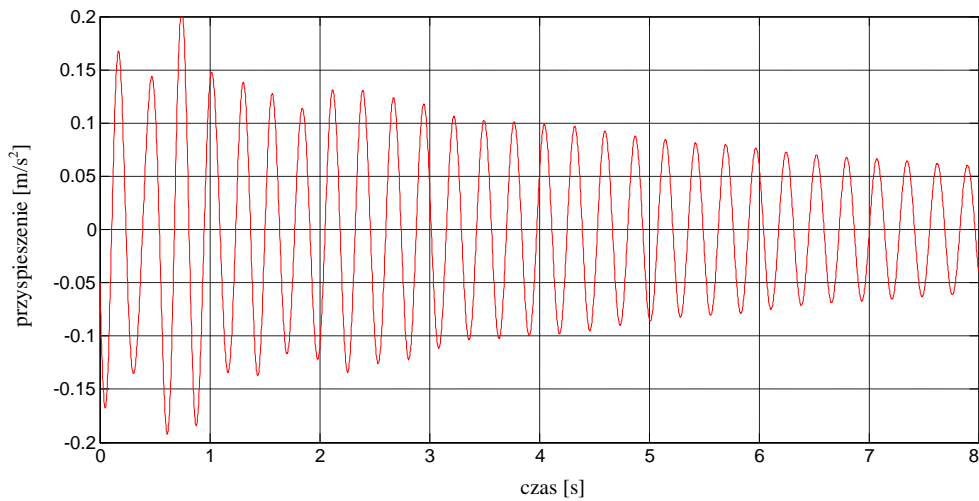
**Rys. 4.120** Przebieg czasowy przyspieszeń (po odfiltrowaniu w zakresie drugiej częstotliwości drgań) złożonej belki wspornikowej (grubość polimeru 0,5 mm) pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 2,5 kg).



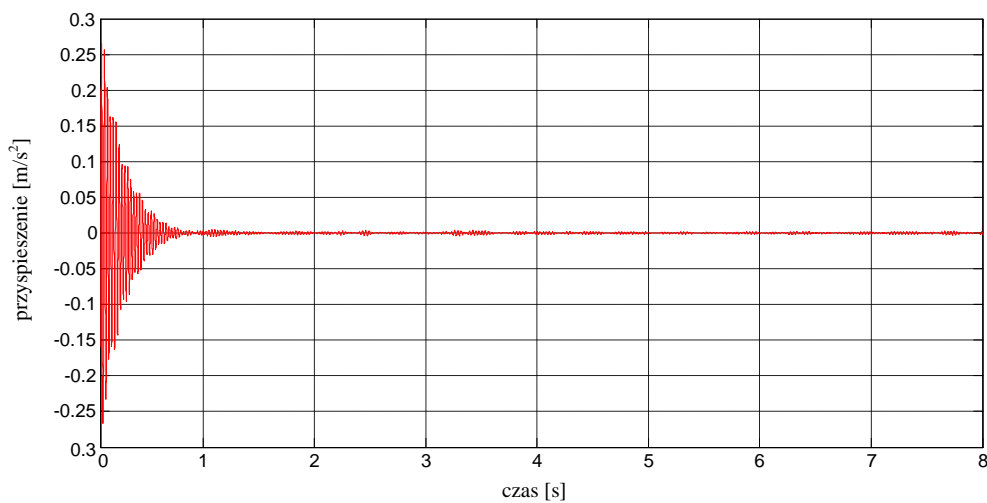
**Rys. 4.121** Przebieg czasowy przyspieszeń końca złożonej belki wspornikowej (grubość polimeru 0,5 mm) pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 3,5 kg).



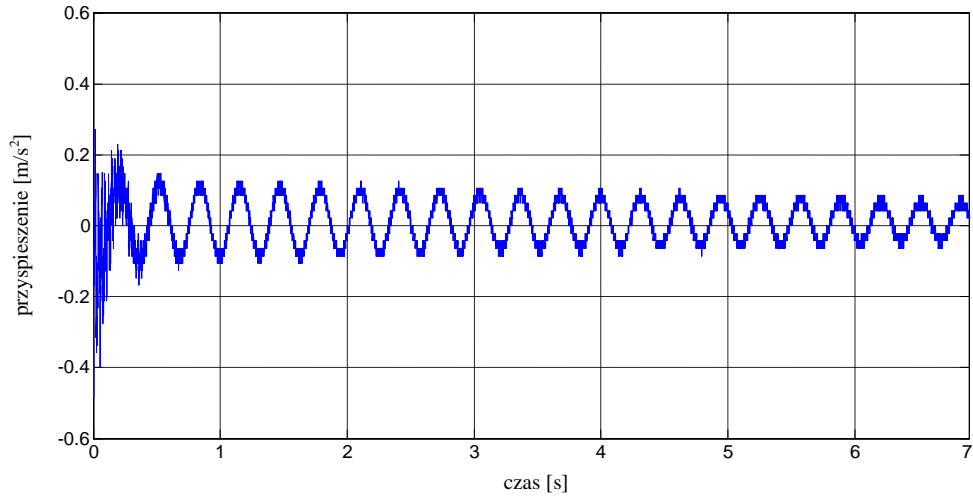
**Rys. 4.122** Transformata Fouriera dla złożonej belki wspornikowej (grubość polimeru 0,5 mm) pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 3,5 kg).



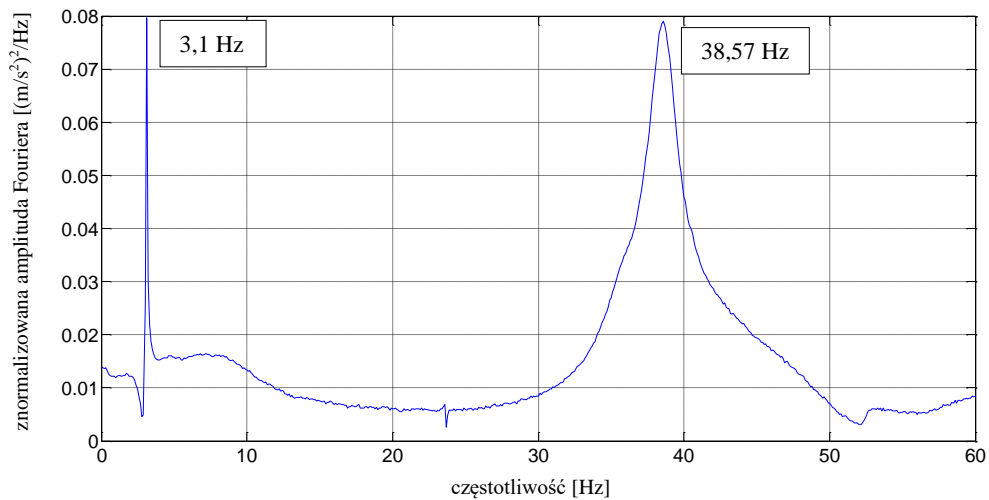
**Rys. 4.123** Przebieg czasowy przyspieszeń (po odfiltrowaniu w zakresie pierwszej częstotliwości drgań) złożonej belki wspornikowej (grubość polimeru 0,5 mm) pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 3,5 kg).



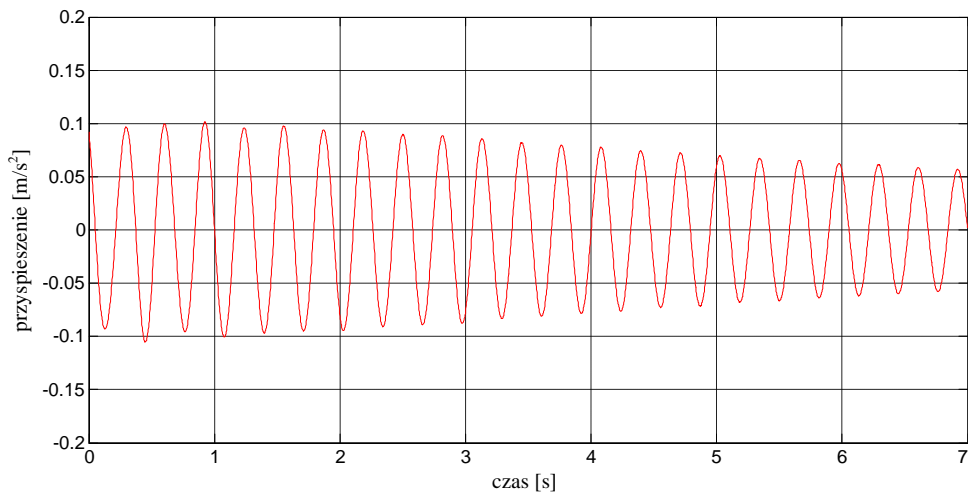
**Rys. 4.124** Przebieg czasowy przyspieszeń (po odfiltrowaniu w zakresie drugiej częstotliwości drgań) złożonej belki wspornikowej (grubość polimeru 0,5 mm) pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 3,5 kg).



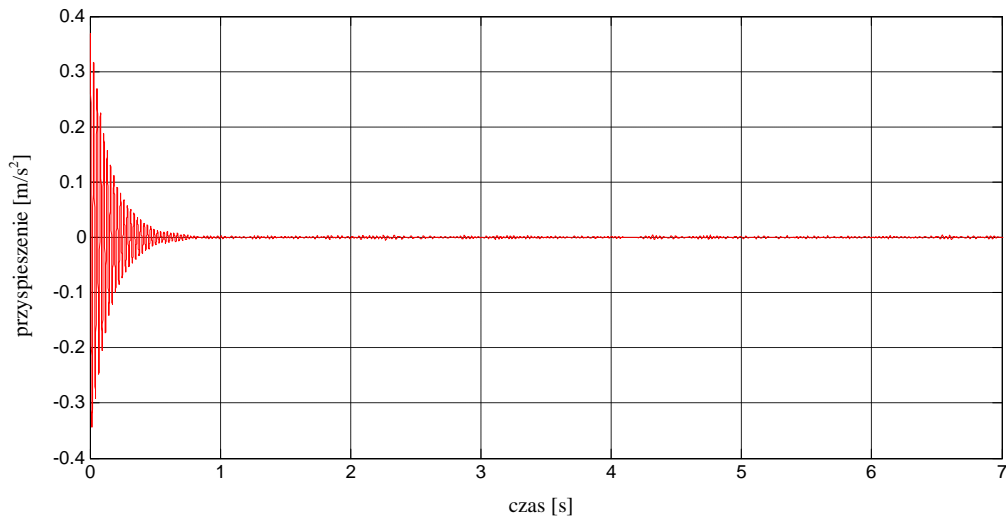
**Rys. 4.125** Przebieg czasowy przyspieszeń końca złożonej belki wspornikowej (grubość polimeru 0,5 mm) pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 5 kg).



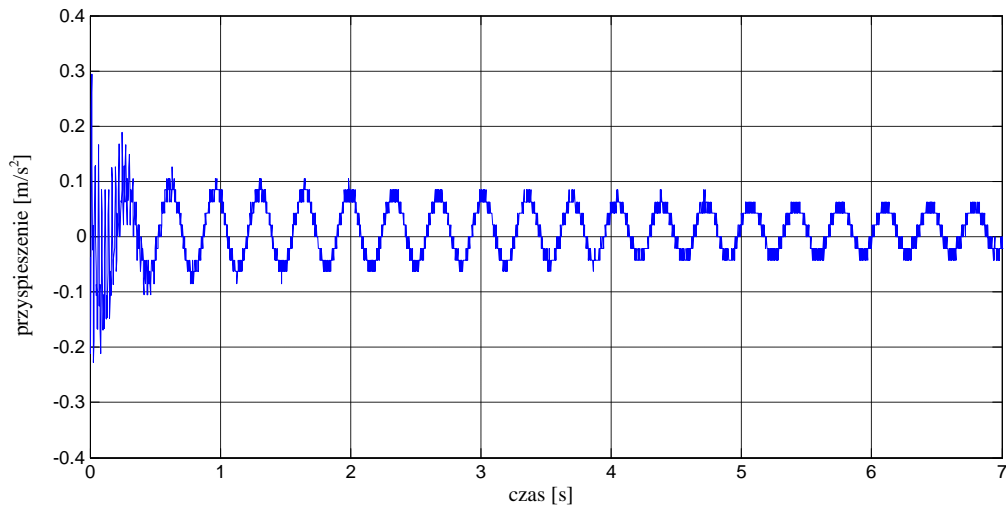
**Rys. 4.126** Transformata Fouriera dla złożonej belki wspornikowej (grubość polimeru 0,5 mm) pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 5 kg).



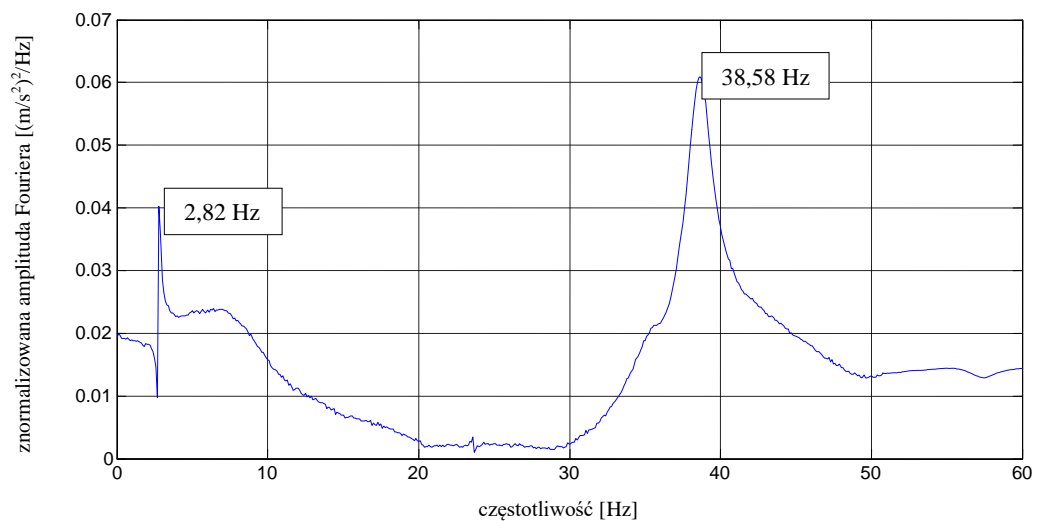
**Rys. 4.127** Przebieg czasowy przyspieszeń (po odfiltrowaniu w zakresie pierwszej częstotliwości drgań) złożonej belki wspornikowej (grubość polimeru 0,5 mm) pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 5 kg).



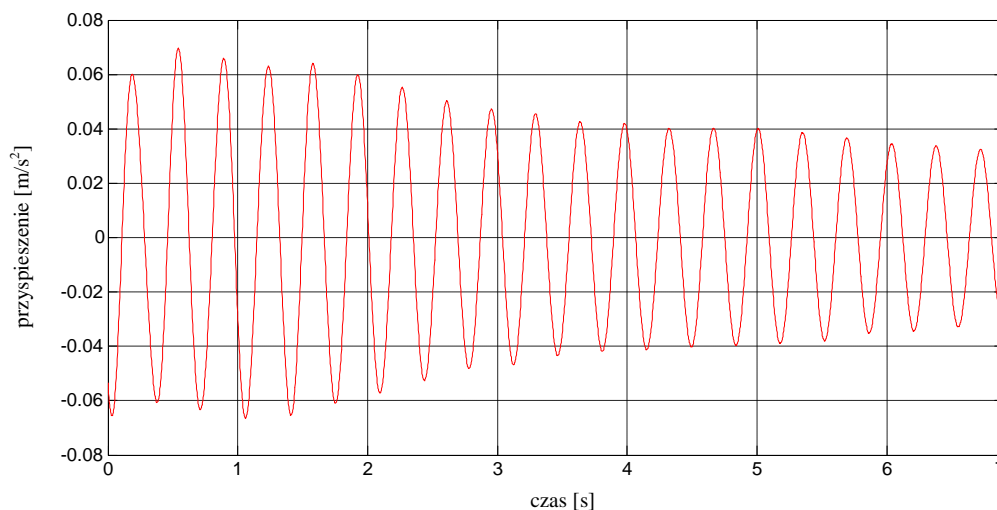
**Rys. 4.128** Przebieg czasowy przyspieszeń (po odfiltrowaniu w zakresie drugiej częstotliwości drgań) złożonej belki wspornikowej (grubość polimeru 0,5 mm) pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 5 kg).



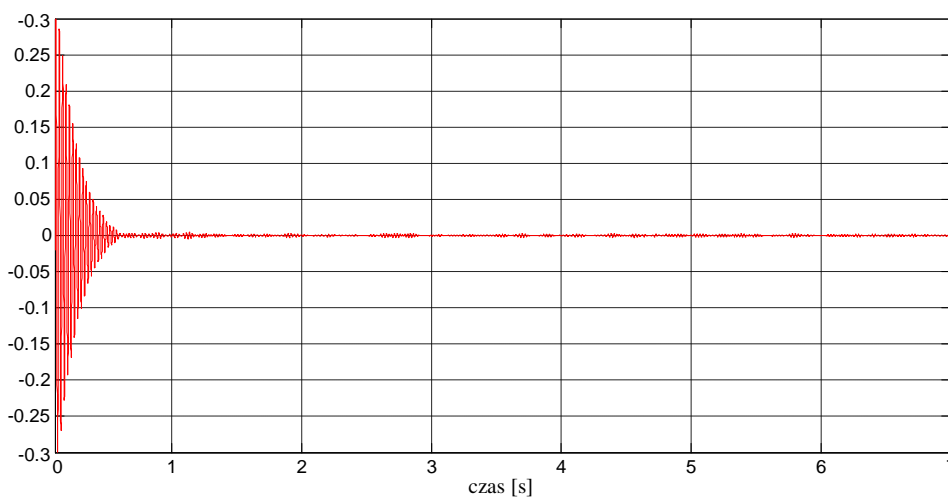
**Rys. 4.129** Przebieg czasowy przyspieszeń końca złożonej belki wspornikowej (grubość polimeru 0,5 mm) pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 6 kg).



**Rys. 4.130** Transformata Fouriera dla złożonej belki wspornikowej (grubość polimeru 0,5 mm) pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 6 kg).



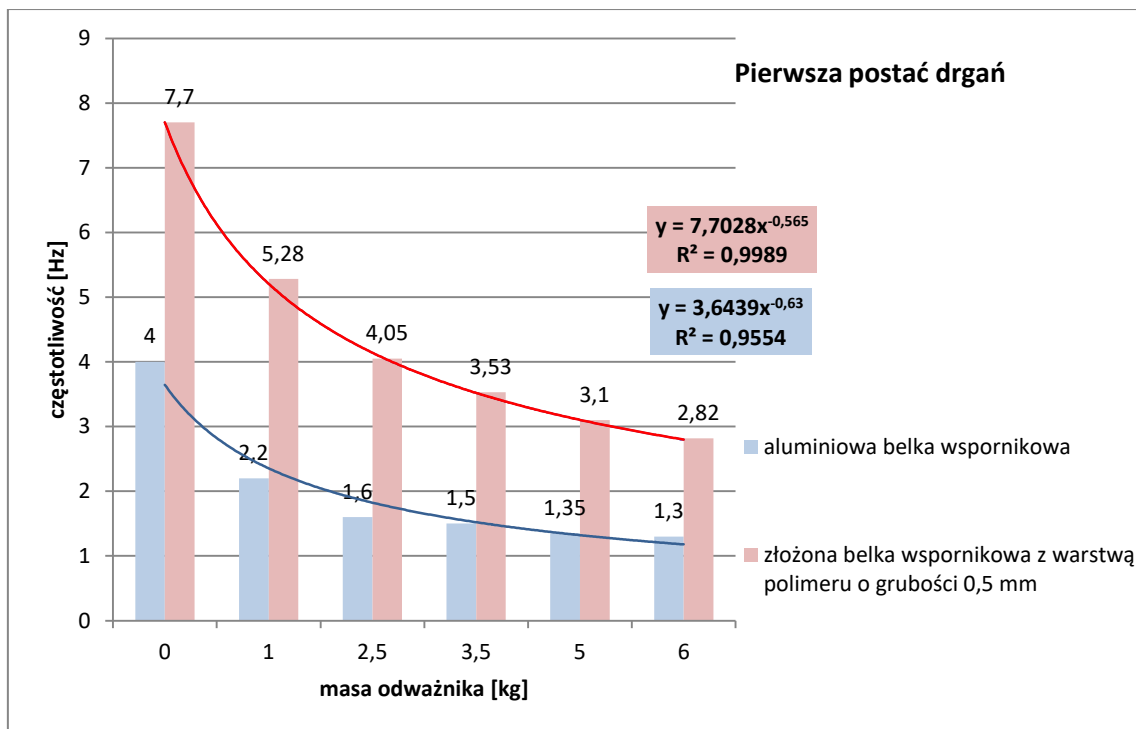
**Rys. 4.131** Przebieg czasowy przyspieszeń (po odfiltrowaniu w zakresie pierwszej częstotliwości drgań) złożonej belki wspornikowej (grubość polimeru 0,5 mm) pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 6 kg).



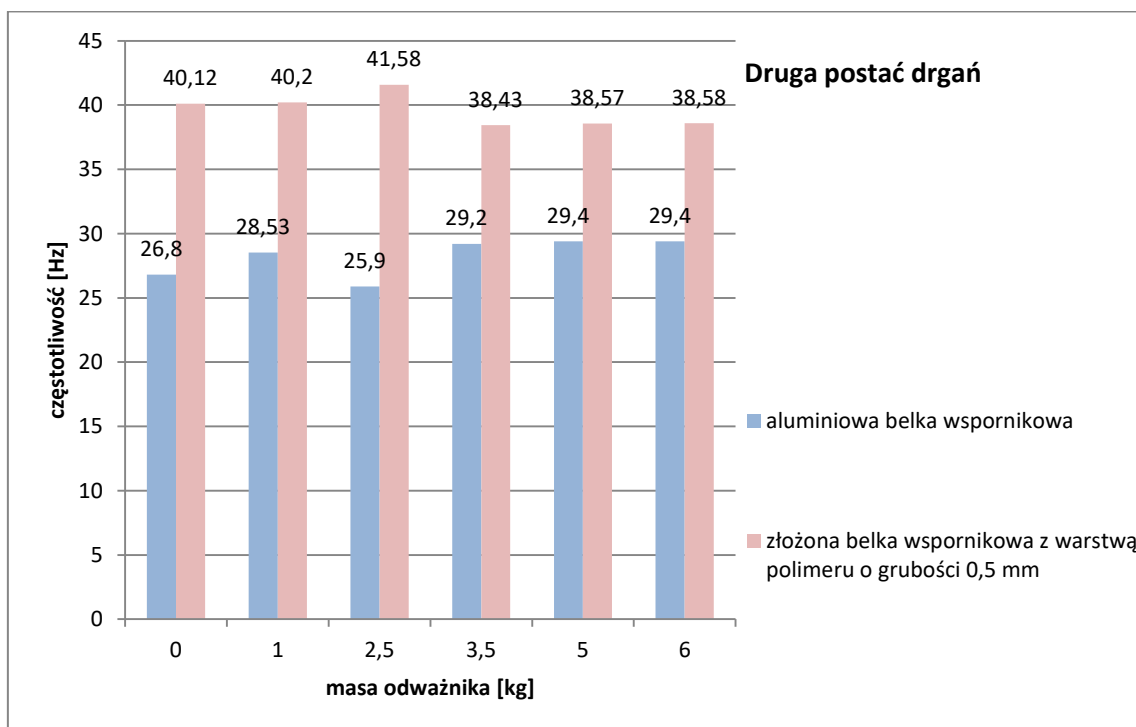
**Rys. 4.132** Przebieg czasowy przyspieszeń (po odfiltrowaniu w zakresie drugiej częstotliwości drgań) złożonej belki wspornikowej (grubość polimeru 0,5 mm) pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 6 kg).

**Tab. 4.14** Częstotliwości drgań poprzecznych złożonej belki wspornikowej.

Dodatkowe obciążenie - masa odważnika [kg]	Częstotliwość drgań podłużnych [Hz]	
	Pierwsza postać drgań	Druga postać drgań
brak	7,70	40,12
1,0	5,28	40,20
2,5	4,05	41,58
3,5	3,53	38,43
5,0	3,10	38,57
6,0	2,82	38,58



**Rys. 4.133** Wartości częstotliwości drgań odpowiadające pierwszej postaci drgań analizowanych belek wspornikowych z uwzględnieniem dodatkowego obciążenia.



**Rys. 4.134** Wartości częstotliwości drgań odpowiadające drugiej postaci drgań analizowanych belek wspornikowych z uwzględnieniem dodatkowego obciążenia.

W wyniku przeprowadzonych badań zaobserwowano, że przyłożenie dodatkowego obciążenia w postaci odważników o różnych masach prowadzi do istotnego spadku wartości podstawowej częstotliwości drgań złożonej belki

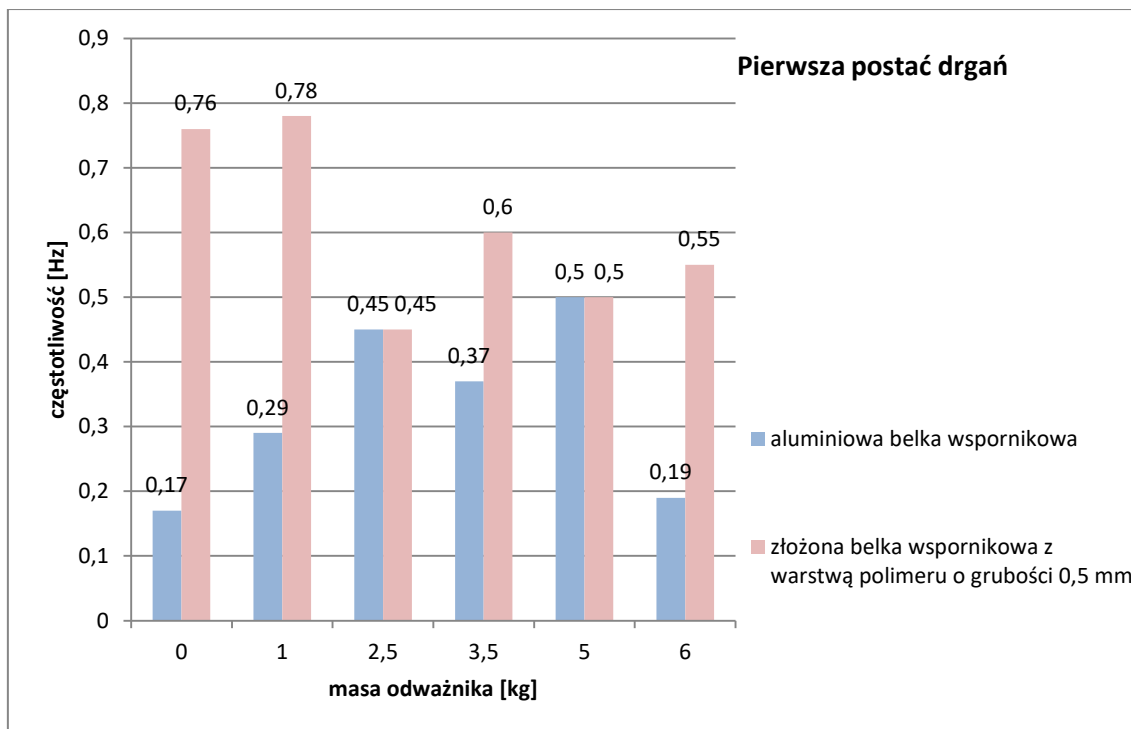


wspornikowej (patrz Tab. 4.14). W przypadku pierwszej postaci i zamocowania odważnika o masie 6 kg zaobserwowano przesunięcie podstawowej częstotliwości w kierunku pasm o niższej wartości o 63% w porównaniu z belką nieobciążoną. Z kolei, wartości średnie częstotliwości drgań odpowiadające drugiej postaci drgań własnych utrzymują się na podobnym poziomie wahając się pomiędzy 38,43 a 41,58 Hz. Jednocześnie Rys. 4.133 i 4.134 wskazuje na przesunięcie podstawowej częstotliwości drgań w kierunku pasm o niższej wartości w przypadku złożonej belki z warstwą polimeru o grubości 0,5 mm w porównaniu z belką pojedynczą. Największe zaobserwowane przesunięcie wartości częstotliwości odpowiadającej pierwszej postaci drgań wyniosło 60%, podczas gdy w przypadku drugiej postaci drgań równe było 38%.

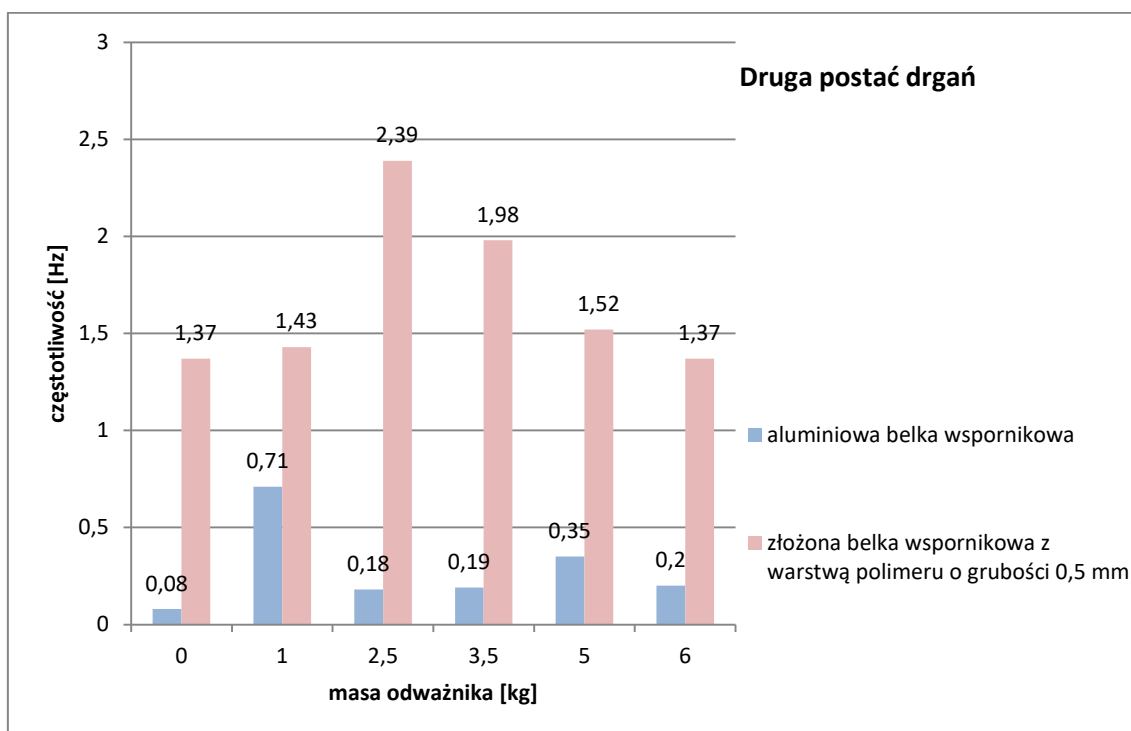
W celu określenia efektywności zastosowania warstwy polimeru do redukcji drgań aluminiowych belek wspornikowych wyznaczono, zgodnie z równaniem (4.3), wartości liczb tłumienia (por. załącznik nr 4). W Tab. 4.15 przedstawiono wartości średnie z sześciu pomiarów tego parametru dynamicznego dla przebiegów czasowych przyspieszeń odpowiadających pierwszej oraz drugiej postaci drgań belek wspornikowych. Jednocześnie, na Rys. 4.135 i 4.136 przedstawiono porównanie wartości liczb tłumienia dla analizowanych belek (bez oraz z warstwą polimeru).

**Tab. 4.15** Liczby tłumienia dwóch pierwszych częstotliwości drgań poprzecznych złożonej belki wspornikowej.

Dodatkowe obciążenie - masa odważnika [kg]	Liczba tłumienia [%]	
	Pierwsza postać drgań	Druga postać drgań
brak	0,76	1,37
1,0	0,78	1,43
2,5	0,45	2,39
3,5	0,60	1,98
5,0	0,50	1,52
6,0	0,55	1,36



**Rys. 4.135** Liczby tłumienia dla pierwszej częstotliwości drgań analizowanych belek wspornikowych z uwzględnieniem dodatkowego obciążenia.



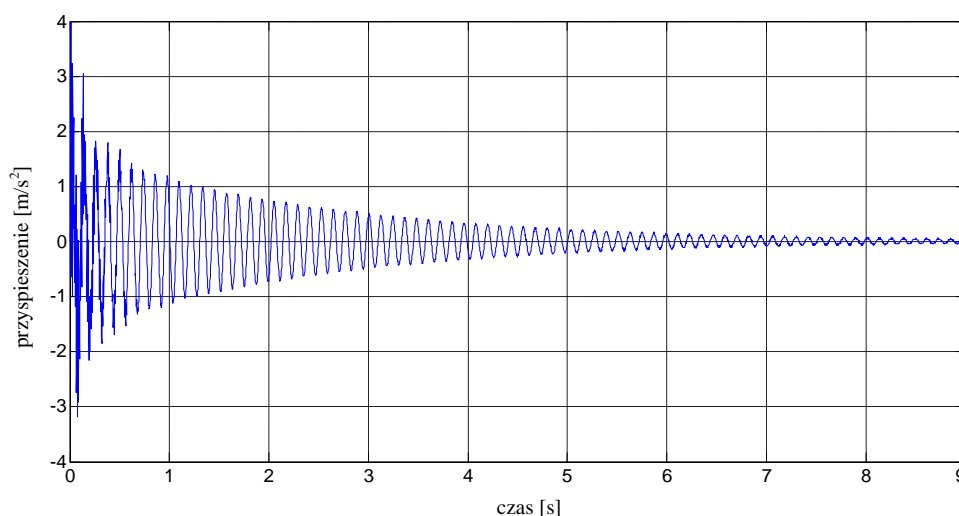
**Rys. 4.136** Liczby tłumienia dla drugiej częstotliwości drgań analizowanych belek wspornikowych z uwzględnieniem dodatkowego obciążenia.

Z Tab. 4.15 można zaobserwować, że wyznaczone średnie wartości liczby tłumienia złożonej belki wspornikowej wahają się pomiędzy 0,45 a 0,78% w przypadku

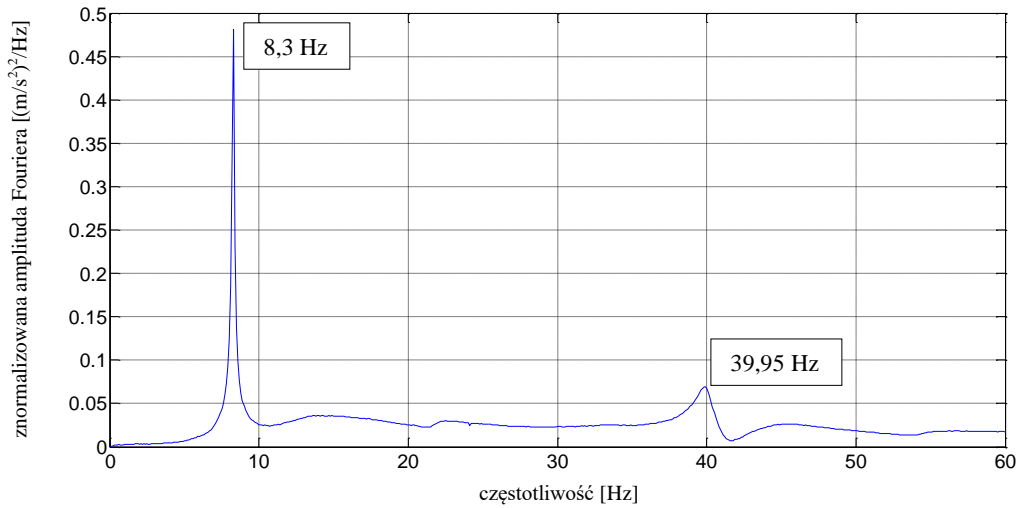
pierwszej postaci drgań oraz pomiędzy 1,36 a 2,39 % w przypadku drugiej postaci drgań (por. załącznik nr 4). Rys. 4.135 i 4.136 wskazują na znaczny wzrost liczb tłumienia tych belek w stosunku do pojedynczego płaskownika bez warstwy polimeru. Największy wzrost (o 347%) liczby tłumienia pierwszej postaci drgań odnotowano w przypadku belki nieobciążonej, podczas gdy w przypadku zamocowania odważnika o masie 2,5 i 5 kg wartość ta, nie uległa zmianie. Największy wzrost (o 1228%) liczby tłumienia drugiej postaci drgań odnotowano w przypadku belki dodatkowo obciążonej odważnikiem o masie 2,5 kg, podczas gdy najmniejszy (o 23%) w przypadku zamocowania odważnika o masie 1 kg.

#### 4.3.4 WYNIKI BADAŃ DLA ZŁOŻONEJ BELKI WSPORNIKOWEJ Z WARSTWĄ POLIMERU O GRUBOŚCI 1,2 MM

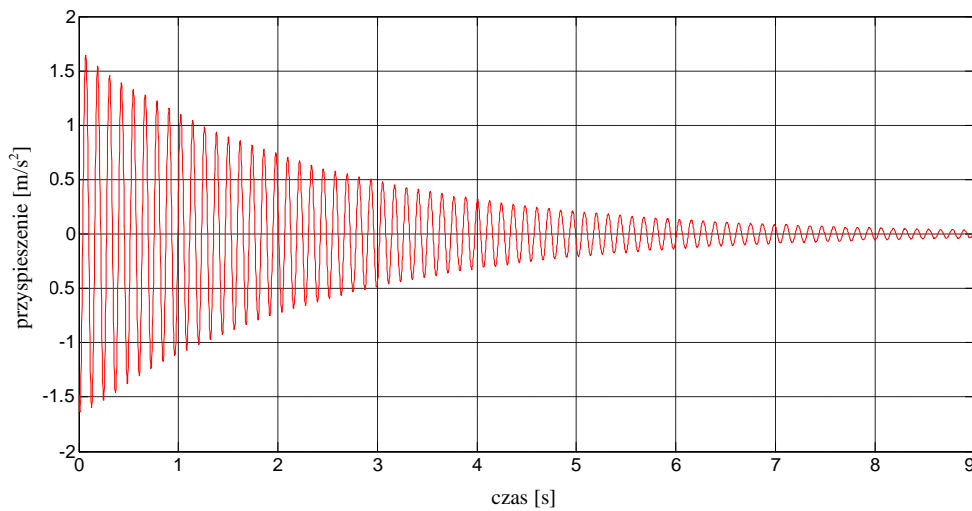
Na Rys. 4.137 przedstawiono przebieg czasowy przyspieszeń uzyskany dla belki wspornikowej złożonej z dwóch aluminiowych płaskowników sklejonych warstwą polimeru o grubości 1,2 mm, wzbudzanej do drgań poprzez uderzenie w środku jej rozpiętości młotkiem modalnym. Dla przebiegu czasowego wykonano szybką transformatę Fouriera (patrz Rys. 4.138), która ujawniła dwie dominujące częstotliwości drgań własnych o wartościach 8,3 i 39,95 Hz. Na Rys. 4.139 i 4.140 przedstawiono przebiegi czasowe przyspieszeń po odfiltrowaniu w zakresie pierwszej i drugiej częstotliwości drgań analizowanej belki.



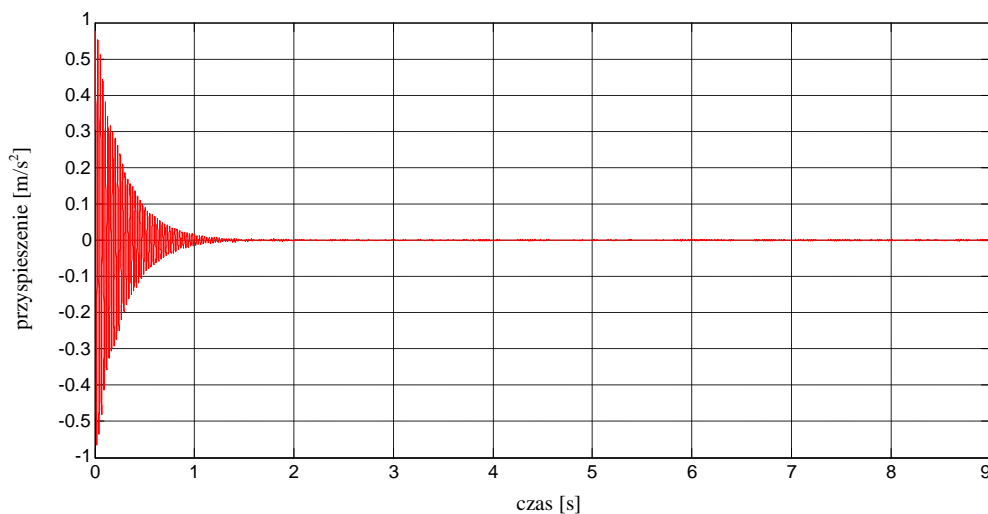
**Rys. 4.137** Przebieg czasowy przyspieszeń końca złożonej belki wspornikowej (grubość polimeru 1,2 mm).



**Rys. 4.138** Transformata Fouriera dla złożonej belki wspornikowej (grubość polimeru 1,2 mm).



**Rys. 4.139** Przebieg czasowy przyspieszeń (po odfiltrowaniu w zakresie pierwszej częstotliwości drgań) złożonej belki wspornikowej (grubość polimeru 1,2 mm).



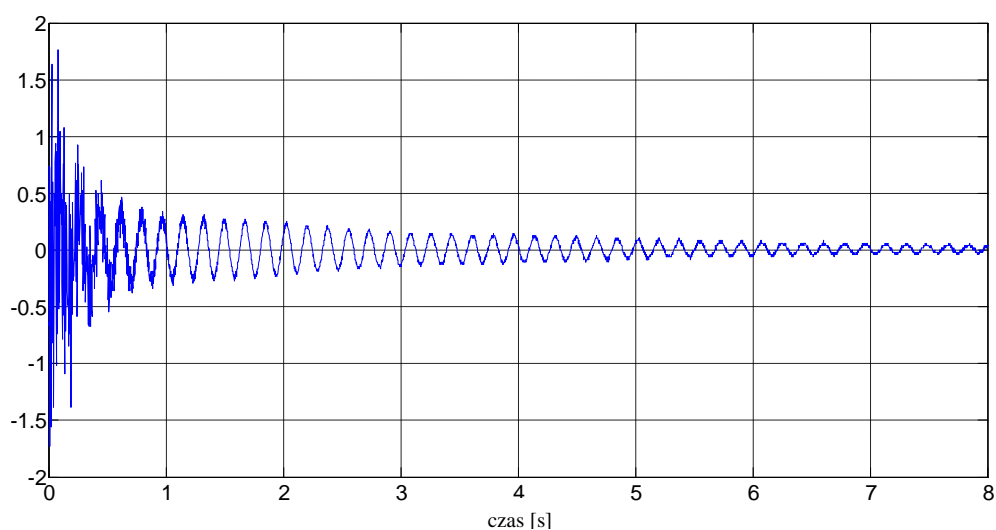
**Rys. 4.140** Przebieg czasowy przyspieszeń (po odfiltrowaniu w zakresie drugiej częstotliwości drgań) złożonej belki wspornikowej (grubość polimeru 1,2 mm).

Dla analizowanej złożonej belki wspornikowej wartości średnie liczb tłumienia z sześciu powtórzeń wyniosły: 0,72% i 1,29%, odpowiednio dla pierwszej i drugiej częstotliwości (zob. Tab. Z.5.1 w załączniku nr 5).

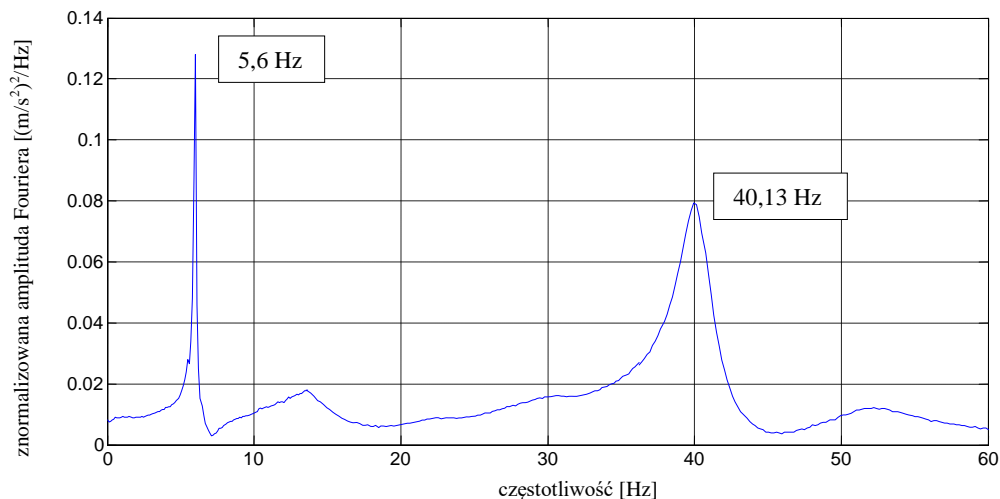
Wyniki w postaci przebiegów czasowych przyspieszeń, transformat Fouriera oraz przebiegów czasowych po odfiltrowaniu w zakresie ujawnionych częstotliwości drgań otrzymane dla złożonej belki wspornikowej, dodatkowo obciążonej odważnikami o różnych masach, przedstawiono na kolejnych rysunkach:

- Rys. 4.141–4.144 – odważnik o masie 1 kg;
- Rys. 4.145–4.148 – odważnik o masie 2,5 kg;
- Rys. 4.149–4.152 – odważnik o masie 3,5 kg;
- Rys. 4.143–4.156 – odważnik o masie 5 kg;
- Rys. 4.157–4.160 – odważnik o masie 6 kg.

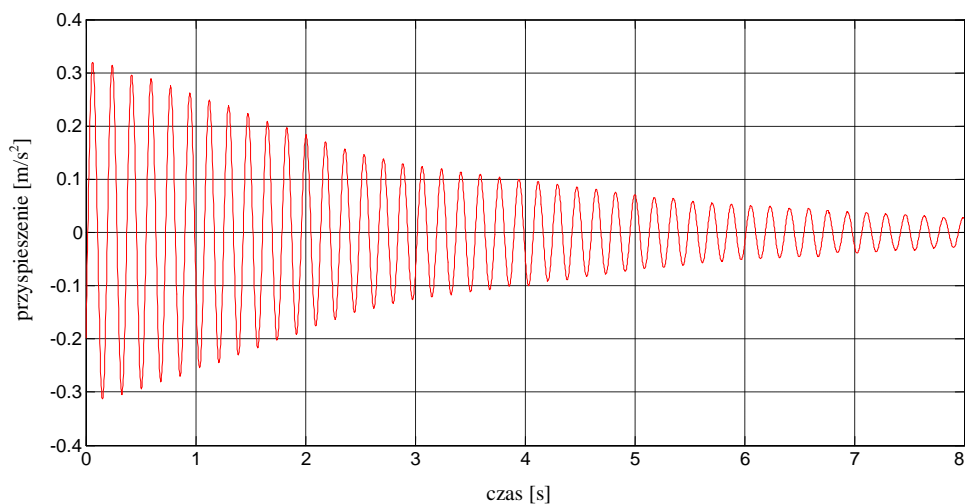
Dodatkowo, wartości średnie wszystkich otrzymanych częstotliwości drgań własnych wyznaczone dla złożonej belki wspornikowej, zestawiono w Tab. 4.16 (por. załącznik nr 5). Jednocześnie na Rys. 4.161 i 4.162 przedstawiono porównanie wartości częstotliwości odpowiadające pierwszej i drugiej postaci drgań belek wspornikowych (bez oraz z warstwą polimeru) wraz z funkcjami aproksymującymi postaci  $y = ax^b$ , dla których parametry  $a$  i  $b$  wyznaczono poprzez minimalizację średniego błędu kwadratowego (Bendat i Piersol 1971).



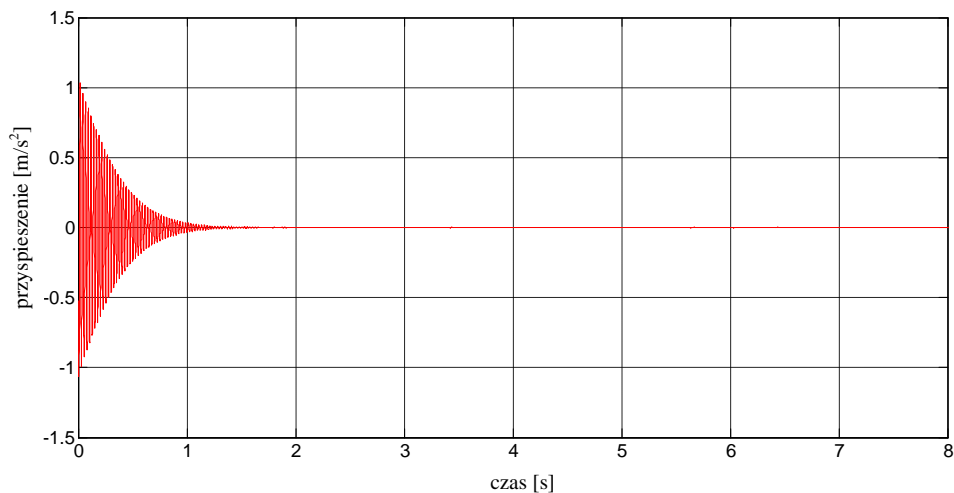
**Rys. 4.141** Przebieg czasowy przyspieszeń końca złożonej belki wspornikowej (grubość polimeru 1,2 mm) pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 1 kg).



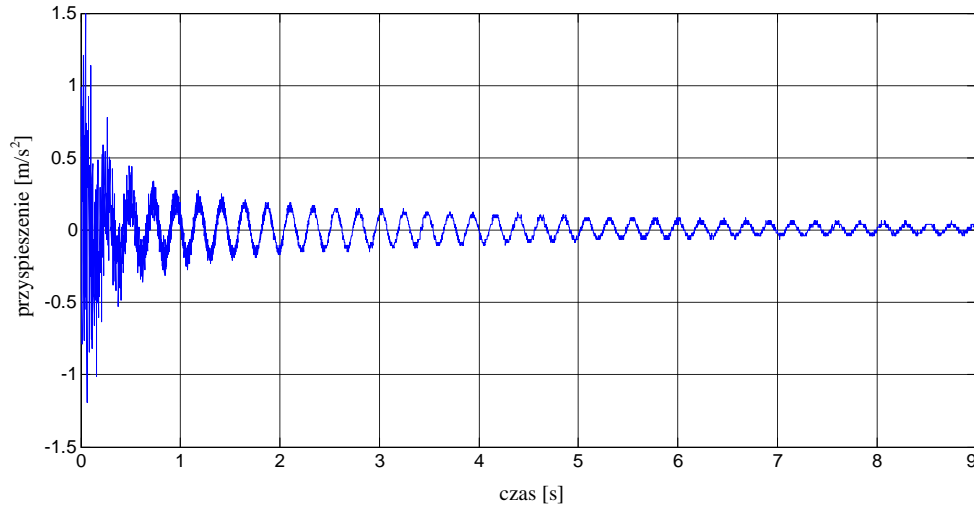
**Rys. 4.142** Transformata Fouriera dla złożonej belki wspornikowej (grubość polimeru 1,2 mm) pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 1 kg).



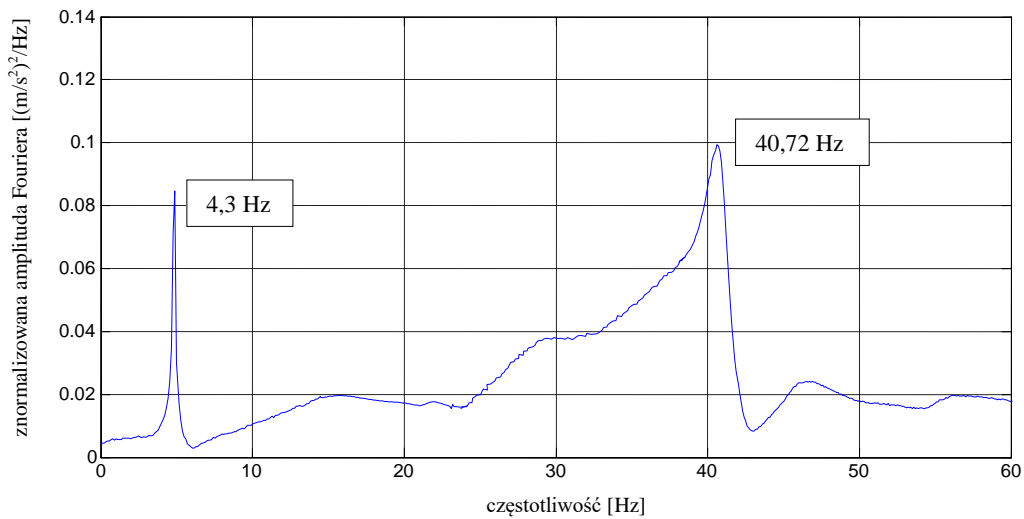
**Rys. 4.143** Przebieg czasowy przyspieszeń (po odfiltrowaniu w zakresie pierwszej częstotliwości drgań) złożonej belki wspornikowej (grubość polimeru 1,2 mm) pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 1 kg).



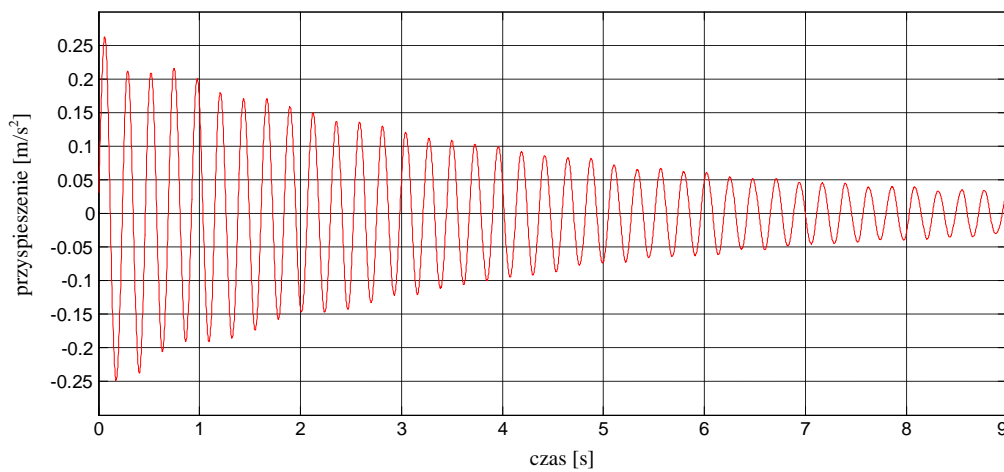
**Rys. 4.144** Przebieg czasowy przyspieszeń (po odfiltrowaniu w zakresie drugiej częstotliwości drgań) złożonej belki wspornikowej (grubość polimeru 1,2 mm) pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 1 kg).



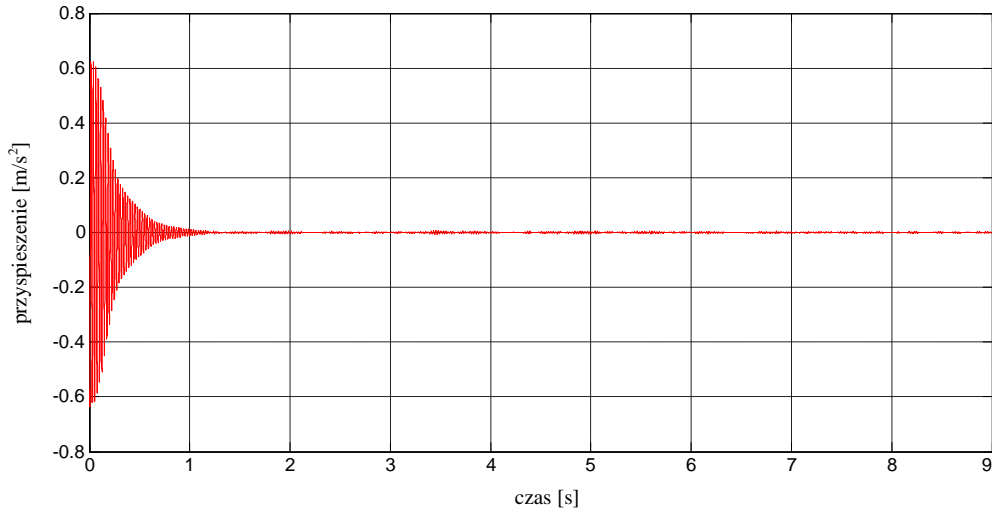
**Rys. 4.145** Przebieg czasowy przyspieszeń końca złożonej belki wspornikowej (grubość polimeru 1,2 mm) pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 2,5 kg).



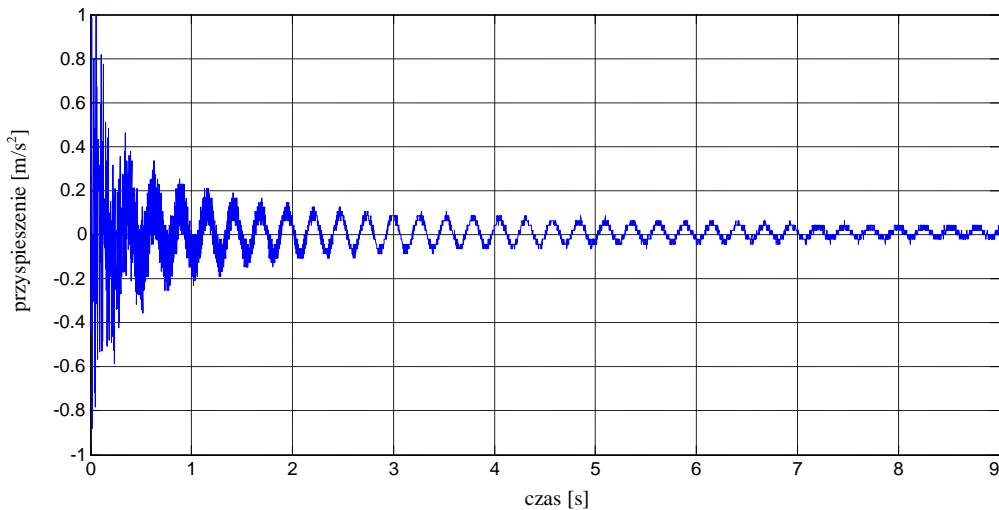
**Rys. 4.146** Transformata Fouriera dla złożonej belki wspornikowej (grubość polimeru 1,2 mm) pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 2,5 kg).



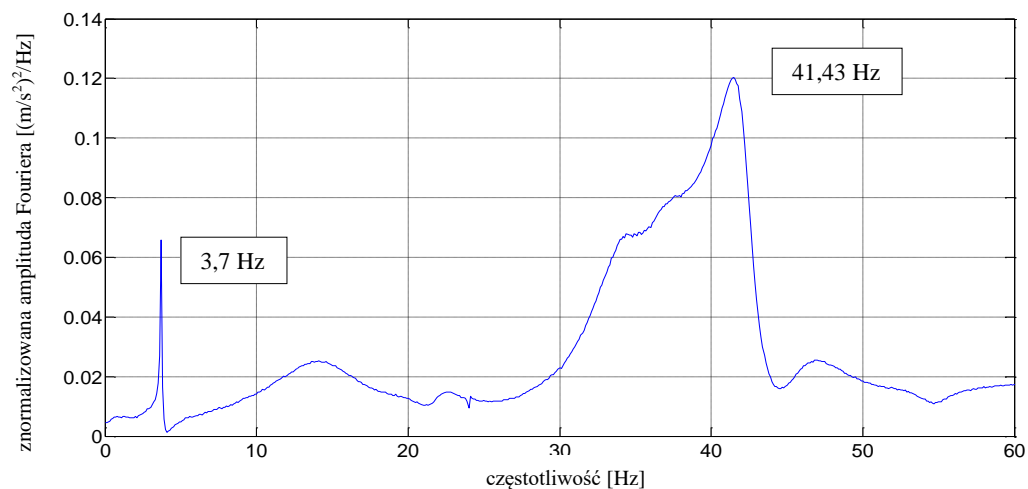
**Rys. 4.147** Przebieg czasowy przyspieszeń (po odfiltrowaniu w zakresie pierwszej częstotliwości drgań) złożonej belki wspornikowej (grubość polimeru 1,2 mm) pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 2,5 kg).



**Rys. 4.148** Przebieg czasowy przyspieszeń (po odfiltrowaniu w zakresie drugiej częstotliwości drgań) złożonej belki wspornikowej (grubość polimeru 1,2 mm) pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 2,5 kg).

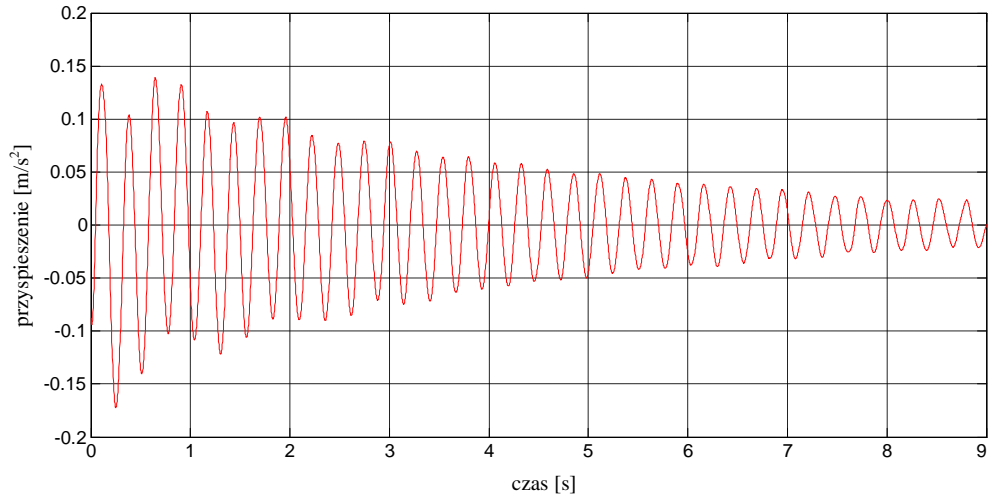


**Rys. 4.149** Przebieg czasowy przyspieszeń końca złożonej belki wspornikowej (grubość polimeru 1,2 mm) pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 3,5 kg).

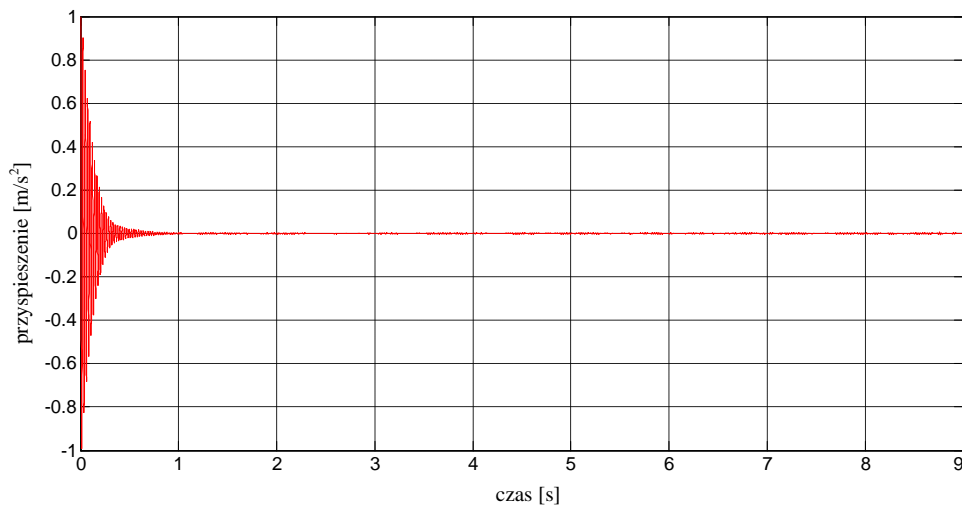


**Rys. 4.150** Transformata Fouriera dla złożonej belki wspornikowej (grubość polimeru 1,2 mm) pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 3,5 kg).

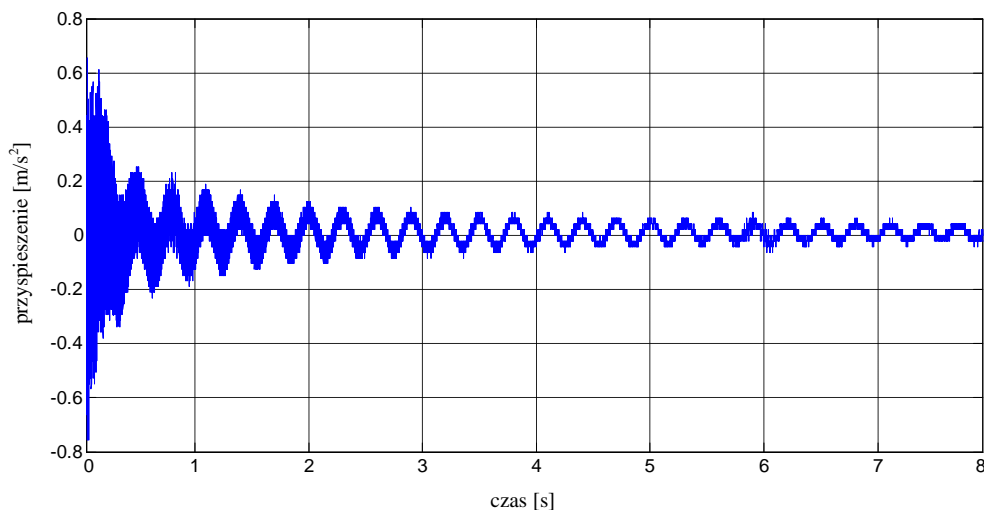




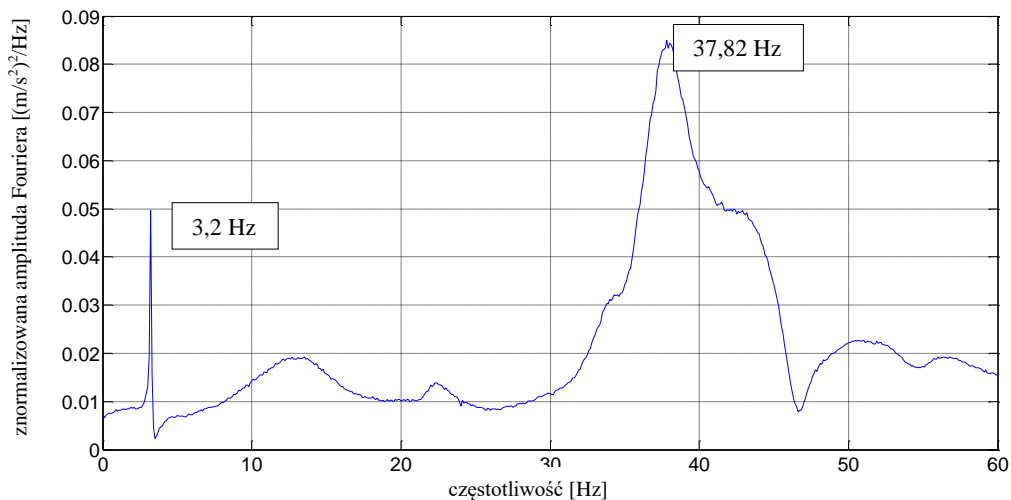
**Rys. 4.151** Przebieg czasowy przyspieszeń (po odfiltrowaniu w zakresie pierwszej częstotliwości drgań) złożonej belki wspornikowej (grubość polimeru 1,2 mm) pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 3,5 kg).



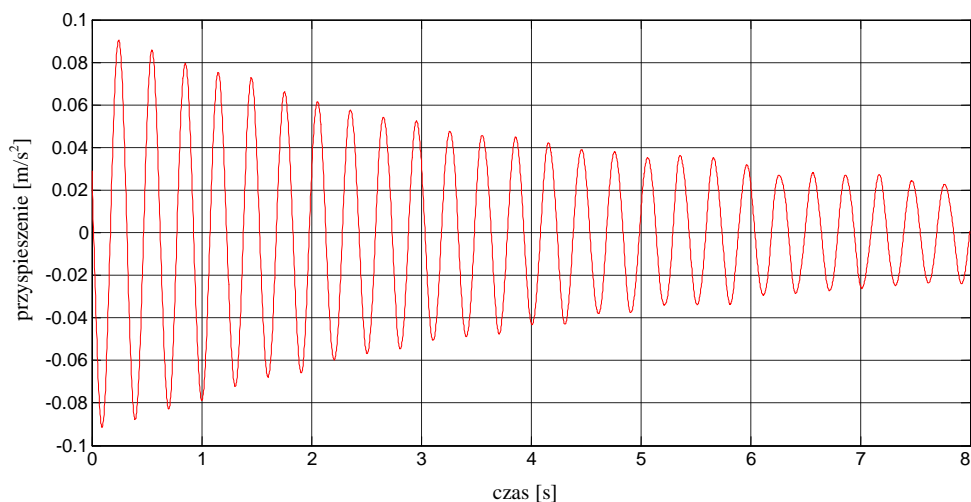
**Rys. 4.152** Przebieg czasowy przyspieszeń (po odfiltrowaniu w zakresie drugiej częstotliwości drgań) złożonej belki wspornikowej (grubość polimeru 1,2 mm) pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 3,5 kg).



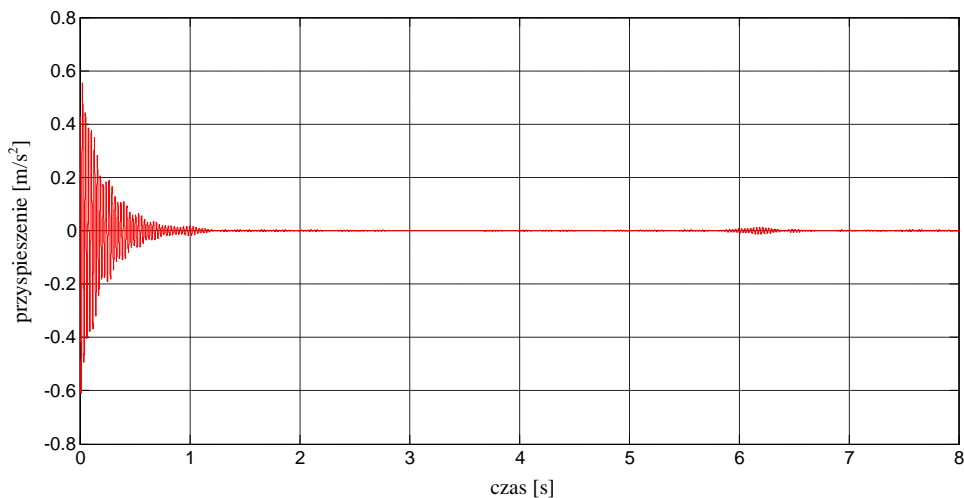
**Rys. 4.153** Przebieg czasowy przyspieszeń końca złożonej belki wspornikowej (grubość polimeru 1,2 mm) pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 5 kg).



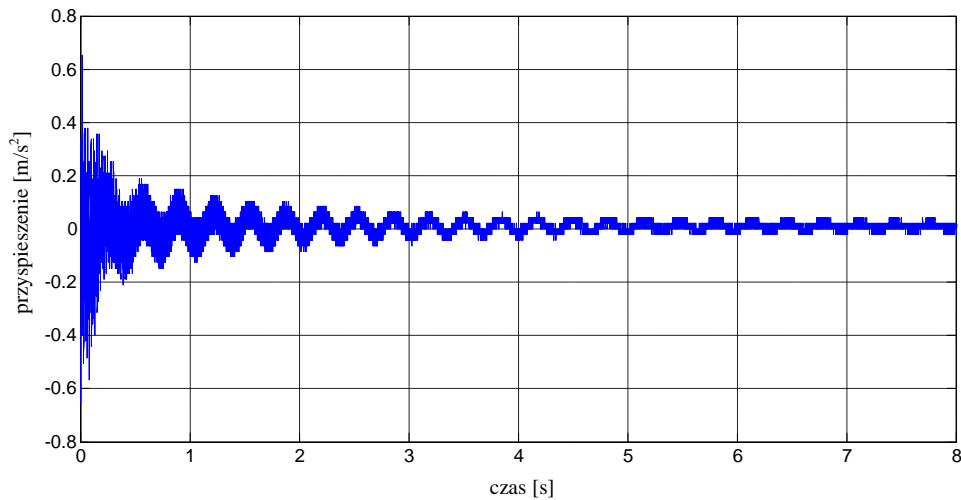
**Rys. 4.154** Transformata Fouriera dla złożonej belki wspornikowej (grubość polimeru 1,2 mm) pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 5 kg).



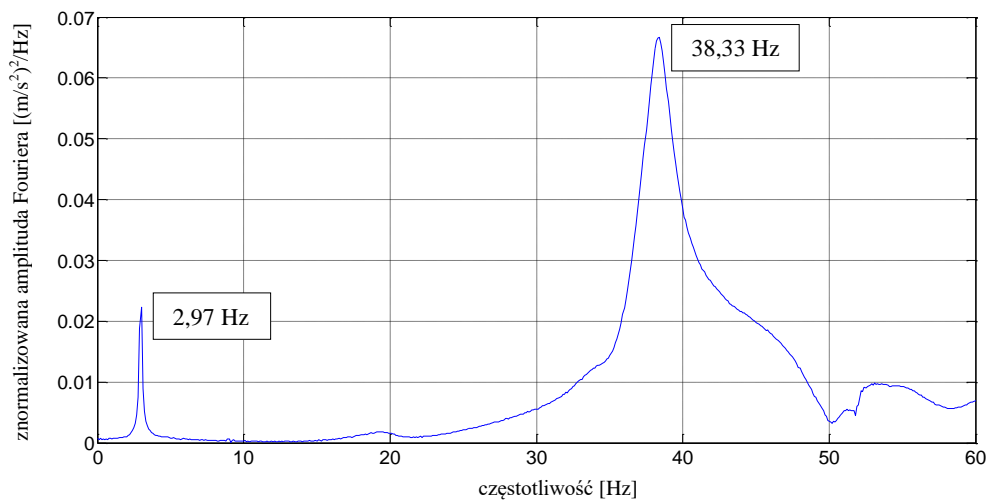
**Rys. 4.155** Przebieg czasowy przyspieszeń (po odfiltrowaniu w zakresie pierwszej częstotliwości drgań) złożonej belki wspornikowej (grubość polimeru 1,2 mm) pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 5 kg).



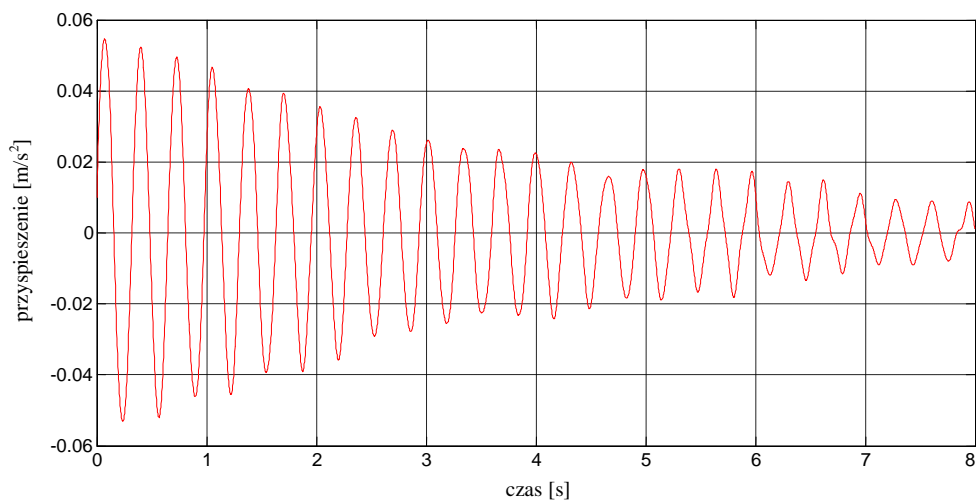
**Rys. 4.156** Przebieg czasowy przyspieszeń (po odfiltrowaniu w zakresie drugiej częstotliwości drgań) złożonej belki wspornikowej (grubość polimeru 1,2 mm) pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 5 kg).



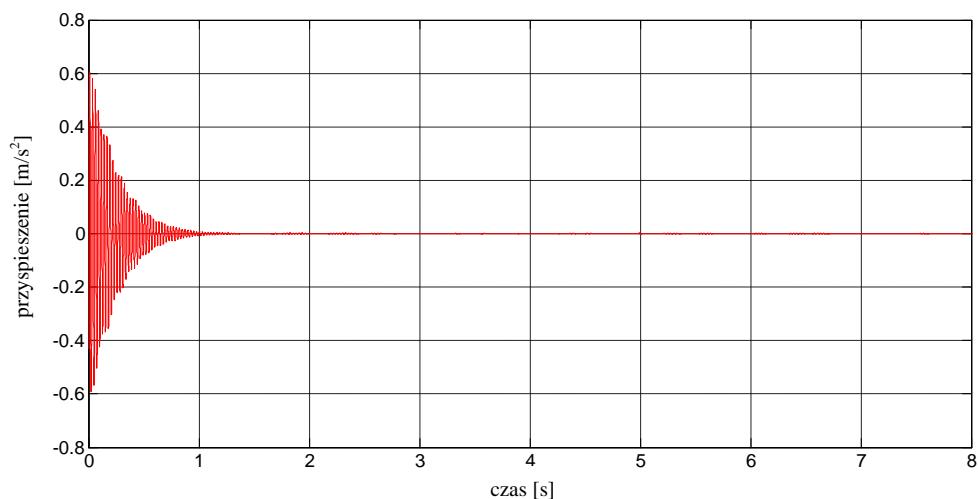
**Rys. 4.157** Przebieg czasowy przyspieszeń końca złożonej belki wspornikowej (grubość polimeru 1,2 mm) pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 6 kg).



**Rys. 4.158** Transformata Fouriera dla złożonej belki wspornikowej (grubość polimeru 1,2 mm) pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 6 kg).



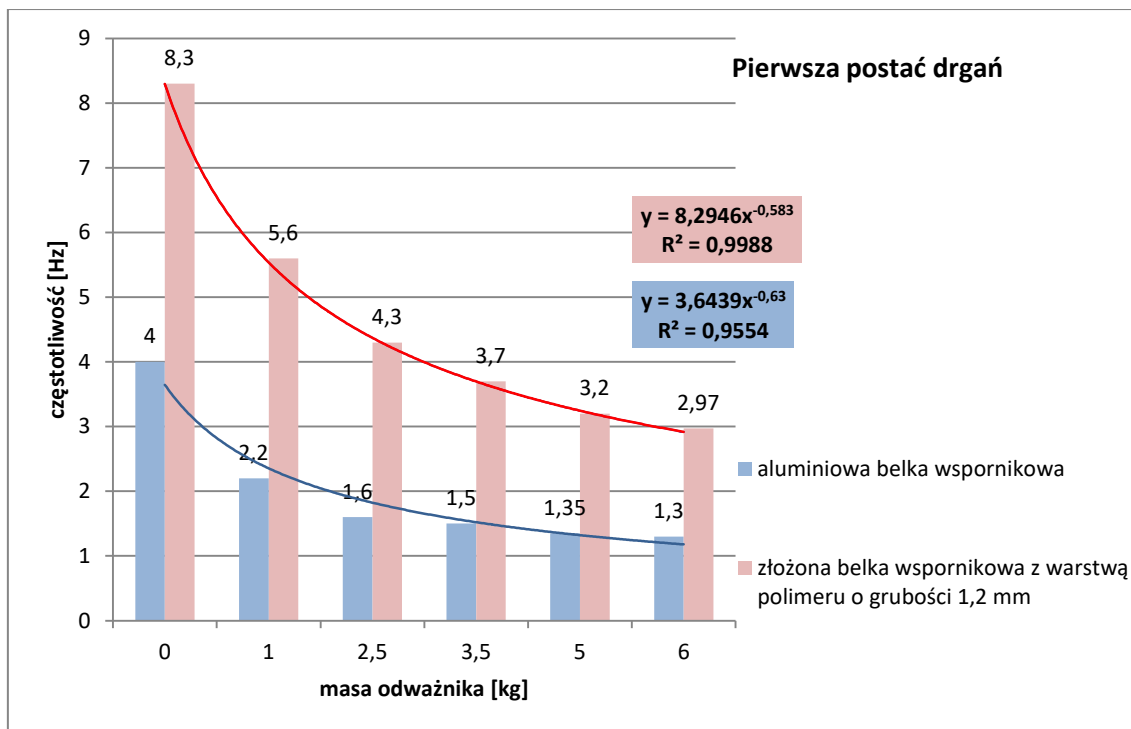
**Rys. 4.159** Przebieg czasowy przyspieszeń (po odfiltrowaniu w zakresie pierwszej częstotliwości drgań) złożonej belki wspornikowej (grubość polimeru 1,2 mm) pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 6 kg).



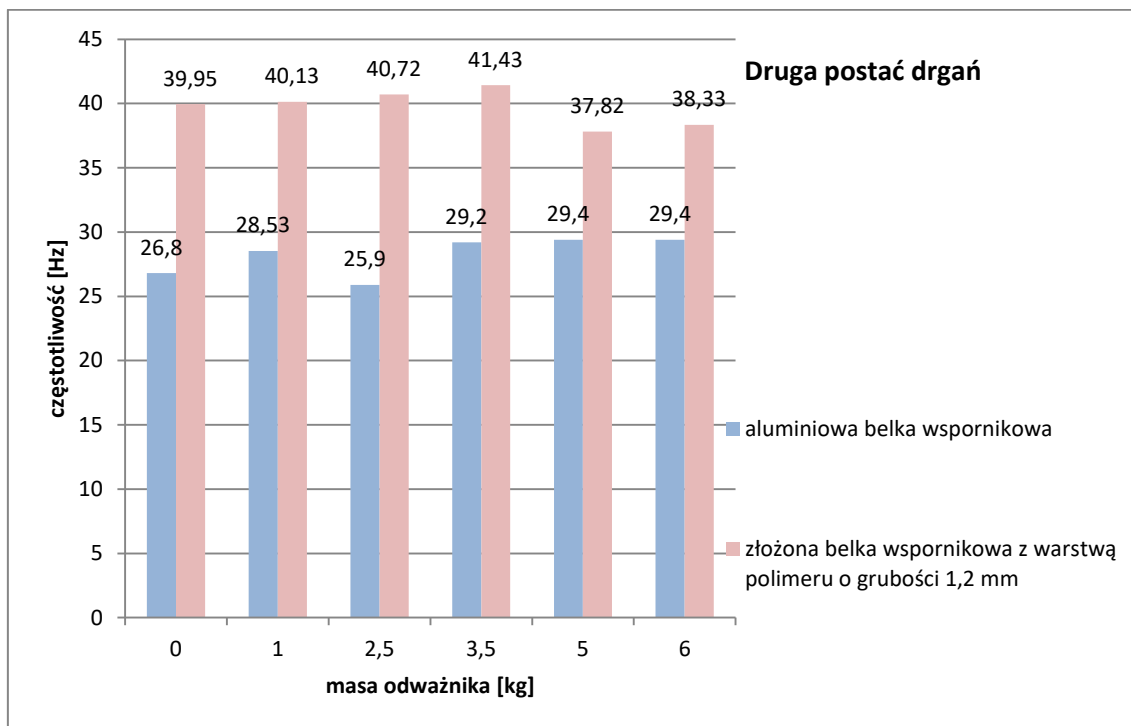
**Rys. 4.160** Przebieg czasowy przyspieszeń (po odfiltrowaniu w zakresie drugiej częstotliwości drgań) złożonej belki wspornikowej (grubość polimeru 1,2 mm) pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 6 kg).

**Tab. 4.16** Częstotliwości drgań poprzecznych złożonej belki wspornikowej.

Dodatkowe obciążenie - masa odważnika [kg]	Częstotliwość drgań poprzecznych [Hz]	
	Pierwsza postać drgań	Druga postać drgań
brak	8,30	39,95
1,0	5,60	40,13
2,5	4,30	40,72
3,5	3,70	41,43
5,0	3,20	37,82
6,0	2,97	38,33



**Rys. 4.161** Wartości częstotliwości drgań odpowiadające pierwszej postaci drgań analizowanych belek wspornikowych z uwzględnieniem dodatkowego obciążenia.



**Rys. 4.162** Wartości częstotliwości drgań odpowiadające drugiej postaci drgań analizowanych belek wspornikowych z uwzględnieniem dodatkowego obciążenia.

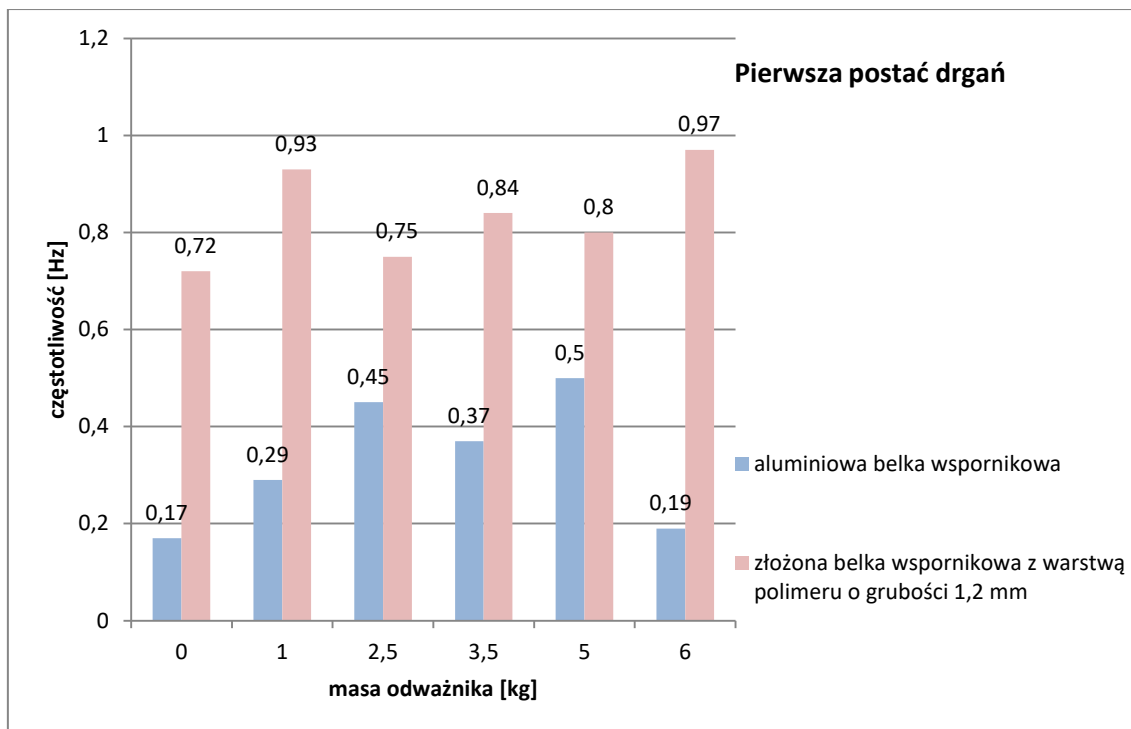
W wyniku przeprowadzonych badań zaobserwowano, że przyłożenie dodatkowego obciążenia w postaci odważników o różnych masach prowadzi do

istotnego spadku wartości podstawowej częstotliwości drgań złożonej belki wspornikowej (patrz Tab. 4.16). W przypadku pierwszej postaci i zamocowania odważnika o masie 6 kg zaobserwowano przesunięcie podstawowej częstotliwości w kierunku pasm o niższej wartości o 64% w porównaniu z belką nieobciążoną. Z kolei, wartości średnie częstotliwości drgań odpowiadające drugiej postaci drgań własnych utrzymują się na podobnym poziomie wahając się pomiędzy 38,33 a 41,43 Hz. Jednocześnie Rys. 4.161 i 4.162 wskazuje na przesunięcie podstawowej częstotliwości drgań w kierunku pasm o niższej wartości w przypadku złożonej belki z warstwą polimeru o grubości 1,2 mm w porównaniu z belką pojedynczą. Największe zaobserwowane przesunięcie wartości częstotliwości odpowiadającej pierwszej postaci drgań wyniosło 63%, podczas gdy w przypadku drugiej postaci drgań równe było 36%.

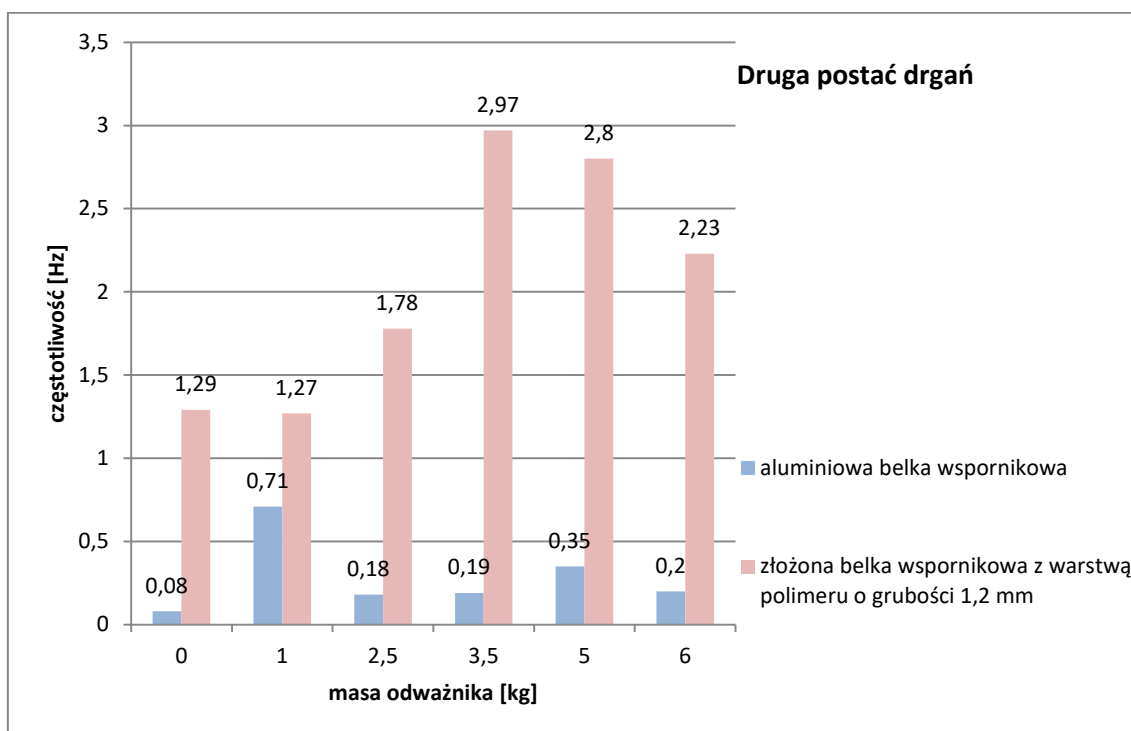
W celu określenia efektywności zastosowania warstwy polimeru do redukcji drgań aluminiowych belek wspornikowych wyznaczono, zgodnie z równaniem (4.3) wartości liczb tłumienia (por. załącznik nr 5). W Tab. 4.17 przedstawiono wartości średnie z sześciu pomiarów tego parametru dynamicznego dla przebiegów czasowych przyspieszeń odpowiadających pierwszej oraz drugiej postaci drgań belek wspornikowych. Jednocześnie, na Rys. 4.163 i 4.164 przedstawiono porównanie wartości liczb tłumienia dla analizowanych belek (bez oraz z warstwą polimeru).

**Tab. 4.17** Liczby tłumienia dwóch pierwszych częstotliwości drgań poprzecznych złożonej belki wspornikowej.

Dodatkowe obciążenie - masa odważnika [kg]	Liczba tłumienia [%]	
	Pierwsza postać drgań	Druga postać drgań
brak	0,72	1,29
1,0	0,93	1,27
2,5	0,75	1,78
3,5	0,84	2,97
5,0	0,80	2,80
6,0	0,97	2,23



**Rys. 4.163** Liczby tłumienia dla pierwszej częstotliwości drgań analizowanych belek wspornikowych z uwzględnieniem dodatkowego obciążenia.



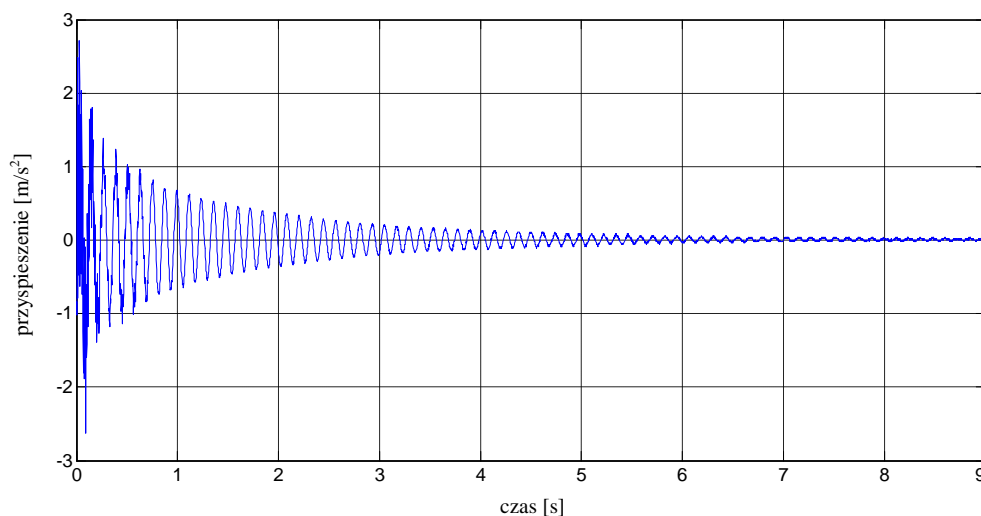
**Rys. 4.164** Liczby tłumienia dla drugiej częstotliwości drgań analizowanych belek wspornikowych z uwzględnieniem dodatkowego obciążenia.

Z Tab. 4.17 można zaobserwować, że wyznaczone średnie wartości liczby tłumienia złożonej belki wspornikowej wahają się pomiędzy 0,72 a 0,97% w przypadku

pierwszej postaci drgań oraz pomiędzy 1,27 a 2,97 % w przypadku drugiej postaci drgań (por. załącznik nr 5). Rys. 4.163 i 4.164 wskazują na znaczny wzrost liczb tłumienia tych belek w stosunku do pojedynczego płaskownika bez warstwy polimeru. Największy wzrost (o 411%) liczby tłumienia pierwszej postaci drgań odnotowano w przypadku belki dodatkowo obciążonej odważnikiem o masie 6 kg, podczas gdy najmniejszy (o 60%) w przypadku zamocowania odważnika o masie 5 kg. Największy wzrost (o 1513%) liczby tłumienia drugiej postaci drgań odnotowano w przypadku belki nieobciążonej, podczas gdy najmniejszy (o 79%) w przypadku zamocowania odważnika o masie 1 kg.

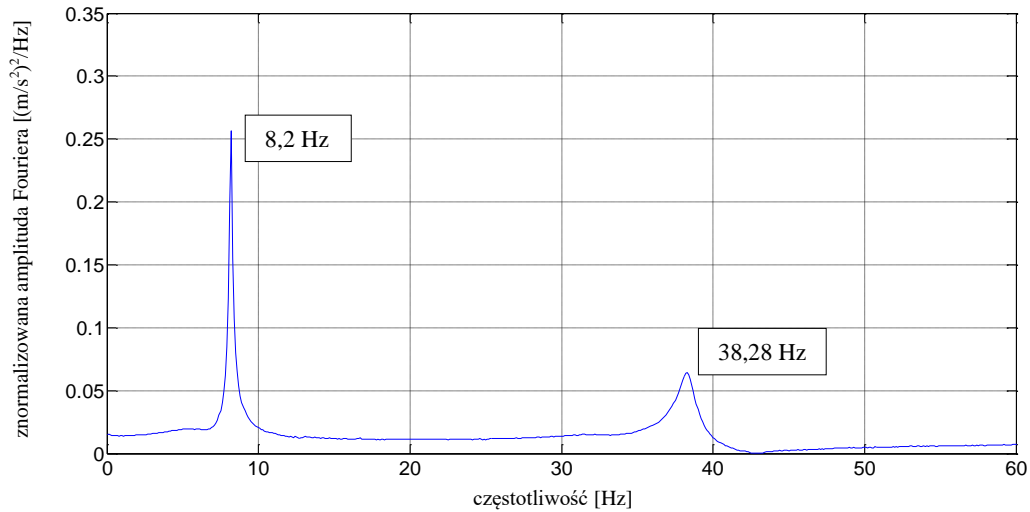
#### 4.3.5 WZNIKI BADAŃ DLA ZŁOŻONEJ BELKI WSPORNIKOWEJ Z WARSTWĄ POLIMERU O GRUBOŚCI 1,75 MM

Na Rys. 4.165 przedstawiono reprezentatywny przebieg czasowy przyspieszeń uzyskany dla belki wspornikowej złożonej z dwóch aluminiowych płaskowników sklejonych warstwą polimeru o grubości 1,75 mm, wzbudzanej do drgań poprzez uderzenie w środku jej rozpiętości młotkiem modalnym. Dla przebiegu czasowego wykonano szybką transformatę Fouriera (patrz Rys. 4.166), która ujawniła dwie dominujące częstotliwości drgań własnych o wartościach 8,2 i 38,28 Hz. Na Rys. 4.167 i 4.168 przedstawiono przebiegi czasowe przyspieszeń po odfiltrowaniu w zakresie pierwszej i drugiej częstotliwości drgań analizowanej belki.

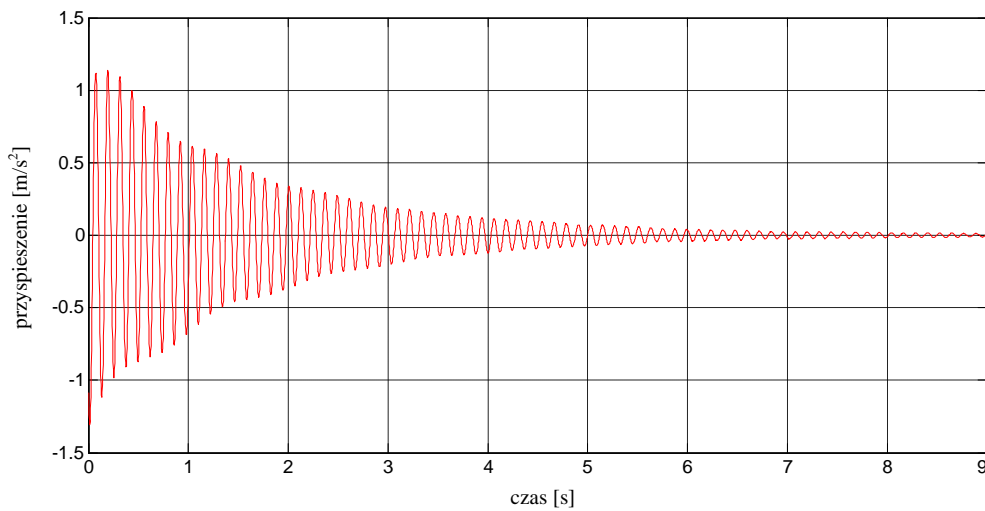


**Rys. 4.165** Przebieg czasowy przyspieszeń końca złożonej belki wspornikowej (grubość polimeru 1,75 mm).

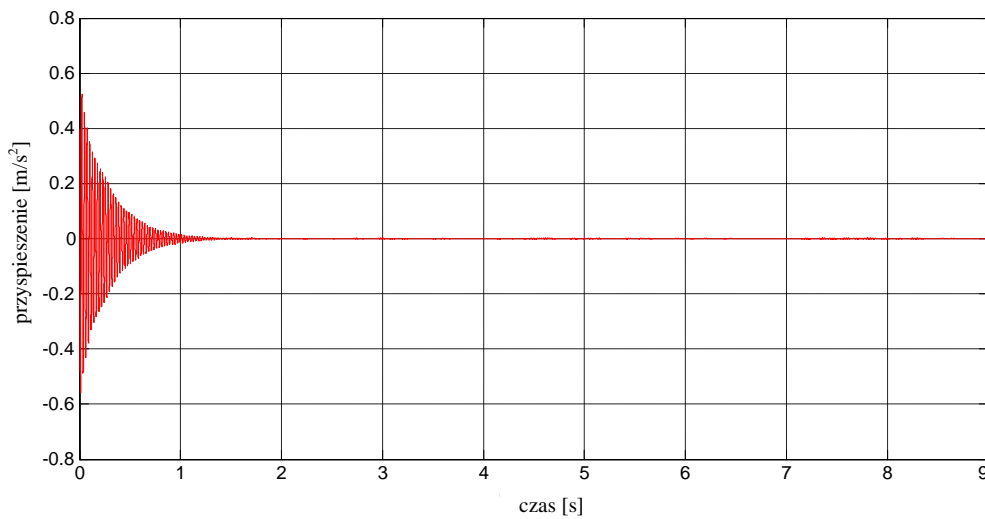




**Rys. 4.166** Transformata Fouriera dla złożonej belki wspornikowej (grubość polimeru 1,75 mm).



**Rys. 4.167** Przebieg czasowy przyspieszeń (po odfiltrowaniu w zakresie pierwszej częstotliwości drgań) złożonej belki wspornikowej (grubość polimeru 1,75 mm).



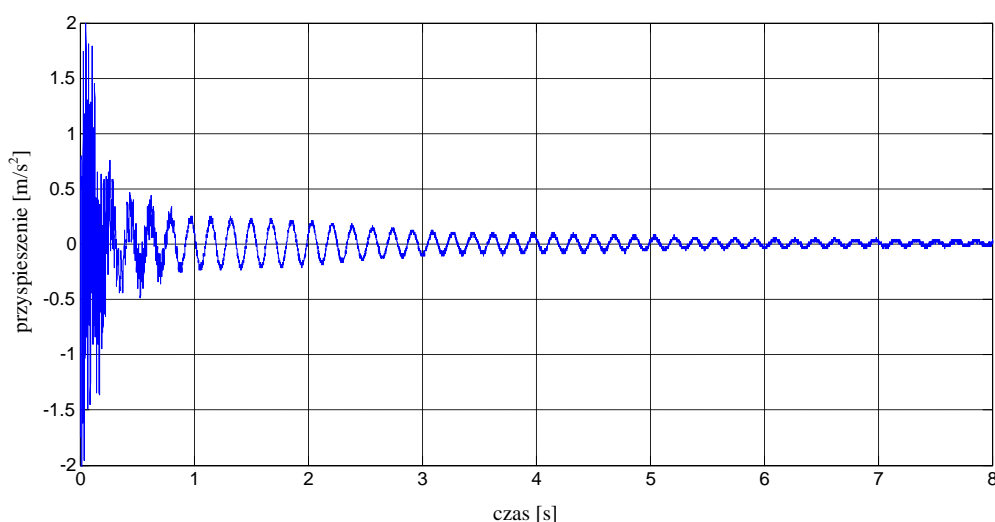
**Rys. 4.168** Przebieg czasowy przyspieszeń (po odfiltrowaniu w zakresie drugiej częstotliwości drgań) złożonej belki wspornikowej (grubość polimeru 1,75 mm).

Dla analizowanej belki wspornikowej wartości średnie liczb tłumienia z sześciu powtórzeń wyniosły: 0,98% i 1,30%, odpowiednio dla pierwszej i drugiej częstotliwości (zob. Tab. Z.6.1 w załączniku nr 6).

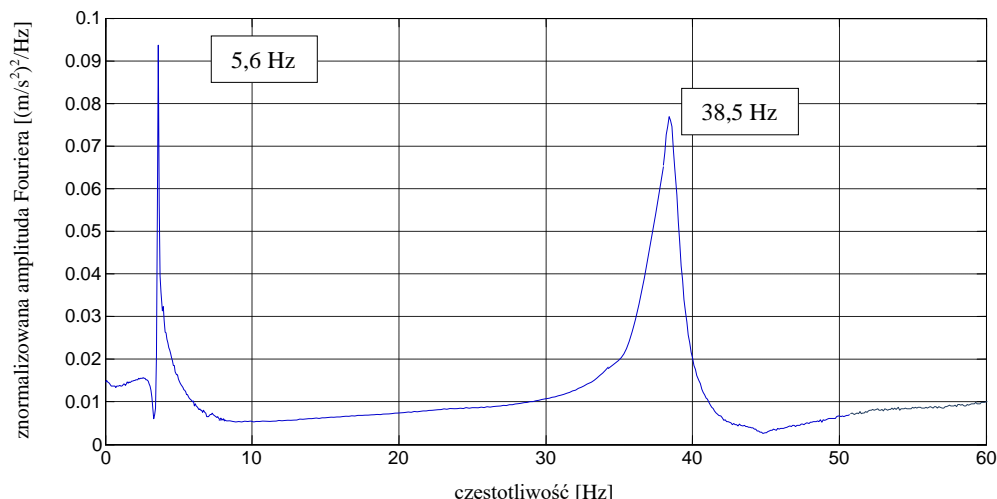
Wyniki w postaci przebiegów czasowych przyspieszeń, transformat Fouriera oraz przebiegów czasowych po odfiltrowaniu w zakresie ujawnionych częstotliwości drgań otrzymane dla złożonej belki wspornikowej, dodatkowo obciążonej odważnikami o różnych masach, przedstawiono na kolejnych rysunkach:

- Rys. 4.169–4.172 – odważnik o masie 1 kg;
- Rys. 4.173–4.176 – odważnik o masie 2,5 kg;
- Rys. 4.177–4.180 – odważnik o masie 3,5 kg;
- Rys. 4.181–4.184 – odważnik o masie 5 kg;
- Rys. 4.185–4.188 – odważnik o masie 6 kg.

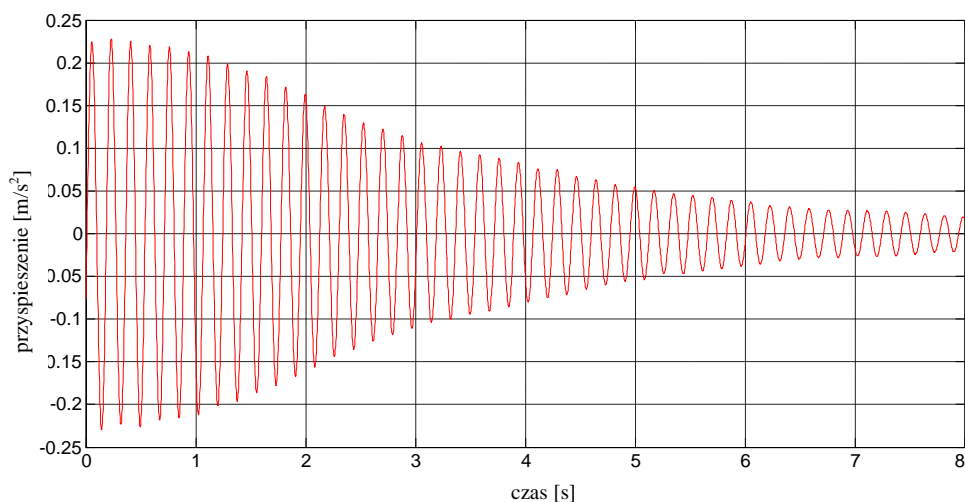
Dodatkowo, wartości średnie wszystkich otrzymanych częstotliwości drgań własnych wyznaczone dla złożonej belki wspornikowej, zestawiono w Tab. 4.18 (por. załącznik nr 4). Jednocześnie na Rys. 4.189 i 4.190 przedstawiono porównanie wartości częstotliwości odpowiadające pierwszej i drugiej postaci drgań belek wspornikowych (bez oraz z warstwą polimeru) wraz z funkcjami aproksymującymi postaci  $y = ax^b$ , dla których parametry  $a$  i  $b$  wyznaczono poprzez minimalizację średniego błędu kwadratowego (Bendat i Piersol 1971).



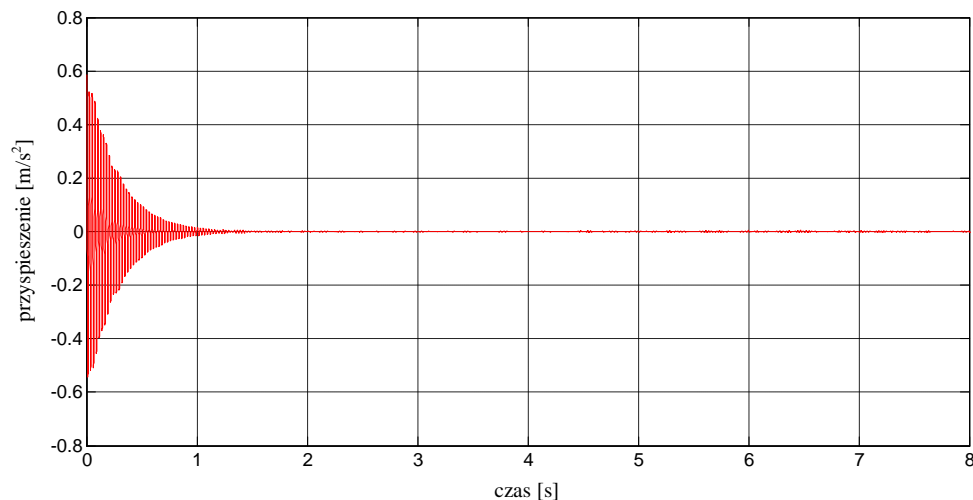
**Rys. 4.169** Przebieg czasowy przyspieszeń końca złożonej belki wspornikowej (grubość polimeru 1,75 mm) pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 1 kg).



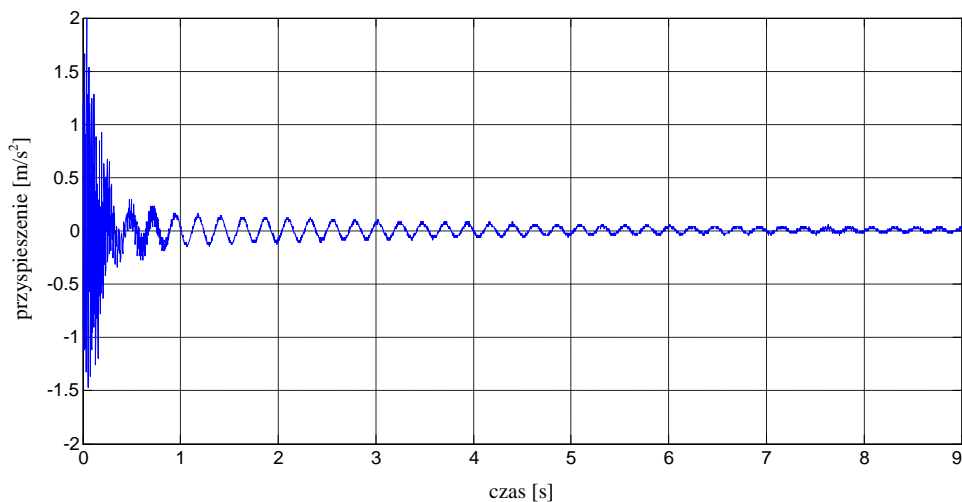
**Rys. 4.170** Transformata Fouriera dla złożonej belki wspornikowej (grubość polimeru 1,75 mm) pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 1 kg).



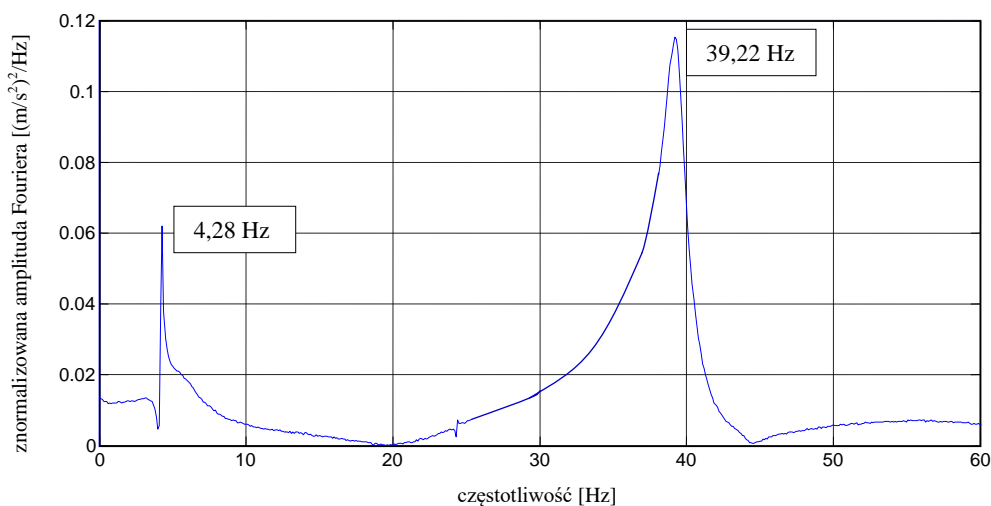
**Rys. 4.171** Przebieg czasowy przyspieszeń (po odfiltrowaniu w zakresie pierwszej częstotliwości drgań) złożonej belki wspornikowej (grubość polimeru 1,75 mm) pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 1 kg).



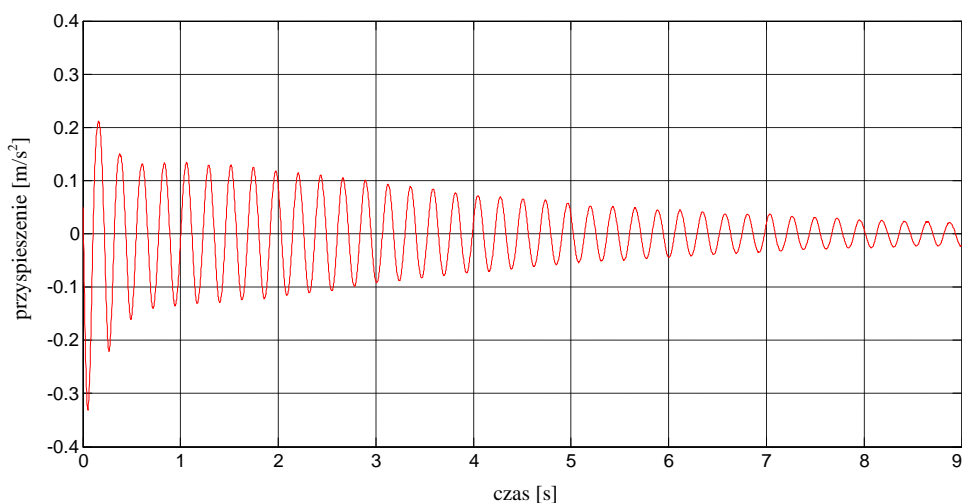
**Rys. 4.172** Przebieg czasowy przyspieszeń (po odfiltrowaniu w zakresie drugiej częstotliwości drgań) złożonej belki wspornikowej (grubość polimeru 1,75 mm) pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 1 kg).



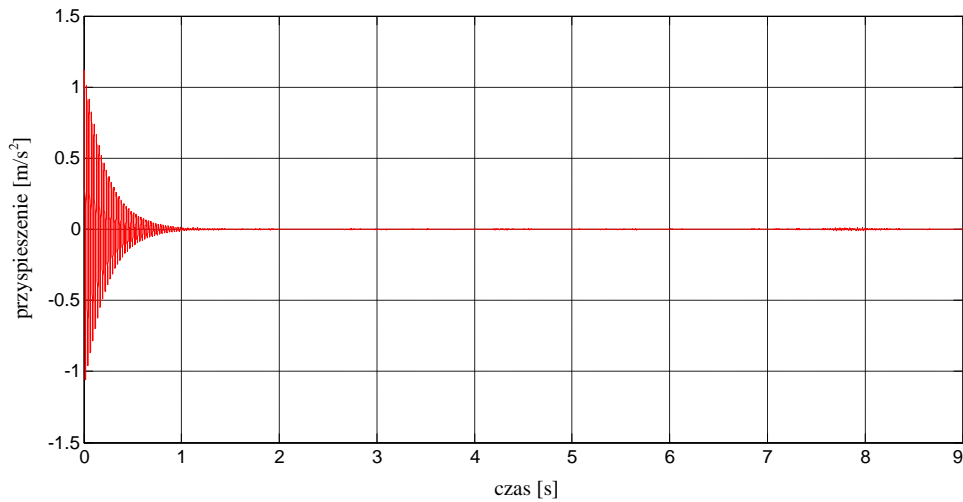
**Rys. 4.173** Przebieg czasowy przyspieszeń końca złożonej belki wspornikowej (grubość polimeru 1,75 mm) pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 2,5 kg).



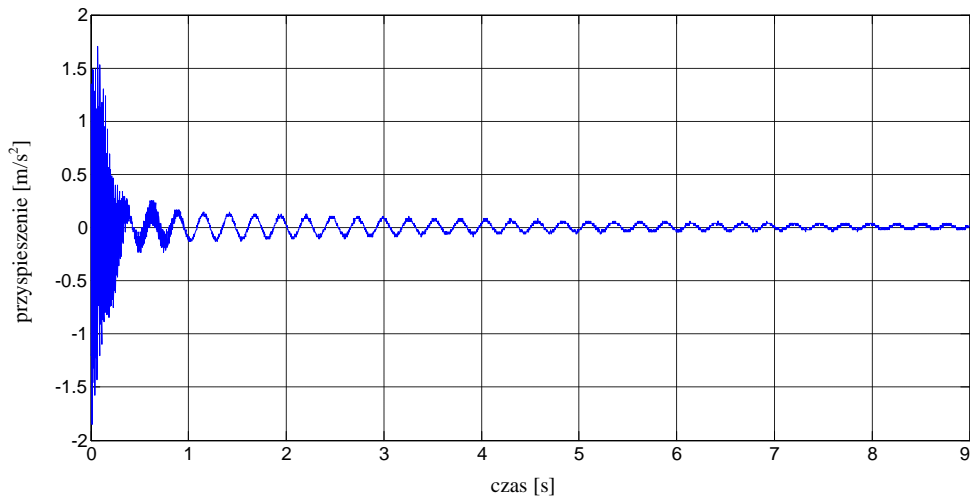
**Rys. 4.174** Transformata Fouriera dla złożonej belki wspornikowej (grubość polimeru 1,75 mm) pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 2,5 kg).



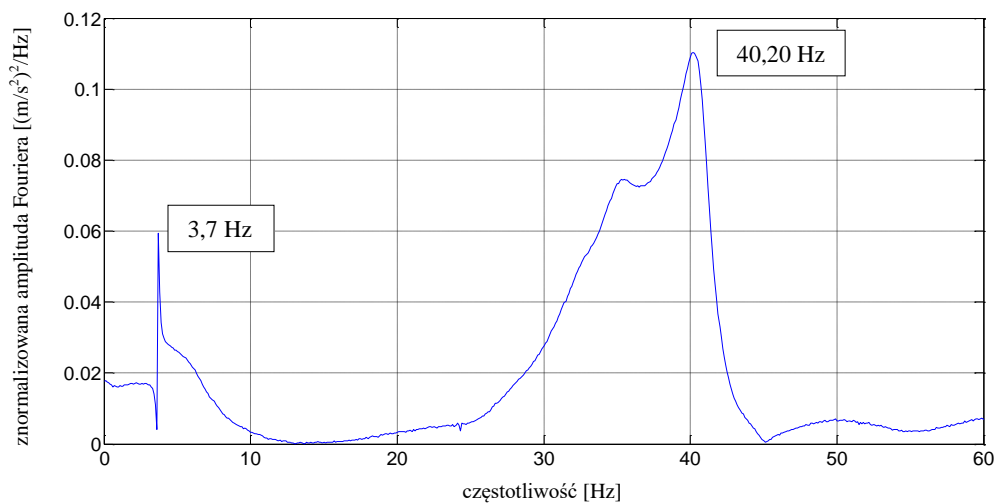
**Rys. 4.175** Przebieg czasowy przyspieszeń (po odfiltrowaniu w zakresie pierwszej częstotliwości drgań) złożonej belki wspornikowej (grubość polimeru 1,75 mm) pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 2,5 kg).



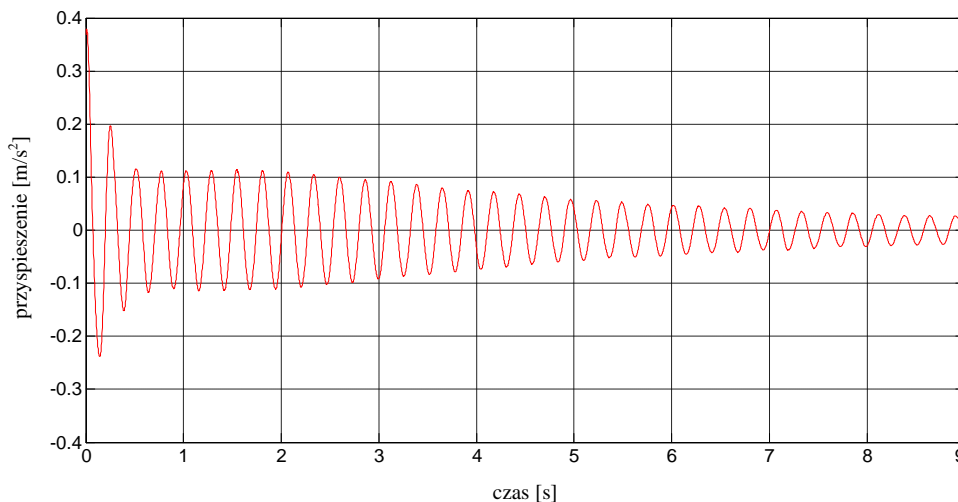
**Rys. 4.176** Przebieg czasowy przyspieszeń (po odfiltrowaniu w zakresie drugiej częstotliwości drgań) złożonej belki wspornikowej (grubość polimeru 1,75 mm) pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 2,5 kg).



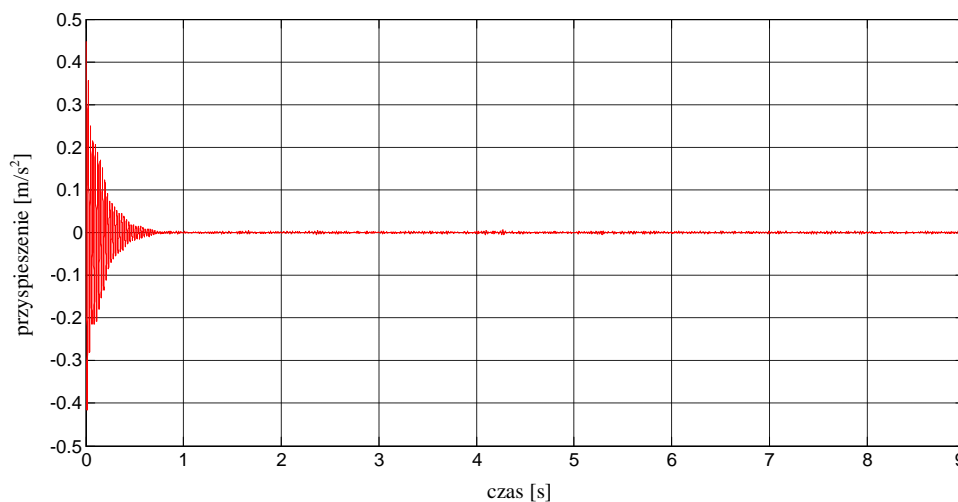
**Rys. 4.177** Przebieg czasowy przyspieszeń końca złożonej belki wspornikowej (grubość polimeru 1,75 mm) pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 3,5 kg).



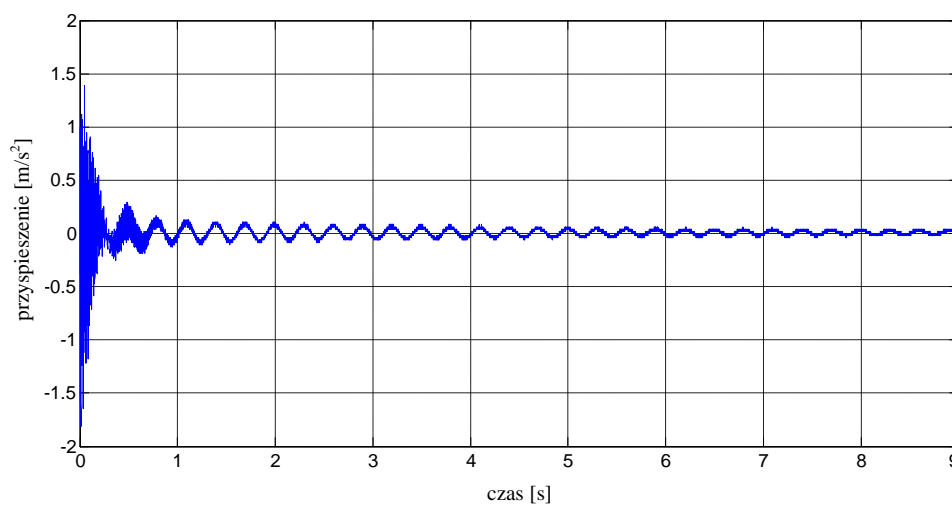
**Rys. 4.178** Transformata Fouriera dla złożonej belki wspornikowej (grubość polimeru 1,75 mm) pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 3,5 kg).



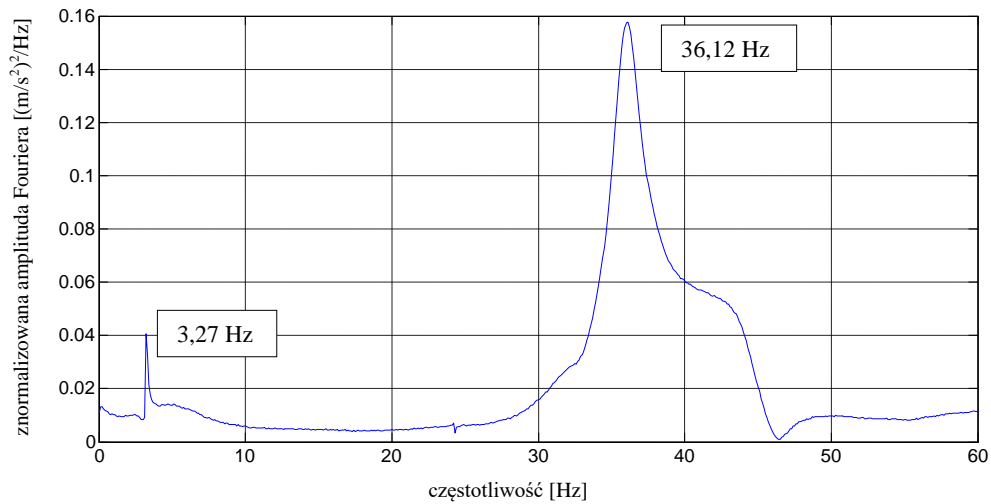
**Rys. 4.179** Przebieg czasowy przyspieszeń (po odfiltrowaniu w zakresie pierwszej częstotliwości drgań) złożonej belki wspornikowej (grubość polimeru 1,75 mm) pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 3,5 kg).



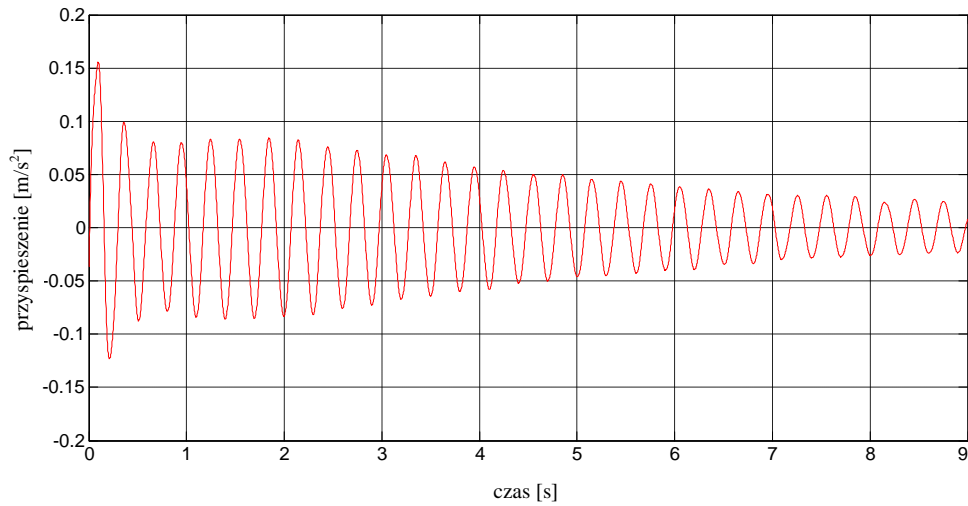
**Rys. 4.180** Przebieg czasowy przyspieszeń (po odfiltrowaniu w zakresie drugiej częstotliwości drgań) złożonej belki wspornikowej (grubość polimeru 1,75 mm) pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 3,5 kg).



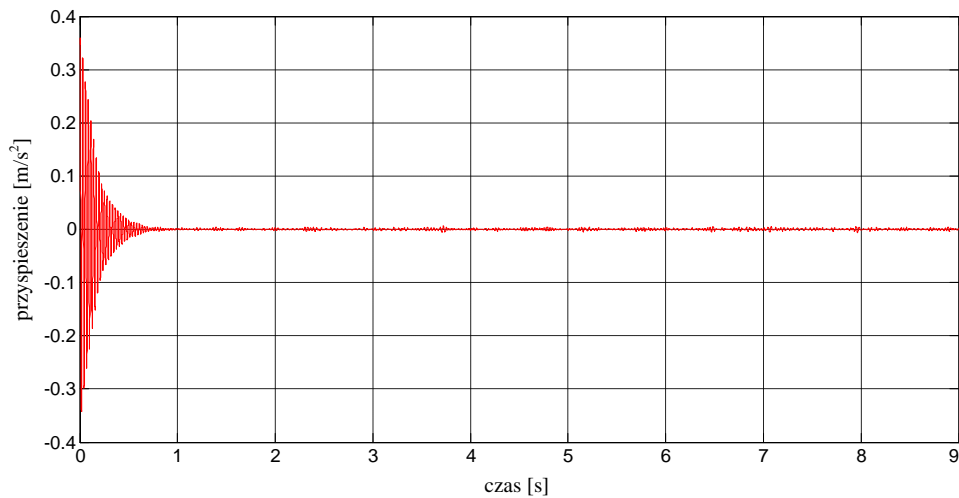
**Rys. 4.181** Przebieg czasowy przyspieszeń końca złożonej belki wspornikowej (grubość polimeru 1,75 mm) pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 5 kg).



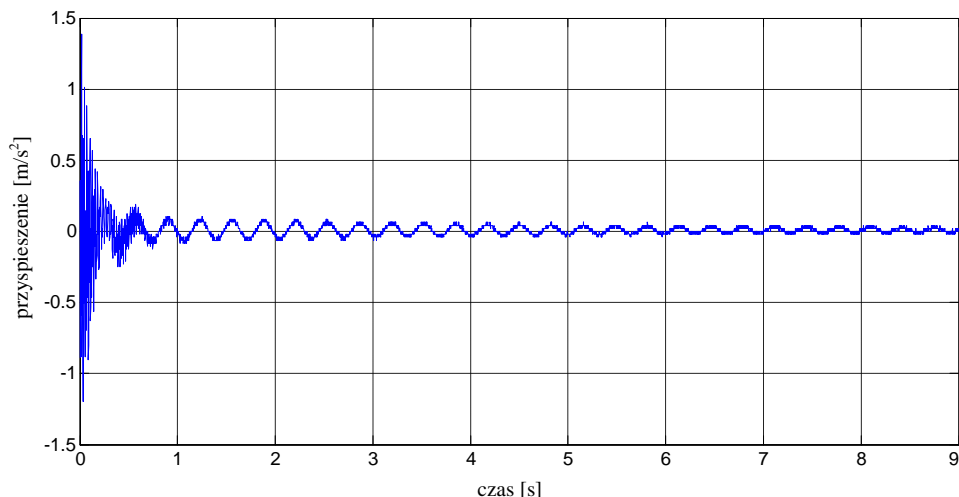
**Rys. 4.182** Transformata Fouriera dla złożonej belki wspornikowej (grubość polimeru 1,75 mm) pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 5 kg).



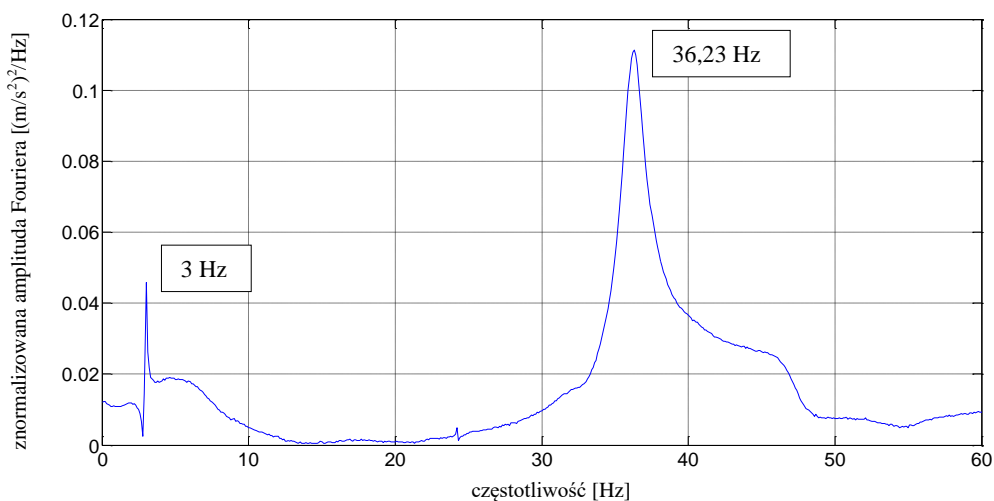
**Rys. 4.183** Przebieg czasowy przyspieszeń (po odfiltrowaniu w zakresie pierwszej częstotliwości drgań) złożonej belki wspornikowej (grubość polimeru 1,75 mm) pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 5 kg).



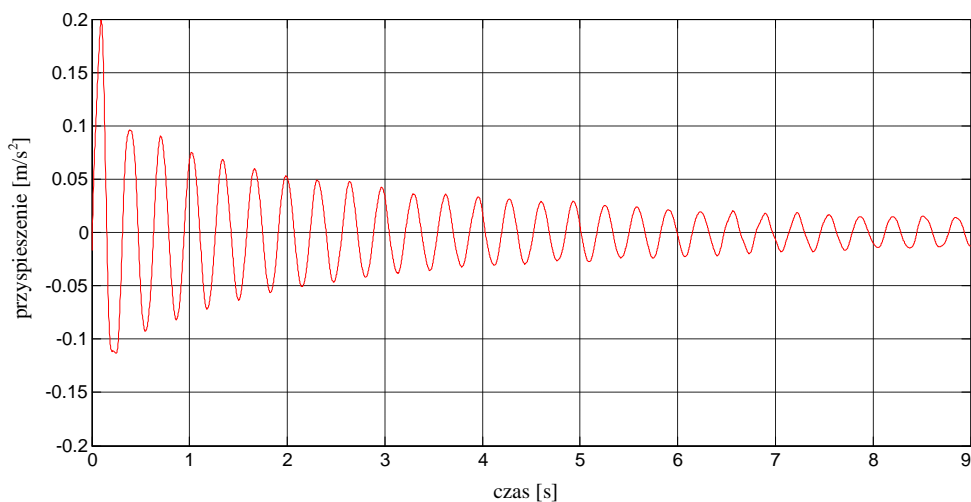
**Rys. 4.184** Przebieg czasowy przyspieszeń (po odfiltrowaniu w zakresie drugiej częstotliwości drgań) złożonej belki wspornikowej (grubość polimeru 1,75 mm) pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 5 kg).



**Rys. 4.185** Przebieg czasowy przyspieszeń końca złożonej belki wspornikowej (grubość polimeru 1,75 mm) pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 6 kg).

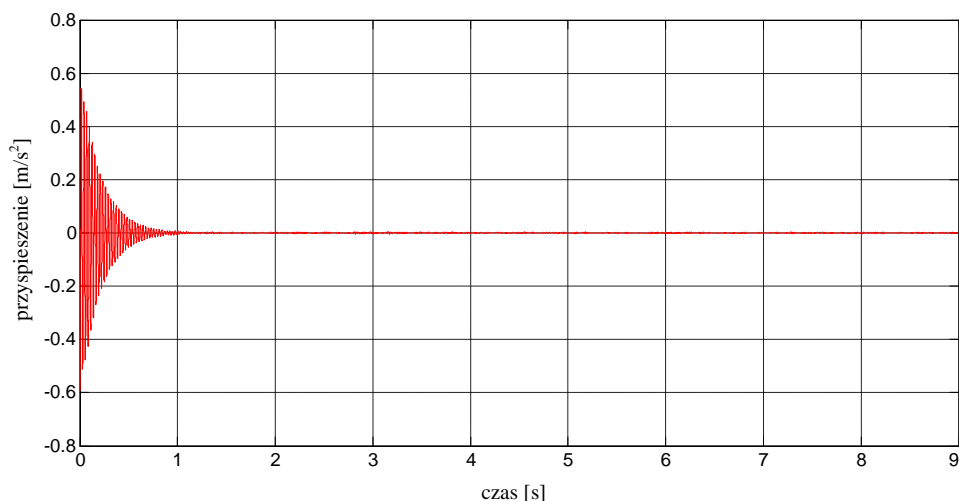


**Rys. 4.186** Transformata Fouriera dla złożonej belki wspornikowej (grubość polimeru 1,75 mm) pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 6 kg).



**Rys. 4.187** Przebieg czasowy przyspieszeń (po odfiltrowaniu w zakresie pierwszej częstotliwości drgań) złożonej belki wspornikowej (grubość polimeru 1,75 mm) pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 6 kg).

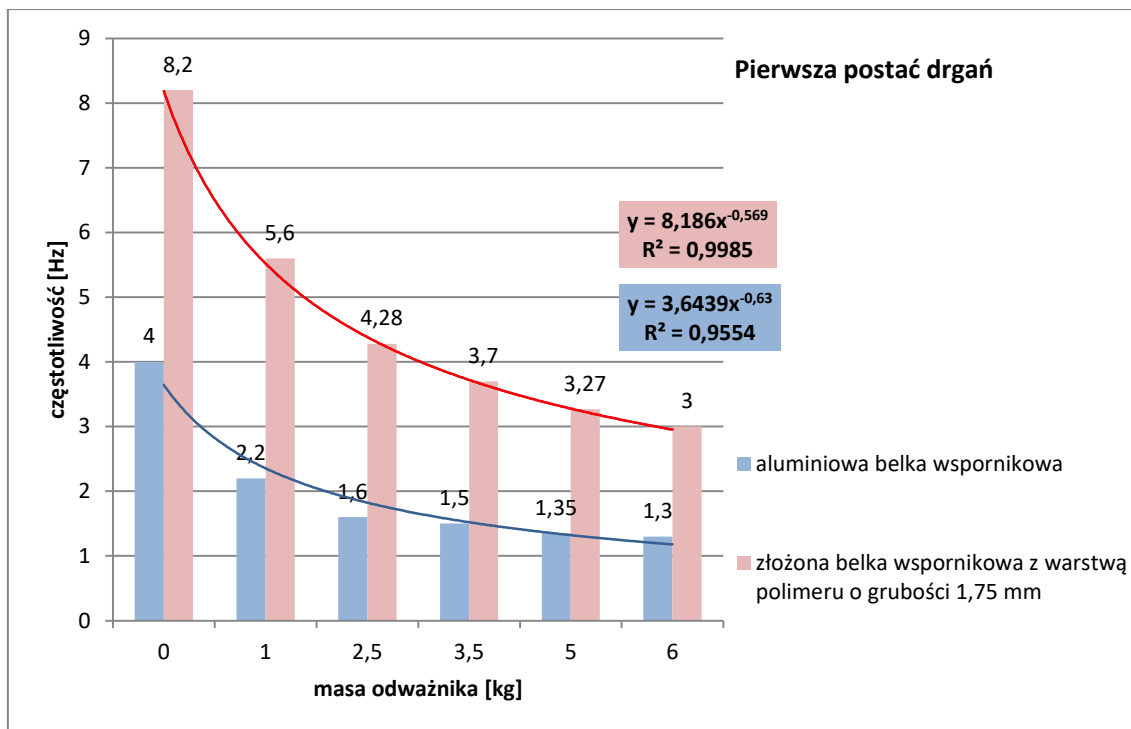




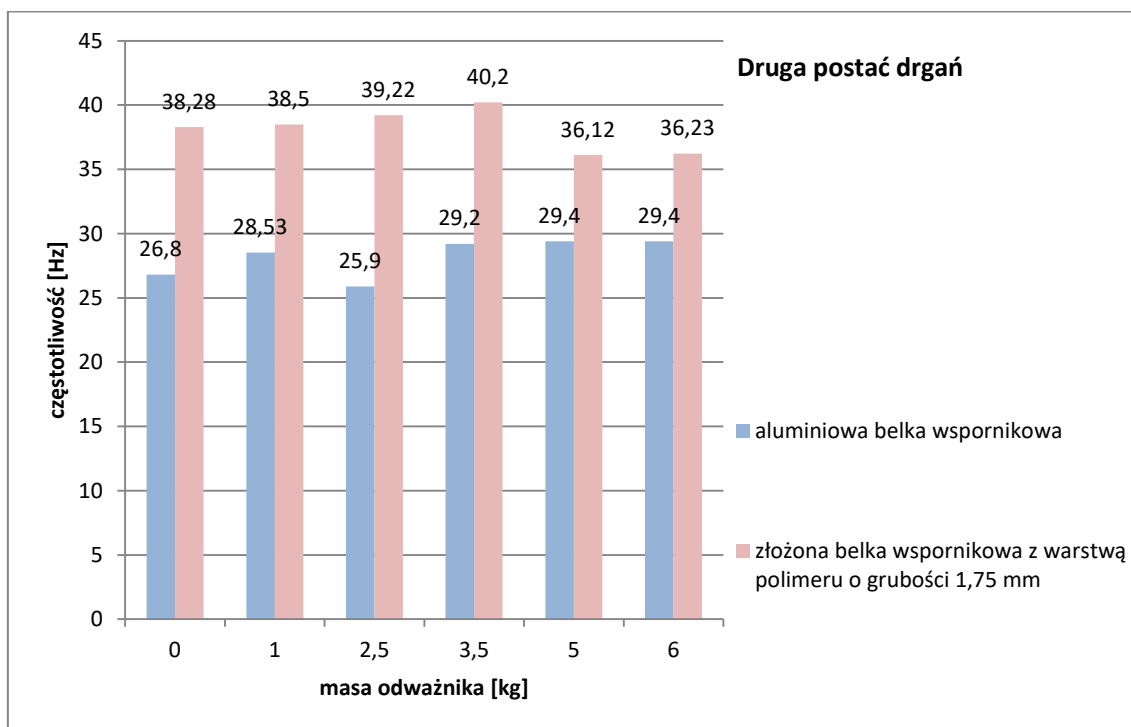
**Rys. 4.188** Przebieg czasowy przyspieszeń (po odfiltrowaniu w zakresie drugiej częstotliwości drgań) złożonej belki wspornikowej (grubość polimeru 1,75 mm) pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 6 kg).

**Tab. 4.18** Częstotliwości drgań poprzecznych złożonej aluminiowej belki wspornikowej.

Dodatkowe obciążenie - masa odważnika [kg]	Częstotliwość drgań poprzecznych [Hz]	
	Pierwsza postać drgań	Druga postać drgań
brak	8,20	38,28
1,0	5,60	38,50
2,5	4,28	39,22
3,5	3,70	40,20
5,0	3,27	36,12
6,0	3,00	36,23



**Rys. 4.189** Wartości częstotliwości drgań odpowiadające pierwszej postaci drgań analizowanych belek wspornikowych z uwzględnieniem dodatkowego obciążenia.



**Rys. 4.190** Wartości częstotliwości drgań odpowiadające drugiej postaci drgań analizowanych belek wspornikowych z uwzględnieniem dodatkowego obciążenia.

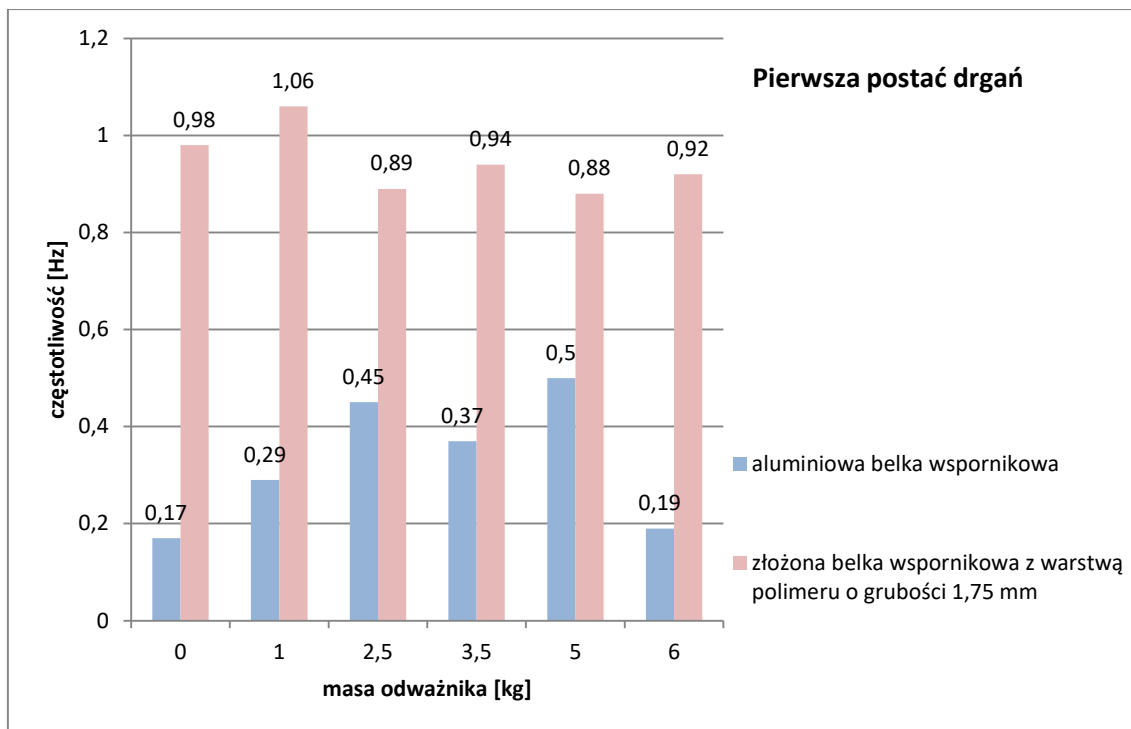
W wyniku przeprowadzonych badań zaobserwowano, że przyłożenie dodatkowego obciążenia w postaci odważników o różnych masach prowadzi do istotnego spadku wartości podstawowej częstotliwości drgań złożonej belki

wspornikowej (patrz Tab. 4.18). W przypadku pierwszej postaci i zamocowania odważnika o masie 6 kg zaobserwowano przesunięcie podstawowej częstotliwości w kierunku pasm o niższej wartości o 63% w porównaniu z belką nieobciążoną. Z kolei, wartości średnie częstotliwości drgań odpowiadające drugiej postaci drgań własnych utrzymują się na podobnym poziomie wahając się pomiędzy 36,12 a 40,20 Hz. Jednocześnie Rys. 4.189 i 4.190 wskazuje na przesunięcie podstawowej częstotliwości drgań w kierunku pasm o niższej wartości w przypadku złożonej belki z warstwą polimeru o grubości 1,75 mm w porównaniu z belką pojedynczą. Największe zaobserwowane przesunięcie wartości częstotliwości odpowiadającej pierwszej postaci drgań wyniosło 63%, podczas gdy w przypadku drugiej postaci drgań równe było 34%.

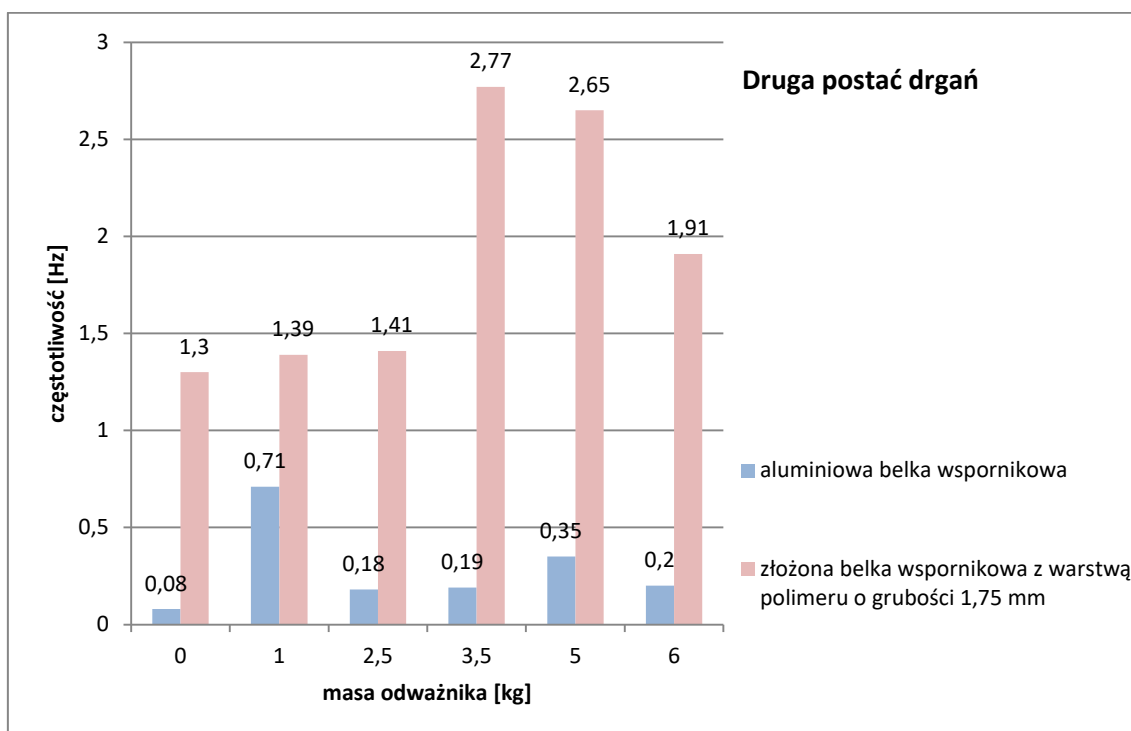
W celu określenia efektywności zastosowania warstwy polimeru do redukcji drgań aluminiowych belek wspornikowych wyznaczono, zgodnie z równaniem (4.3) wartości liczb tłumienia (por. załącznik nr 4). W Tab. 4.19 przedstawiono wartości średnie z sześciu pomiarów tego parametru dynamicznego dla przebiegów czasowych przyspieszeń odpowiadających pierwszej oraz drugiej postaci drgań belek wspornikowych. Jednocześnie, na Rys. 4.191 i 4.192 przedstawiono porównanie wartości liczb tłumienia dla analizowanych belek (bez oraz z warstwą polimeru).

**Tab. 4.19** Liczby tłumienia dwóch pierwszych częstotliwości drgań poprzecznych złożonej belki wspornikowej.

Dodatkowe obciążenie - masa odważnika [kg]	Liczba tłumienia [%]	
	Pierwsza postać drgań	Druga postać drgań
brak	0,98	1,30
1,0	1,06	1,39
2,5	0,89	1,41
3,5	0,94	2,77
5,0	0,88	2,65
6,0	0,92	1,91



**Rys. 4.191** Liczby tłumienia dla pierwszej częstotliwości drgań analizowanych belek wspornikowych z uwzględnieniem dodatkowego obciążenia.



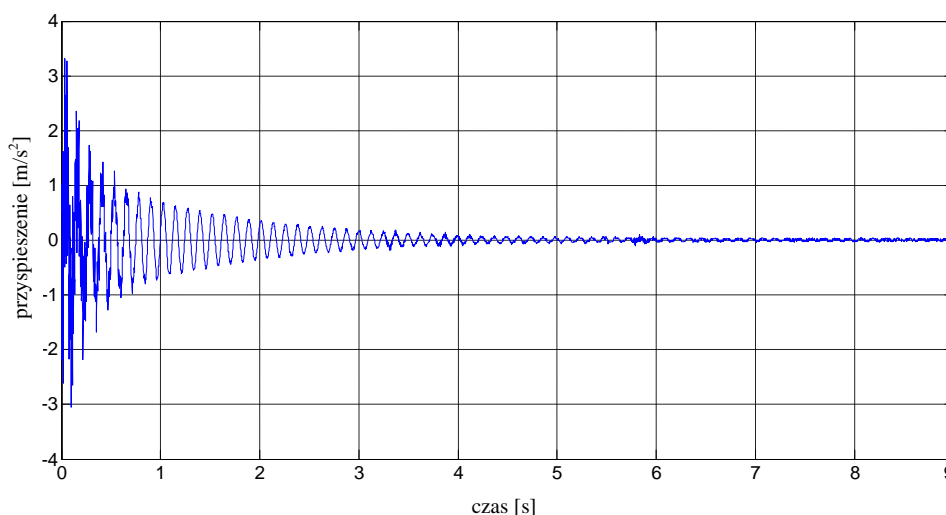
**Rys. 4.192** Liczby tłumienia dla drugiej częstotliwości drgań analizowanych belek wspornikowych z uwzględnieniem dodatkowego obciążenia.

Z Tab. 4.19 można zaobserwować, że wyznaczone średnie wartości liczby tłumienia złożonej belki wspornikowej wahają się pomiędzy 0,88 a 1,06% w przypadku

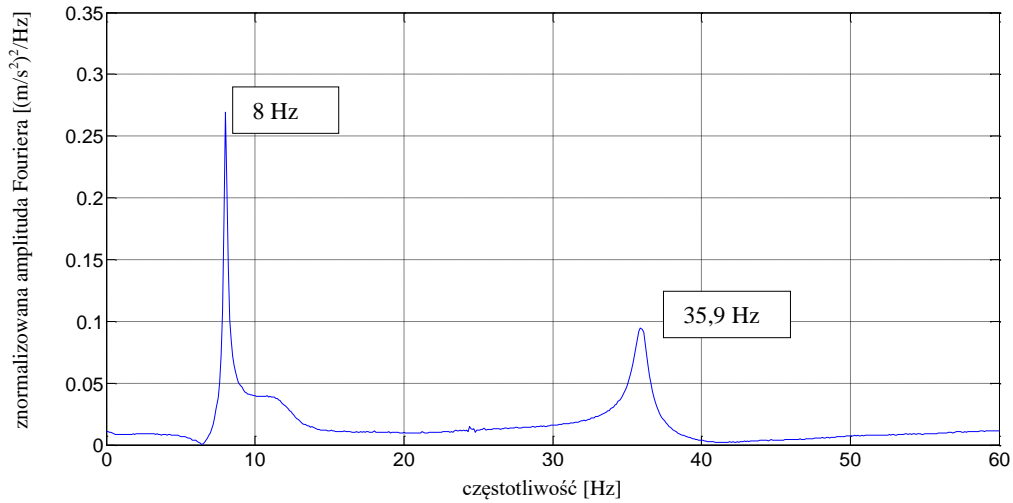
pierwszej postaci drgań oraz pomiędzy 1,30 a 2,77 % w przypadku drugiej postaci drgań (por. załącznik nr 6). Rys. 4.191 i 4.192 wskazują na znaczny wzrost liczb tłumienia tych belek w stosunku do pojedynczego płaskownika bez warstwy polimeru. Największy wzrost (o 476%) liczby tłumienia pierwszej postaci drgań odnotowano w przypadku belki nieobciążonej, podczas gdy najmniejszy (o 76%) w przypadku zamocowania odważnika o masie 5 kg. Największy wzrost (o 1525%) liczby tłumienia drugiej postaci drgań odnotowano w przypadku belki nieobciążonej, podczas gdy najmniejszy (o 96%) w przypadku zamocowania odważnika o masie 1 kg.

#### 4.3.6 WYNIKI BADAN DLA ZŁOŻONEJ BELKI WSPORNIKOWEJ Z WARSTWĄ POLIMERU O GRUBOŚCI 3,1 MM

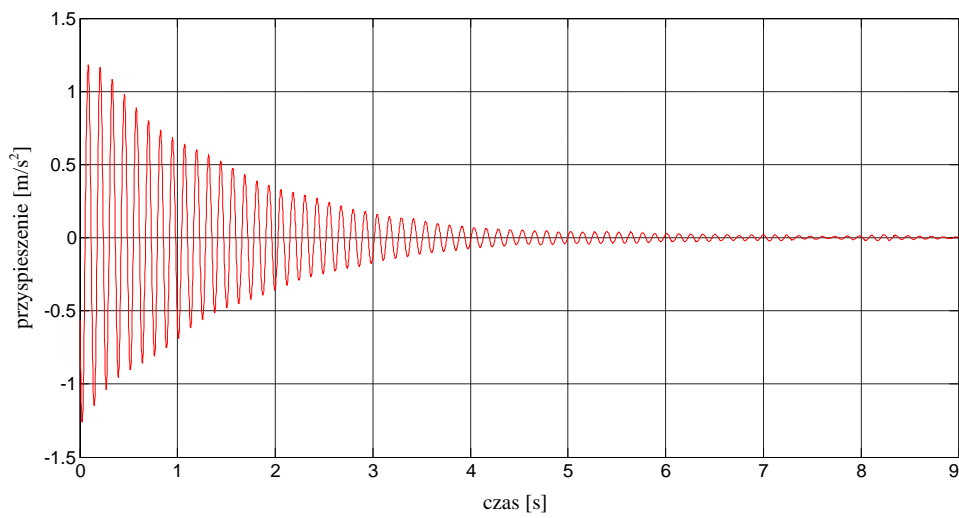
Na Rys. 4.193 przedstawiono przebieg czasowy przyspieszeń uzyskany dla belki wspornikowej złożonej z dwóch aluminiowych płaskowników sklejonych warstwą polimeru o grubości 3,1 mm. Dla przebiegu czasowego wykonano szybką transformatę Fouriera (patrz Rys. 4.194), która ujawniła dwie dominujące częstotliwości drgań własnych o wartościach 8 i 35,9 Hz. Na Rys. 4.195 i 4.196 przedstawiono przebiegi czasowe przyspieszeń po odfiltrowaniu w zakresie pierwszej i drugiej częstotliwości drgań analizowanej belki.



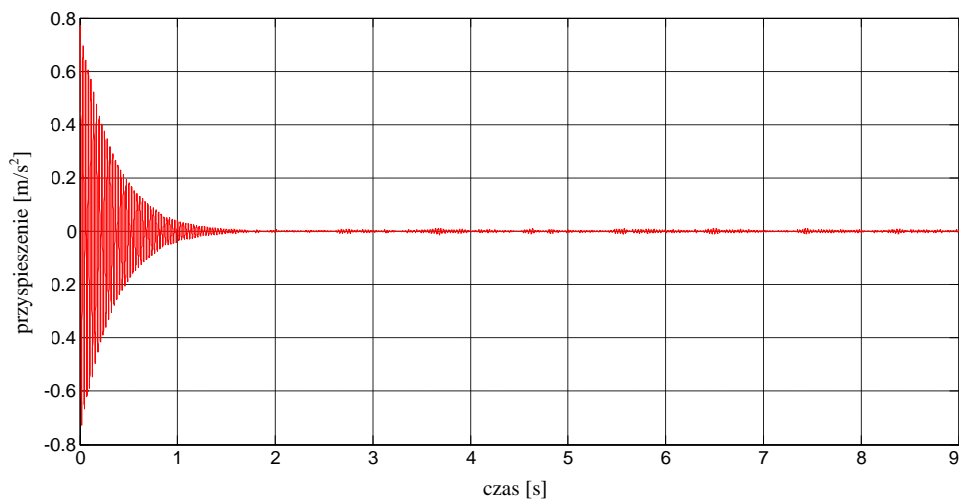
**Rys. 4.193** Przebieg czasowy przyspieszeń końca złożonej belki wspornikowej (grubość polimeru 3,1 mm).



**Rys. 4.194** Transformata Fouriera dla złożonej belki wspornikowej (grubość polimeru 3,1 mm).



**Rys. 4.195** Przebieg czasowy przyspieszeń (po odfiltrowaniu w zakresie pierwszej częstotliwości drgań) złożonej belki wspornikowej (grubość polimeru 3,1 mm).



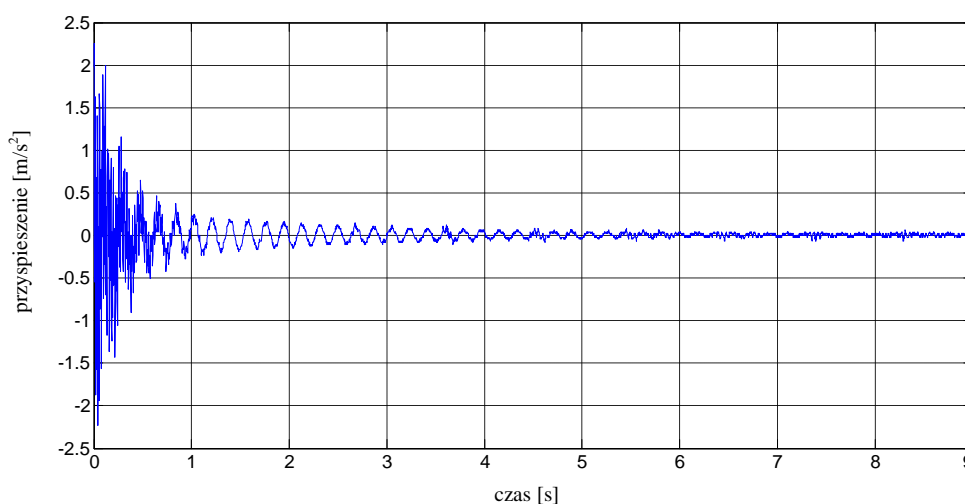
**Rys. 4.196** Przebieg czasowy przyspieszeń (po odfiltrowaniu w zakresie drugiej częstotliwości drgań) złożonej belki wspornikowej (grubość polimeru 3,1 mm).

Dla analizowanej belki wspornikowej wartości średnie liczb tłumienia z sześciu powtórzeń wyniosły: 1,31% i 1,11%, odpowiednio dla pierwszej i drugiej częstotliwości (zob. Tab. Z.7.1 w załączniku nr 7).

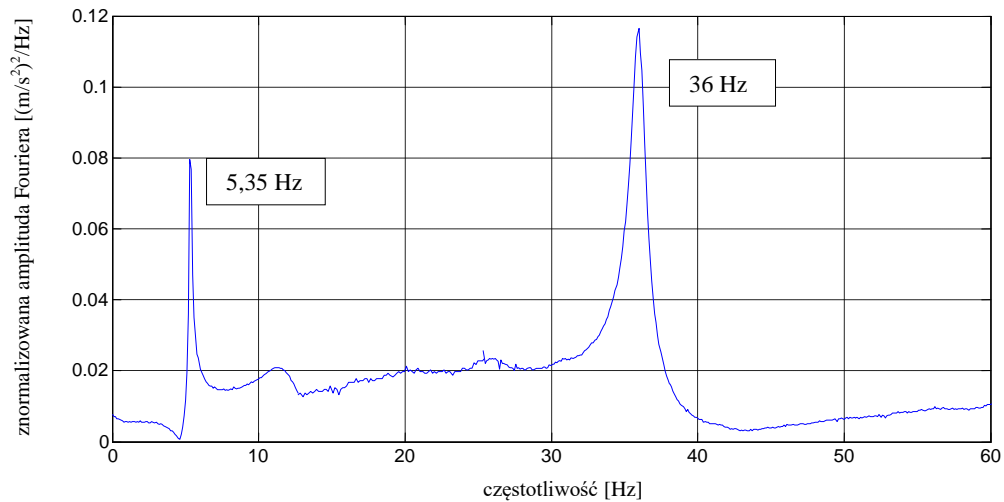
Wyniki w postaci przebiegów czasowych przyspieszeń, transformat Fouriera oraz przebiegów czasowych po odfiltrowaniu w zakresie ujawnionych częstotliwości drgań otrzymane dla złożonej belki wspornikowej, dodatkowo obciążonej odważnikami o różnych masach, przedstawiono na kolejnych rysunkach:

- Rys. 4.197–4.200 – odważnik o masie 1 kg;
- Rys. 4.201–4.204 – odważnik o masie 2,5 kg;
- Rys. 4.205–4.208 – odważnik o masie 3,5 kg;
- Rys. 4.209–4.212 – odważnik o masie 5 kg;
- Rys. 4.213–4.218 – odważnik o masie 6 kg.

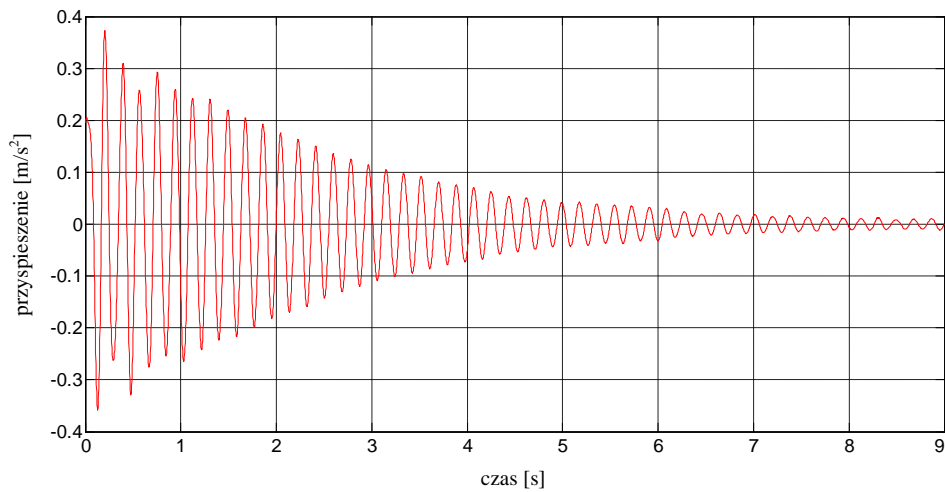
Dodatkowo, wartości średnie wszystkich otrzymanych częstotliwości drgań własnych wyznaczone dla złożonej belki wspornikowej, zestawiono w Tab. 4.20 (por. załącznik nr 7). Jednocześnie na Rys. 4.217 i 4.218 przedstawiono porównanie wartości częstotliwości odpowiadające pierwszej i drugiej postaci drgań belek wspornikowych (bez oraz z warstwą polimeru) wraz z funkcjami aproksymującymi postaci  $y = ax^b$ , dla których parametry  $a$  i  $b$  wyznaczono poprzez minimalizację średniego błędu kwadratowego (Bendat i Piersol 1971).



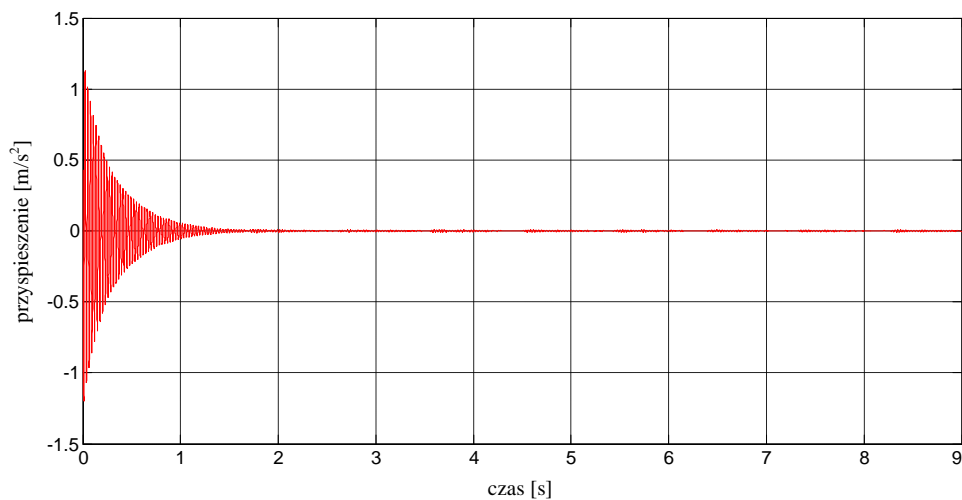
**Rys. 4.197** Przebieg czasowy przyspieszeń końca złożonej belki wspornikowej (grubość polimeru 3,1 mm) pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 1 kg).



**Rys. 4.198** Transformata Fouriera dla złożonej belki wspornikowej (grubość polimeru 3,1 mm) pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 1 kg).

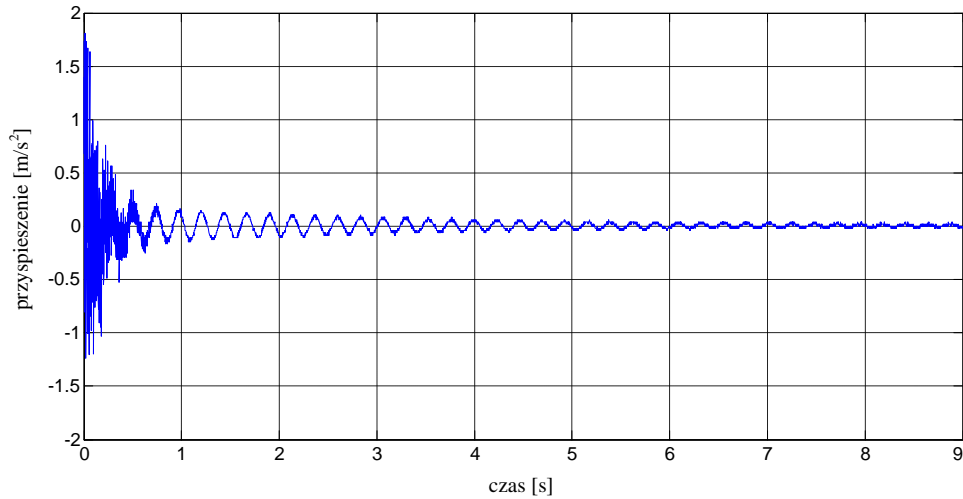


**Rys. 4.199** Przebieg czasowy przyspieszeń (po odfiltrowaniu w zakresie pierwszej częstotliwości drgań) złożonej belki wspornikowej (grubość polimeru 3,1 mm) pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 1 kg).

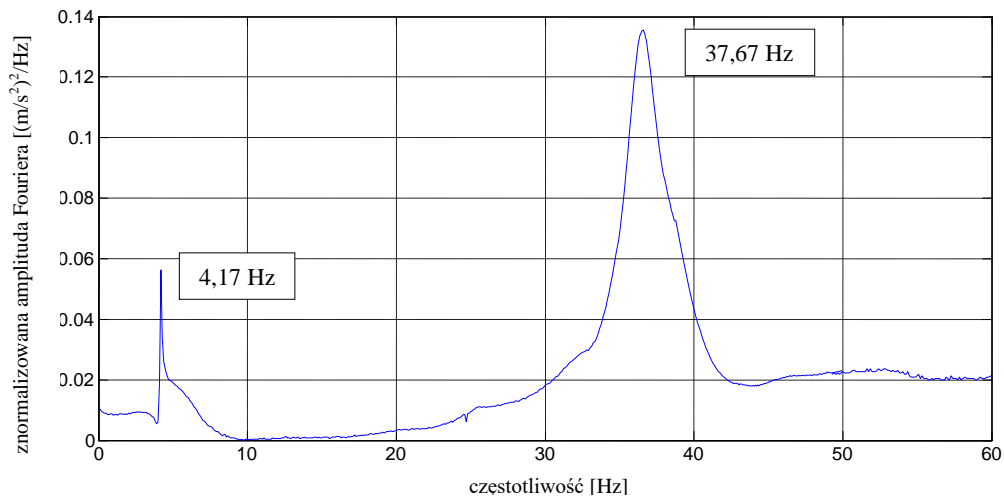


**Rys. 4.200** Przebieg czasowy przyspieszeń (po odfiltrowaniu w zakresie drugiej częstotliwości drgań) złożonej belki wspornikowej (grubość polimeru 3,1 mm) pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 1 kg).

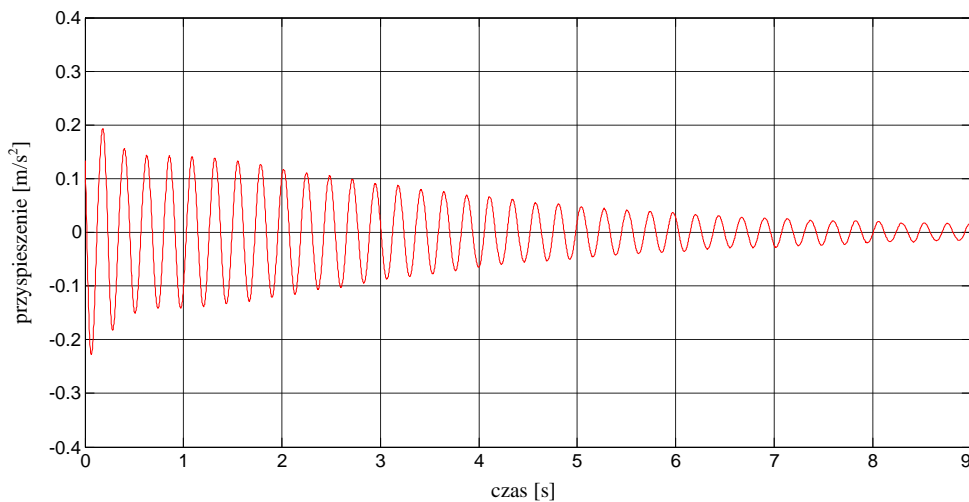




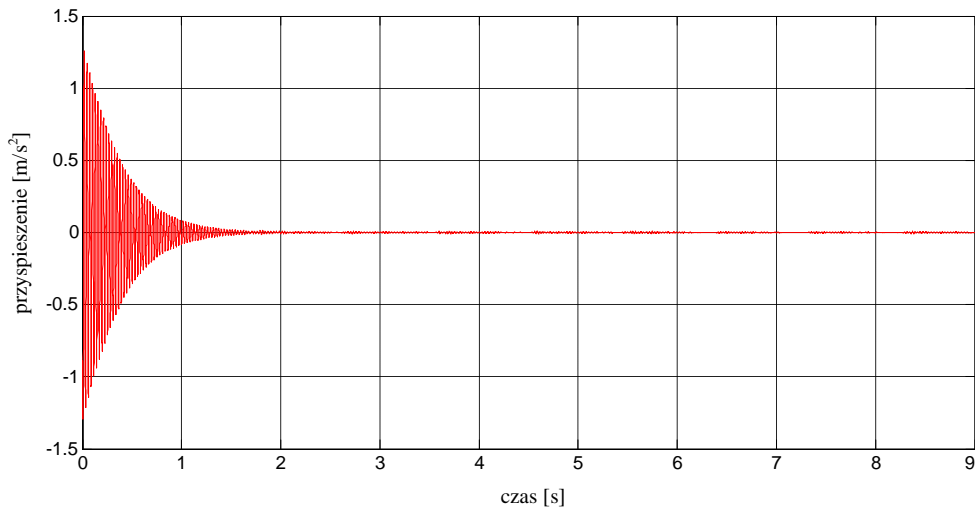
**Rys. 4.201** Przebieg czasowy przyspieszeń końca złożonej belki wspornikowej (grubość polimeru 3,1 mm) pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 2,5 kg).



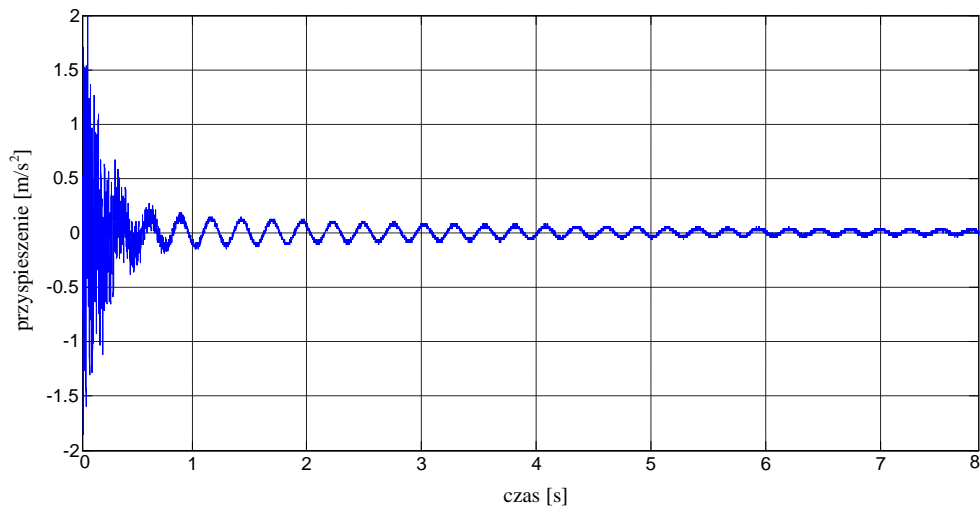
**Rys. 4.202** Transformata Fouriera dla złożonej belki wspornikowej (grubość polimeru 3,1 mm) pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 2,5 kg).



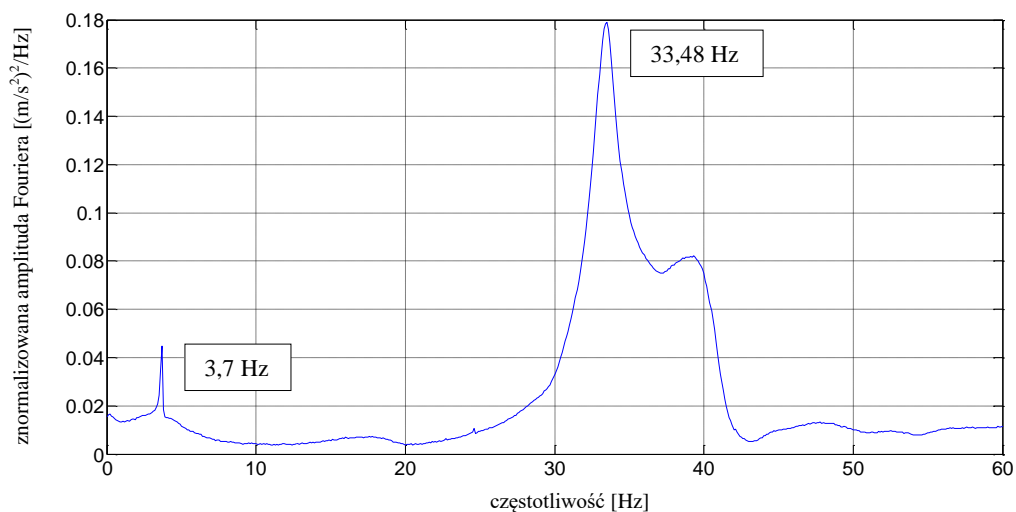
**Rys. 4.203** Przebieg czasowy przyspieszeń (po odfiltrowaniu w zakresie pierwszej częstotliwości drgań) złożonej belki wspornikowej (grubość polimeru 3,1 mm) pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 2,5 kg).



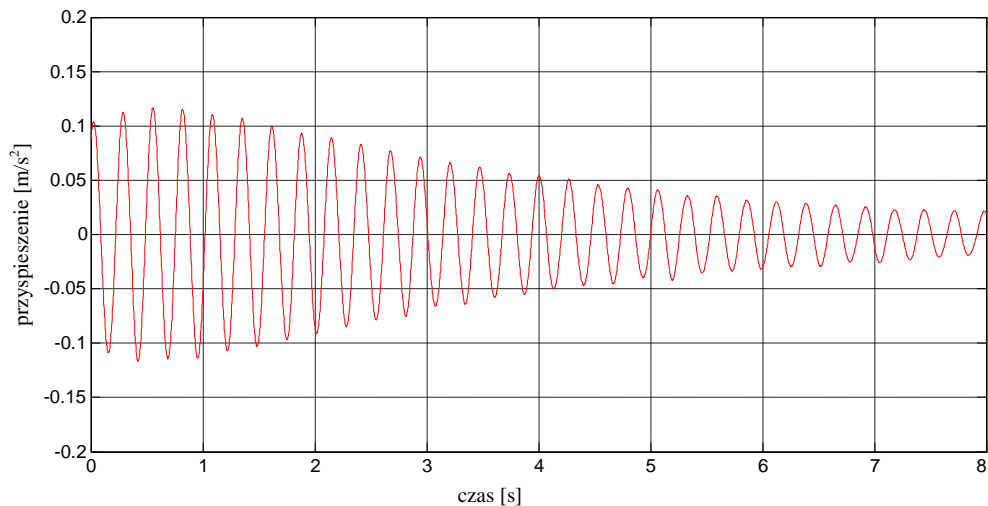
**Rys. 4.204** Przebieg czasowy przyspieszeń (po odfiltrowaniu w zakresie drugiej częstotliwości drgań) złożonej belki wspornikowej (grubość polimeru 3,1 mm) pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 2,5 kg).



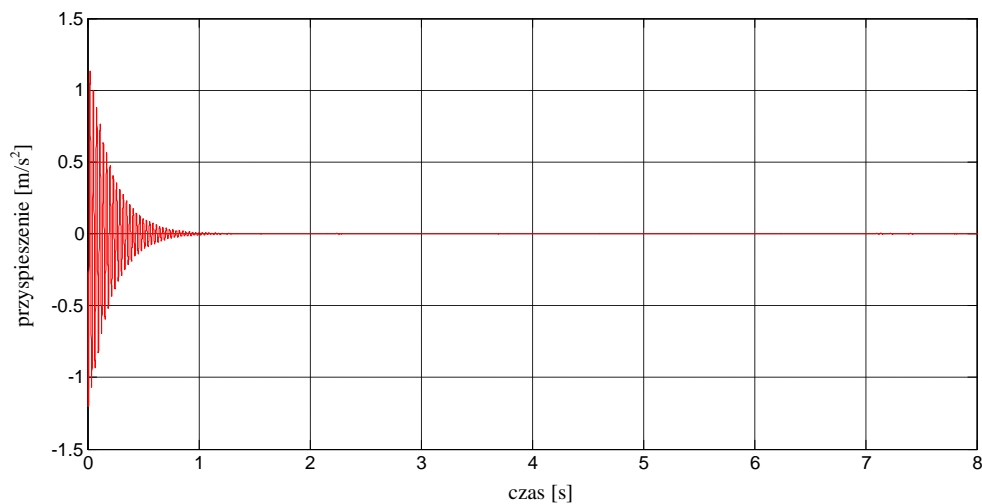
**Rys. 4.205** Przebieg czasowy przyspieszeń końca złożonej belki wspornikowej (grubość polimeru 3,1 mm) pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 3,5 kg).



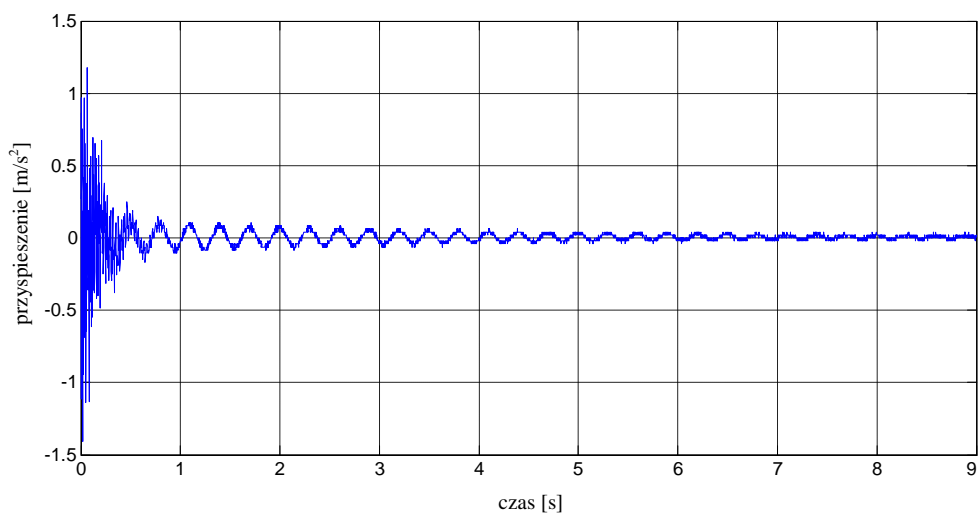
**Rys. 4.206** Transformata Fouriera dla złożonej belki wspornikowej (grubość polimeru 3,1 mm) pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 3,5 kg).



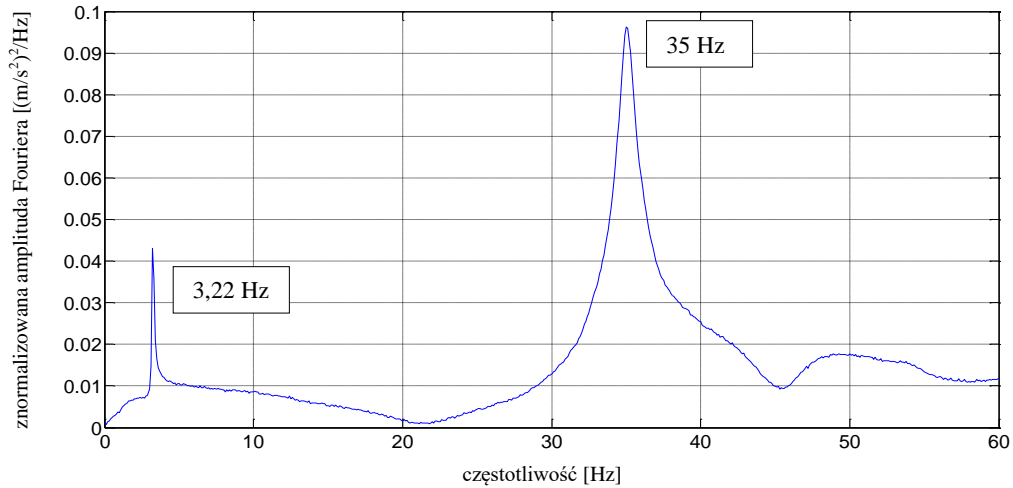
**Rys. 4.207** Przebieg czasowy przyspieszeń (po odfiltrowaniu w zakresie pierwszej częstotliwości drgań) złożonej belki wspornikowej (grubość polimeru 3,1 mm) pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 3,5 kg).



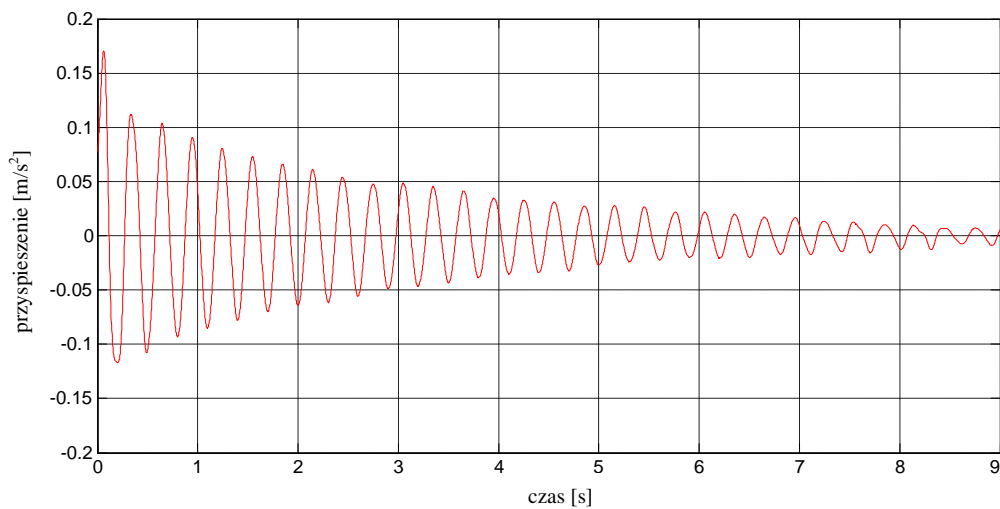
**Rys. 4.208** Przebieg czasowy przyspieszeń (po odfiltrowaniu w zakresie drugiej częstotliwości drgań) złożonej belki wspornikowej (grubość polimeru 3,1 mm) pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 3,5 kg).



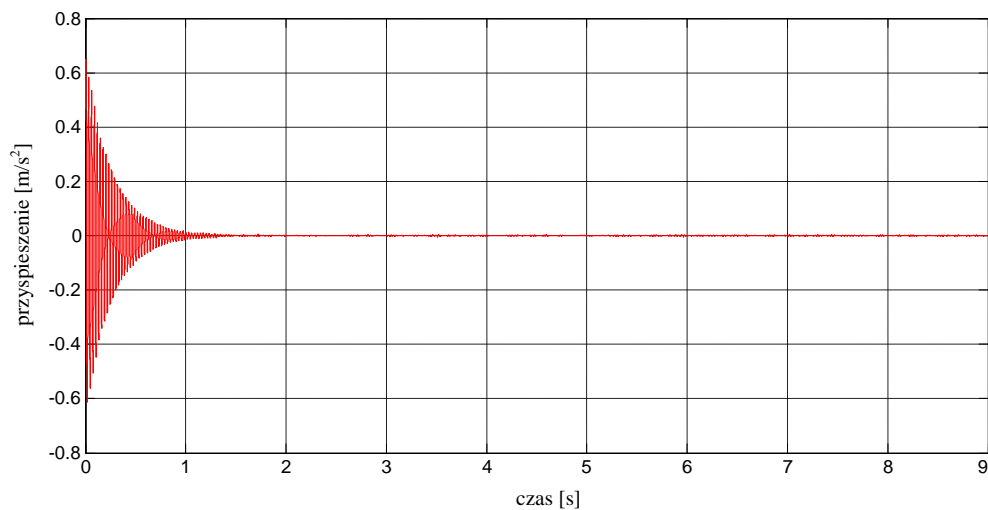
**Rys. 4.209** Przebieg czasowy przyspieszeń końca złożonej belki wspornikowej (grubość polimeru 3,1 mm) pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 5 kg).



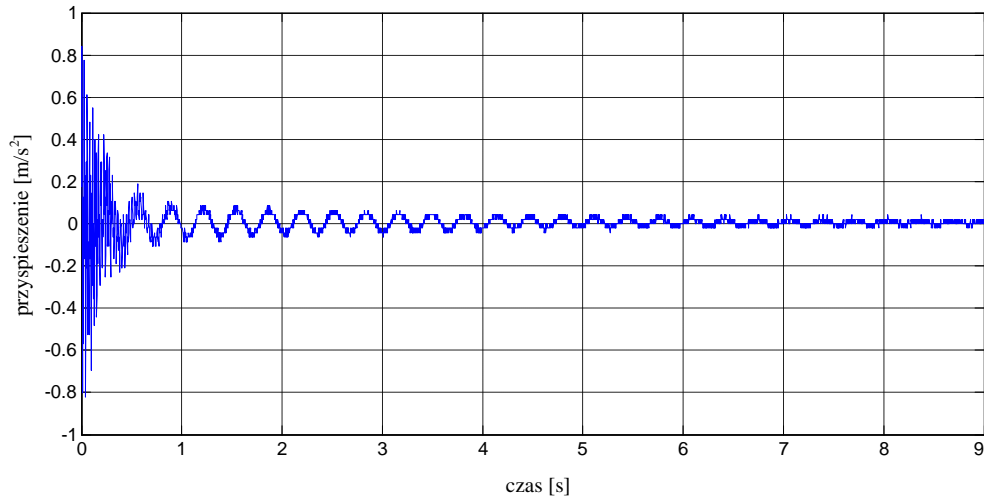
**Rys. 4.210** Transformata Fouriera dla złożonej belki wspornikowej (grubość polimeru 3,1 mm) pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 5 kg).



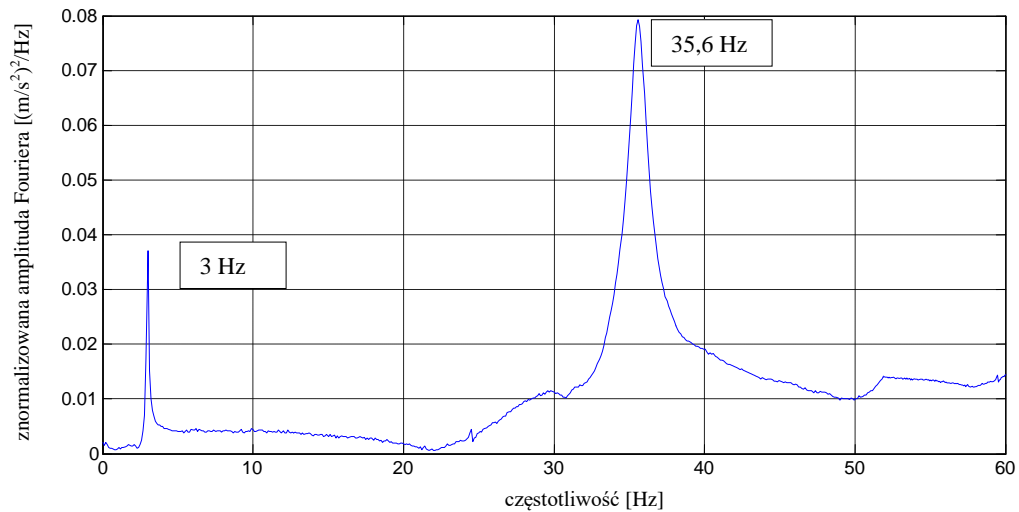
**Rys. 4.211** Przebieg czasowy przyspieszeń (po odfiltrowaniu w zakresie pierwszej częstotliwości drgań) złożonej belki wspornikowej (grubość polimeru 3,1 mm) pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 5 kg).



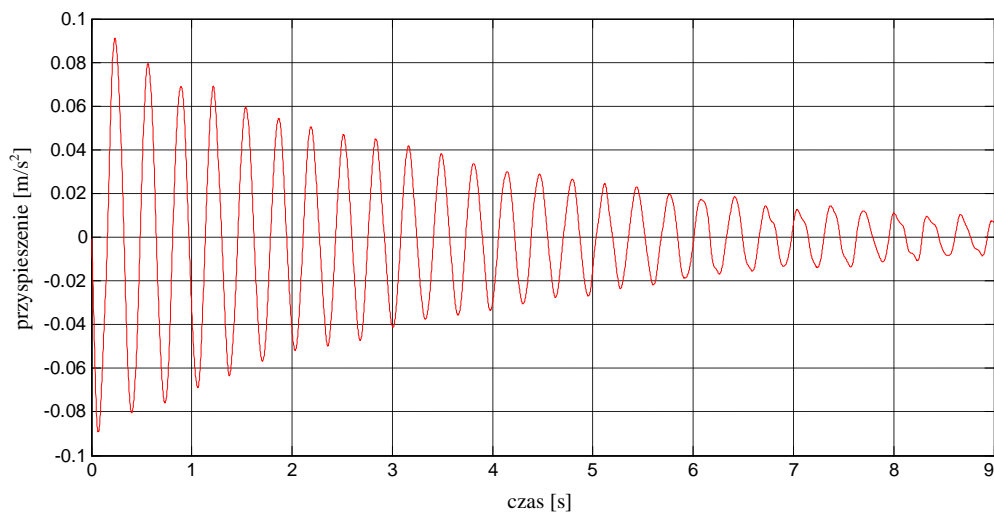
**Rys. 4.212** Przebieg czasowy przyspieszeń (po odfiltrowaniu w zakresie drugiej częstotliwości drgań) złożonej belki wspornikowej (grubość polimeru 3,1 mm) pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 5 kg).



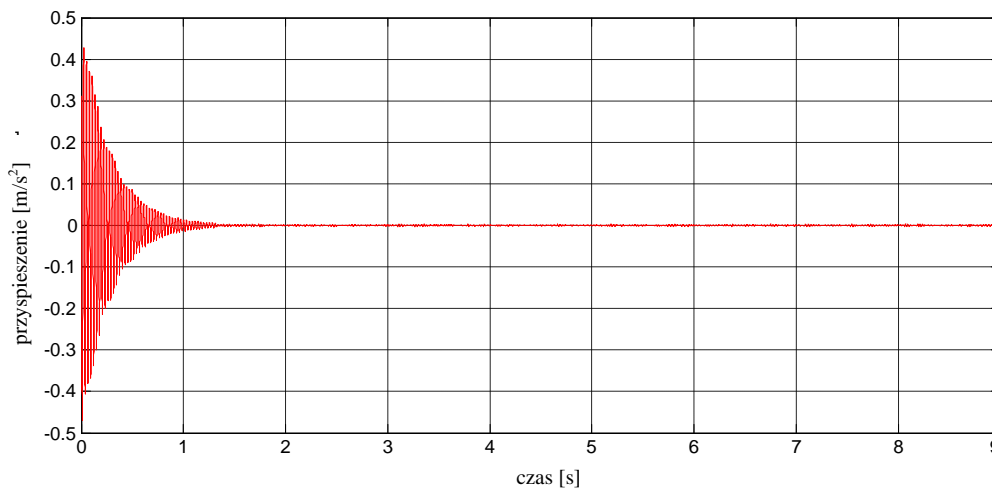
**Rys. 4.213** Przebieg czasowy przyspieszeń końca złożonej belki wspornikowej (grubość polimeru 3,1 mm) pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 6 kg).



**Rys. 4.214** Transformata Fouriera dla złożonej belki wspornikowej (grubość polimeru 3,1 mm) pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 6 kg).



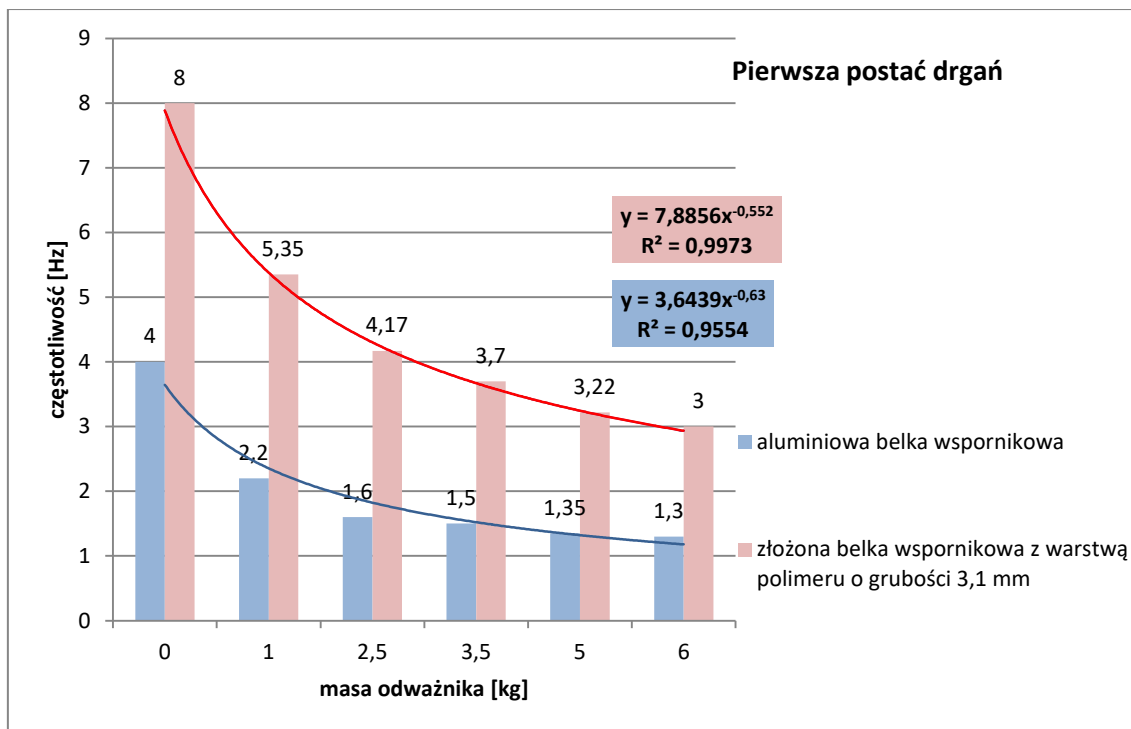
**Rys. 4.215** Przebieg czasowy przyspieszeń (po odfiltrowaniu w zakresie pierwszej częstotliwości drgań) złożonej belki wspornikowej (grubość polimeru 3,1 mm) pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 6 kg).



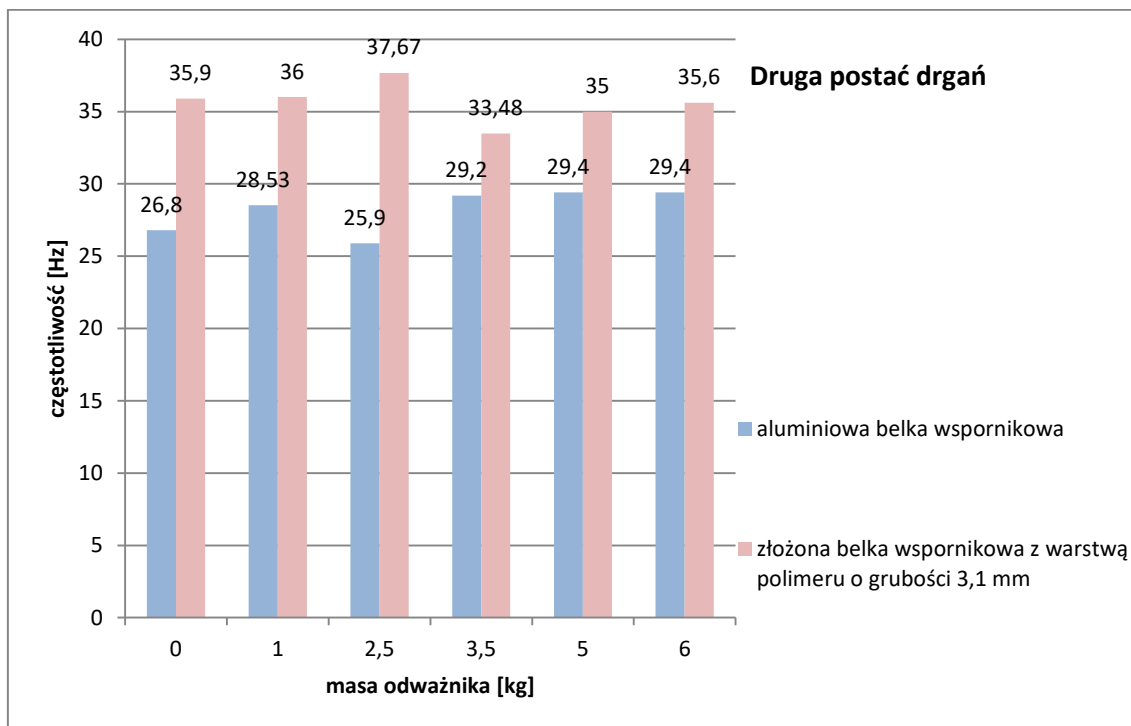
**Rys. 4.216** Przebieg czasowy przyspieszeń (po odfiltrowaniu w zakresie drugiej częstotliwości drgań) złożonej belki wspornikowej (grubość polimeru 3,1 mm) pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 6 kg).

**Tab. 4.20** Częstotliwości drgań poprzecznych złożonej belki wspornikowej.

Dodatkowe obciążenie - masa odważnika [kg]	Częstotliwość drgań poprzecznych [Hz]	
	Pierwsza postać drgań	Druga postać drgań
brak	8,00	35,90
1,0	5,35	36,00
2,5	4,17	37,67
3,5	3,70	33,48
5,0	3,22	35,00
6,0	3,00	35,60



**Rys. 4.217** Wartości częstotliwości drgań odpowiadające pierwszej postaci drgań analizowanych belek wspornikowych z uwzględnieniem dodatkowego obciążenia.



**Rys. 4.218** Wartości częstotliwości drgań odpowiadające drugiej postaci drgań analizowanych belek wspornikowych z uwzględnieniem dodatkowego obciążenia.

W wyniku przeprowadzonych badań zaobserwowano, że przyłożenie dodatkowego obciążenia w postaci odważników o różnych masach prowadzi do

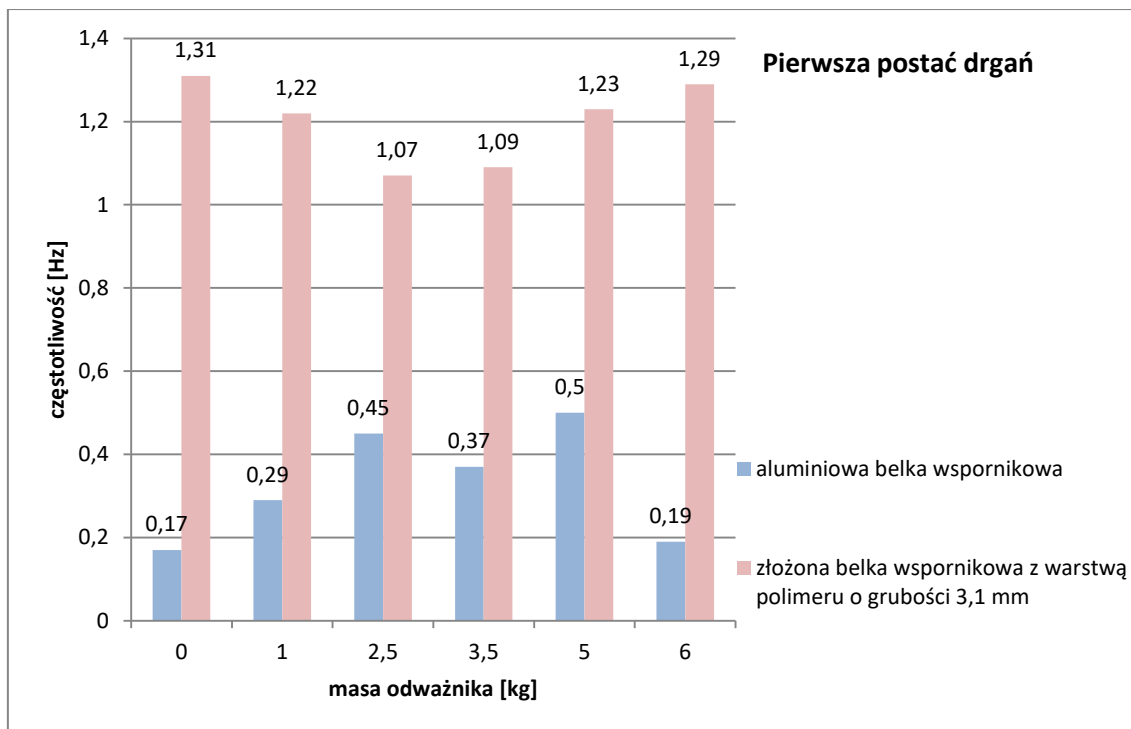
istotnego spadku wartości podstawowej częstotliwości drgań złożonej belki wspornikowej (patrz Tab. 4.20). W przypadku pierwszej postaci i zamocowania odważnika o masie 6 kg zaobserwowano przesunięcie podstawowej częstotliwości w kierunku pasm o niższej wartości o 63% w porównaniu z belką nieobciążoną. Z kolei, wartości średnie częstotliwości drgań odpowiadające drugiej postaci drgań własnych utrzymują się na podobnym poziomie wahając się pomiędzy 35,00 a 37,67 Hz. Jednocześnie Rys. 4.217 i 4.218 wskazuje na przesunięcie podstawowej częstotliwości drgań w kierunku pasm o niższej wartości w przypadku złożonej belki z warstwą polimeru o grubości 3,1 mm w porównaniu z belką pojedynczą. Największe zaobserwowane przesunięcie wartości częstotliwości odpowiadającej pierwszej postaci drgań wyniosło 62%, podczas gdy w przypadku drugiej postaci drgań równe było 31%.

W celu określenia efektywności zastosowania warstwy polimeru do redukcji drgań aluminiowych belek wspornikowych wyznaczono, zgodnie z równaniem (4.3) wartości liczb tłumienia (por. załącznik nr 7). W Tab. 4.21 przedstawiono wartości średnie z sześciu pomiarów tego parametru dynamicznego dla przebiegów czasowych przyspieszeń odpowiadających pierwszej oraz drugiej postaci drgań belek wspornikowych. Jednocześnie, na Rys. 4.219 i 4.220 przedstawiono porównanie wartości liczb tłumienia dla analizowanych belek (bez oraz z warstwą polimeru).

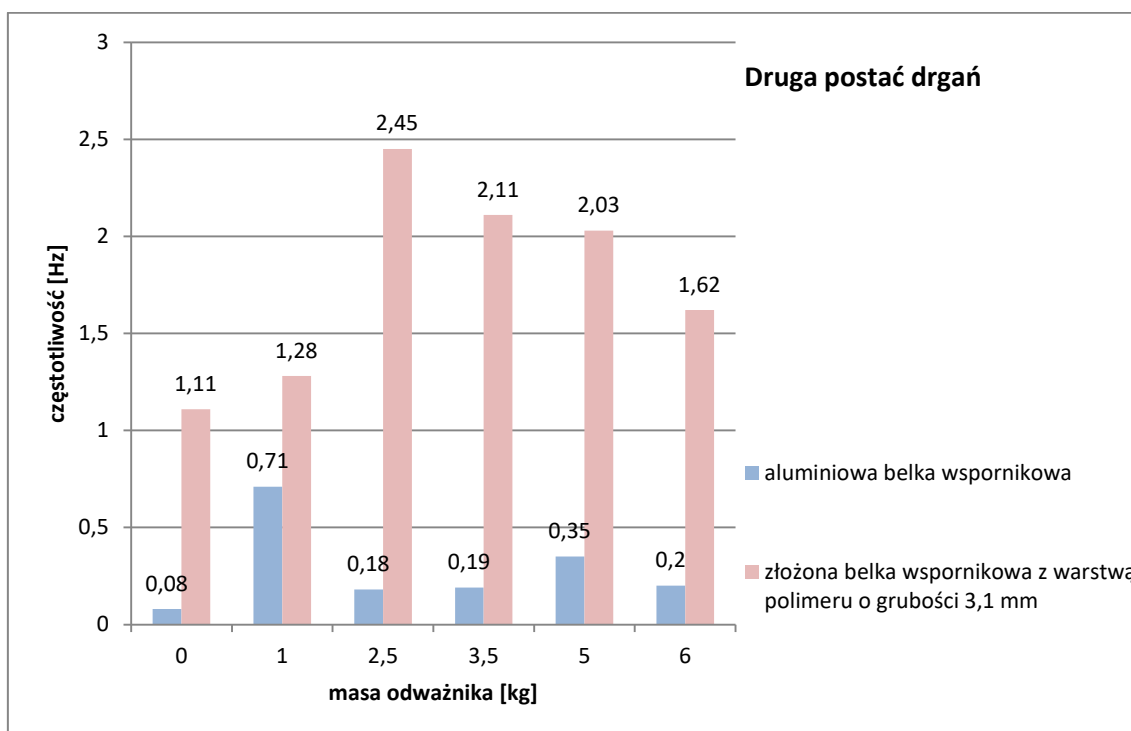
**Tab. 4.21** Liczby tłumienia dwóch pierwszych częstotliwości drgań poprzecznych złożonej belki wspornikowej.

Dodatkowe obciążenie - masa odważnika [kg]	Liczba tłumienia [%]	
	Pierwsza postać drgań	Druga postać drgań
brak	1,31	1,11
1,0	1,22	1,28
2,5	1,07	2,45
3,5	1,09	2,11
5,0	1,23	2,03
6,0	1,29	1,62





**Rys. 4.219** Liczby tłumienia dla pierwszej częstotliwości drgań analizowanych belek wspornikowych z uwzględnieniem dodatkowego obciążenia.



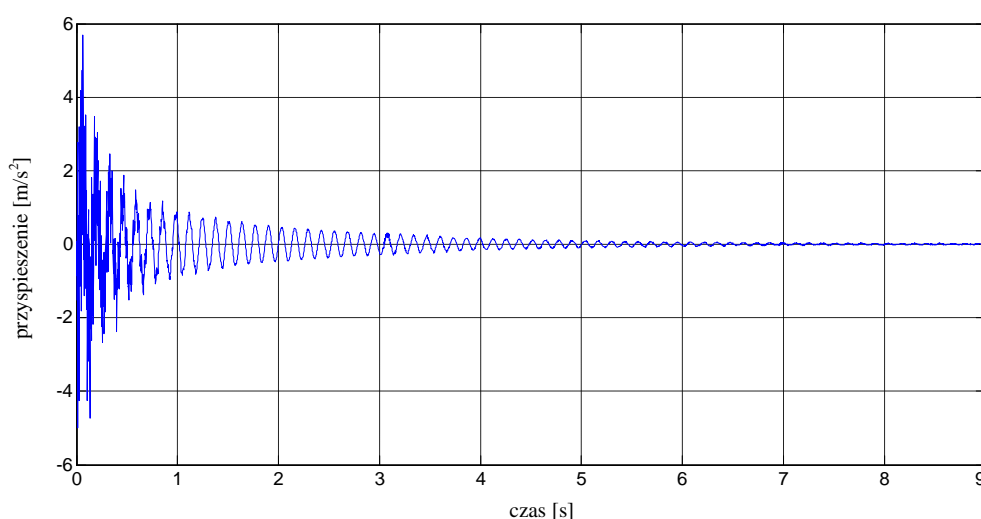
**Rys. 4.220** Liczby tłumienia dla drugiej częstotliwości drgań analizowanych belek wspornikowych z uwzględnieniem dodatkowego obciążenia.

Z Tab. 4.21 można zaobserwować, że wyznaczone średnie wartości liczby tłumienia złożonej belki wspornikowej wahają się pomiędzy 1,07 a 1,31% w przypadku

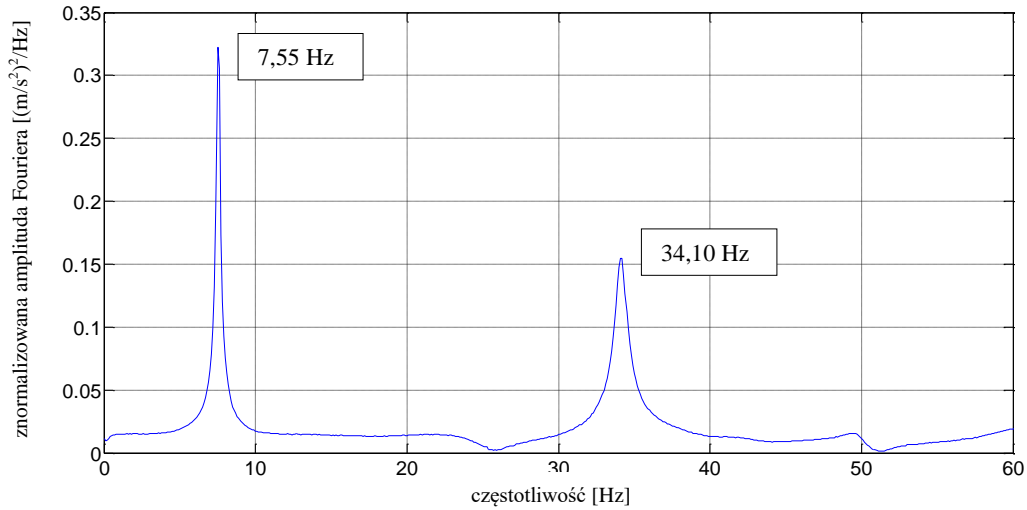
pierwszej postaci drgań oraz pomiędzy 1,11 a 2,45% w przypadku drugiej postaci drgań (por. załącznik nr 7). Rys. 4.219 i 4.220 wskazują na znaczny wzrost liczb tłumienia tych belek w stosunku do pojedynczego płaskownika bez warstwy polimeru. Największy wzrost (o 671%) liczby tłumienia pierwszej postaci drgań odnotowano w przypadku belki nieobciążonej, podczas gdy najmniejszy (o 138%) w przypadku zamocowania odważnika o masie 2,5 kg. Największy wzrost (o 1288%) liczby tłumienia drugiej postaci drgań odnotowano w przypadku belki nieobciążonej, podczas gdy najmniejszy (o 80%) w przypadku zamocowania odważnika o masie 1 kg.

#### 4.3.7 WYNIKI BADAŃ DLA ZŁOŻONEJ BELKI WSPORNIKOWEJ Z WARSTWĄ POLIMERU O GRUBOŚCI 5 MM

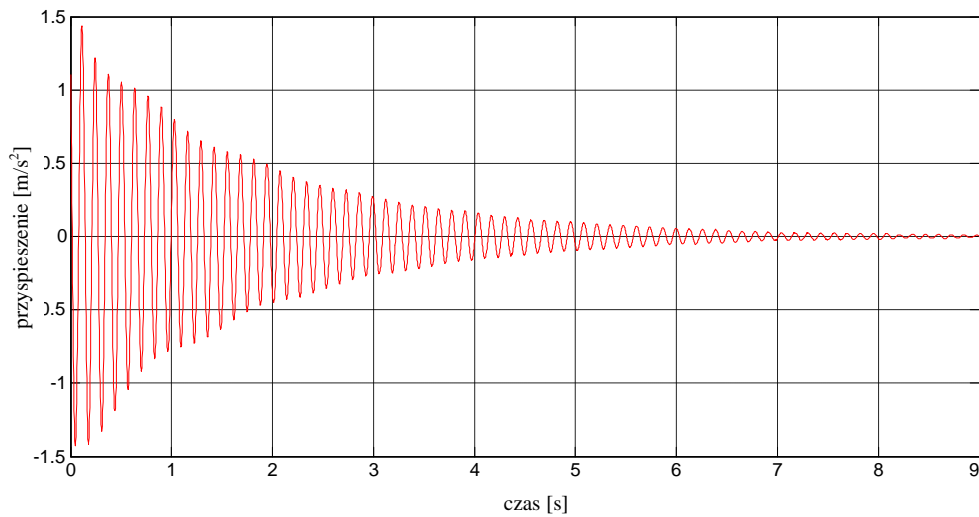
Na Rys. 4.221 przedstawiono przebieg czasowy przyspieszeń uzyskany dla belki wspornikowej złożonej z dwóch aluminiowych płaskowników sklejonych warstwą polimeru o grubości 5 mm, wzbudzanej do drgań poprzez uderzenie w środku jej rozpiętości młotkiem modalnym. Dla przebiegu czasowego wykonano szybką transformatę Fouriera (patrz Rys. 4.222), która ujawniła dwie dominujące częstotliwości drgań własnych o wartościach 7,55 i 34,10 Hz. Na Rys. 4.223 i 4.224 przedstawiono przebiegi czasowe przyspieszeń po odfiltrowaniu w zakresie pierwszej i drugiej częstotliwości drgań analizowanej belki.



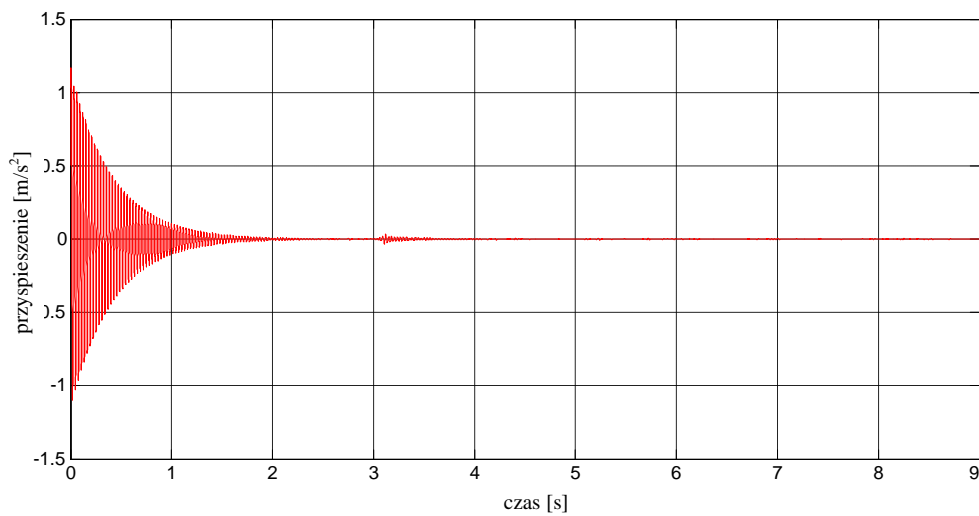
**Rys. 4.221** Przebieg czasowy przyspieszeń końca złożonej belki wspornikowej (grubość polimeru 5 mm).



Rys. 4.222 Transformata Fouriera dla złożonej belki wspornikowej (grubość polimeru 5 mm).



Rys. 4.223 Przebieg czasowy przyspieszeń (po odfiltrowaniu w zakresie pierwszej częstotliwości drgań) złożonej belki wspornikowej (grubość polimeru 5 mm).



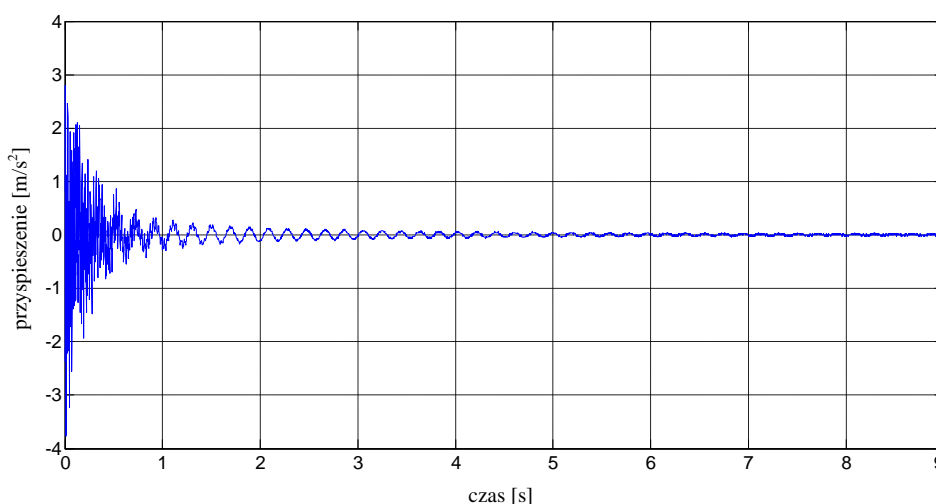
Rys. 4.224 Przebieg czasowy przyspieszeń (po odfiltrowaniu w zakresie drugiej częstotliwości drgań) złożonej belki wspornikowej (grubość polimeru 5 mm).

Dla analizowanej belki wspornikowej wartości średnie liczb tłumienia z sześciu powtórzeń wyniosły 1,01%, zarówno dla pierwszej i drugiej częstotliwości (zob. Tab. Z.8.1 w załączniku nr 8).

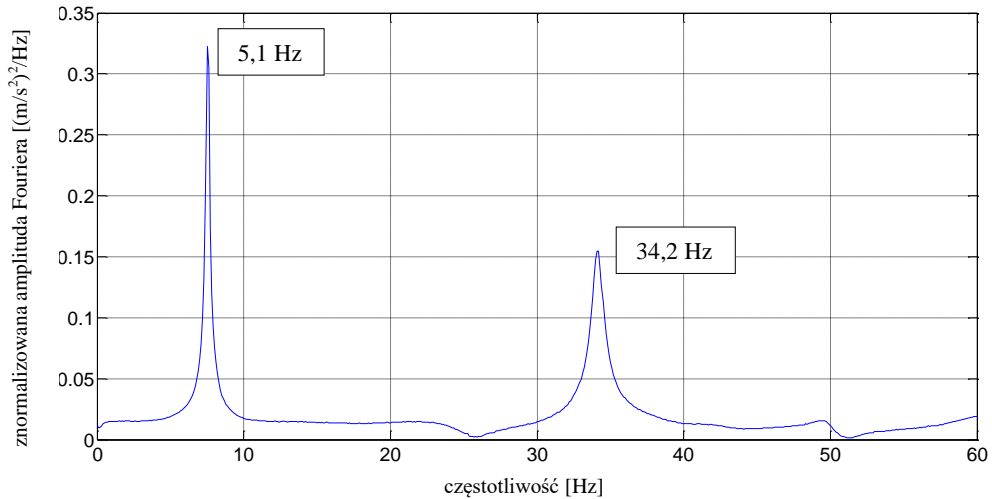
Wyniki w postaci przebiegów czasowych przyspieszeń, transformat Fouriera oraz przebiegów czasowych po odfiltrowaniu w zakresie ujawnionych częstotliwości drgań otrzymane dla złożonej belki wspornikowej, dodatkowo obciążonej odważnikami o różnych masach, przedstawiono na kolejnych rysunkach:

- Rys. 4.225–4.228 – odważnik o masie 1 kg;
- Rys. 4.229–4.232 – odważnik o masie 2,5 kg;
- Rys. 4.233–4.236 – odważnik o masie 3,5 kg;
- Rys. 4.237–4.240 – odważnik o masie 5 kg;
- Rys. 4.241–4.244 – odważnik o masie 6 kg.

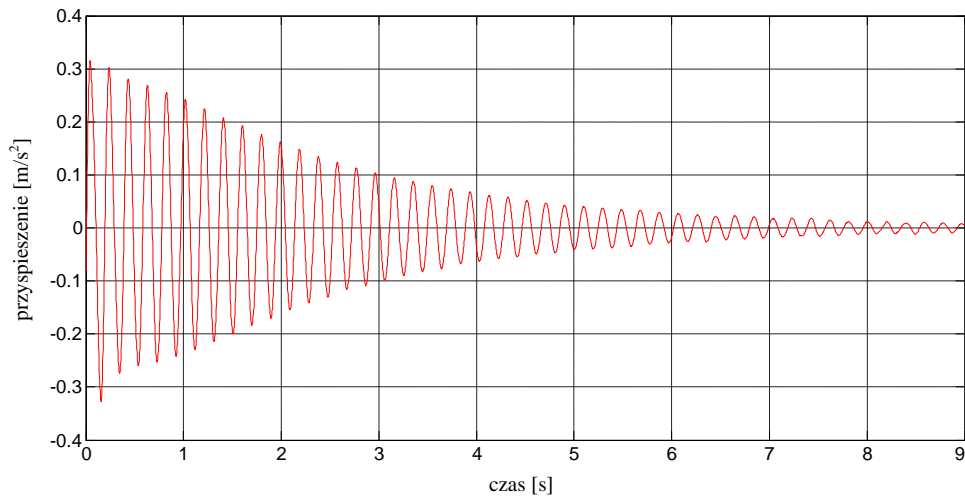
Dodatkowo, wartości średnie wszystkich otrzymanych częstotliwości drgań własnych wyznaczone dla złożonej belki wspornikowej, zestawiono w Tab. 4.22 (por. załącznik nr 8). Jednocześnie na Rys. 4.245 i 4.246 przedstawiono porównanie wartości częstotliwości odpowiadające pierwszej i drugiej postaci drgań belek wspornikowych (bez oraz z warstwą polimeru) wraz z funkcjami aproksymującymi postaci  $y = ax^b$ , dla których parametry  $a$  i  $b$  wyznaczono poprzez minimalizację średniego błędu kwadratowego (Bendat i Piersol 1971).



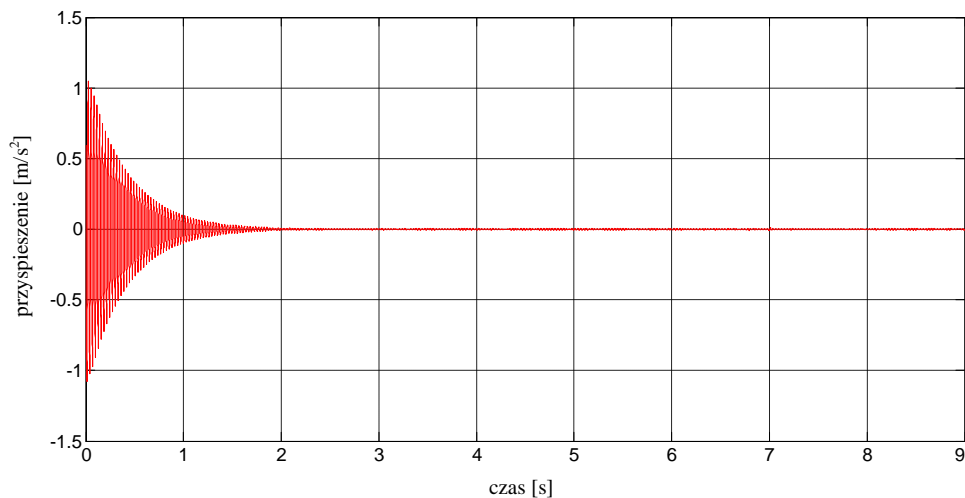
**Rys. 4.225** Przebieg czasowy przyspieszeń końca złożonej belki wspornikowej (grubość polimeru 5 mm) pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 1 kg).



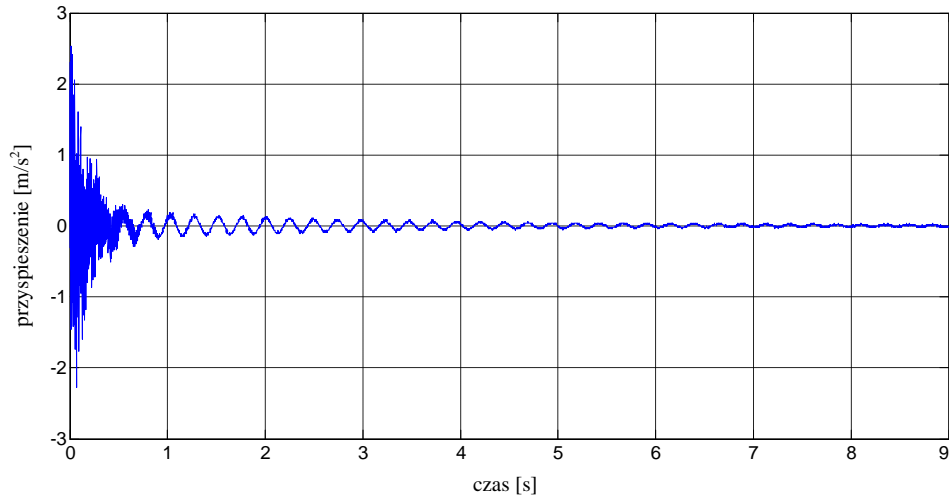
**Rys. 4.226** Transformata Fouriera dla złożonej belki wspornikowej (grubość polimeru 5 mm) pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 1 kg).



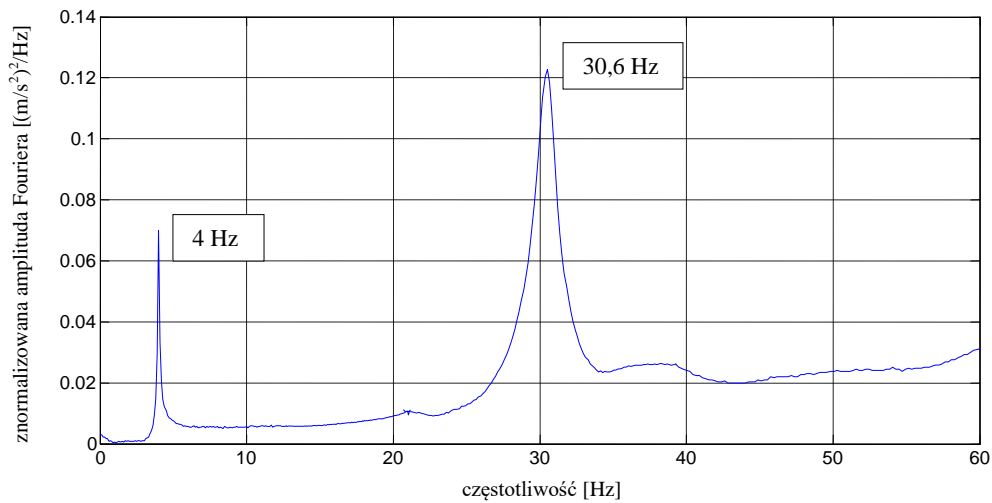
**Rys. 4.227** Przebieg czasowy przyspieszeń (po odfiltrowaniu w zakresie pierwszej częstotliwości drgań) złożonej belki wspornikowej (grubość polimeru 5 mm) pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 1 kg).



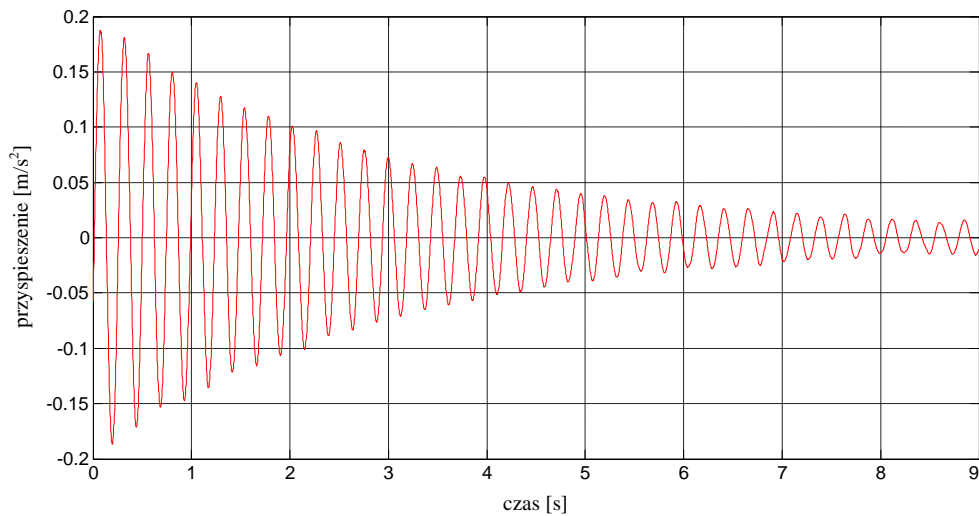
**Rys. 4.228** Przebieg czasowy przyspieszeń (po odfiltrowaniu w zakresie drugiej częstotliwości drgań) złożonej belki wspornikowej (grubość polimeru 5 mm) pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 1 kg).



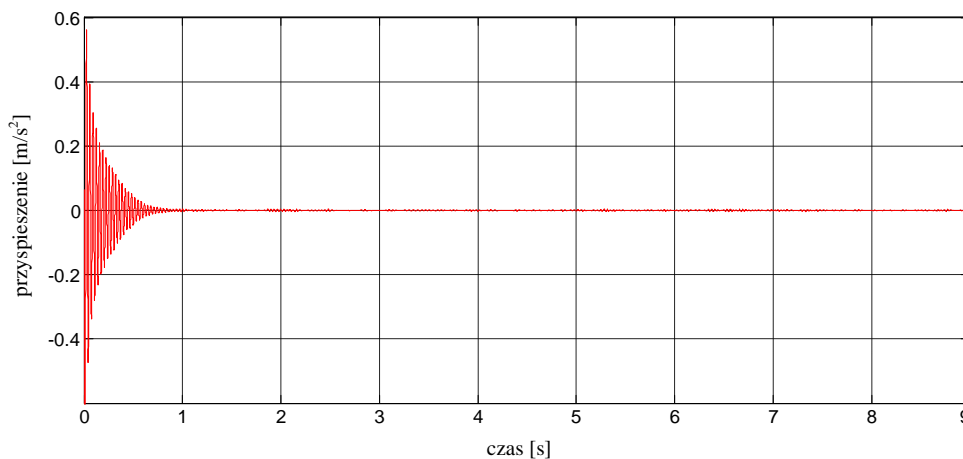
**Rys. 4.229** Przebieg czasowy przyspieszeń końca złożonej belki wspornikowej (grubość polimeru 5 mm) pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 2,5 kg).



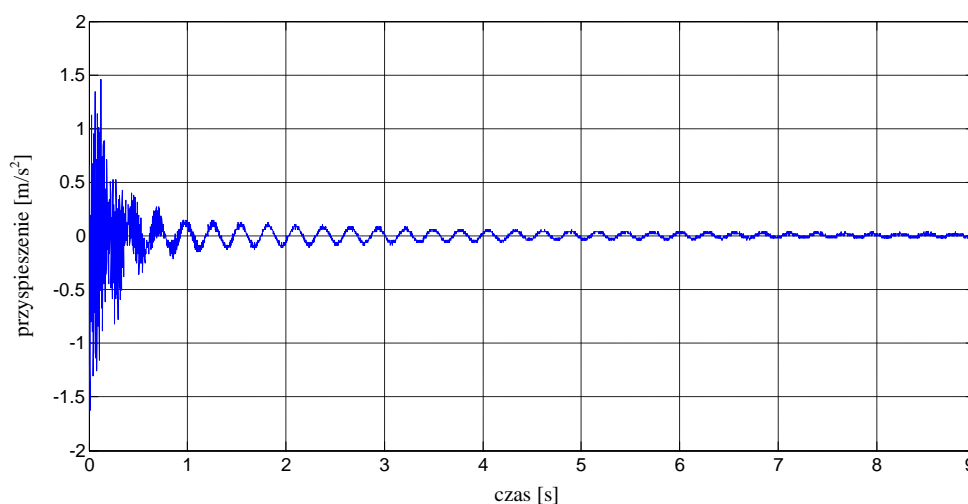
**Rys. 4.230** Transformata Fouriera dla złożonej belki wspornikowej (grubość polimeru 5 mm) pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 2,5 kg).



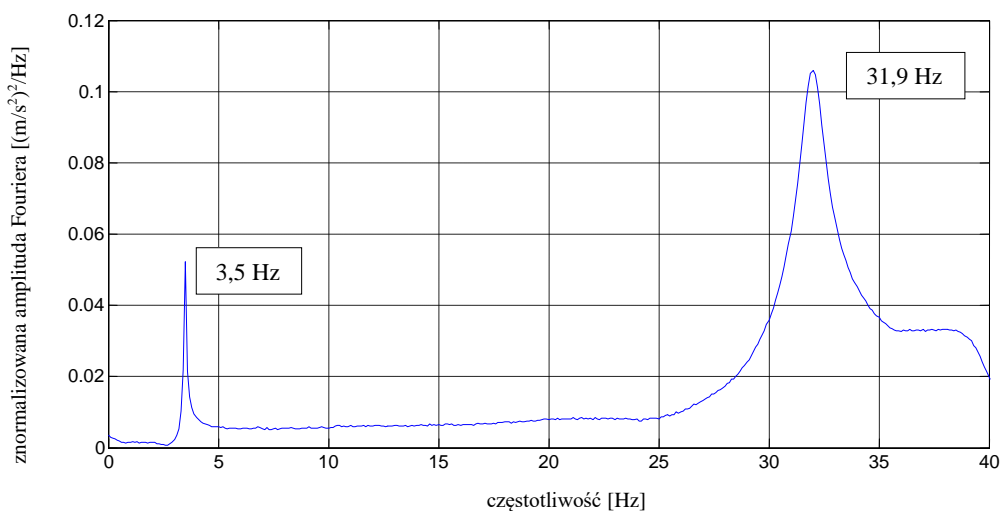
**Rys. 4.231** Przebieg czasowy przyspieszeń (po odfiltrowaniu w zakresie pierwszej częstotliwości drgań) złożonej belki wspornikowej (grubość polimeru 5 mm) pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 2,5 kg).



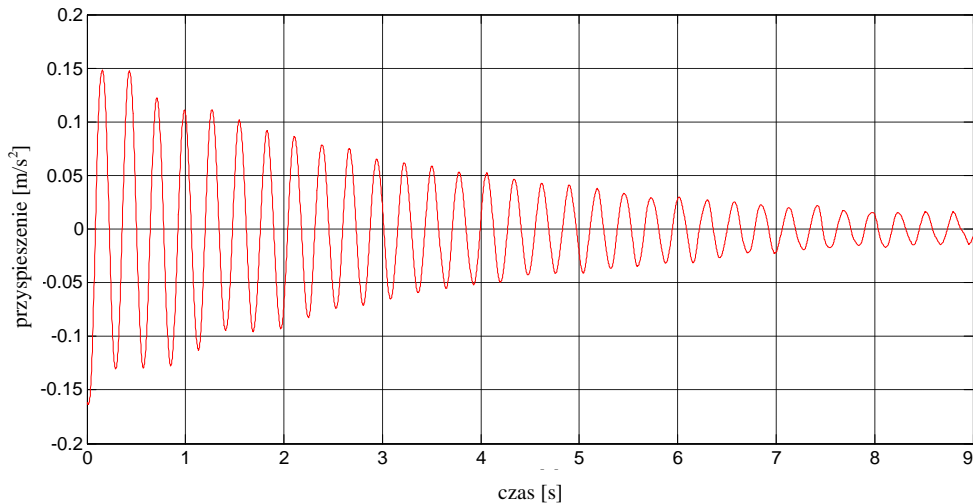
**Rys. 4.232** Przebieg czasowy przyspieszeń (po odfiltrowaniu w zakresie drugiej częstotliwości drgań) złożonej belki wspornikowej (grubość polimeru 5 mm) pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 2,5 kg).



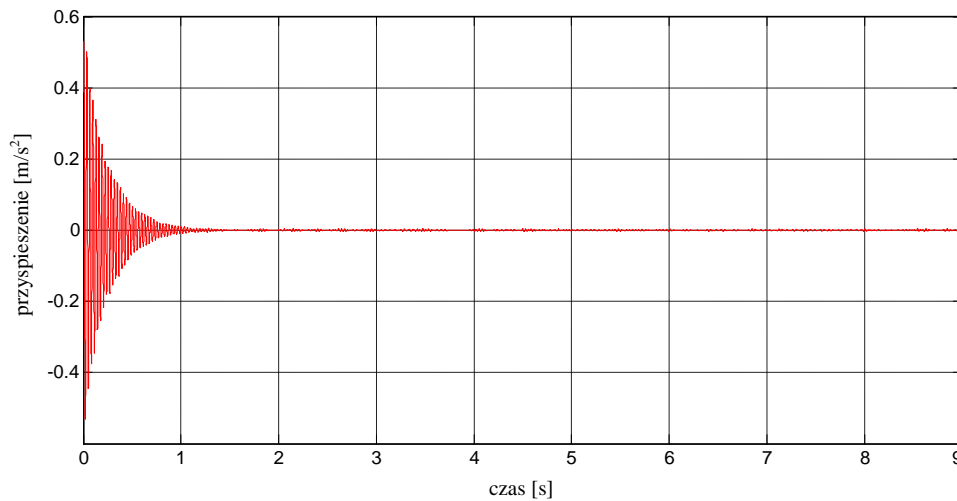
**Rys. 4.233** Przebieg czasowy przyspieszeń końca złożonej belki wspornikowej (grubość polimeru 5 mm) pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 3,5 kg).



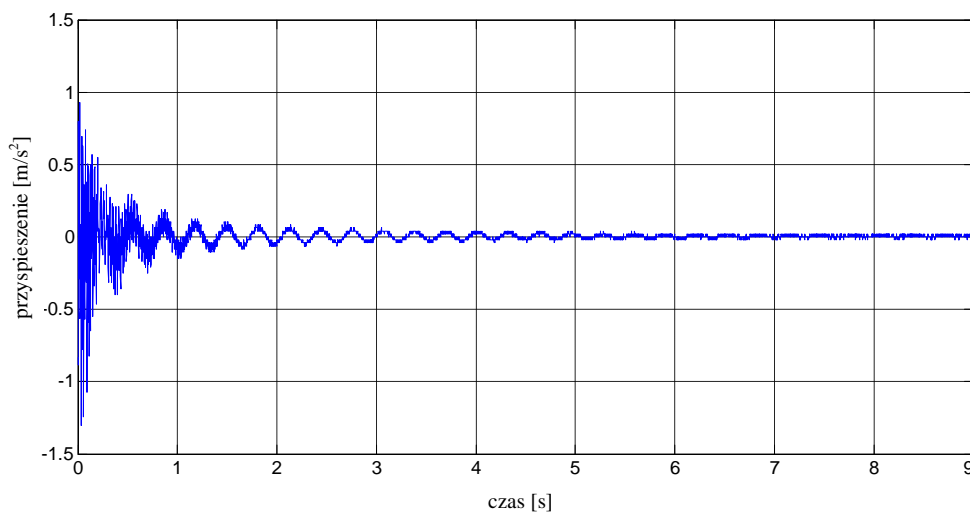
**Rys. 4.234** Transformata Fouriera dla złożonej belki wspornikowej (grubość polimeru 5 mm) pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 3,5 kg).



**Rys. 4.235** Przebieg czasowy przyspieszeń (po odfiltrowaniu w zakresie pierwszej częstotliwości drgań) złożonej belki wspornikowej (grubość polimeru 5 mm) pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 3,5 kg).

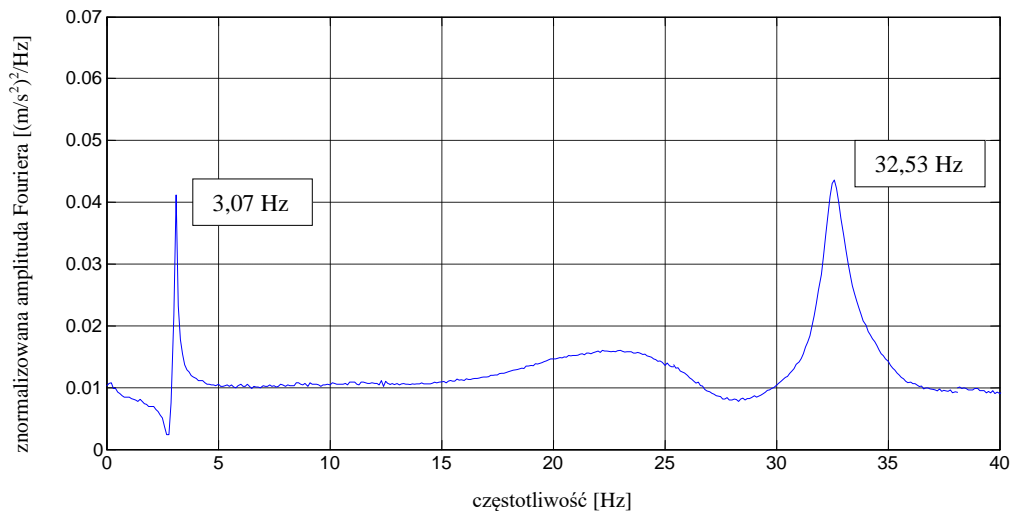


**Rys. 4.236** Przebieg czasowy przyspieszeń (po odfiltrowaniu w zakresie drugiej częstotliwości drgań) złożonej belki wspornikowej (grubość polimeru 5 mm) pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 3,5 kg).

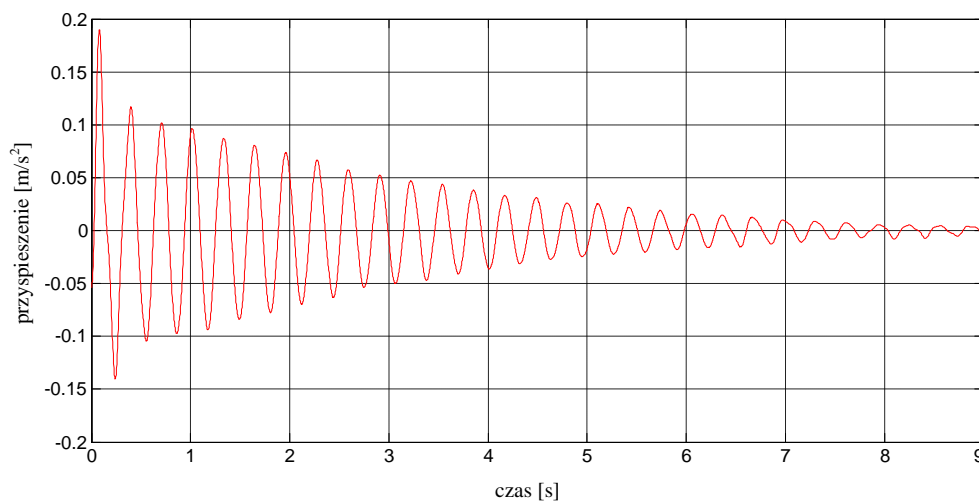


**Rys. 4.237** Przebieg czasowy przyspieszeń końca złożonej belki wspornikowej (grubość polimeru 5 mm) pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 5 kg).

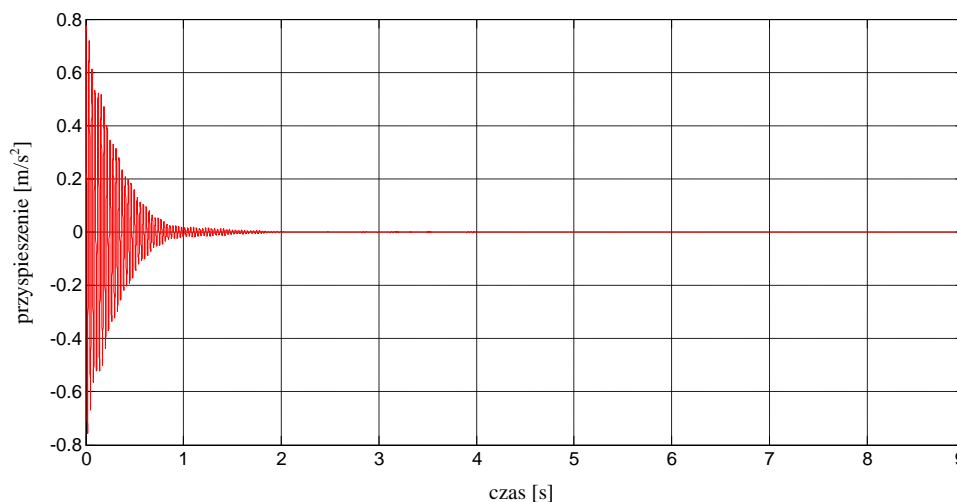




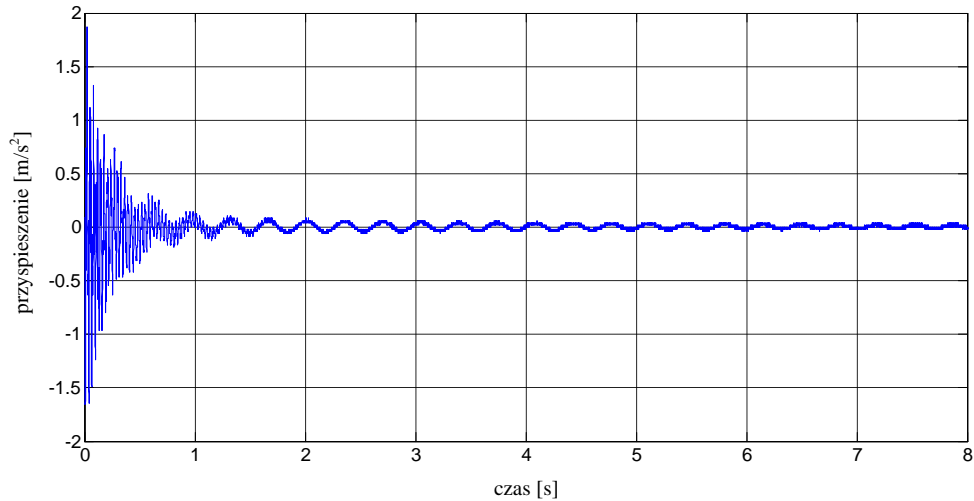
**Rys. 4.238** Transformata Fouriera dla złożonej belki wspornikowej (grubość polimeru 5 mm) pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 5 kg).



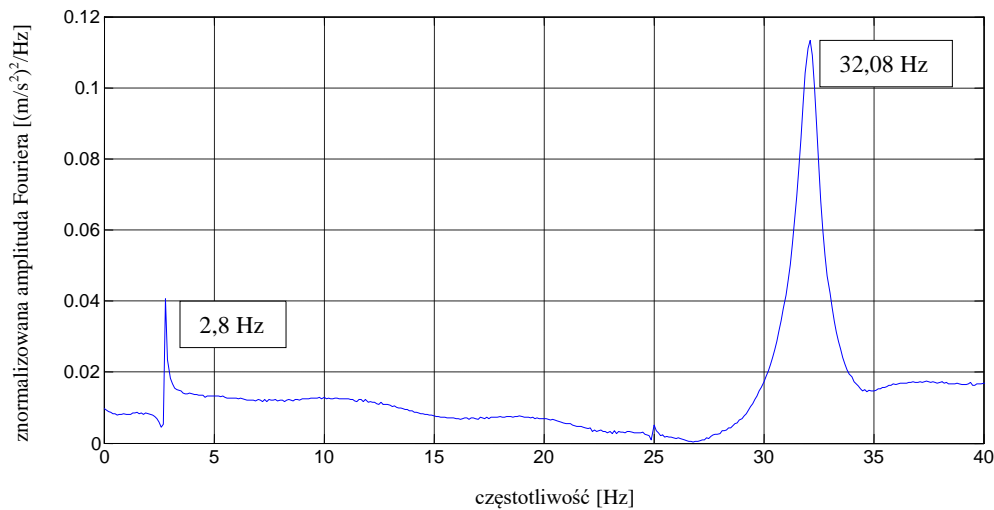
**Rys. 4.239** Przebieg czasowy przyspieszeń (po odfiltrowaniu w zakresie pierwszej częstotliwości drgań) złożonej belki wspornikowej (grubość polimeru 5 mm) pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 5 kg).



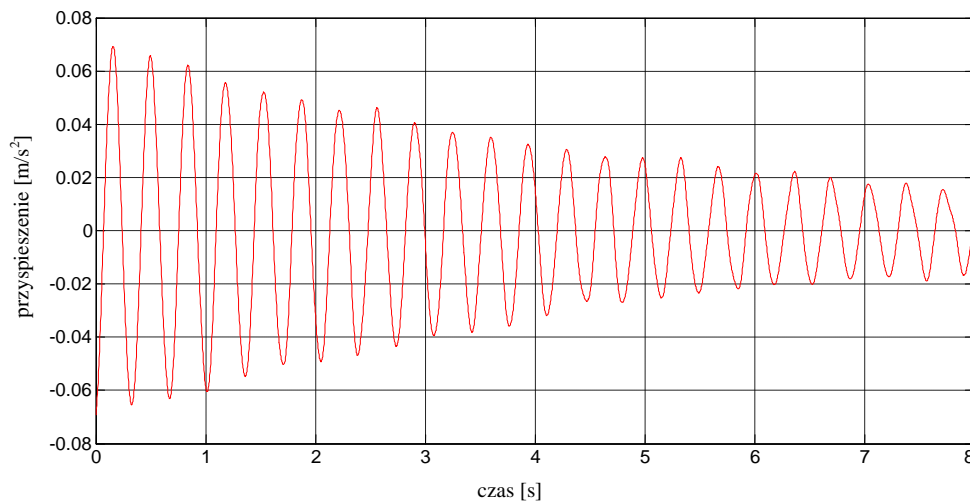
**Rys. 4.240** Przebieg czasowy przyspieszeń (po odfiltrowaniu w zakresie drugiej częstotliwości drgań) złożonej belki wspornikowej (grubość polimeru 5 mm) pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 5 kg).



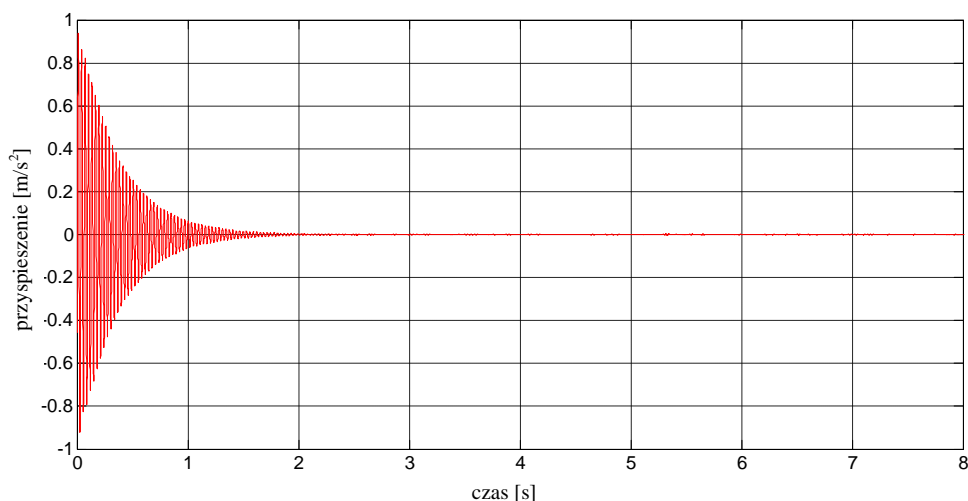
**Rys. 4.241** Przebieg czasowy przyspieszeń końca złożonej belki wspornikowej (grubość polimeru 5 mm) pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 6 kg).



**Rys. 4.242** Transformata Fouriera dla złożonej belki wspornikowej (grubość polimeru 5 mm) pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 6 kg).



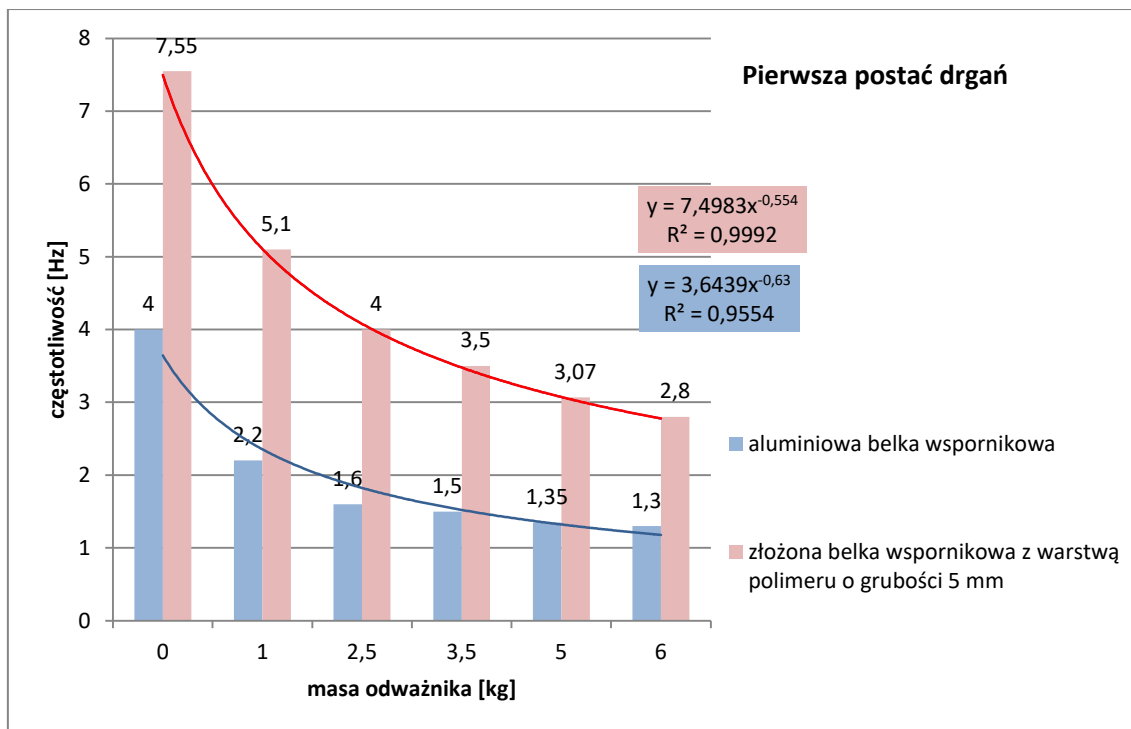
**Rys. 4.243** Przebieg czasowy przyspieszeń (po odfiltrowaniu w zakresie pierwszej częstotliwości drgań) złożonej belki wspornikowej (grubość polimeru 5 mm) pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 6 kg).



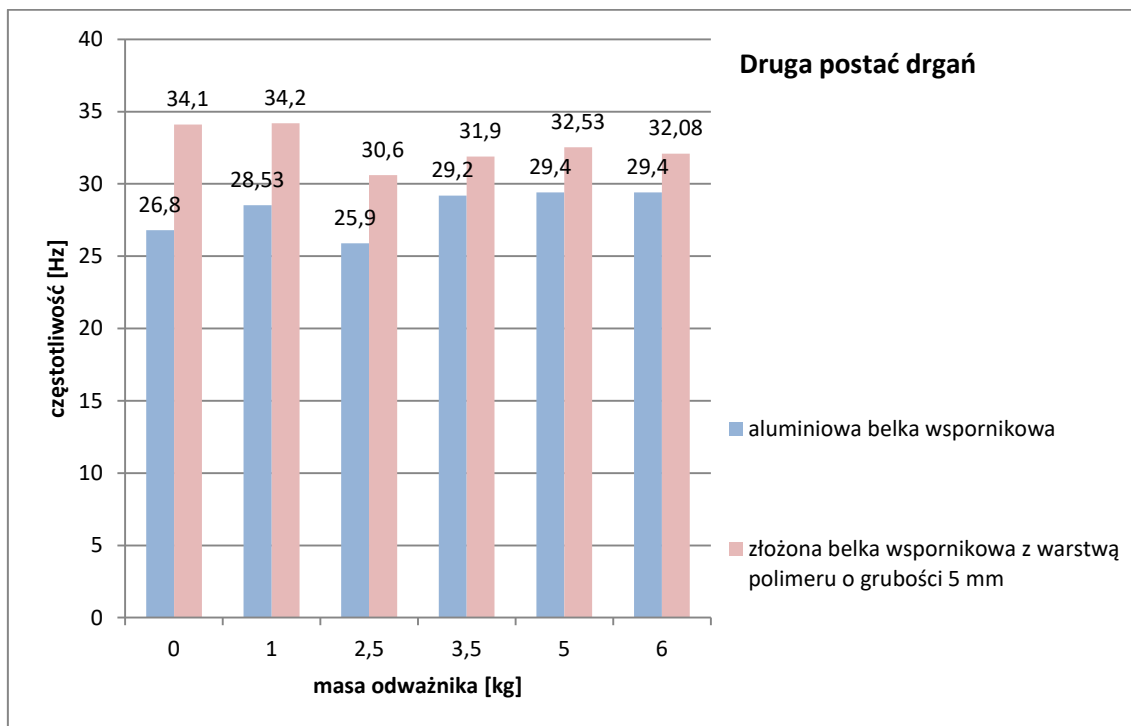
**Rys. 4.244** Przebieg czasowy przyspieszeń (po odfiltrowaniu w zakresie drugiej częstotliwości drgań) złożonej belki wspornikowej (grubość polimeru 5 mm) pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 6 kg).

**Tab. 4.22** Częstotliwości drgań poprzecznych złożonej belki wspornikowej.

Dodatkowe obciążenie - masa odważnika [kg]	Częstotliwość drgań poprzecznych [Hz]	
	Pierwsza postać drgań	Druga postać drgań
brak	7,55	34,10
1,0	5,10	34,20
2,5	4,00	30,60
3,5	3,50	31,90
5,0	3,07	32,53
6,0	2,80	32,08



**Rys. 4.245** Wartości częstotliwości drgań odpowiadające pierwszej postaci drgań analizowanych belek wspornikowych z uwzględnieniem dodatkowego obciążenia.



**Rys. 4.246** Wartości częstotliwości drgań odpowiadające drugiej postaci drgań analizowanych belek wspornikowych z uwzględnieniem dodatkowego obciążenia.

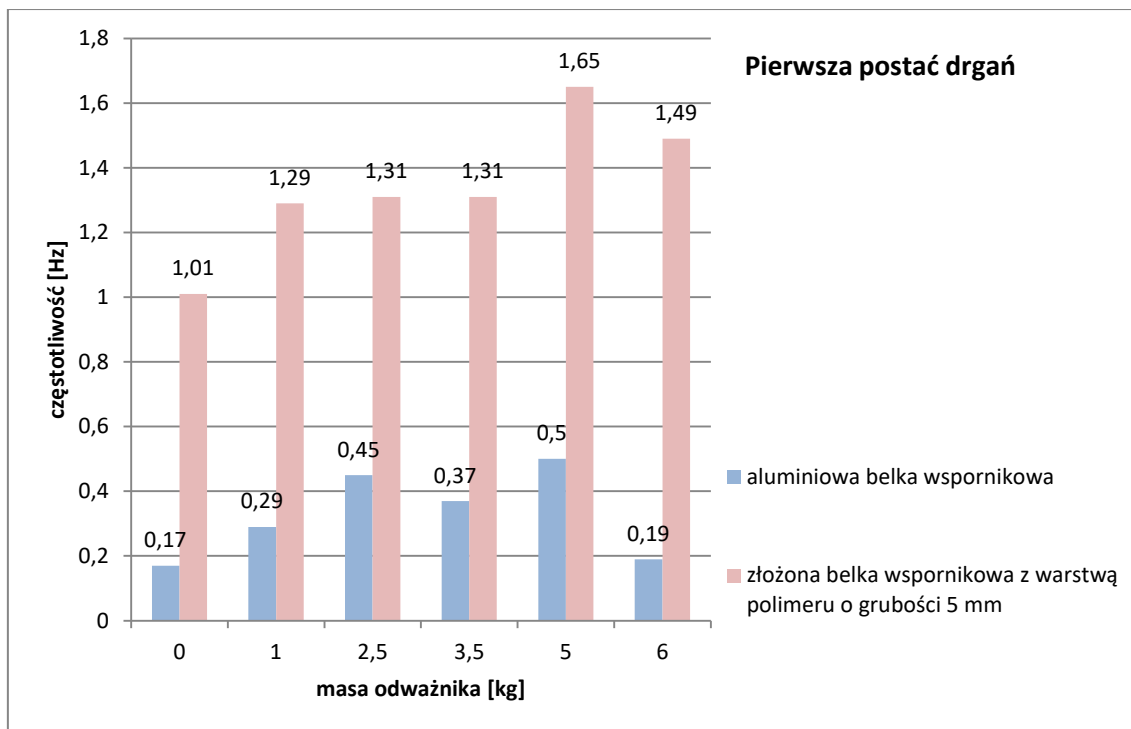
W wyniku przeprowadzonych badań zaobserwowano, że przyłożenie dodatkowego obciążenia w postaci odważników o różnych masach prowadzi do

istotnego spadku wartości podstawowej częstotliwości drgań złożonej belki wspornikowej (patrz Tab. 4.22). W przypadku pierwszej postaci i zamocowania odważnika o masie 6 kg zaobserwowano przesunięcie podstawowej częstotliwości w kierunku pasm o niższej wartości o 63% w porównaniu z belką nieobciążoną. Z kolei, wartości średnie częstotliwości drgań odpowiadające drugiej postaci drgań własnych utrzymują się na podobnym poziomie wahając się pomiędzy 30,60 a 34,20 Hz. Jednocześnie Rys. 4.245 i 4.246 wskazuje na przesunięcie podstawowej częstotliwości drgań w kierunku pasm o niższej wartości w przypadku złożonej belki z warstwą polimeru o grubości 5 mm w porównaniu z belką pojedynczą. Największe zaobserwowane przesunięcie wartości częstotliwości odpowiadającej pierwszej postaci drgań wyniosło 60%, podczas gdy w przypadku drugiej postaci drgań równe było 21%.

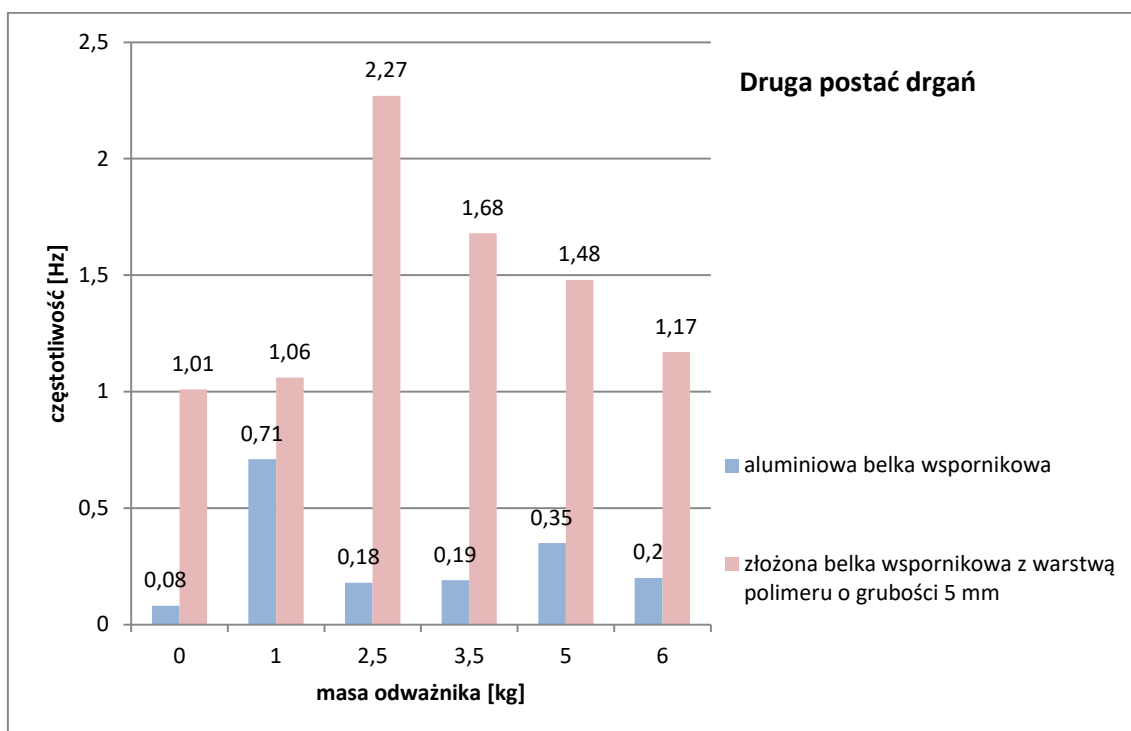
W celu określenia efektywności zastosowania warstwy polimeru do redukcji drgań aluminiowych belek wspornikowych wyznaczono, zgodnie z równaniem (4.3) wartości liczb tłumienia (por. załącznik nr 8). W Tab. 4.23 przedstawiono wartości średnie z sześciu pomiarów tego parametru dynamicznego dla przebiegów czasowych przyspieszeń odpowiadających pierwszej oraz drugiej postaci drgań belek wspornikowych. Jednocześnie, na Rys. 4.247 i 4.248 przedstawiono porównanie wartości liczb tłumienia dla analizowanych belek (bez oraz z warstwą polimeru).

**Tab. 4.23** Liczby tłumienia dwóch pierwszych częstotliwości drgań poprzecznych złożonej belki wspornikowej.

Dodatkowe obciążenie - masa odważnika [kg]	Liczba tłumienia [%]	
	Pierwsza postać drgań	Druga postać drgań
brak	1,01	1,01
1,0	1,29	1,06
2,5	1,31	2,27
3,5	1,31	1,68
5,0	1,65	1,48
6,0	1,49	1,17



**Rys. 4.247** Liczby tłumienia dla pierwszej częstotliwości drgań analizowanych belek wspornikowych z uwzględnieniem dodatkowego obciążenia.



**Rys. 4.248** Liczby tłumienia dla drugiej częstotliwości drgań analizowanych belek wspornikowych z uwzględnieniem dodatkowego obciążenia.

Z Tab. 4.23 można zaobserwować, że wyznaczone średnie wartości liczby tłumienia złożonej belki wspornikowej wahają się pomiędzy 1,01 a 1,65% w przypadku

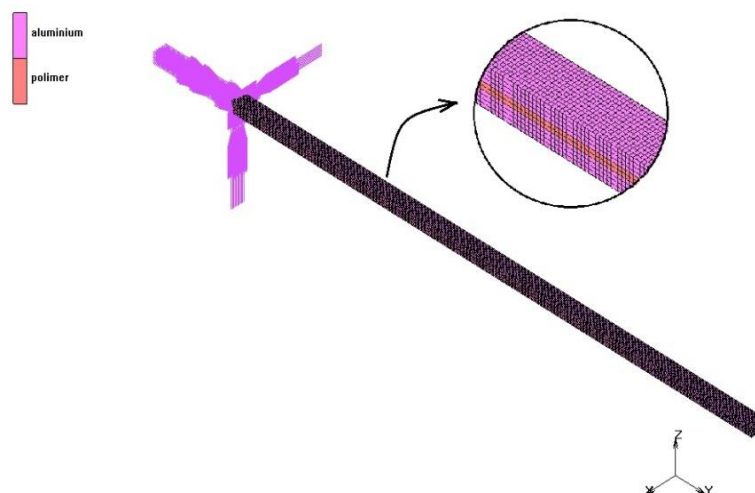
pierwszej postaci drgań oraz pomiędzy 1,01 a 2,27% w przypadku drugiej postaci drgań (por. załącznik nr 8). Rys. 4.247 i 4.248 wskazują na znaczny wzrost liczb tłumienia tych belek w stosunku do pojedynczego płaskownika bez warstwy polimeru (Lasowicz i in. 2015b). Największy wzrost (o 684%) liczby tłumienia pierwszej postaci drgań odnotowano w przypadku belki dodatkowo obciążonej odważnikiem o masie 6 kg, podczas gdy najmniejszy (o 191%) w przypadku zamocowania odważnika o masie 2,5 kg. Największy wzrost (o 1163%) liczby tłumienia drugiej postaci drgań odnotowano w przypadku belki nieobciążonej, podczas gdy najmniejszy (o 49%) w przypadku zamocowania odważnika o masie 1 kg.

#### 4.4 ETAP II – ANALIZA NUMERYCZNA

Drugim etapem rozważań było przeprowadzenie modalnej analizy numerycznej dla analizowanych w rozdziale 4.3 belek wspornikowych. W tym celu utworzono, w programie komercyjnym MSC Marc wykorzystującym MES, sześć modeli numerycznych. Pierwszy z nich przedstawiał pojedynczą aluminiową belkę wspornikową, zaś kolejnych pięć modeli odzwierciedlało złożoną aluminiową belkę wspornikową sklejoną warstwą polimeru o różnej grubości. Modele numeryczne zbudowano ze standardowych ośmiowęzłowych elementów bryłowych (sześć stopni swobody w każdym węźle). Model pojedynczej aluminiowej belki wspornikowej oraz model złożonej belki skleionej warstwą polimeru o grubości 5 mm przedstawiono odpowiednio na Rys. 4.249 i 4.250.



Rys. 4.249 Model numeryczny pojedynczej aluminiowej belki wspornikowej.



**Rys. 4.250** Model numeryczny złożonej belki wspornikowej z warstwą polimeru o grubości 5 mm.

Właściwości materiałowe aluminium uwzględnione w analizie numerycznej były zgodne z parametrami przedstawionymi w Tab. 4.1. Jednocześnie, polimer zdefiniowano w programie MSC Marc jako materiał Mooneya-Rivlina, którego parametry zestawiono w Tab. 3.2.

#### 4.4.1 WYNIKI ANALIZY MODALNEJ DLA POJEDYNCZEJ ALUMINIOWEJ BELKI WSPORNIKOWEJ

Na Rys. 4.251 i 4.252 przedstawiono dwie pierwsze poprzeczne postaci drgań własnych pojedynczej aluminiowej belki wspornikowej. Wartości częstotliwości drgań własnych nieobciążonej aluminiowej belki wspornikowej wyniosły: 4,39 i 26,8 Hz, odpowiednio dla pierwszej jak i drugiej postaci drgań własnych.



**Rys. 4.251** Pierwsza postać poprzeczna drgań własnych pojedynczej aluminiowej belki wspornikowej.





**Rys. 4.252** Druga postać poprzeczna drgań własnych pojedynczej aluminiowej belki wspornikowej.

Wyznaczone z badań eksperymentalnych (zob. Tab. 4.12) i z analizy numerycznej wartości częstotliwości drgań różnią się nieznacznie. W przypadku pierwszej poprzecznej postaci drgań własnych różnica ta wyniosła 9%. W przypadku drugiej poprzecznej postaci drgań uzyskano dokładnie tę samą wartość częstotliwości jak w badaniach eksperymentalnych. Zgodność ta potwierdza poprawność wygenerowanego modelu numerycznego.

#### **4.4.2 WYNIKI ANALIZY MODALNEJ DLA ZŁOŻONEJ BELKI WSPORNIKOWEJ Z WARSTWĄ POLIMERU**

Na Rys. 4.253 i 4.254 przedstawiono dwie pierwsze poprzeczne postaci drgań własnych złożonej belki wspornikowej z warstwą polimeru o grubości 5 mm. Z kolei, w Tab. 4.24 zestawiono wartości częstotliwości drgań własnych otrzymane dla niobciążonej złożonej belki wspornikowej z warstwą polimeru o różnej grubości (zob. Lasowicz i Jankowski 2017a, 2017b)



**Rys. 4.253** Pierwsza postać poprzeczna drgań własnych złożonej belki wspornikowej z warstwą polimeru.



**Rys. 4.254** Druga postać poprzeczna drgań własnych złożonej belki wspornikowej z warstwą polimeru.

**Tab. 4.24** Wartości częstotliwości odpowiadające pierwszej i drugiej postaci drgań własnych dla złożonej belki z warstwą polimeru o różnej grubości.

Grubość polimeru [mm]	Częstotliwość drgań [Hz]	
	Pierwsza postać drgań	Druga postać drgań
0,5	8,40	38,20
1,2	8,28	36,11
1,75	8,08	34,48
3,1	7,79	33,00
5	7,58	32,09

Porównując wartości częstotliwości drgań przedstawione w Tab. 4.24 z wartościami otrzymanymi z badań eksperymentalnych (zob. Tab. 4.14, 4.16, 4.18,

4.20, 4.22) można zauważyć nieznaczne różnice. W przypadku pierwszej poprzecznej postaci drgań złożonej belki różnica ta wyniosła maksymalnie 9% (dla grubość polimeru 0,5 mm). W przypadku drugiej poprzecznej postaci drgań maksymalna różnica osiągnęła wartość 10% (dla grubości polimeru 1,2 i 1,75 mm). Zgodność ta potwierdza poprawność wygenerowanych modeli numerycznych, w tym zastosowanie modelu Mooneya-Rivlina do analizy polimeru.

## 5 BADANIA FRAGMENTU TYMCZASOWEJ TRYBUNY STALOWEJ

### 5.1 BADANIA EKSPERYMENTALNE

#### 5.1.1 PRZEDMIOT BADAŃ

Przedmiotem badań eksperymentalnych opisanych w niniejszym rozdziale był powtarzalny sektor trybuny stalowej, tymczasowej wznoszonej za pomocą typowego systemu rusztowań używanych w Polsce. Całkowita długość, szerokość i wysokość analizowanej konstrukcji (zob. Fot. 5.1 i 5.2) wynosiła odpowiednio: 2,1 m; 2,7 m i 2,42 m.

Trybunę wykonano z elementów prętowych o przekrojach rurowych o średnicy 42,3 mm. Długość najdłuższego elementu wynosiła 2,42 m. Analizowana konstrukcja przeznaczona była dla dwunastu osób siedzących. Siedzenie zapewniały widzom drewniane ławki o długości 2,1 m i szerokości 0,3 m. Podesty wykonano z powszechnie stosowanych krat pomostowych. Z uwagi na bezpieczeństwo podczas prowadzonych badań, ciężar widzów zasymulowano bloczkami betonowymi (szacunkowo przyjęta masa jednej osoby wynosiła 100 kg). Sposób obciążenia konstrukcji widzami przedstawiono na Fot. 5.3 i 5.4.



Fot. 5.1 Pusta tymczasowa trybuna stalowa (widok z przodu).



Fot. 5.2 Pusta tymczasowa trybuna stalowa (widok z tyłu).



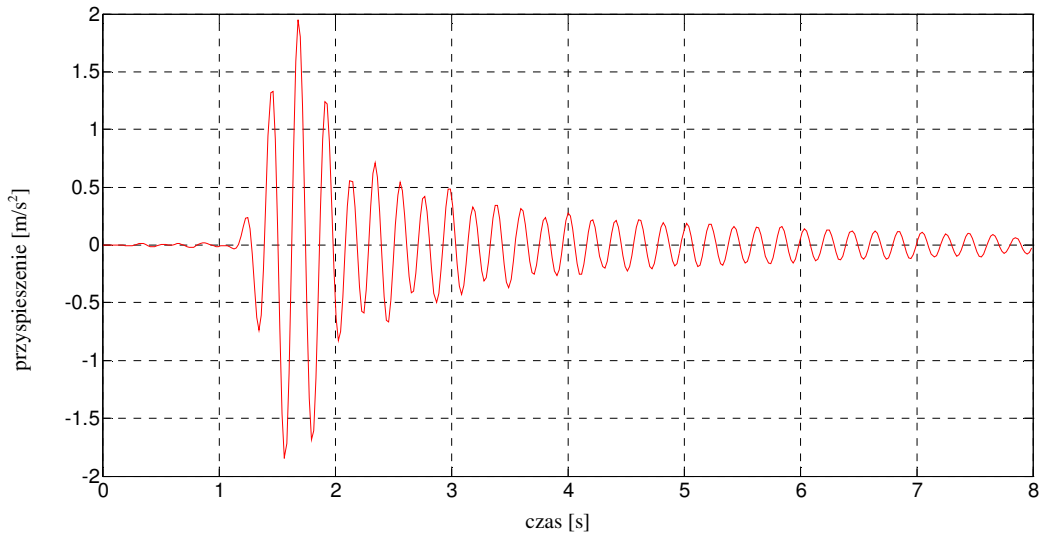
Fot. 5.3 Obciążona tymczasowa trybuna stalowa (widok z boku).



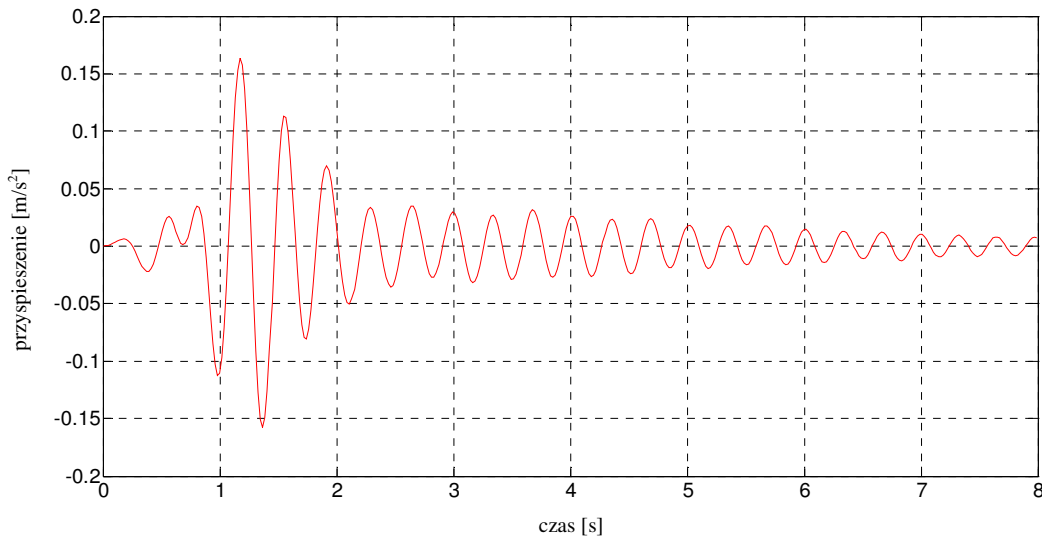


Fot. 5.4 Obciążona tymczasowa trybuna stalowa (widok z przodu).

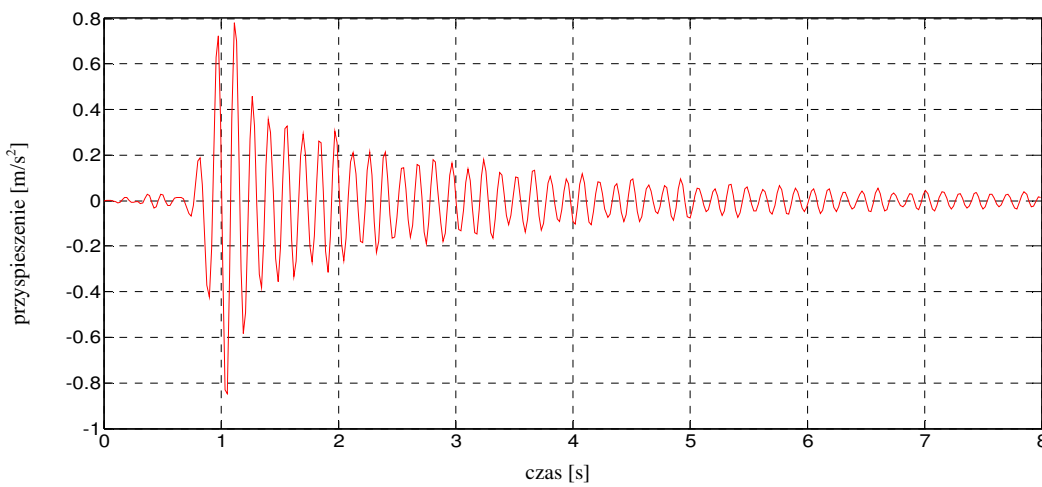
Badania eksperymentalne podzielono na dwa etapy. W pierwszym z nich wzbudzano konstrukcję do drgań poprzez poziome przemieszczenie końca najwyższego słupka w kierunku podłużnym Y (lewo-prawo) oraz poprzecznym X (przód-tył), rejestrując sygnał aż do momentu wytłumienia drgań. Głównym celem tych badań było określenie dominujących częstotliwości drgań własnych oraz liczby tłumienia drgań dla tych kierunków (zob. Ellis i in. 2000). Wykonano szereg pomiarów wykorzystując system pomiarowy VIMEA VE 16BGA wraz z czterema czujnikami przyspieszeń. Czujniki te zamocowano na różnych wysokościach do słupków konstrukcji (patrz Fot. 5.3). Na Rys. 5.1 i 5.2 przedstawiono reprezentatywne wyniki w postaci pomierzonych przebiegów czasowych przyspieszeń na kierunku podłużnym Y analizowanej konstrukcji (pustej oraz obciążonej). Z kolei, przebiegi czasowe przyspieszeń tymczasowej trybuny stalowej odpowiadające poprzecznej postaci drgań przedstawiono na Rys. 5.3 i 5.4 (por. Lasowicz i Jankowski 2015).



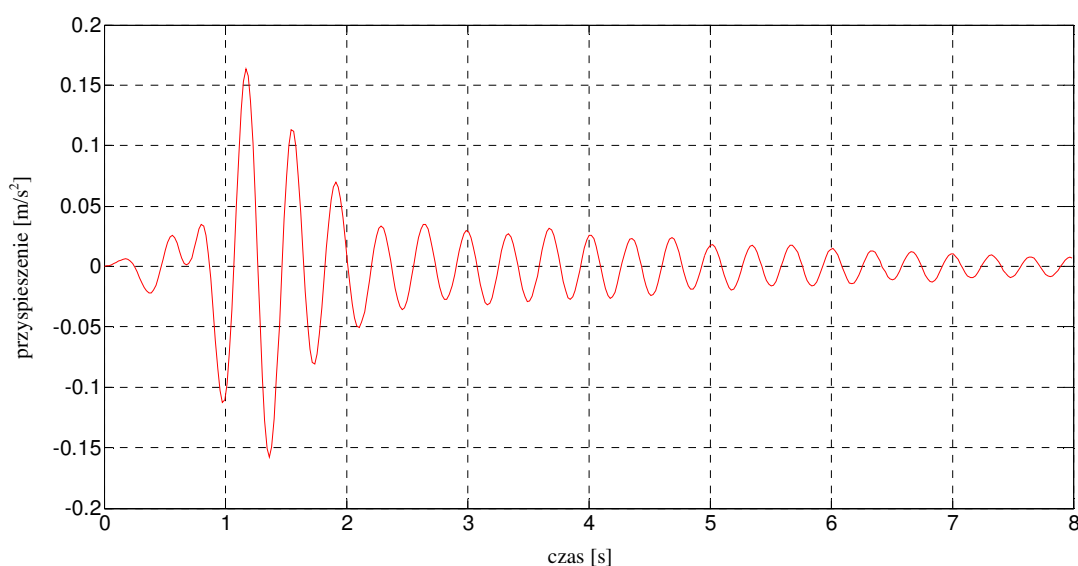
Rys. 5.1 Przebieg czasowy przyspieszeń pustej trybuny stalowej – kierunek podłużny Y.



Rys. 5.2 Przebieg czasowy przyspieszeń obciążonej trybuny stalowej – kierunek podłużny Y.

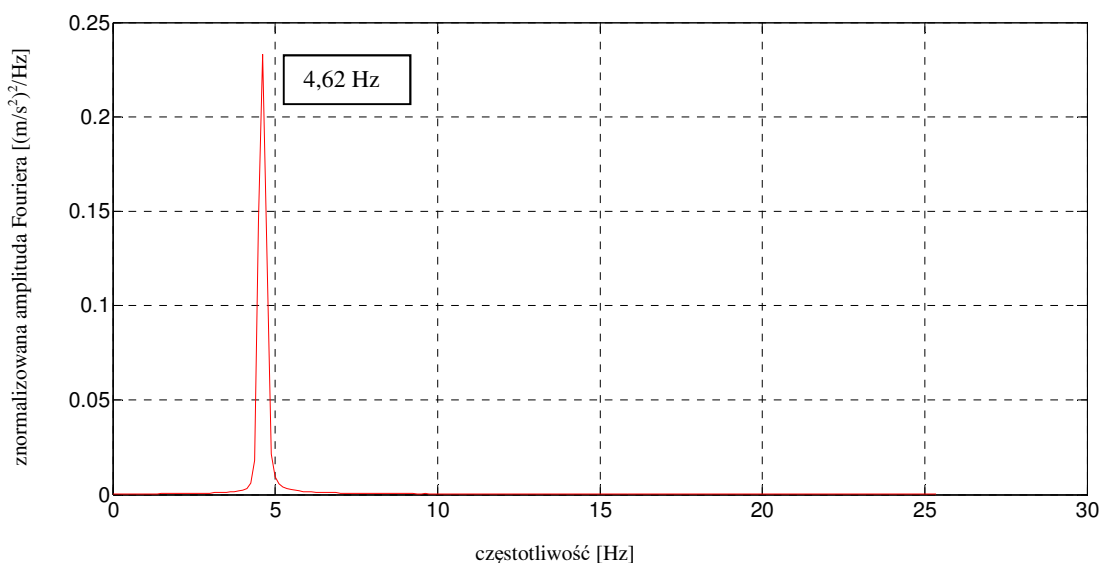


Rys. 5.3 Przebieg czasowy przyspieszeń pustej trybuny stalowej – kierunek poprzeczny X.



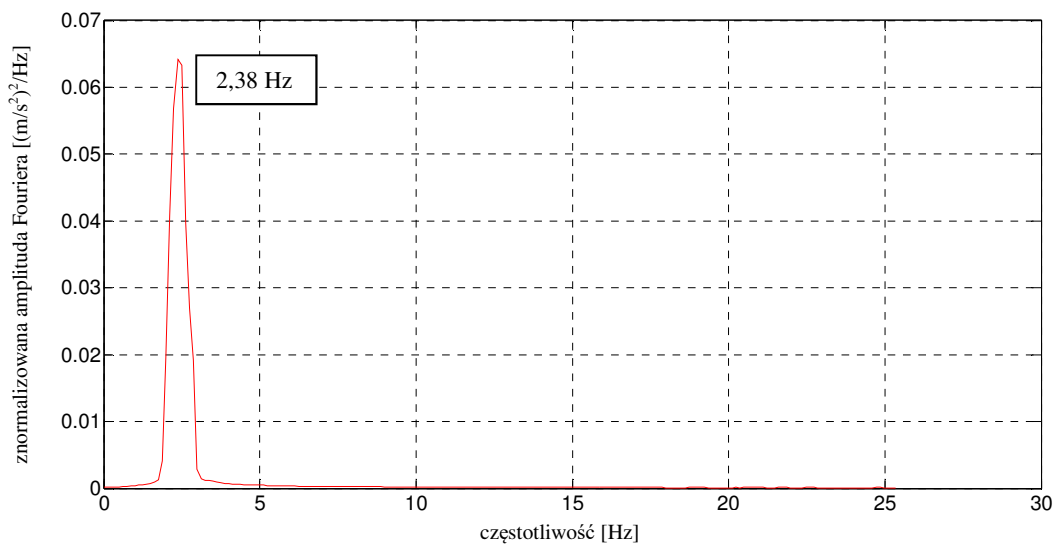
Rys. 5.4 Przebieg czasowy przyspieszeń obciążonej trybuny stalowej – kierunek poprzeczny X.

Na podstawie otrzymanych przebiegów czasowych wyznaczono częstotliwości drgań własnych pustej oraz obciążonej trybuny przekształcając zarejestrowany sygnał do dziedziny częstotliwości za pomocą szybkiej transformaty Fouriera. Na Rys. 5.5 i 5.6 przedstawiono wykresy transformaty Fouriera dla kierunku podłużnego Y, dla pustej i obciążonej trybuny. Z kolei, na Rys. 5.7 i 5.8 pokazano analogiczne wykresy dla kierunku poprzecznego X. Dodatkowo, wszystkie otrzymane wartości częstotliwości drgań zestawiono w Tab. 5.1.

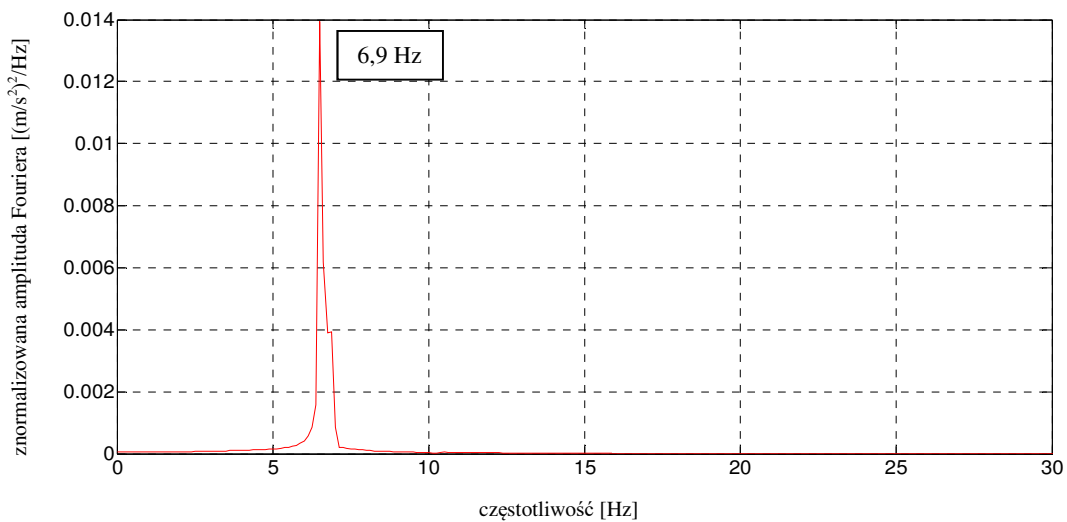


Rys. 5.5 Transformata Fouriera dla pustej trybuny stalowej – kierunek podłużny Y.

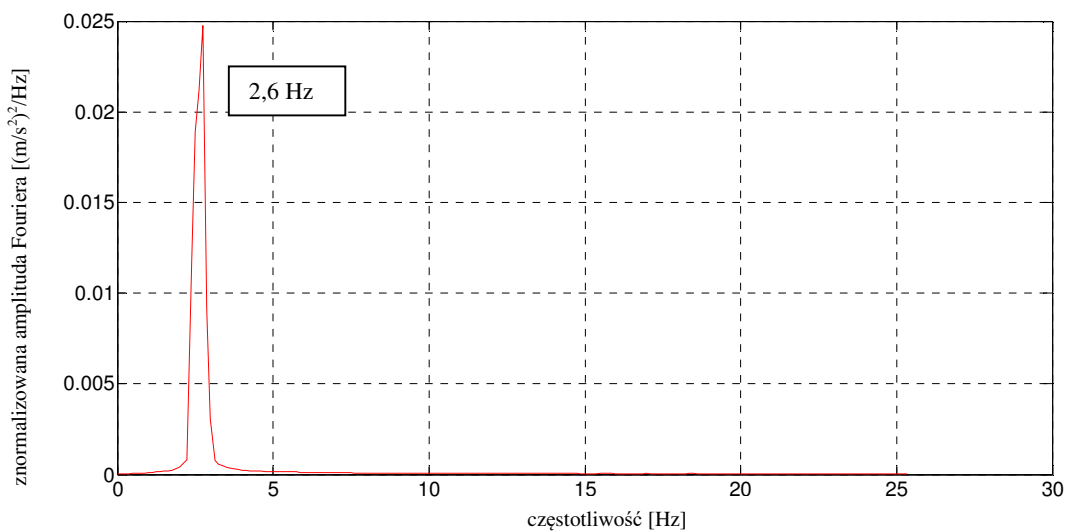




**Rys. 5.6** Transformata Fouriera dla obciążonej trybuny stalowej – kierunek podłużny Y.



**Rys. 5.7** Transformata Fouriera dla pustej trybuny stalowej – kierunek poprzeczny X.



**Rys. 5.8** Transformata Fouriera dla obciążonej trybuny stalowej – kierunek poprzeczny X.

**Tab. 5.1** Częstotliwości drgań podłużnych i poprzecznych trybuny stalowej (pustej i obciążonej tłumem).

Postać drgań własnych	Częstotliwość drgań [Hz]	
	Pusta trybuna stalowa	Obciążona trybuna stalowa
Podłużna Y (lewo-prawo)	4,62	2,38
Poprzeczna X (przód-tył)	6,90	2,60

Uzyskane wyniki pokazują, że dodatkowa masa powoduje znaczne przesunięcie częstotliwości drgań analizowanej tymczasowej trybuny stalowej w kierunku pasma o niższych wartościach (zob. także Majewska i Jankowski 2012, Lasowicz i Jankowski 2014). W przypadku podłużnej postaci drgań, wartość częstotliwości odpowiadająca tej postaci uległa redukcji o 48%, podczas gdy w przypadku poprzecznej postaci spadek ten wyniósł 62%. Warto jednocześnie podkreślić iż, wartości częstotliwości drgań podłużnych wyznaczone eksperymentalnie osiągają wartości zbliżone do sugerowanych minimalnych wartości, a w przypadku konstrukcji obciążonej są one nieakceptowalne (zob. rozdział 2.3).

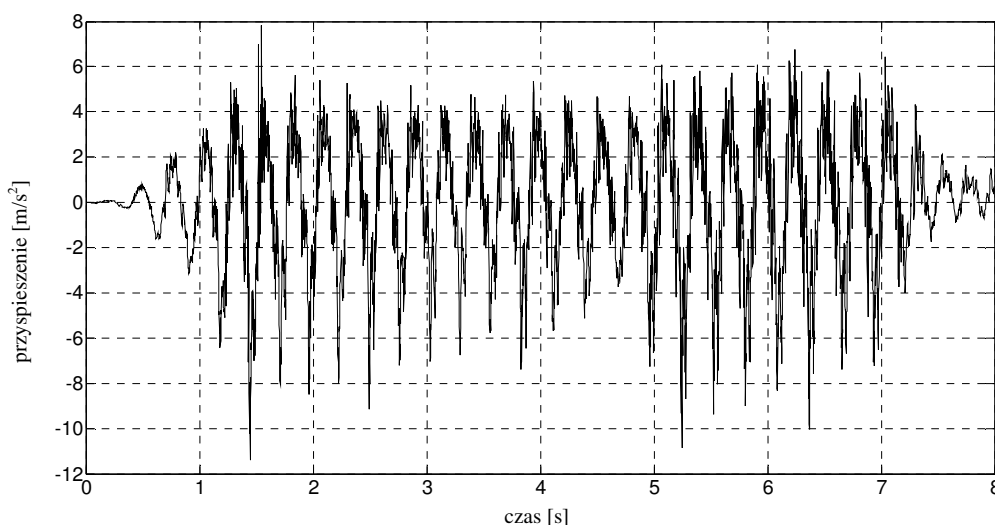
W Tab. 5.2 przedstawiono wyznaczone, na podstawie równania (4.3) (patrz Rozdział 4), wartości liczb tłumienia drgań poprzecznych i podłużnych dla pustej i obciążonej tymczasowej trybuny stalowej. Wyniki zestawione w tabeli pokazują, iż w przypadku obciążonej trybuny tymczasowej otrzymano wyższe wartości liczb tłumienia w porównaniu z pustą konstrukcją. Liczba tłumienia wyznaczona dla częstotliwości odpowiadającej podłużnej postaci drgań wzrosła o 75%, podczas gdy dla częstotliwości skorelowanej z poprzeczną postacią drgań wzrost ten wyniósł niespełna 17%.

**Tab. 5.2** Liczby tłumienia drgań podłużnych i poprzecznych trybuny stalowej (pustej i obciążonej).

Postać drgań własnych	Liczba tłumienia [%]	
	Pusta trybuna stalowa	Obciążona trybuna stalowa
Podłużna Y (lewo-prawo)	0,32	0,56
Poprzeczna X (przód tył)	0,18	0,21

W drugim etapie badań eksperymentalnych, zarejestrowano wartości maksymalnych przyspieszeń wywołane kołysaniem konstrukcji w kierunku podłużnym

Y przez jedną osobę stojącą na najwyższym poziomie. Głównym celem tego etapu badań było porównanie otrzymanych maksymalnych wartości przyspieszeń konstrukcji z wartościami granicznymi, zestawionymi w Tab. 2.3. Przebieg czasowy przyspieszeń, zarejestrowany przez czujnik zamocowany do najwyższego słupka, przedstawiono na Rys. 5.9. Zaobserwowana ekstremalna wartość przyspieszeń (około  $11 \text{ m/s}^2$ ), prawie trzykrotnie przekracza wartość graniczną ( $0,35g = 3,47 \text{ m/s}^2$ ). Zgodnie z opisem w Tab. 2.3, tak wysokie wartości są niedopuszczalne i mogą wywołać panikę wśród osób przebywających na trybunie.



**Rys. 5.9** Przebieg czasowy przyspieszeń pustej trybuny stalowej wywołany kotłysaniem – kierunek podłużny Y.

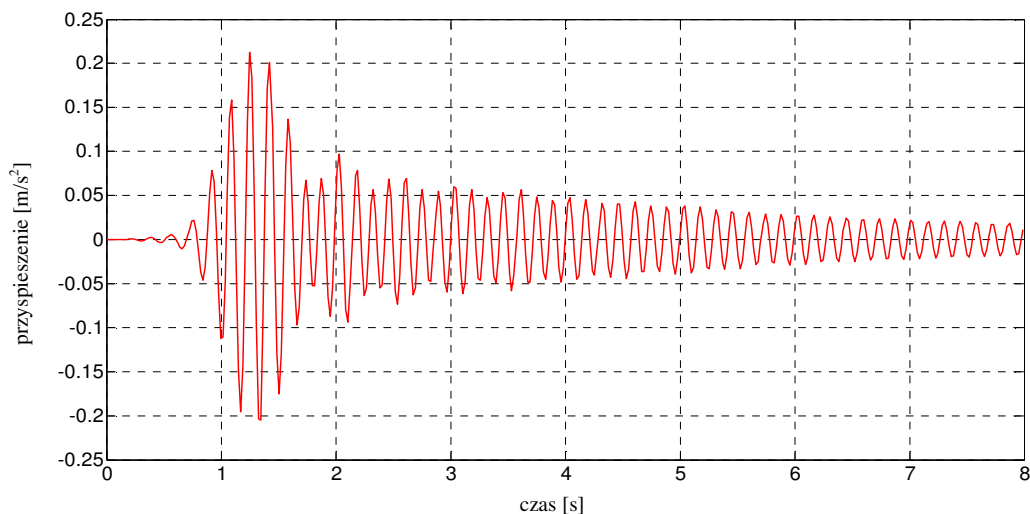
### 5.1.2 BADANIA TRYBUNY ZE STĘŻENIEM RUROWYM

Jedną z najbardziej rozpowszechnionych metod redukcji drgań trybun jest zastosowanie odpowiedniego układu stężającego (Ji i Ellis 1997). Układ ten ma za zadanie zapewnić sztywność konstrukcji na odpowiednim poziomie zwiększając przy tym wartości częstotliwości drgań. W przypadku analizowanej konstrukcji tymczasowej trybuny stalowej, wzniesionej za pomocą systemu rusztowań, jako stężenie zastosowano typowy element systemowy o przekroju rurowym, o średnicy 4,2 mm i całkowitej długości 3,2 m. Trybunę wyposażoną w tego typu element stężący konstrukcję w kierunku podłużnym Y przedstawiono na Fot. 5.5.

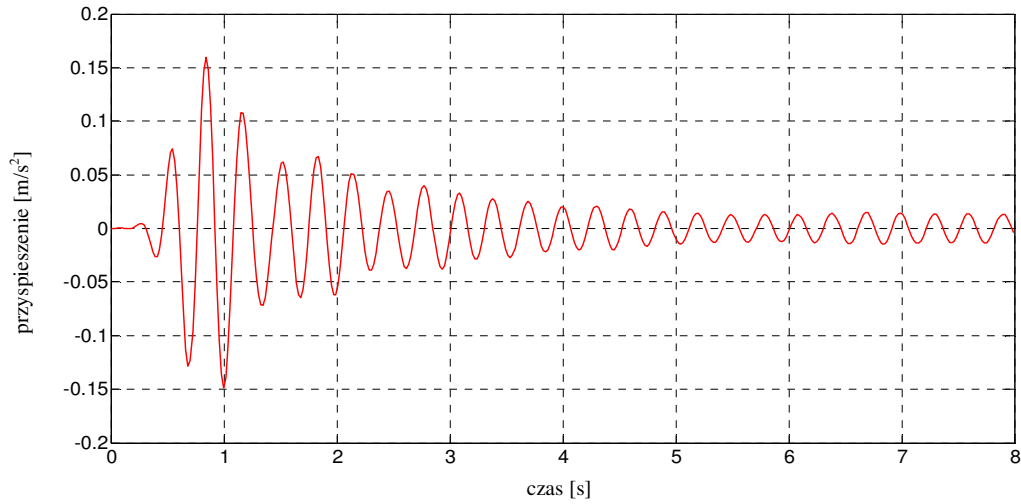


**Fot. 5.5** Tymczasowa trybuna stalowa wyposażona w rurowy element stężący.

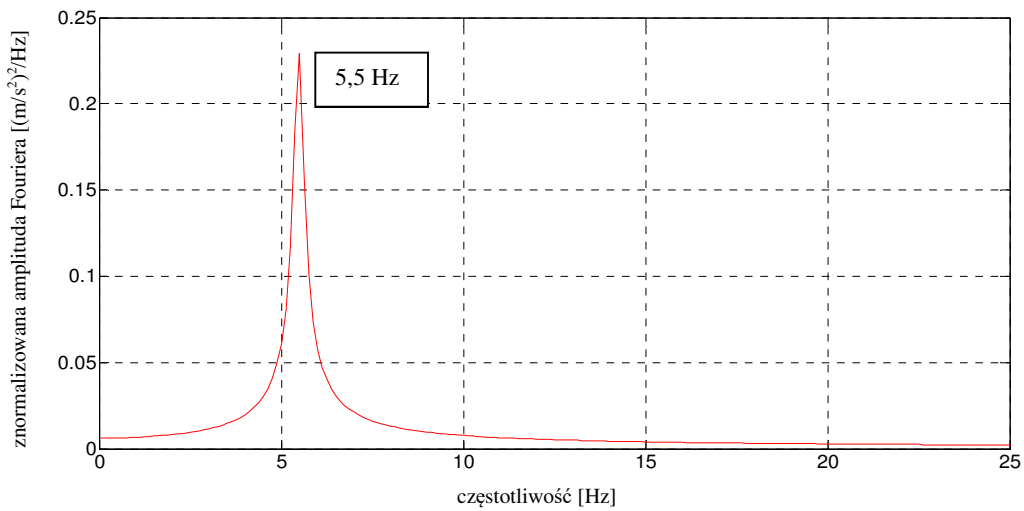
W pierwszym etapie badań eksperymentalnych trybuny ze stężeniem rurowym, wyznaczono wartości częstotliwości drgań. Konstrukcję wzbudzano poprzez przemieszczenie poziome końca pionowego słupka w kierunku podłużnym Y, rejestrując sygnał aż do momentu wytlumienia drgań. Reprezentatywne przebiegi czasowe przyspieszeń uzyskane dla pustej oraz obciążonej tymczasowej trybuny stalowej przedstawiono na Rys. 5.10 i 5.11. Z kolei, na Rys. 5.12 i 5.13 pokazano transformaty Fouriera dla obu przypadków. Dodatkowo, otrzymane wartości częstotliwości drgań zestawiono w Tab. 5.3.



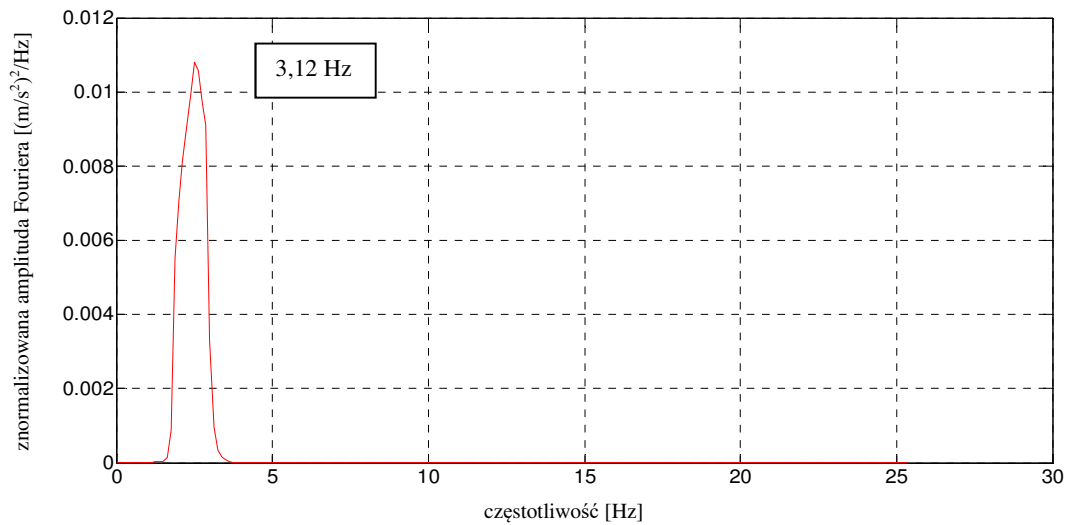
**Rys. 5.10** Przebieg czasowy przyspieszeń pustej trybuny stalowej ze stężeniem rurowym – kierunek podłużny Y.



**Rys. 5.11** Przebieg czasowy przyspieszeń obciążonej trybuny stalowej ze stężeniem rurowym – kierunek podłużny Y.



**Rys. 5.12** Transformata Fouriera dla pustej trybuny stalowej ze stężeniem rurowym – kierunek podłużny Y.



**Rys. 5.13** Transformata Fouriera dla obciążonej trybuny stalowej ze stężeniem rurowym – kierunek podłużny Y.

**Tab. 5.3** Częstotliwości drgań podłużnych trybuny stalowej ze stężeniem rurowym (pustej i obciążonej).

Postać drgań własnych	Częstotliwość drgań [Hz]	
	Pusta trybuna stalowa	Obciążona trybuna stalowa
Podłużna Y (lewo-prawo)	5,50	3,12

Z Tab. 5.3 wynika, że dodatkowa masa w istotny sposób wpływa na częstotliwości drgań trybuny ze stężeniem rurowym. W przypadku obciążonej konstrukcji otrzymano wartość częstotliwości niższą o 43% w porównaniu z pustą konstrukcją. Porównując Tab. 5.3 z Tab. 5.1 zaobserwowano, iż zastosowanie rurowego elementu stężącego przyczyniło się do znacznego wzrostu sztywności konstrukcji skutkując przesunięciem częstotliwości odpowiadającej podłużnej postaci drgań w kierunku pasma o wyższych wartościach. Wartość częstotliwości wzrosła o 19% i 31%, odpowiednio dla pustej i obciążonej trybuny.

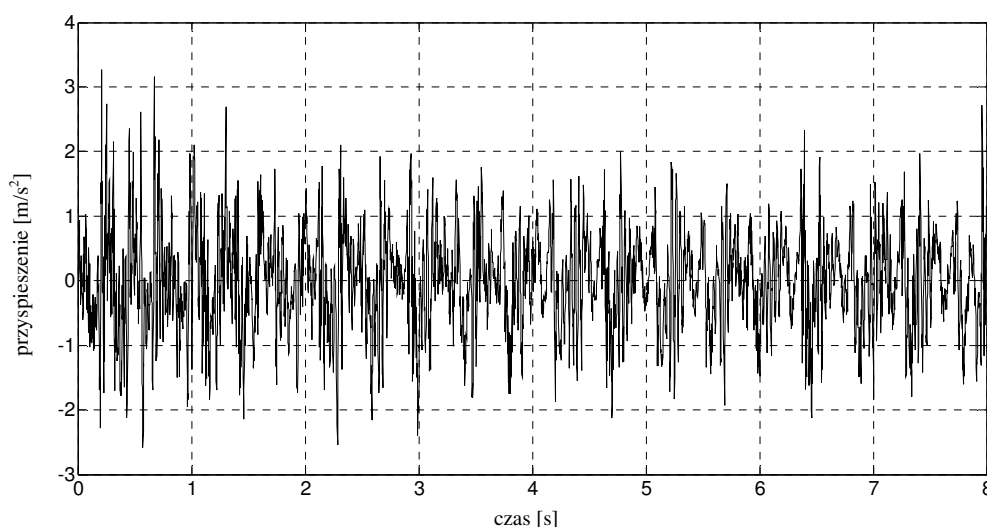
Na podstawie otrzymanych przebiegów czasowych przyspieszeń (Rys. 5.10 i 5.11) wyznaczono, zgodnie z równaniem (4.3), wartości liczb tłumienia drgań podłużnych dla pustej i obciążonej tymczasowej trybuny stalowej. Wyniki przedstawiono w Tab. 5.4. Porównując Tab. 5.4 z Tab. 5.2 zaobserwowano wzrost liczby tłumienia w przypadku konstrukcji wyposażonej w rurowy element stężący. Wzrost ten wyniósł 69% w przypadku pustej oraz 75% w przypadku obciążonej tymczasowej trybuny stalowej.

**Tab. 5.4** Liczby tłumienia drgań podłużnych trybuny stalowej ze stężeniem rurowym (pustej i obciążonej).

Postać drgań własnych	Liczba tłumienia [%]	
	Pusta trybuna stalowa	Obciążona trybuna stalowa
Podłużna Y (lewo-prawo)	0,54	0,98

W kolejnym etapie rozważań wyznaczono maksymalne wartości przyspieszeń konstrukcji wywołane kołysaniem jednej osoby przebywającej na najwyższym pomoście. Wymuszenie następowało w kierunku podłużnym Y. Na Rys. 5.14 przedstawiono przebieg czasowy przyspieszeń tymczasowej trybuny stalowej odpowiadający tej sytuacji. Zaobserwowane wartości ekstremalnych przyspieszeń,

wynoszące nieco ponad  $3 \text{ m/s}^2$ , oznaczają nieakceptowalny poziom komfortu (zob. Tab. 2.3).



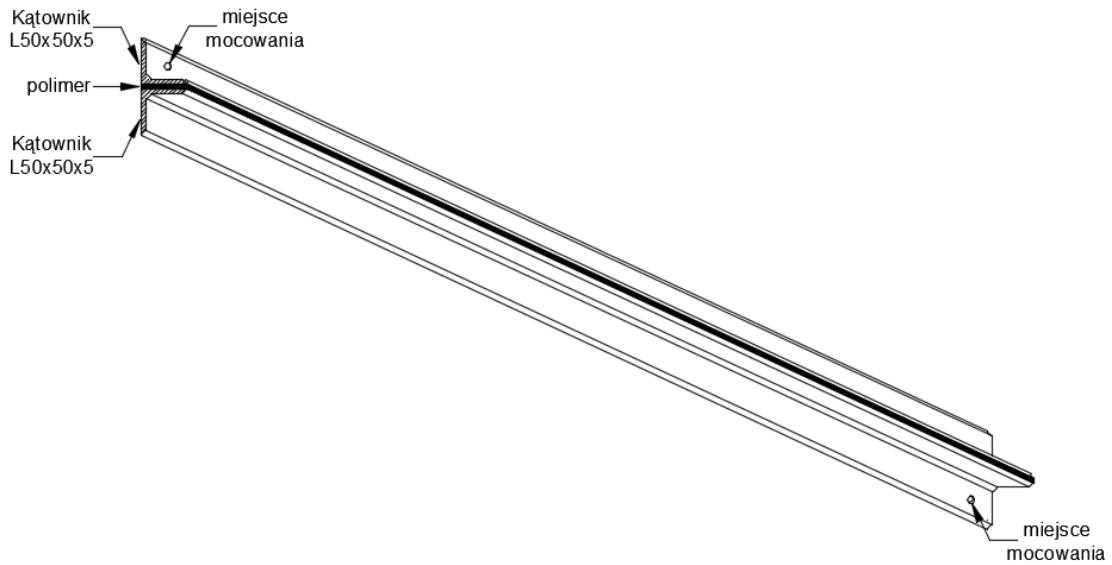
**Rys. 5.14** Przebieg czasowy przyspieszeń pustej trybuny stalowej ze stężeniem rurowym wywołany kołysaniem – kierunek podłużny Y.

### 5.1.3 BADANIA TRYBUNY Z TŁUMIKIEM POLIMEROWYM JAKO ELEMENTEM STĘŻAJĄCYM

W podrozdziale 5.1.2 przedstawiono wyniki parametrów dynamicznych wyznaczonych dla tymczasowej trybuny stalowej wyposażonej w rurowy element stężający. Pomimo zapewnienia sztywności konstrukcji na odpowiednim poziomie, wyznaczone wartości przyspieszeń konstrukcji wywołane kołysaniem przekroczyły wartości dopuszczalne, pozwalające na komfortowe przebywanie widzów na rozpatrywanym obiekcie. W niniejszym rozdziale, analizie poddano zaproponowany element stężający składający się z dwóch kątowników stalowych o przekrojach  $50 \times 50 \times 5 \text{ mm}$  i całkowitej długości  $3,2 \text{ m}$ , sklejonych ze sobą warstwą polimeru o grubości  $5 \text{ mm}$ , którego właściwości materiałowe zestawiono w Tab. 3.1. Schematyczny szkic tego elementu (dalej nazywanego tłumikiem polimerowym) przedstawiono na Rys. 5.15. Zaproponowany rodzaj stężenia jest elementem, który ma za zadanie usztywnić konstrukcję na wymaganym poziomie i jednocześnie zwiększyć liczbę tłumienia drgań tymczasowej trybuny stalowej (zob. Lasowicz i Jankowski 2015a, 2016a, 2016c). Tłumik polimerowy zamocowano dokładnie w tym samym miejscu, co tradycyjne stężenie rurowe (patrz Fot. 5.6). Jednocześnie sposób jego zamocowania polegał na tym, że jeden z kątowników przytwierdzono do górnej części



trybuny, drugi zaś do dolnej części (zob. miejsca mocowania na Rys. 5.15). Taki sposób mocowania spowodował, iż, w wyniku działających obciążeń, w warstwie polimeru łączącej ze sobą oba kątowniki występowały naprężenia ścinające.



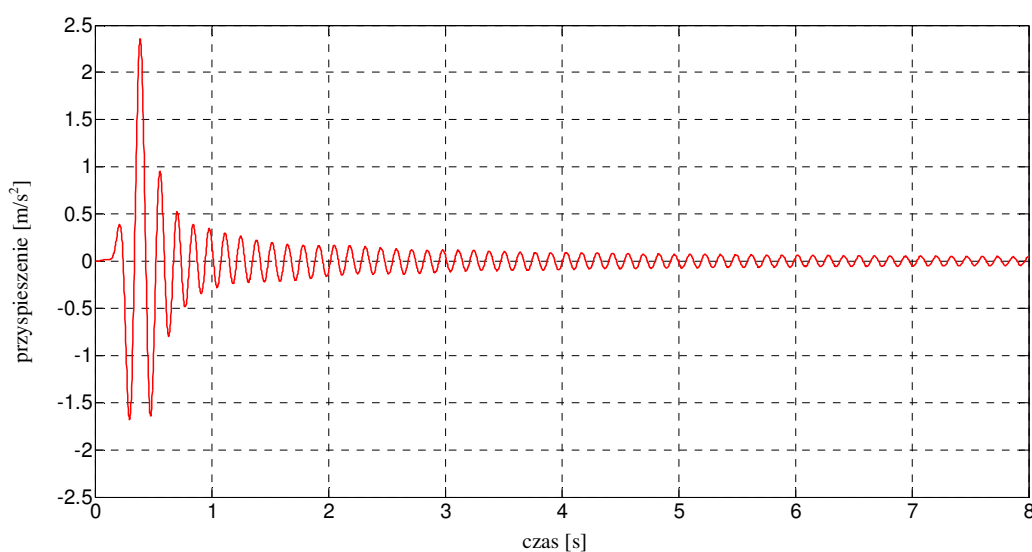
Rys. 5.15 Schemat tłumika polimerowego spełniającego rolę elementu stężającego konstrukcję trybuny.



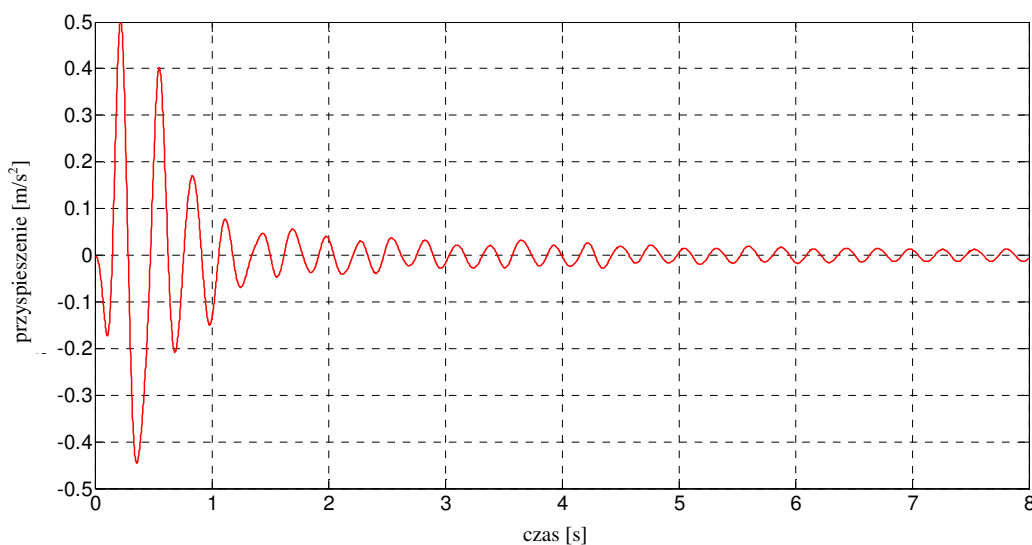
Fot. 5.6 Tymczasowa trybuna stalowa wyposażona w tłumik polimerowy (widok z tyłu).



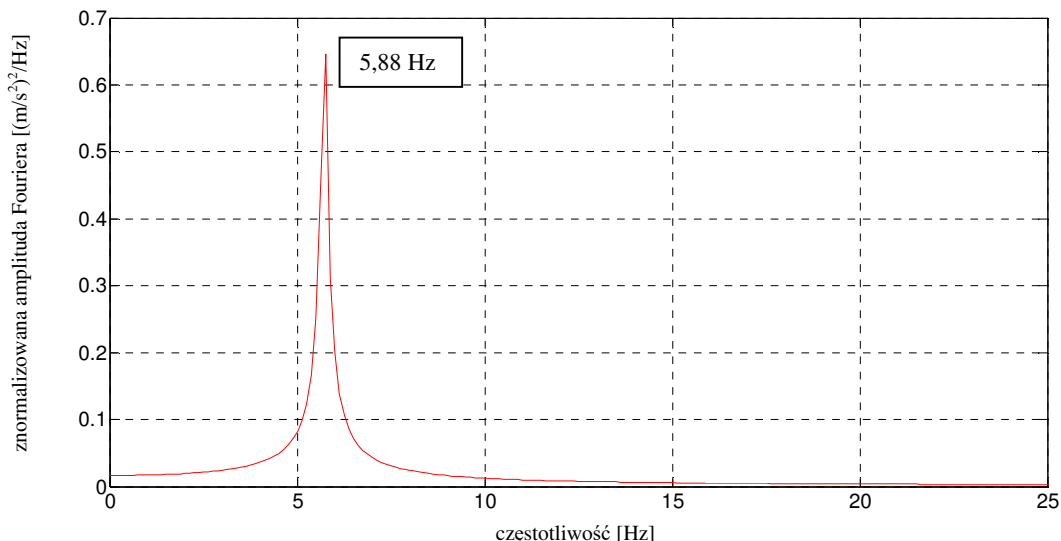
Przeprowadzono szereg pomiarów mających na celu wyznaczenie parametrów dynamicznych tymczasowej trybuny stalowej z tłumikiem polimerowym, takich jak: częstotliwość drgań oraz liczba tłumienia. Konstrukcję wzbudzano do drgań poprzez poziome przemieszczenie końca słupka w kierunku podłużnym Y, rejestrując sygnał aż do momentu wytłumienia drgań. Reprezentatywne przebiegi czasowe przyspieszeń, uzyskane dla pustej jak i obciążonej tymczasowej trybuny stalowej z tłumikiem polimerowym, przedstawiono na Rys. 5.16 i 5.17. Z kolei, na Rys. 5.18 i 5.19 pokazano transformaty Fouriera dla obu przypadków. Dodatkowo, otrzymane wartości częstotliwości drgań zestawiono w Tab. 5.5.



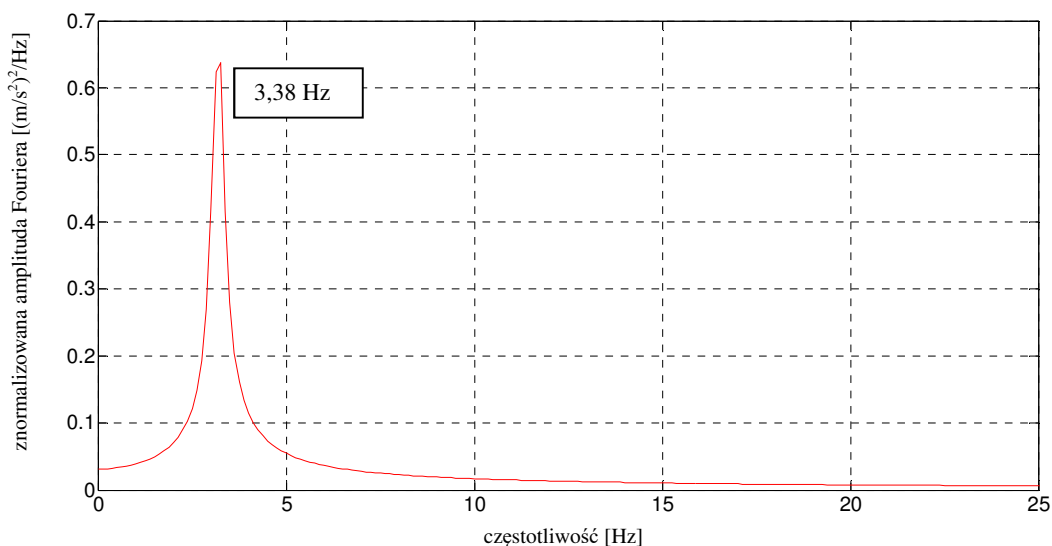
**Rys. 5.16** Przebieg czasowy przyspieszeń pustej trybuny stalowej z tłumikiem polimerowym – kierunek podłużny Y.



**Rys. 5.17** Przebieg czasowy przyspieszeń obciążonej trybuny stalowej z tłumikiem polimerowym – kierunek podłużny Y.



Rys. 5.18 Transformata Fouriera dla pustej trybuny stalowej z tłumikiem polimerowym – kierunek podłużny Y.



Rys. 5.19 Transformata Fouriera dla obciążonej trybuny stalowej z tłumikiem polimerowym – kierunek podłużny Y.

Tab. 5.5 Częstotliwości drgań podłużnych pustej i obciążonej trybuny stalowej z tłumikiem polimerowym.

Postać drgań własnych	Częstotliwość drgań [Hz]	
	Pusta trybuna stalowa	Obciążona trybuna stalowa
Podłużna Y (lewo-prawo)	5,88	3,38

Z Tab. 5.5 wynika, że dodatkowa masa znacznie redukuje wartość częstotliwości drgań trybuny z tłumikiem polimerowym. W przypadku obciążonej konstrukcji otrzymano wartość niższą o 43% w porównaniu z pustą konstrukcją. Porównując

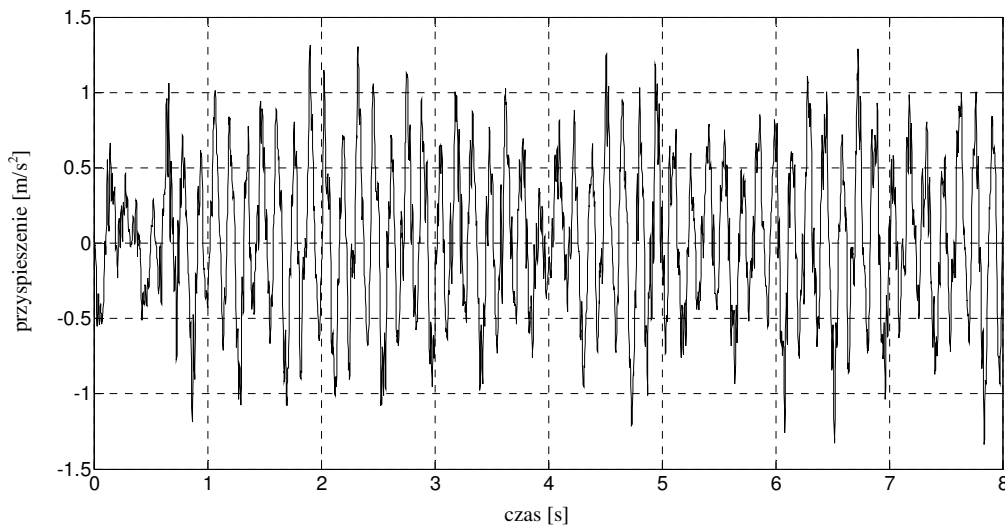
Tab. 5.5 z Tab. 5.3 i z Tab. 5.1 zaobserwowano, iż zastosowanie tłumika polimerowego przyczyniło się do wzrostu sztywności konstrukcji skutkując przesunięciem częstotliwości odpowiadającej podłużnej postaci drgań w kierunku pasma o wyższych wartościach. Wzrost ten wyniósł 6,9% i 8,3%, odpowiednio dla pustej i obciążonej trybuny porównując z konstrukcją wyposażoną w stężenie rurowe, oraz 27% i 42%, porównując z pustą i obciążoną konstrukcją niestężoną.

Na podstawie otrzymanych przebiegów czasowych przyspieszeń (Rys. 5.16 i 5.17) wyznaczono, zgodnie z równaniem (4.3), wartości liczb tłumienia drgań podłużnych dla pustej i obciążonej tymczasowej trybuny stalowej. Wyniki zestawiono w Tab. 5.6. Porównując Tab. 5.6 z Tab. 5.4 zaobserwowano znaczny wzrost liczby tłumienia w przypadku konstrukcji wyposażonej w tłumik polimerowy w porównaniu z trybuną ze stężeniem rurowym. Wzrost ten jest prawie dwukrotny w przypadku pustej oraz ponad trzykrotny w przypadku obciążonej tymczasowej trybuny stalowej. Z kolei, porównując Tab. 5.6 z Tab. 5.2 zaobserwowano, że zastosowanie tłumika polimerowego spowodowało wzrost liczby tłumienia aż o 228% i 445% (w porównaniu do trybuny bez stężenia), odpowiednio dla pustej i obciążonej tymczasowej trybuny stalowej.

**Tab. 5.6** Liczby tłumienia drgań podłużnych pustej i obciążonej trybuny stalowej z tłumikiem polimerowym.

Postać drgań własnych	Liczba tłumienia [%]	
	Pusta trybuna stalowa	Obciążona trybuna stalowa
Podłużna Y (lewo-prawo)	1,05	3,05

W kolejnym etapie rozważań, wyznaczono maksymalne wartości przyspieszeń konstrukcji wywołane kołysaniem jednej osoby przebywającej na najwyższym pomoście. Wymuszenie następowało w kierunku podłużnym Y. Na Rys. 5.20. przedstawiono pomierzony przebieg czasowy przyspieszeń odpowiadający tej sytuacji. Zaobserwowane wartości przyspieszeń, wynoszące około  $1,3 \text{ m/s}^2$ , oznaczają co prawda uciążliwy poziom komfortu (zob. Tab. 2.3) ale, co najważniejsze, są znacznie niższe od wartości przyspieszeń wyznaczonych dla konstrukcji bez stężenia (ośmiokrotnie mniejsze) jak i trybuny wyposażonej w tradycyjne stężenie rurowe (prawie dwukrotnie mniejsze).



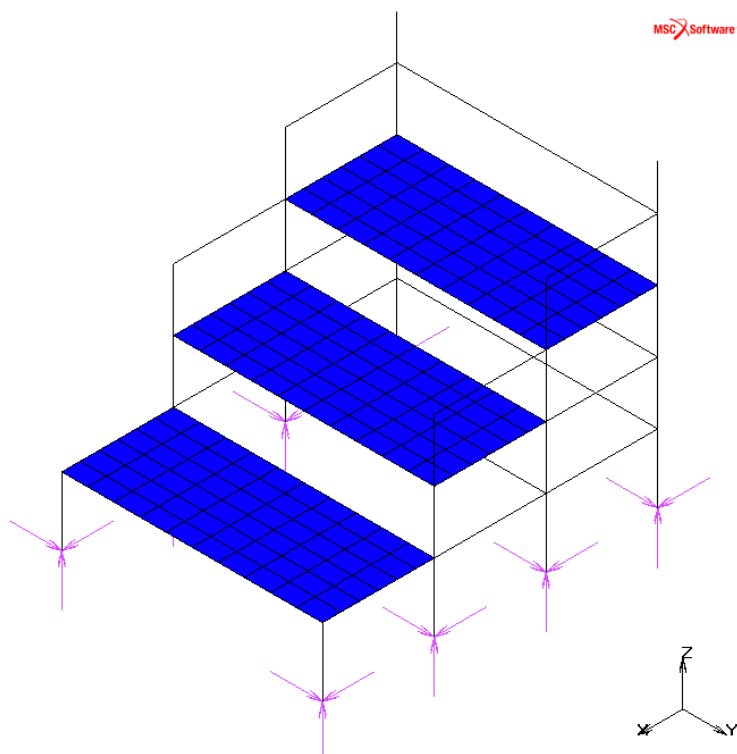
**Rys. 5.20** Przebieg czasowy przyspieszeń pustej trybuny stalowej z tłumikiem polimerowym wywołany kołysaniem – kierunek podłużny Y.

## 5.2 ANALIZA NUMERYCZNA FRAGMENTU TYMCZASOWEJ TRYBUNY STALOWEJ

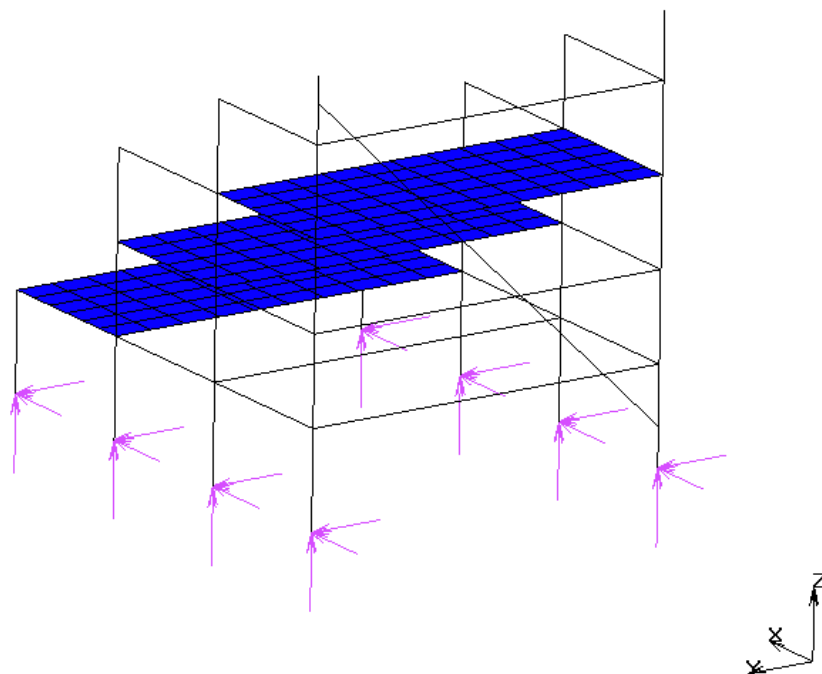
Drugim etapem rozważań było przeprowadzenie analiz numerycznych, tj. analizy modalnej i dynamicznej, analizowanej tymczasowej konstrukcji trybuny stalowej. W tym celu utworzono, w programie komercyjnym MSC Marc, trzy modele numeryczne wykorzystując MES. Pierwszy z nich przedstawiał tymczasową trybunę stalową bez stężenia. Drugi model odzwierciedlał tę samą konstrukcję, którą dodatkowo usztywniono stężeniem o przekroju rurowym, podczas gdy w modelu trzecim konstrukcję wyposażono w tłumik polimerowy. Te trzy modele numeryczne przedstawiono odpowiednio na Rys. 5.21, 5.22 i 5.23. Modele te zbudowano ze standardowych elementów:

- dwuwęzłowych elementów belkowych (pionowe i poziome elementy rusztowania),
- czterowęzłowych elementów powłokowych (kraty pomostowe, ławki drewniane),
- ośmiowęzłowych elementów bryłowych (kątowniki oraz warstwa polimeru – elementy tłumika polimerowego).

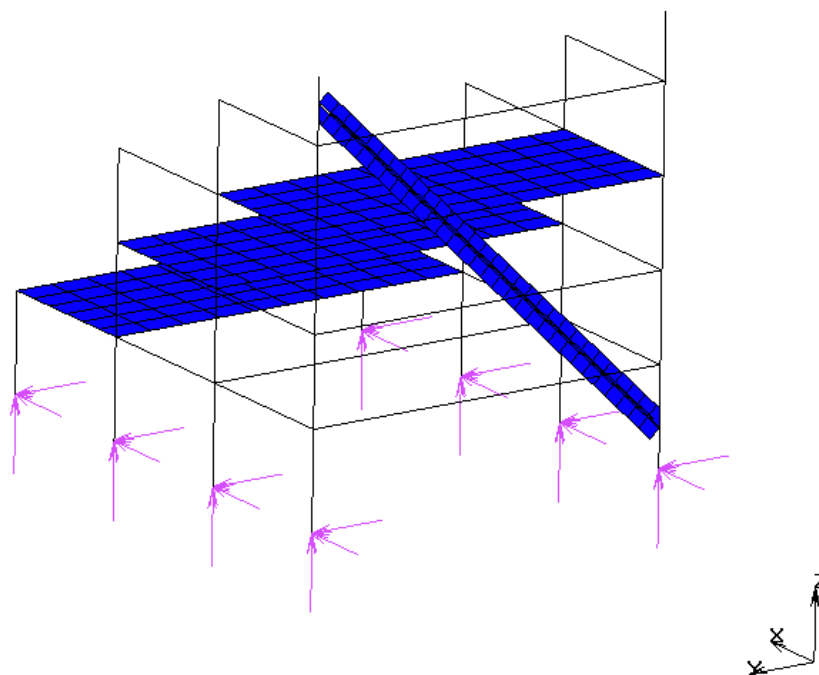
Warstwę polimeru zdefiniowano w programie MSC Marc jako materiał Mooneya-Rivlina, o parametrach opisanych w Tab. 3.2, które wstępnie zweryfikowano na podstawie analiz dla aluminiowych belek wspornikowych (rozdział 4).



Rys. 5.21 Model numeryczny trybuny stalowej bez stężenia.



Rys. 5.22 Model numeryczny trybuny stalowej ze stężeniem rurowym.



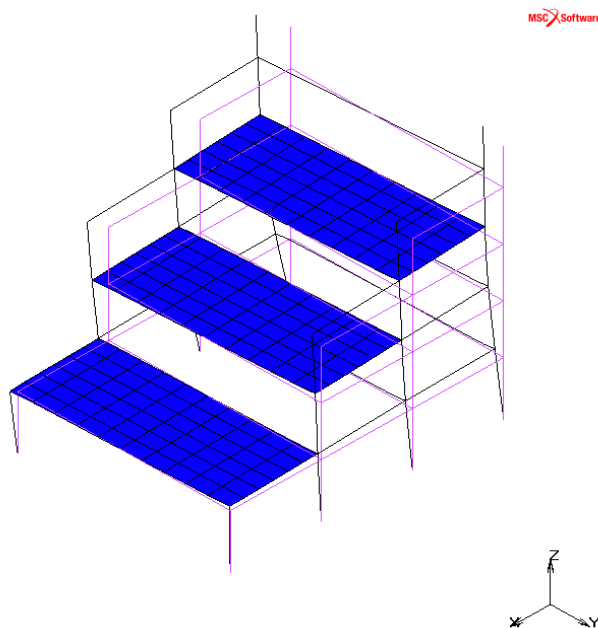
Rys. 5.23 Model numeryczny trybuny stalowej z tłumikiem polimerowym.

## 5.2.1 ANALIZA MODALNA

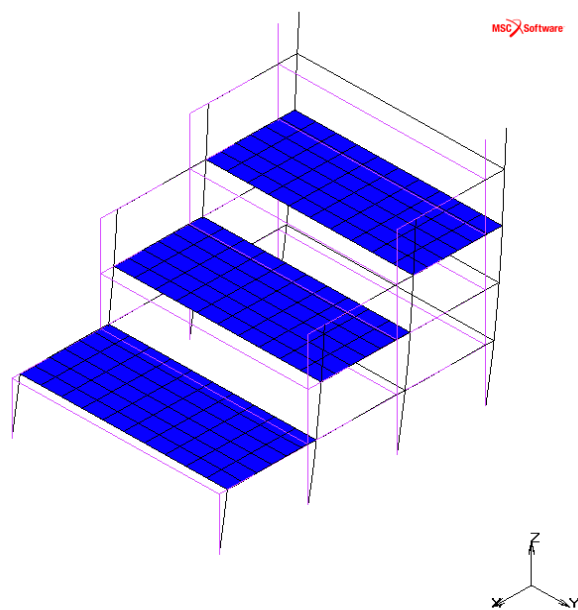
W pierwszym etapie badań, przeprowadzono analizę modalną w celu weryfikacji utworzonych modeli numerycznych. Głównym celem analizy było wyznaczenie postaci drgań własnych oraz odpowiadających im wartości częstotliwości drgań.

### 5.2.1.1 WYNIKI DLA TRYBUNY BEZ STEŻENIA

Na Rys. 5.24 i 5.25 przedstawiono dwie pierwsze postaci drgań własnych (podłużną Y i poprzeczną X) pustej jak i obciążonej tymczasowej trybuny stalowej bez stężenia. Z kolei, w Tab. 5.7 zestawiono wartości dominujących częstotliwości drgań konstrukcji odpowiadające tym postaciom. Porównując Tab. 5.7 z Tab. 5.1 można zauważyć, że różnica pomiędzy wartościami częstotliwości drgań uzyskanych z badań eksperymentalnych oraz z analizy numerycznej dla wszystkich przypadków jest mniejsza niż 10%. Na tej podstawie można stwierdzić, że stworzony model numeryczny relatywnie dobrze symuluje zachowanie się rzeczywistej konstrukcji i może być wykorzystywany do dalszych, bardziej zaawansowanych analiz numerycznych.



Rys. 5.24 Pierwsza podłużna postać drgań własnych trybuny stalowej bez stężenia.



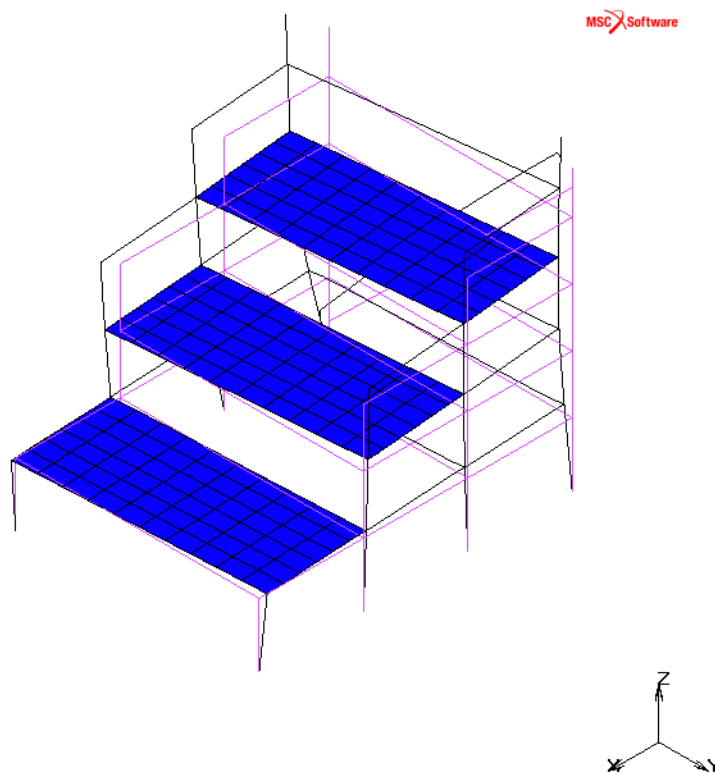
Rys. 5.25 Pierwsza poprzeczna postać drgań własnych trybuny stalowej bez stężenia.

Tab. 5.7 Częstotliwości drgań poprzecznych i podłużnych trybuny stalowej bez stężenia (pustej i obciążonej).

Postać drgań własnych	Częstotliwość drgań [Hz]	
	Pusta trybuna stalowa	Obciążona trybuna stalowa
Podłużna Y (lewo-prawo)	5,07	2,57
Poprzeczna X (przód-tył)	6,33	2,68

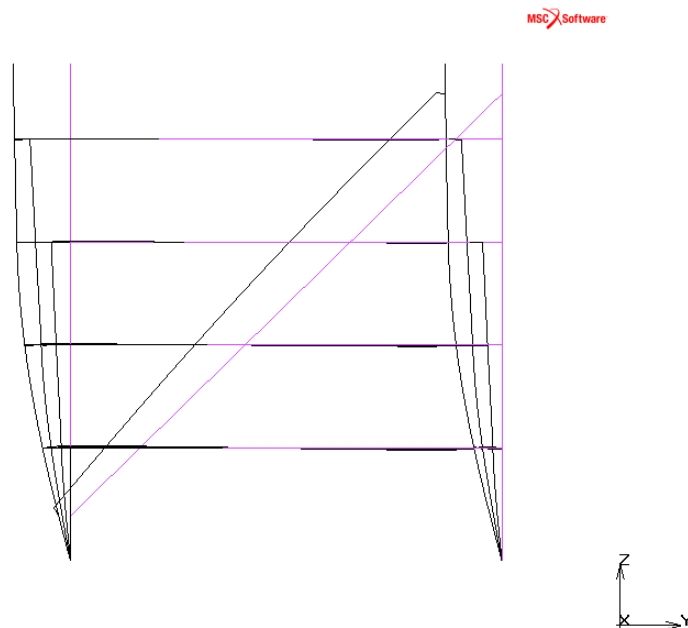
### 5.2.1.2 WYNIKI DLA TRYBUNY ZE STĘŻENIEM RUROWYM

Na Rys. 5.26 i 5.27 przedstawiono podłużną postać drgań własnych pustej tymczasowej trybuny stalowej wyposażonej w stężenie rurowe uzyskaną w wyniku przeprowadzonej analizy modalnej. Dodatkowo, w Tab. 5.8 zestawiono wartości dominujących częstotliwości drgań podłużnych dla tej konstrukcji (pustej oraz obciążonej). Porównanie wyników zestawionych w Tab. 5.8 i 5.3 pokazuje zgodność otrzymanych wartości dominujących częstotliwości drgań podłużnych wyznaczonych z badań eksperymentalnych i z analizy numerycznej. W przypadku trybuny pustej i obciążonej różnica w uzyskanych wartościach częstotliwości jest mniejsza niż 8%, co potwierdza poprawność utworzonego modelu numerycznego.



**Rys. 5.26** Pierwsza podłużna postać drgań własnych trybuny stalowej ze stężeniem rurowym (widok z boku).





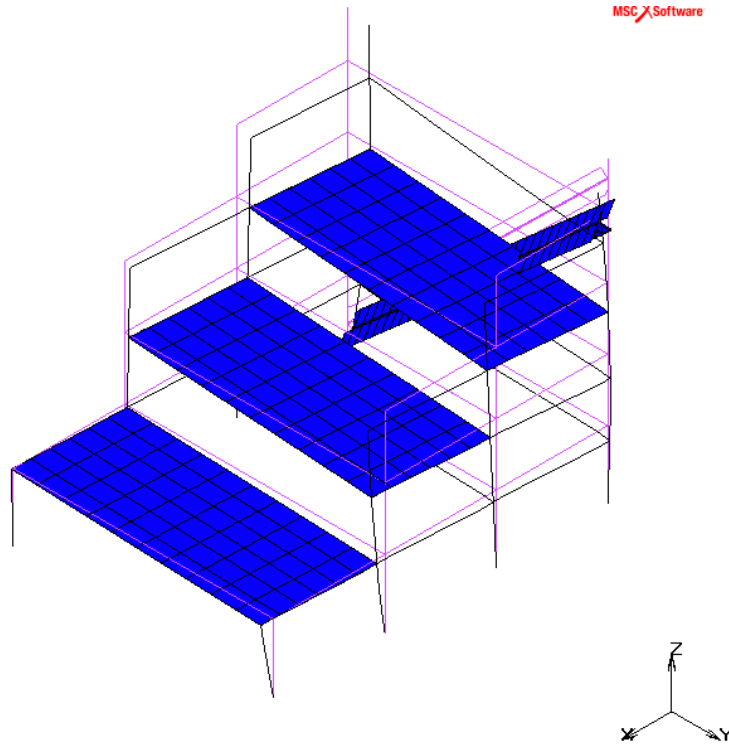
**Rys. 5.27** Pierwsza podłużna postać drgań własnych trybuny stalowej ze stężeniem rurowym (widok z przodu).

**Tab. 5.8** Częstotliwości drgań podłużnych trybuny stalowej ze stężeniem rurowym (pustej i obciążonej).

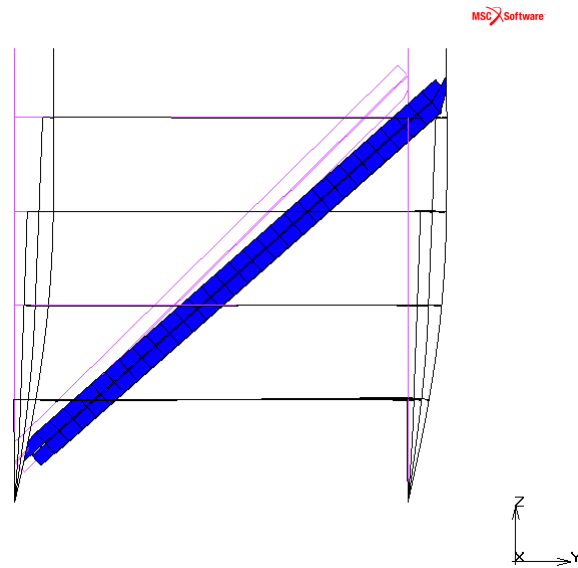
Postać drgań własnych	Częstotliwość drgań [Hz]	
	Pusta trybuna stalowa	Obciążona trybuna stalowa
Podłużna Y (lewo-prawo)	5,66	3,35

### 5.2.1.3 WYNIKI DLA TRYBUNY Z TŁUMIKIEM POLIMEROWYM

Na Rys. 5.28 i 5.29 przedstawiono pierwszą podłużną postać drgań własnych pustej tymczasowej trybuny stalowej wyposażonej w tłumik polimerowy. Dodatkowo, w Tab. 5.9 zestawiono wartości dominujących częstotliwości drgań podłużnych i poprzecznych dla tej konstrukcji (pustej oraz obciążonej). Porównując Tab. 5.9 z Tab. 5.5 można zauważyć, że różnica pomiędzy wartościami częstotliwości drgań uzyskanych z badań eksperymentalnych oraz z analizy numerycznej jest mniejsza niż 3%. Na tej podstawie można stwierdzić, że model numeryczny dobrze odzwierciedla parametry dynamiczne rzeczywistej konstrukcji i może być wykorzystywany do dalszych, zaawansowanych analiz numerycznych.



**Rys. 5.28** Pierwsza podłużna postać drgań własnych trybuny stalowej z tłumikiem polimerowym (widok z boku).



**Rys. 5.29** Pierwsza podłużna postać drgań własnych trybuny stalowej z tłumikiem polimerowym (widok z przodu).

**Tab. 5.9** Częstotliwości drgań podłużnych trybuny stalowej z tłumikiem polimerowym (pustej i obciążonej).

Postać drgań własnych	Częstotliwość drgań [Hz]	
	Pusta trybuna stalowa	Obciążona trybuna stalowa
Podłużna Y (lewo-prawo)	5,71	3,47

### 5.2.2 ANALIZA DYNAMICZNA

Kolejny etap rozważań poświęcono analizie dynamicznej, której głównym celem było wyznaczenie maksymalnych wartości przyspieszeń oraz przemieszczeń konstrukcji trybuny poddanej oddziaływaniom dynamicznym w postaci synchronicznych i powtarzających się podskoków widzów.

Dynamiczne równanie ruchu dla modelu dyskretnego konstrukcji trybuny o skończonej liczbie stopni swobody  $n$ , poddanej oddziaływaniu dynamicznemu przyjmuje postać (Chmielewski i Zembaty 1998):

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{p}(t) \quad (5.1)$$

gdzie:

$\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{K}$  – macierz mas, tłumienia i sztywności układu;

$\ddot{\mathbf{u}}(t)$ ,  $\dot{\mathbf{u}}(t)$ ,  $\mathbf{u}(t)$  – wektor przyspieszeń, prędkości i przemieszczeń;

$\mathbf{p}(t)$  – wektor sił zewnętrznych.

W modelu numerycznym przyjęto tłumienie Rayleigh'a zakładając, iż macierz tłumienia,  $\mathbf{C}$ , układu jest proporcjonalna do macierzy mas,  $\mathbf{M}$ , i sztywności,  $\mathbf{K}$ , zgodnie ze wzorem (Clough i Penzien 1993, Hall 2006, Stein et al. 2004):

$$\mathbf{C} = a_0\mathbf{M} + a_1\mathbf{K} \quad (5.2)$$

$$a_0 = 4\pi\xi \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2} \quad (5.3)$$

$$a_1 = \frac{\xi}{\pi(f_1 + f_2)} \quad (5.4)$$

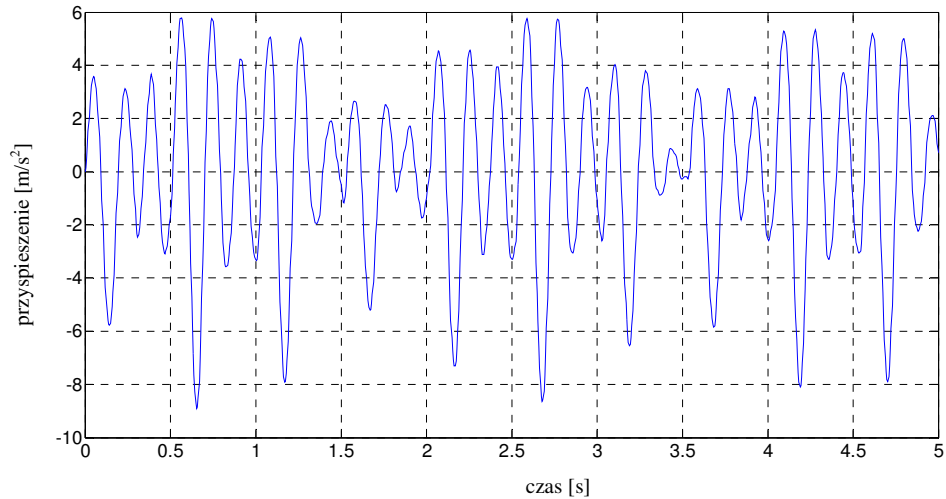
gdzie:

$\xi$  – liczba tłumienia;

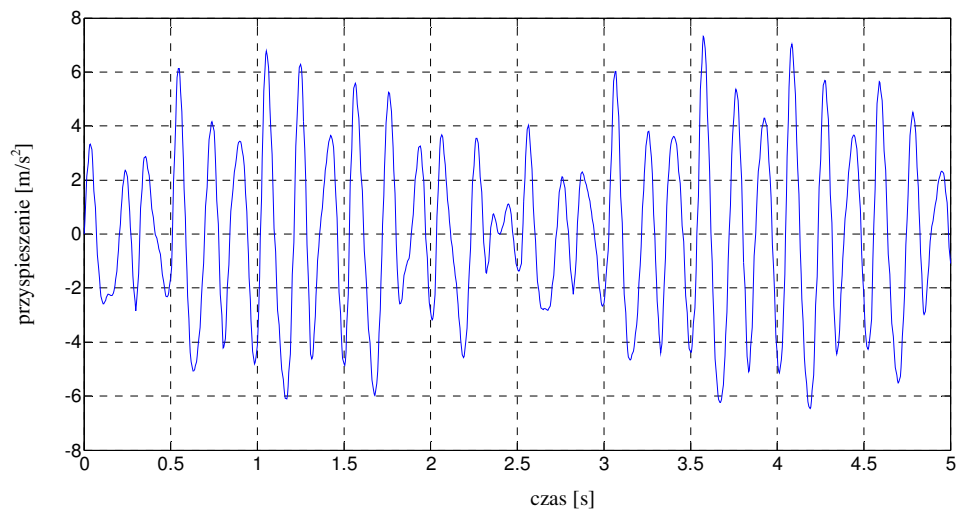
$f_1$ ,  $f_2$  – dominujące częstotliwości drgań własnych konstrukcji.

Podczas analizy numerycznej, obciążenie przyłożono do konstrukcji na kierunku pionowym za pomocą sił skupionych opisanych szeregiem Fouriera zgodnie z równaniem (2.1) przy założeniu typowej częstotliwości podskoków równej 2 Hz (zob. Rys. 2.1). Siły te przyłożono w 12 miejscach przeznaczonych dla widzów przyjmując szacunkową masę jednej osoby równą 100 kg. Dodatkowo, 6% wyznaczonego obciążenia przyłożono na kierunku poziomym (podłużnym Y) zgodnie z normą PN-EN 1991-2: 2003. Całkowity czas przeprowadzonej analizy dynamicznej wyniósł 5 s, zaś

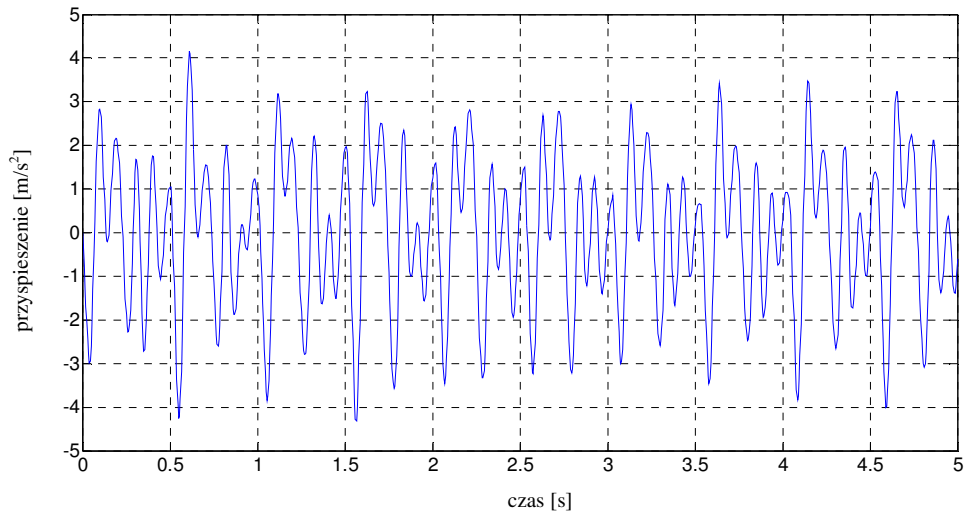
krok czasowy równy był 0,005 s. Na Rys. 5.30, 5.31 i 5.32 przedstawiono przebiegi czasowe przyspieszeń konstrukcji dla wszystkich modeli w węźle znajdującym się na najwyższym poziomie kraty pomostowej (kierunek podłużny Y). Z kolei, na Rys. 5.33, 5.34 i 5.35 pokazano analogiczne przebiegi czasowe przemieszczeń. Dodatkowo, wartości ekstremalnych przyspieszeń i przemieszczeń zestawiono w Tab. 5.10 (por. Lasowicz i Jankowski 2016b).



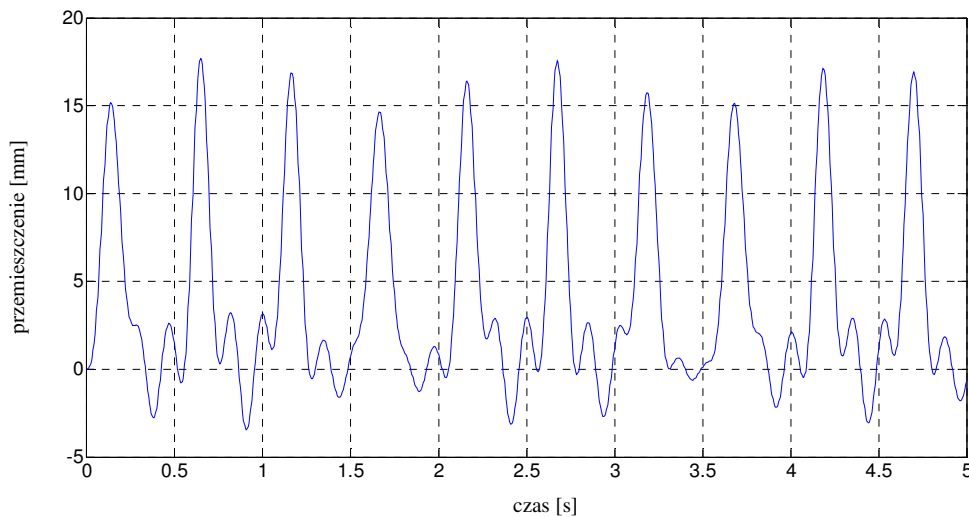
**Rys. 5.30** Przebieg czasowy przyspieszeń trybuny stalowej bez stężenia wywołany podskokami widzów z częstotliwością 2 Hz – kierunek podłużny Y.



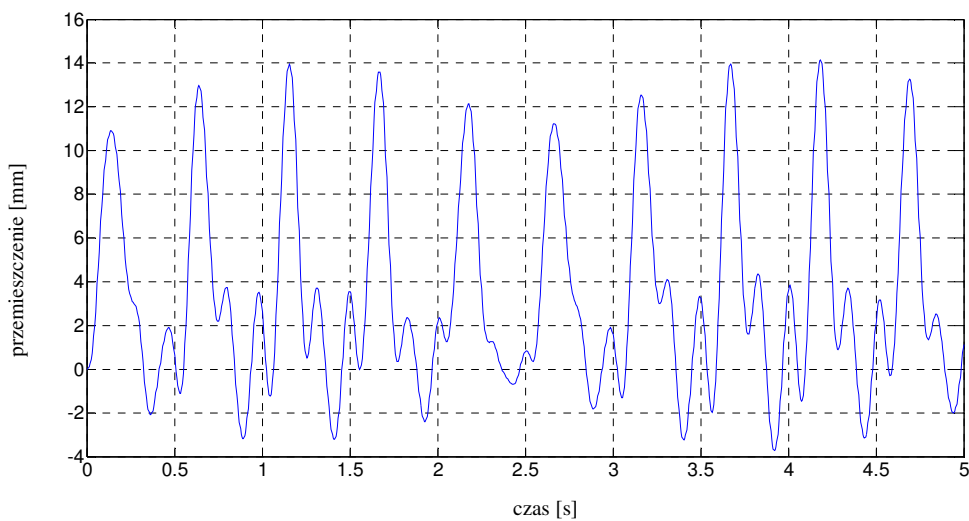
**Rys. 5.31** Przebieg czasowy przyspieszeń trybuny stalowej ze stężeniem rurowym wywołany podskokami widzów z częstotliwością 2 Hz – kierunek podłużny Y.



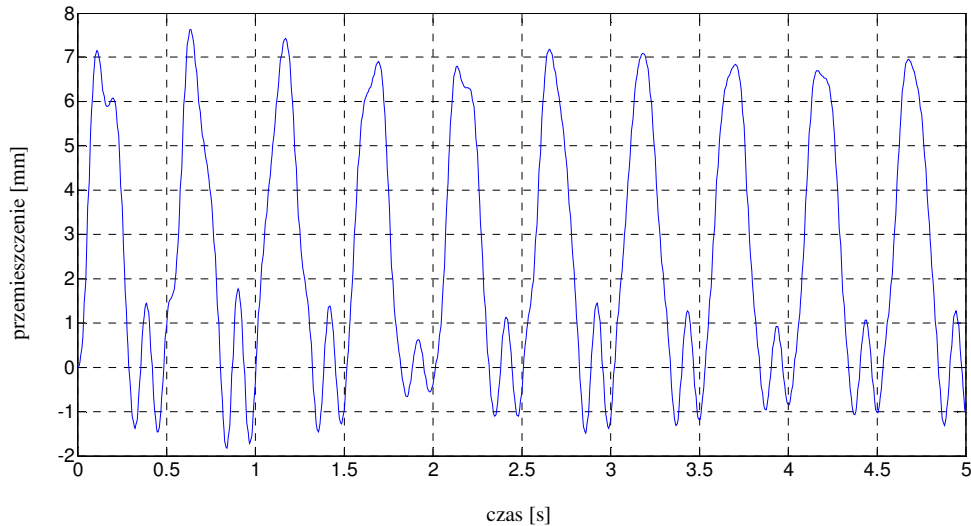
**Rys. 5.32** Przebieg czasowy przyspieszeń trybuny stalowej z tłumikiem polimerowym wywołany podskokami widzów z częstotliwością 2 Hz – kierunek podłużny Y.



**Rys. 5.33** Przebieg czasowy przemieszczeń trybuny stalowej bez stężenia wywołany podskokami widzów z częstotliwością 2 Hz – kierunek podłużny Y.



**Rys. 5.34** Przebieg czasowy przemieszczeń trybuny stalowej ze stężeniem rurowym wywołany podskokami widzów z częstotliwością 2 Hz – kierunek podłużny Y.



**Rys. 5.35** Przebieg czasowy przemieszczeń trybuny stalowej z tłumikiem polimerowym wywołany podskokami widzów z częstotliwością 2 Hz – kierunek podłużny Y.

**Tab. 5.10** Ekstremalne wartości przyspieszeń i przemieszczeń trybuny (kierunek Y) wyznaczone z analizy dynamicznej dla analizowanych modeli numerycznych.

Model trybuny	Przyspieszenie [m/s <sup>2</sup> ]	Przemieszczenie [mm]
Bez stężenia	8,914	17,28
Ze stężeniem rurowym	7,317	14,13
Z tłumikiem polimerowym	4,277	7,634

Zaobserwowane wartości przyspieszeń konstrukcji różnią się znacznie porównując różne modele numeryczne. W przypadku zastosowania tłumika polimerowego, wartość ekstremalna przyspieszeń jest dwukrotnie mniejsza w porównaniu z konstrukcją bez elementu stężącego. Porównując z kolei tą wartość z ekstremalnym przyspieszeniem uzyskanym dla konstrukcji wyposażonej w stężenie rurowe zaobserwowano jej spadek o 47%. Podobna sytuacja dotyczy przemieszczeń. Spadek ekstremalnej wartości przemieszczeń dla modelu z tłumikiem polimerowym wyniósł 56% w porównaniu z modelem trybuny bez stężenia oraz 46% w porównaniu z modelem konstrukcji ze stężeniem rurowym.

## **6 ANALIZA NUMERYCZNA WIELKOGABARYTOWEJ TYMCZASOWEJ TRYBUNY STALOWEJ**

Po przeprowadzeniu szczegółowych badań eksperymentalnych i analiz numerycznych fragmentu tymczasowej trybuny stalowej, przystąpiono do wykonania kolejnej analizy numerycznej, której głównym celem było zbadanie zachowania się wielkogabarytowej konstrukcji trybuny wyposażonej w dwa różne typy elementów stężających, poddanej oddziaływaniom dynamicznym wywołanym zachowaniem widzów.

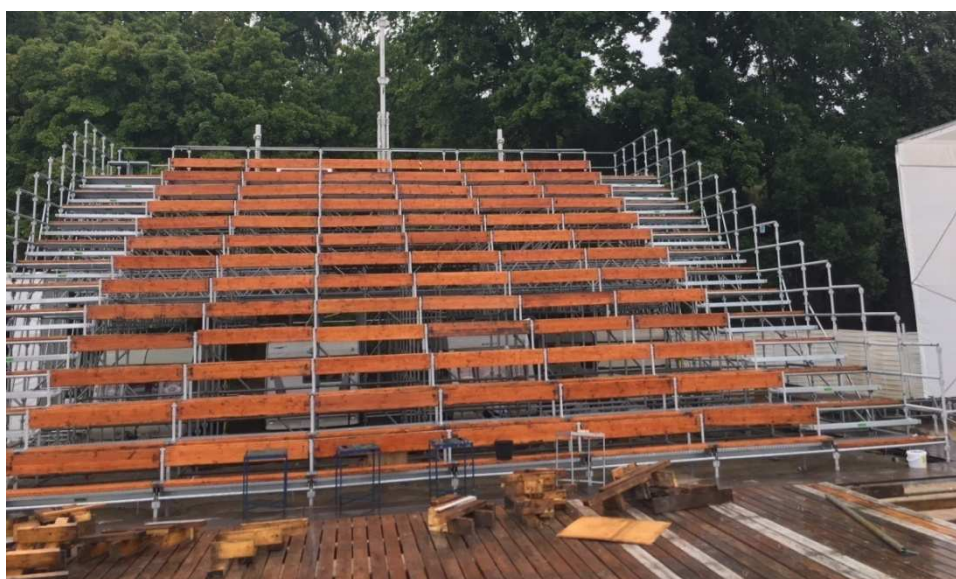
### **6.1 PRZEDMIOT ANALIZ**

Przedmiotem analizy numerycznej opisanej w niniejszym rozdziale jest wielkogabarytowa tymczasowa trybuna stalowa, wznoszona za pomocą systemu rusztowań utworzona na wzór istniejącej konstrukcji używanej od kilku lat w okresie letnim (patrz Fot. 6.1 i 6.2). Całkowita długość, szerokość i wysokość analizowanej konstrukcji wynosi odpowiednio: 16,8 m; 10,8 m i 7,5 m. Trybunę wykonano z elementów składowych, szczegółowo opisanych w podrozdziale 5.1.1. Analizowana konstrukcja jest w stanie pomieścić około 300 osób siedzących.





**Fot. 6.1** Tymczasowa trybuna stalowa (widok z boku).



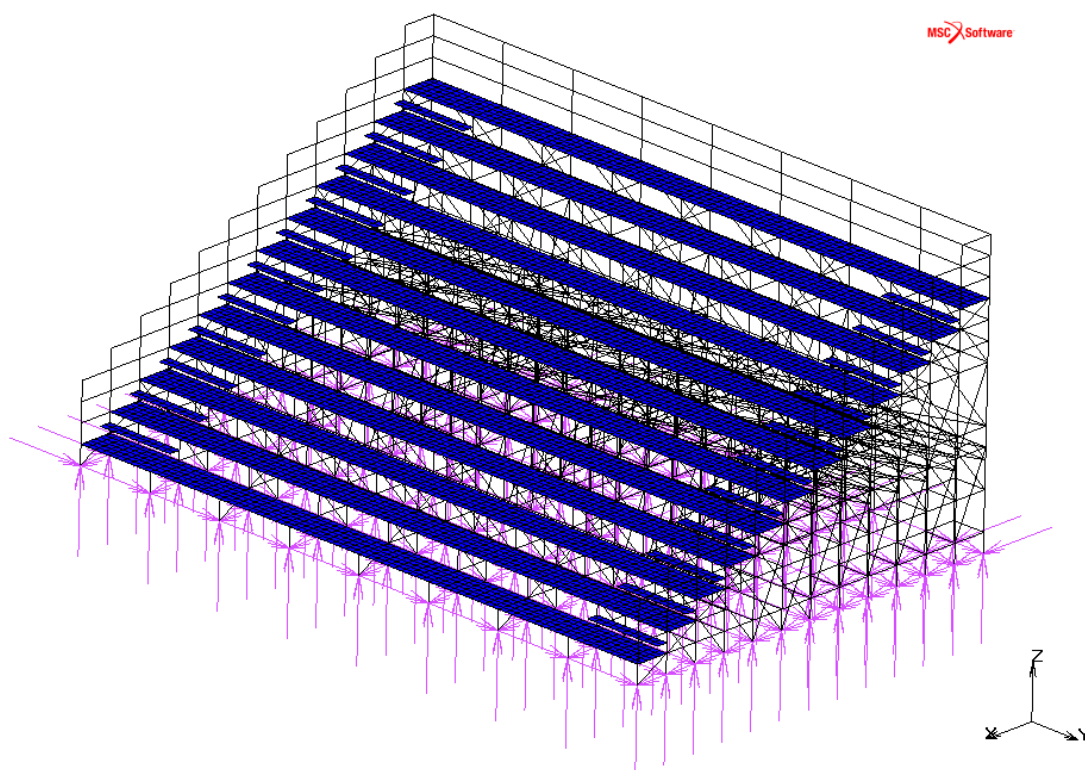
**Fot. 6.2** Tymczasowa trybuna stalowa (widok z przodu).

Dwa modele numeryczne tymczasowej trybuny stalowej wyposażonej w stężenia rurowe (zob. Rys. 6.1 i 6.2) i tłumiki polimerowe (zob. Rys. 6.3 i 6.4) utworzono w programie MSC MARC posługując się elementami:

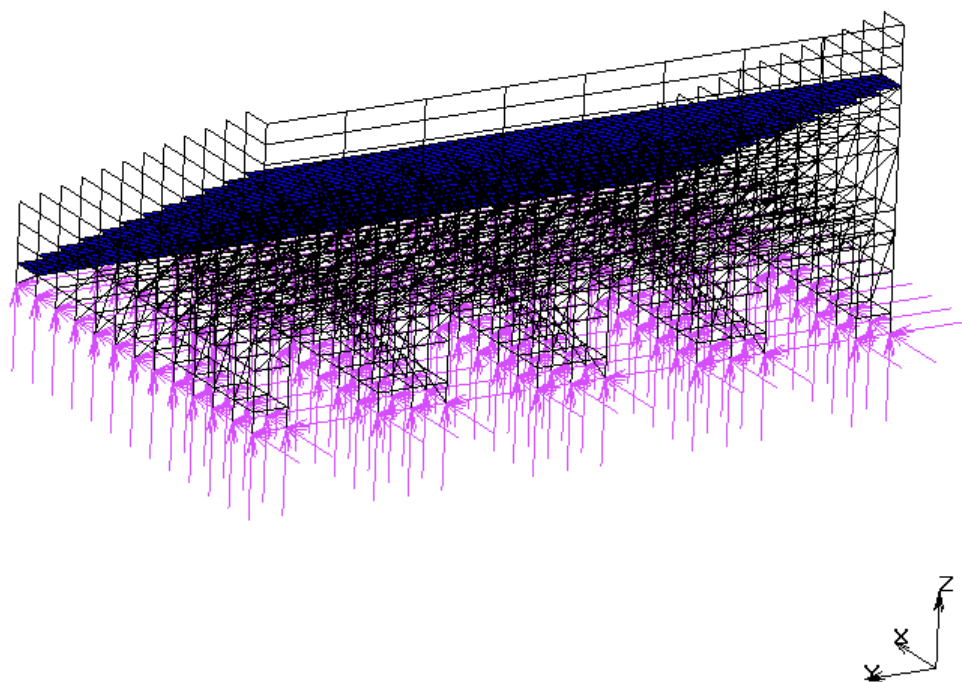
- dwuwęzłowymi belkowymi (pionowe i poziome elementy rusztowania, stężenia rurowe),
- czterowęzłowymi elementami powłokowymi (kratki pomostowe, ławki drewniane, kątowniki – elementy tłumika polimerowego),



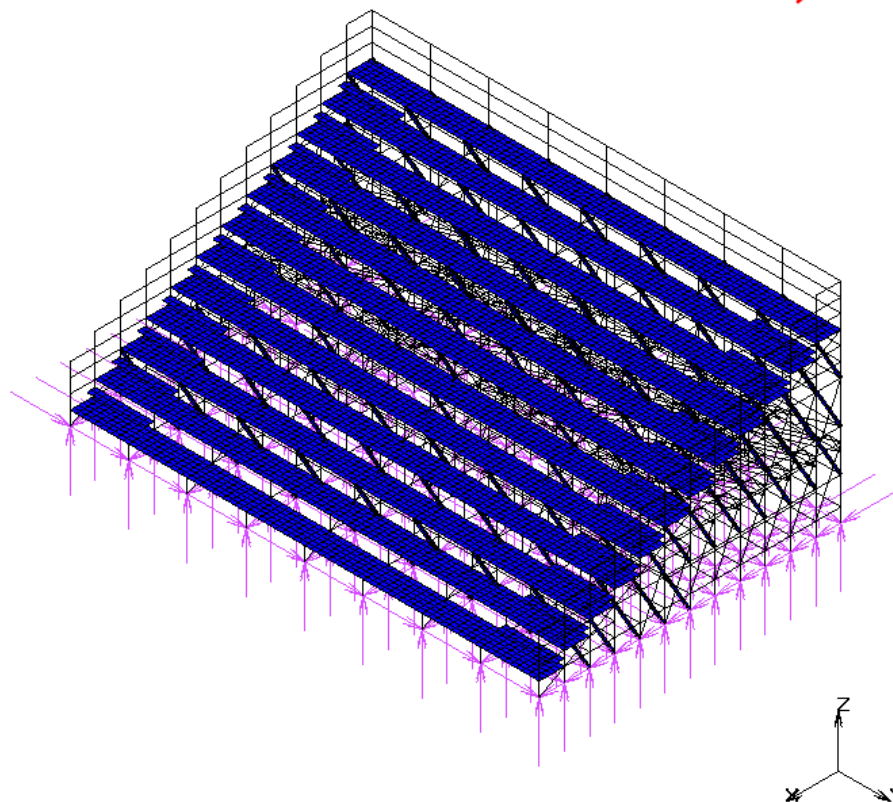
- ośmiowęzłowymi elementami bryłowymi (warstwa polimeru łącząca dwa kątowniki – elementy tłumika polimerowego).



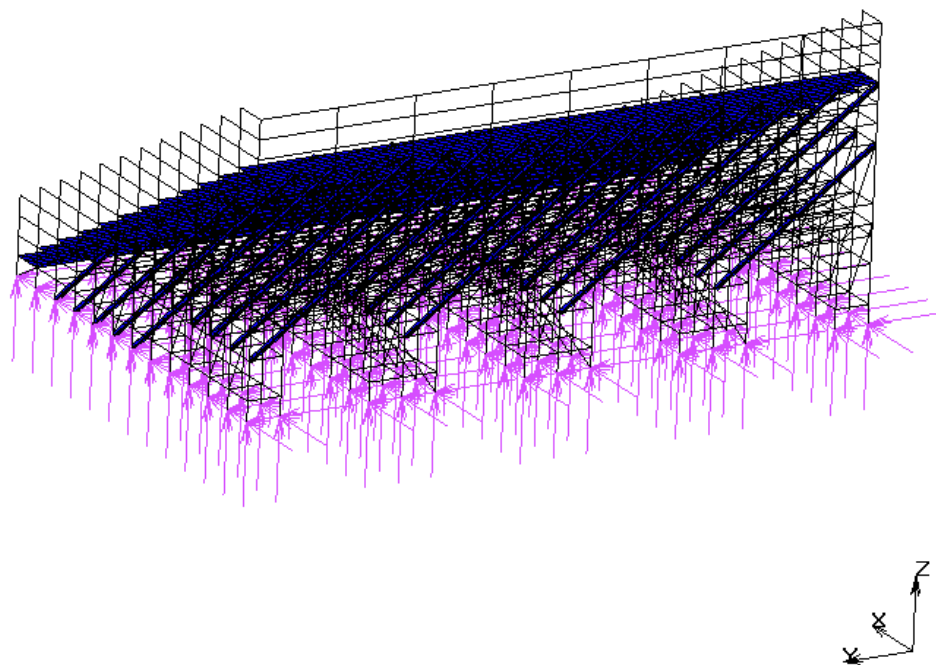
Rys. 6.1 Model numeryczny trybuny wyposażonej w stężenia rurowe (widok z boku).



Rys. 6.2 Model numeryczny trybuny wyposażonej w stężenia rurowe (widok z tyłu).



Rys. 6.3 Model numeryczny trybuny wyposażonej w tłumiki polimerowe (widok z boku).



Rys. 6.4 Model numeryczny trybuny wyposażonej w tłumiki polimerowe (widok z tyłu).

Gotowy model numeryczny konstrukcji wyposażonej w stężenia rurowe składał się z 25356 elementów belkowych oraz 5760 elementów powłokowych, podczas gdy model trybuny z tłumikami polimerowymi zbudowany został z 22516 elementów belkowych, 15680 elementów powłokowych oraz 2232 elementów bryłowych. Całkowita liczba węzłów wyniosła 28443 w przypadku pierwszego modelu oraz 41066 w przypadku drugiego. W modelu zadeklarowano odpowiednie właściwości mechaniczne poszczególnych materiałów zgodnie z Tabelą 6.1. Dodatkowo, parametry materiałowe analizowanego polimeru zestawiono w Tab. 3.1. Warstwę polimeru zdefiniowano w programie MSC Marc jako materiał Mooneya-Rivlina, o parametrach przedstawionych w Tab. 3.2, które zweryfikowano na podstawie analiz dla aluminiowych belek wspornikowych opisanych w Rozdziale 4.

**Tab. 6.1** Zestawienie właściwości mechanicznych poszczególnych materiałów.

Element konstrukcji	Materiał	Gęstość [kg/m <sup>3</sup> ]	Moduł sprężystości [GPa]
<ul style="list-style-type: none"> <li>• pionowe i poziome elementy rusztowania,</li> <li>• kraty pomostowe,</li> <li>• stężenia rurowe,</li> <li>• kątowniki (elementy tłumika polimerowego).</li> </ul>	stal	7850	210
<ul style="list-style-type: none"> <li>• ławki</li> </ul>	drewno	400	11
<ul style="list-style-type: none"> <li>• warstwa polimeru</li> </ul>	polimer	1000	6x10 <sup>-3</sup>

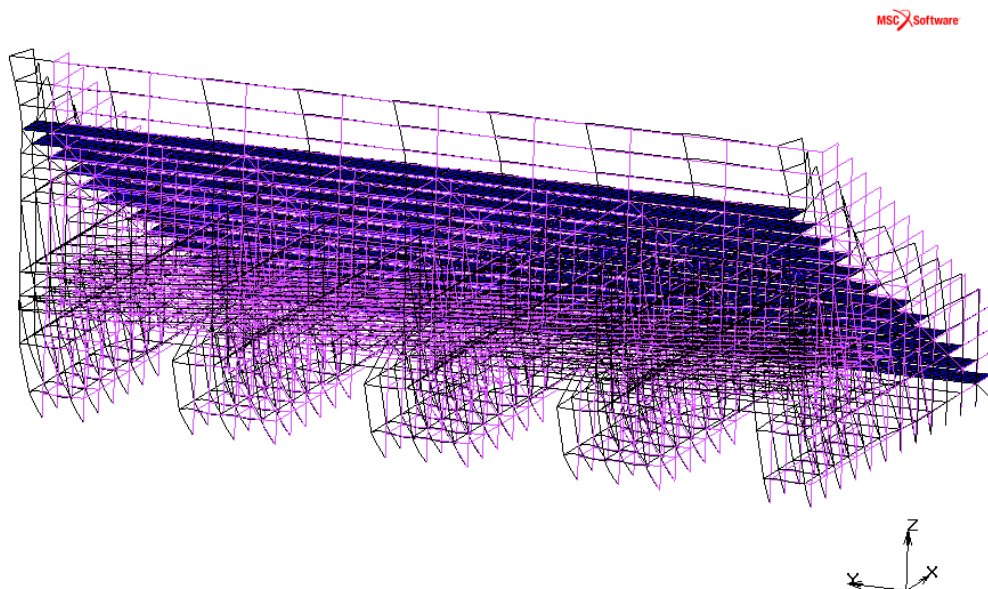
## 6.2 ANALIZA MODALNA

W pierwszym etapie wykonano analizę modalną w celu weryfikacji dokładności utworzonego modelu numerycznego tymczasowej trybuny stalowej wyposażonej w stężenia rurowe oraz tłumiki polimerowe. Głównym celem analizy było wyznaczenie postaci drgań własnych oraz odpowiadających im wartości częstotliwości drgań.

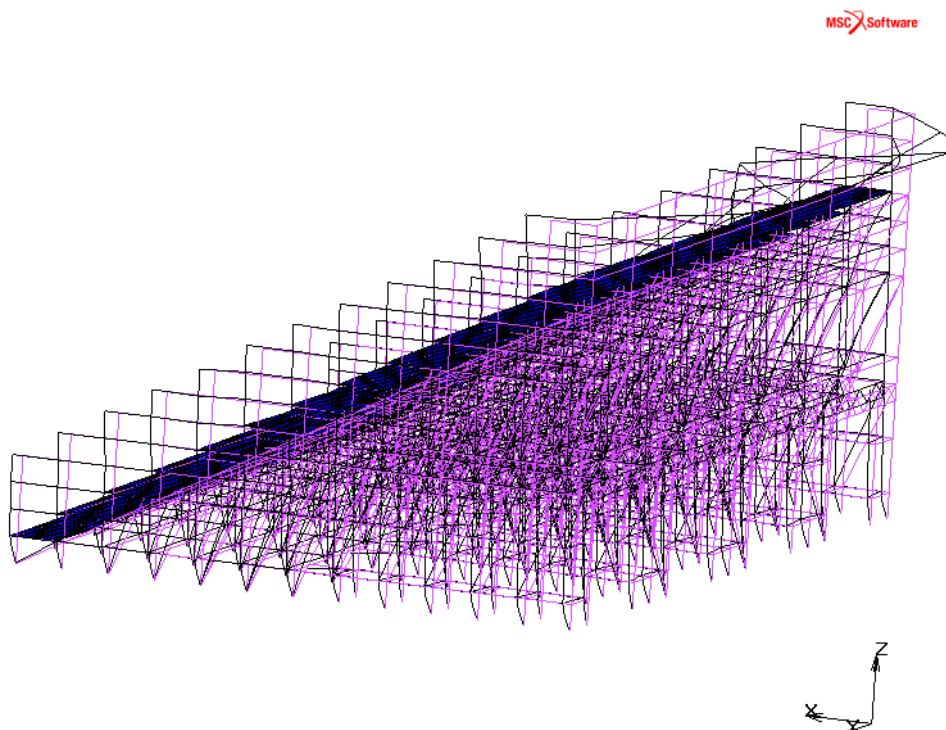
### 6.2.1 WYNIKI DLA TRYBUNY ZE STĘŻENIAMI RUROWYMI

Na Rys. 6.5 i 6.6 przedstawiono dwie pierwsze postaci drgań własnych (poprzeczną X i podłużną Y) jako wynik analizy dla tymczasowej trybuny stalowej odpowiednio pustej i obciążonej widzami przy pełnym wypełnieniu (przyjmując

szacunkową masę jednej osoby równą 100 kg), wyposażonej w stężenia rurowe. Jednocześnie, w Tab. 6.2 zestawiono wszystkie otrzymane wartości częstotliwości drgań.



Rys. 6.5 Pierwsza podłużna postać drgań własnych pustej trybuny ze stężeniami rurowymi.



Rys. 6.6 Pierwsza poprzeczna postać drgań własnych obciążonej trybuny ze stężeniami rurowymi.

**Tab. 6.2** Częstotliwości drgań podłużnych i poprzecznych trybuny stalowej ze stężeniami rurowymi (pustej i obciążonej).

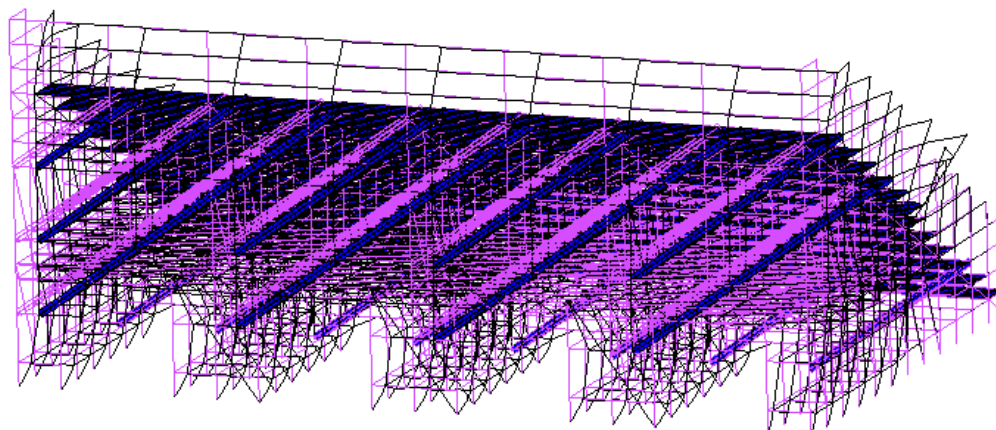
Postać drgań własnych	Częstotliwość drgań [Hz]	
	Pusta trybuna	Obciążona trybuna
Podłużna Y (lewo-prawo)	6,43	4,00
Poprzeczna X (przód-tył)	12,82	7,48

Uzyskane wyniki pokazują, że masa widzów znacznie redukuje wartości częstotliwości drgań tymczasowej trybuny stalowej. W przypadku podłużnej i poprzecznej postaci drgań spadek ten wyniósł odpowiednio 38 i 42%. Uzyskane wyniki pokazują, iż wartości częstotliwości otrzymane dla analizowanej konstrukcji są zbliżone z wartościami dla tego typu rzeczywistych obiektów (Littler 1996).

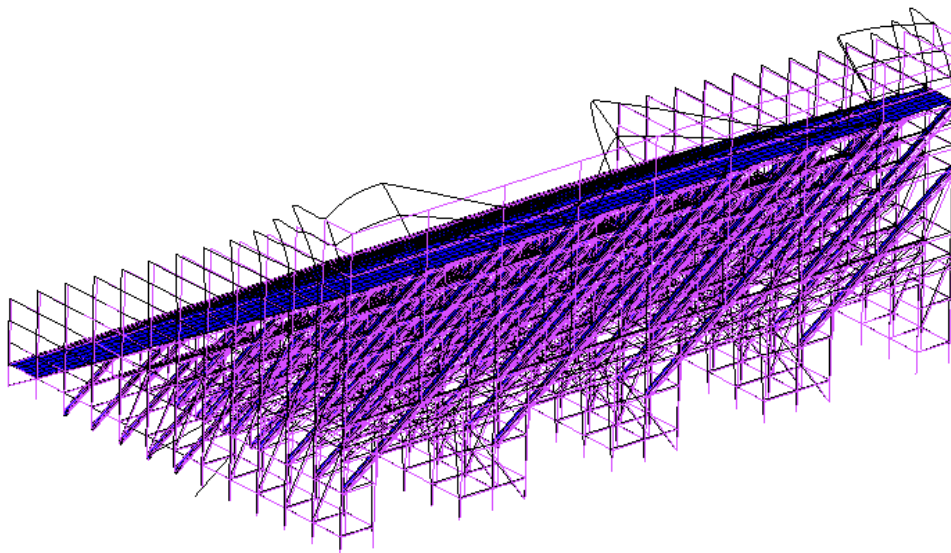
### 6.2.2 WYNIKI DLA TRYBUNY Z TŁUMIKAMI POLIMEROWYMI

Na Rys. 6.7 i 6.8 przedstawiono dwie pierwsze postacie drgań własnych (poprzeczną X i podłużną Y) jako wynik analizy modalnej dla tymczasowej trybuny stalowej odpowiednio pustej i obciążonej, wyposażonej w tłumiki polimerowe. Jednocześnie, w Tab. 6.3 zestawiono wszystkie otrzymane wartości częstotliwości drgań.





Rys. 6.7 Pierwsza podłużna postać drgań własnych pustej trybuny z tłumikami polimerowymi.



Rys. 6.8 Pierwsza poprzeczna postać drgań własnych obciążonej trybuny z tłumikami polimerowymi.

**Tab. 6.3** Częstotliwości drgań podłużnych i poprzecznych trybuny stalowej z tłumikami polimerowymi (pustej i obciążonej).

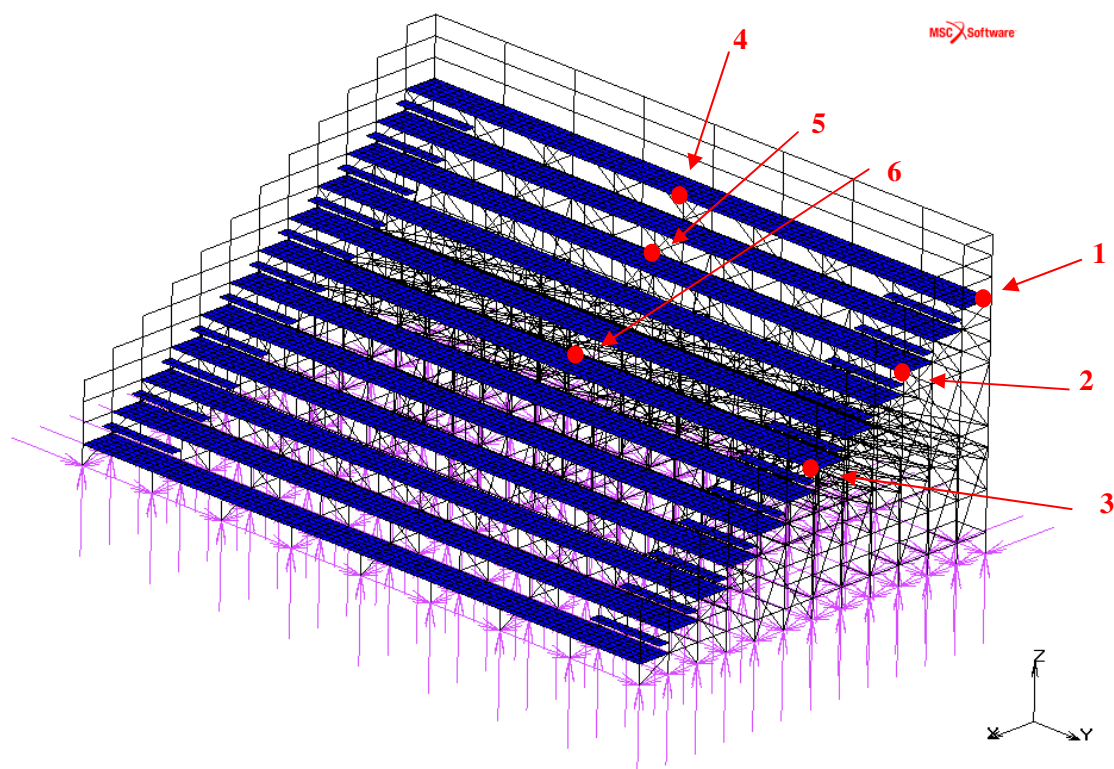
Postać drgań własnych	Częstotliwość drgań [Hz]	
	Pusta trybuna	Obciążona trybuna
Podłużna Y (lewo-prawo)	7,00	4,55
Poprzeczna X (przód-tył)	13,78	8,49

Wyniki przedstawione w Tab. 6.3 potwierdzają, że masa widzów znacznie redukuje wartości częstotliwości drgań tymczasowej trybuny stalowej wyposażonej w tłumiki polimerowe. W przypadku podłużnej i poprzecznej postaci drgań spadek ten wyniósł odpowiednio 30 i 39%. Porównując Tab. 6.3 z Tab. 6.2 można stwierdzić, że otrzymane wartości częstotliwości drgań trybuny tymczasowej wyposażonej w dwa różne rodzaje elementów stężających, różnią się od siebie nieznacznie. W przypadku podłużnej postaci drgań trybuny tymczasowej różnica ta wyniosła odpowiednio 8 i 9%, odpowiednio dla pustej i obciążonej konstrukcji. Natomiast w przypadku poprzecznej postaci drgań pustej i obciążonej trybuny tymczasowej różnica ta była nieco większa i wyniosła odpowiednio 17 i 21%.

### 6.3 ANALIZA DYNAMICZNA

Kolejny etap rozważań poświęcono analizie dynamicznej, której głównym celem było wyznaczenie maksymalnych wartości przyspieszeń oraz przemieszczeń konstrukcji trybuny wyposażonej w dwa różne rodzaje elementów stężających (rurowe i tłumiki polimerowe) poddanej oddziaływaniom dynamicznym w postaci synchronicznych i powtarzających się podskoków widzów.

Podczas analizy numerycznej, obciążenie przyłożono do konstrukcji na kierunku pionowym za pomocą sił skupionych opisanych szeregiem Fouriera zgodnie z równaniem (2.1) przy założeniu typowej częstotliwości podskoków równej 2 Hz. Siły te przyłożono w miejscach przeznaczonych dla widzów. Dodatkowo, 6% wyznaczonego obciążenia przyłożono na kierunku poziomym (podłużnym Y) zgodnie z normą PN-EN 1991-2: 2003. Całkowity czas przeprowadzonej analizy dynamicznej wyniósł 5 s, zaś krok czasowy równy był 0,005 s. W wyniku przeprowadzonej analizy dynamicznej otrzymano przebiegi czasowe przyspieszeń i przemieszczeń, które odczytano w sześciu węzłach referencyjnych (patrz Rys. 6.9).

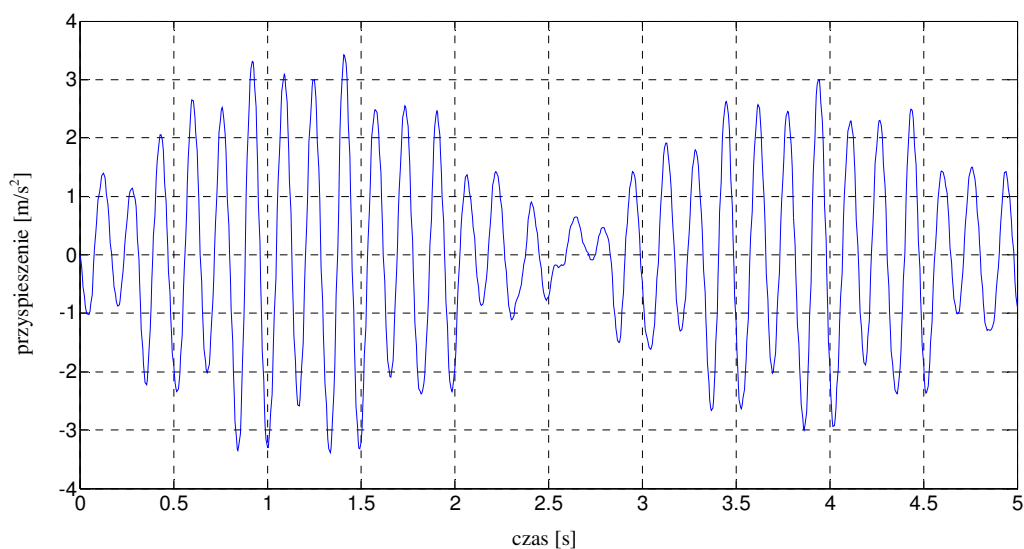


Rys. 6.9 Rozmieszczenie węzłów referencyjnych.

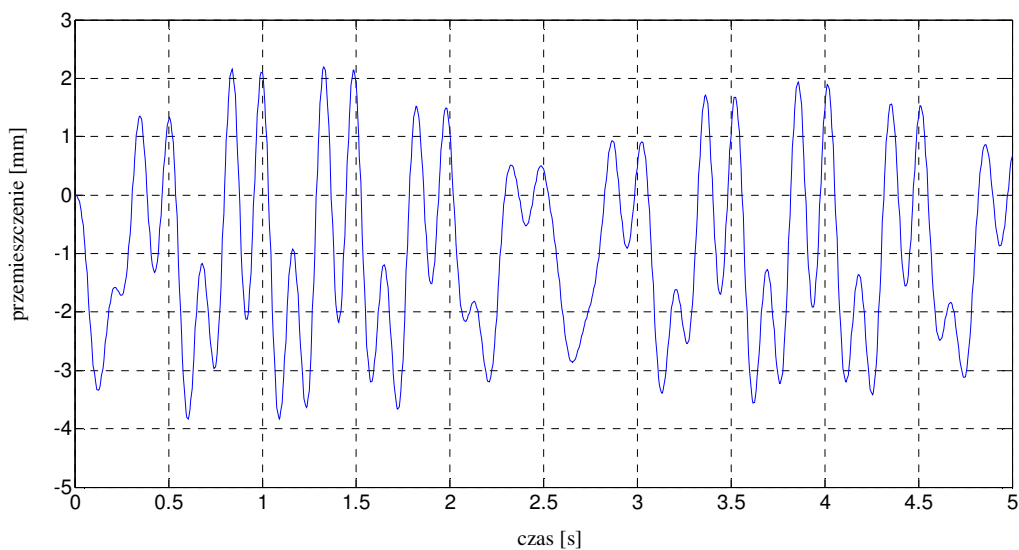
### 6.3.1 WYNIKI DLA TRYBUNY ZE STĘŻENIAMI RUROWYMI

Na Rys. 6.10–6.21 przedstawiono przebiegi czasowe przyspieszeń i przemieszczeń w rozpatrywanych węzłach konstrukcji tymczasowej trybuny stalowej wyposażonej w stężenia rurowe (kierunek podłużny Y). Jednocześnie wartości ekstremalnych przyspieszeń i przemieszczeń w analizowanych węzłach zestawiono w Tab. 6.4.

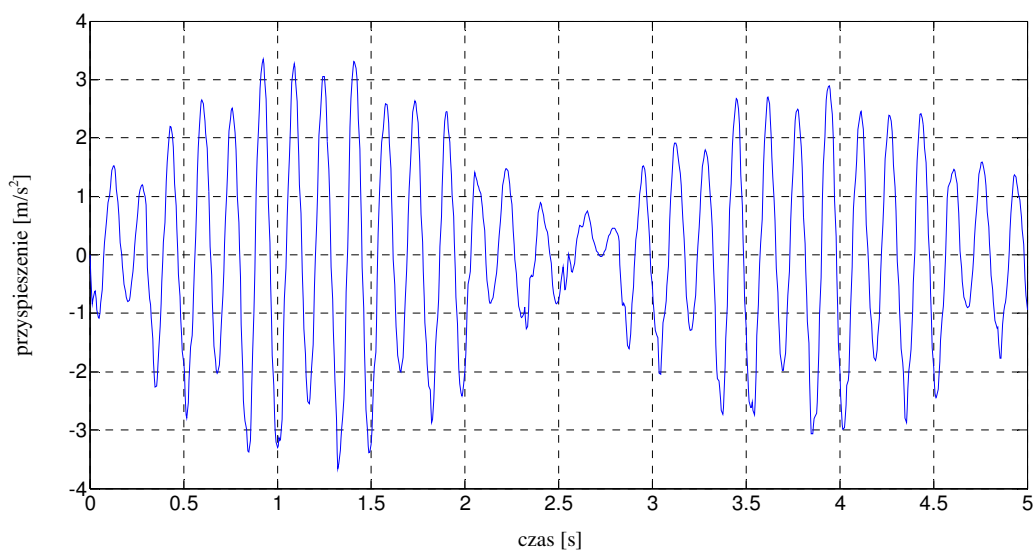




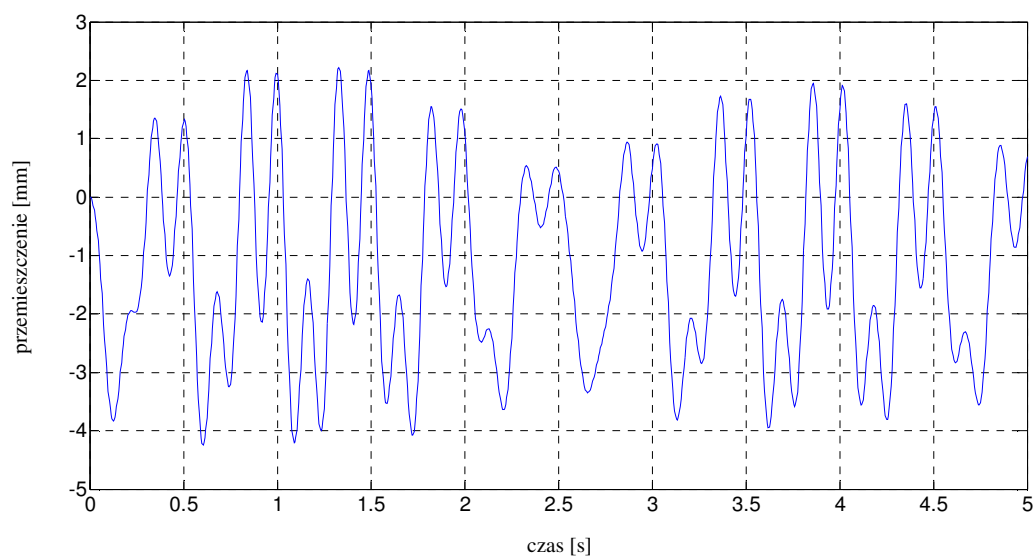
**Rys. 6.10** Przebieg czasowy przyspieszeń trybuny stalowej ze stężeniami rurowymi wywołany podskokami widzów z częstotliwością 2 Hz – kierunek podłużny Y (węzeł 1).



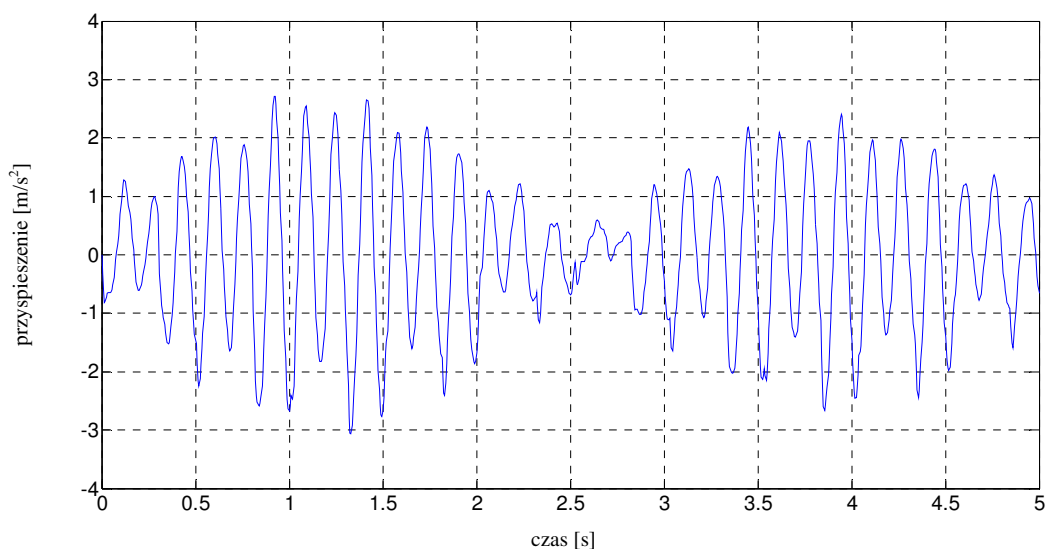
**Rys. 6.11** Przebieg czasowy przemieszczeń trybuny stalowej ze stężeniami rurowymi wywołany podskokami widzów z częstotliwością 2 Hz – kierunek podłużny Y (węzeł 1).



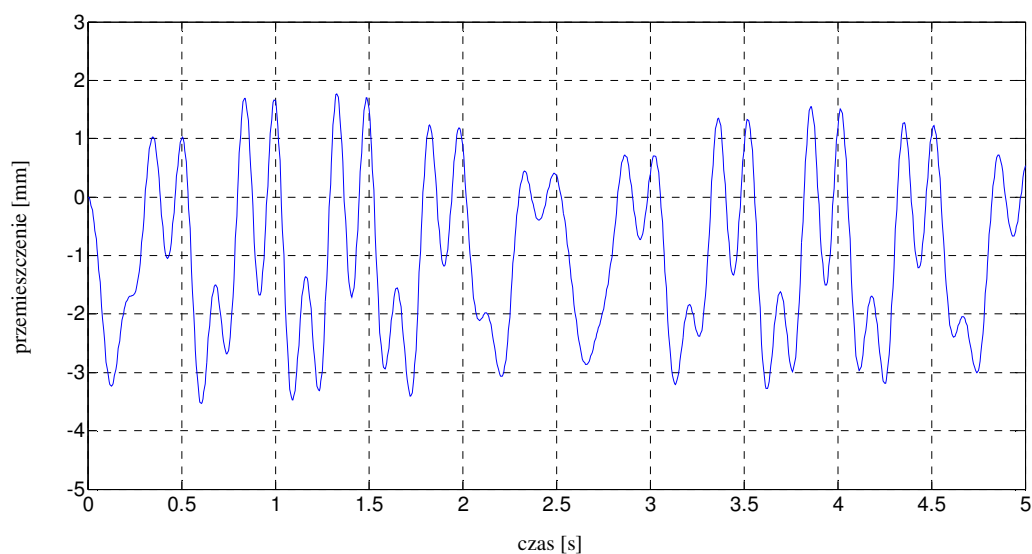
**Rys. 6.12** Przebieg czasowy przyspieszeń trybuny stalowej ze stężeniami rurowymi wywołany podskokami widzów z częstotliwością 2 Hz – kierunek podłużny Y (węzeł 2).



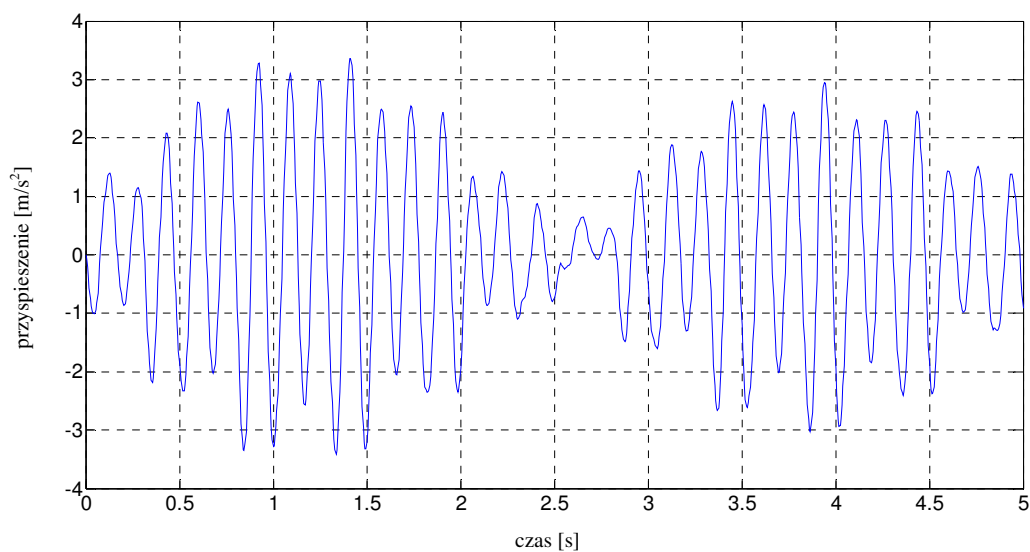
**Rys. 6.13** Przebieg czasowy przemieszczeń trybuny stalowej ze stężeniami rurowymi wywołany podskokami widzów z częstotliwością 2 Hz – kierunek podłużny Y (węzeł 2).



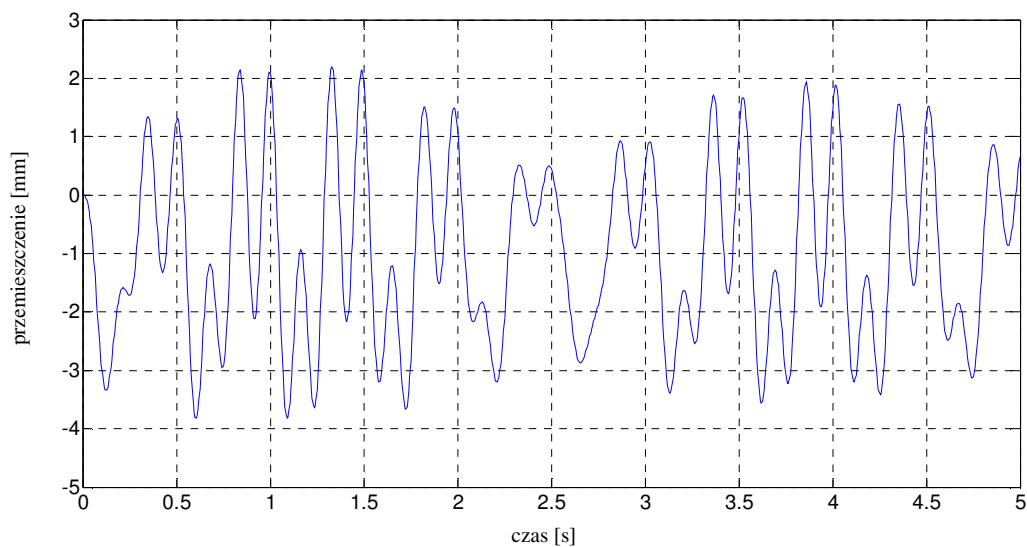
**Rys. 6.14** Przebieg czasowy przyspieszeń trybuny stalowej ze stężeniami rurowymi wywołany podskokami widzów z częstotliwością 2 Hz – kierunek podłużny Y (węzeł 3).



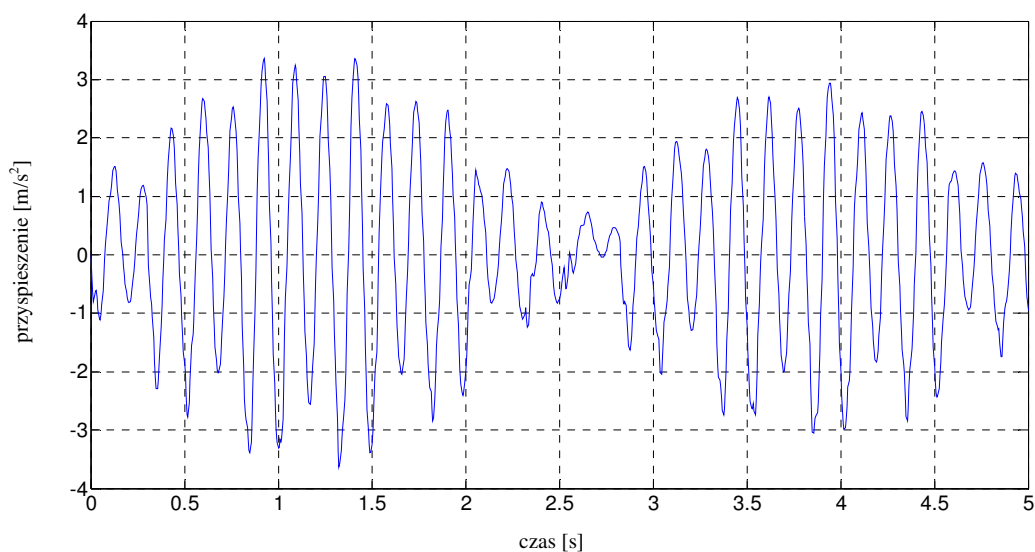
**Rys. 6.15** Przebieg czasowy przemieszczeń trybuny stalowej ze stężeniami rurowymi wywołany podskokami widzów z częstotliwością 2 Hz – kierunek podłużny Y (węzeł 3).



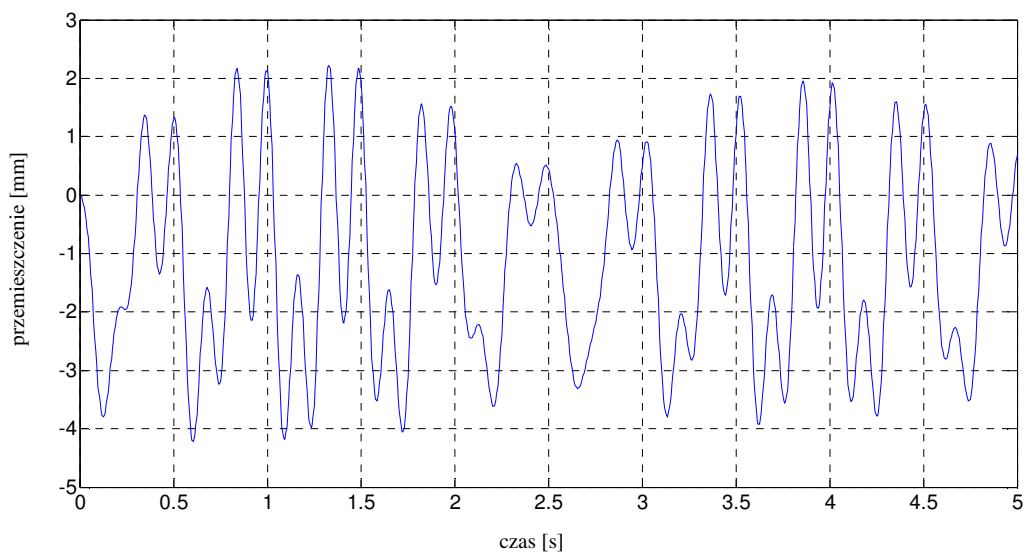
**Rys. 6.16** Przebieg czasowy przyspieszeń trybuny stalowej ze stężeniami rurowymi wywołany podskokami widzów z częstotliwością 2 Hz – kierunek podłużny Y (węzeł 4).



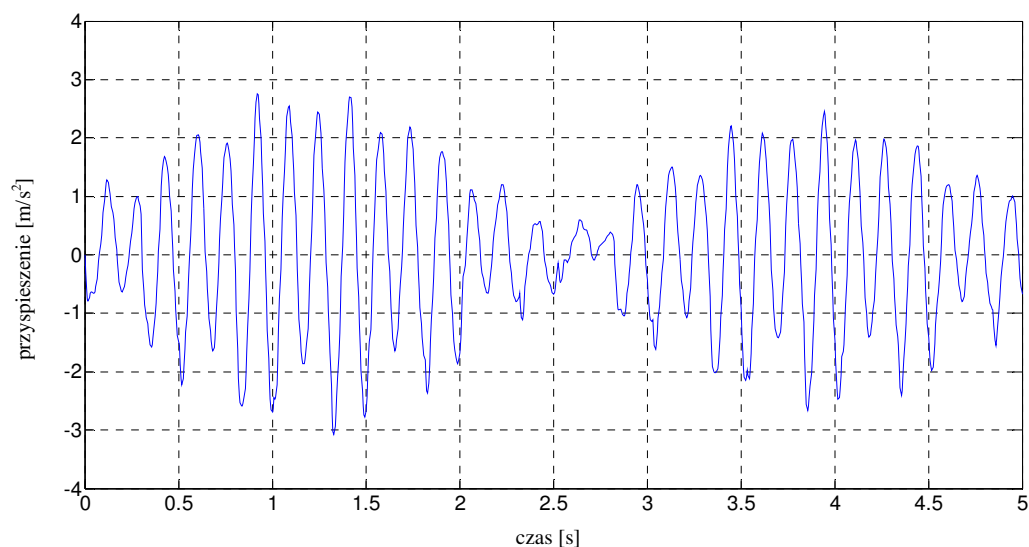
**Rys. 6.17** Przebieg czasowy przemieszczeń trybuny stalowej ze stężeniami rurowymi wywołany podskokami widzów z częstotliwością 2 Hz – kierunek podłużny Y (węzeł 4).



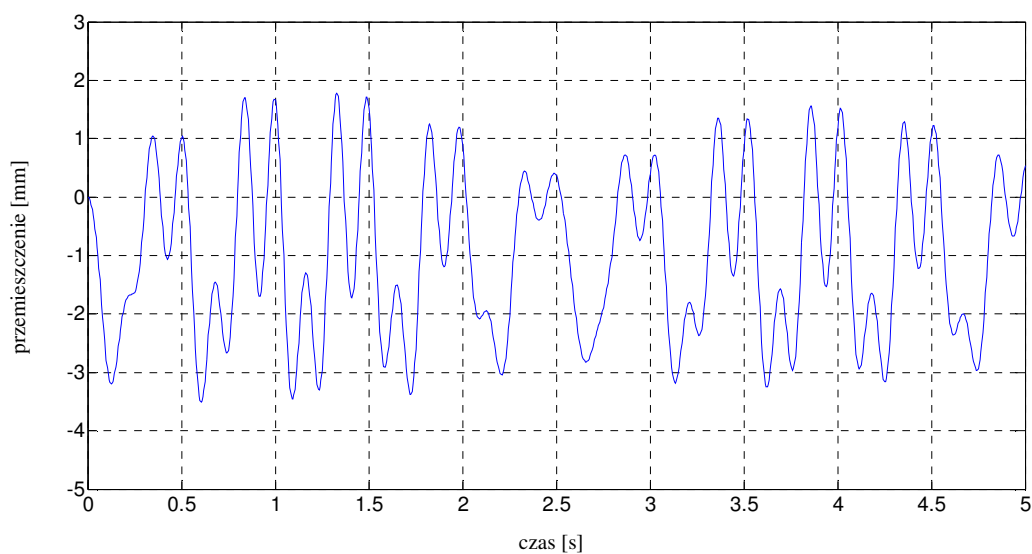
**Rys. 6.18** Przebieg czasowy przyspieszeń trybuny stalowej ze stężeniami rurowymi wywołany podskokami widzów z częstotliwością 2 Hz – kierunek podłużny Y (węzeł 5).



**Rys. 6.19** Przebieg czasowy przemieszczeń trybuny stalowej ze stężeniami rurowymi wywołany podskokami widzów z częstotliwością 2 Hz – kierunek podłużny Y (węzeł 5).



**Rys. 6.20** Przebieg czasowy przyspieszeń trybuny stalowej ze stężeniami rurowymi wywołany podskokami widzów z częstotliwością 2 Hz – kierunek podłużny Y (węzeł 6).



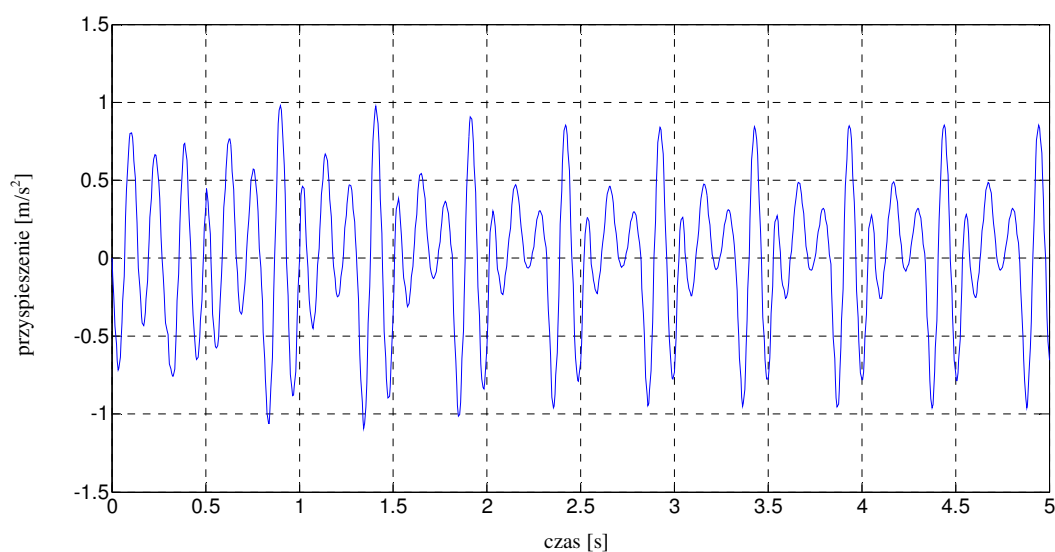
**Rys. 6.21** Przebieg czasowy przemieszczeń trybuny stalowej ze stężeniami rurowymi wywołany podskokami widzów z częstotliwością 2 Hz – kierunek podłużny Y (węzeł 6).

**Tab. 6.4** Ekstremalne wartości przyspieszeń i przemieszczeń (kierunek Y) w węzłach referencyjnych trybuny ze stężeniami rurowymi.

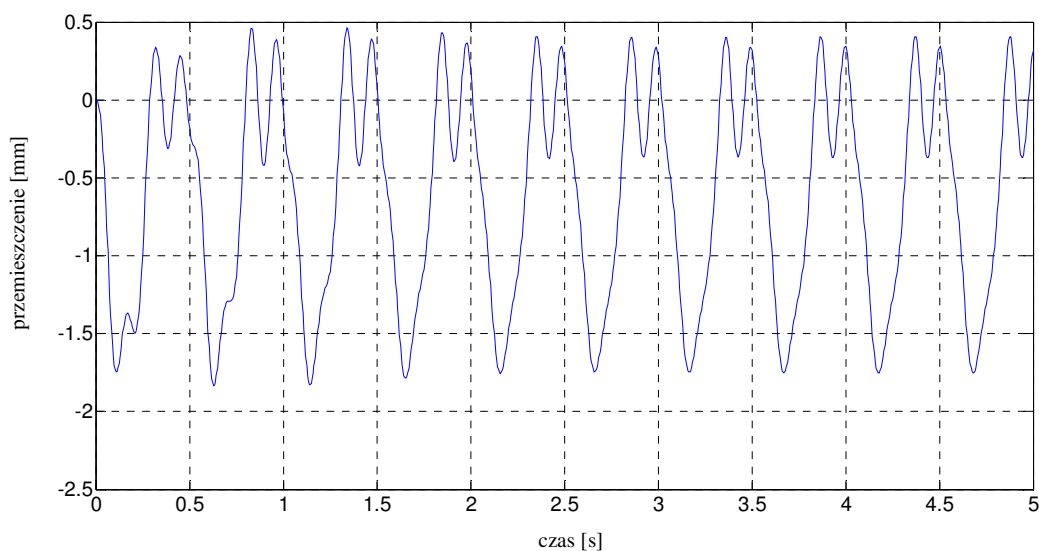
Nr węzła referencyjnego	Przyspieszenie [m/s <sup>2</sup> ]	Przemieszczenie [mm]
1	3,42	3,83
2	3,65	4,24
3	3,07	3,53
4	3,41	3,82
5	3,63	4,22
6	3,07	3,51

### 6.3.2 WYNIKI DLA TRYBUNY Z TŁUMIKAMI POLIMEROWYMI

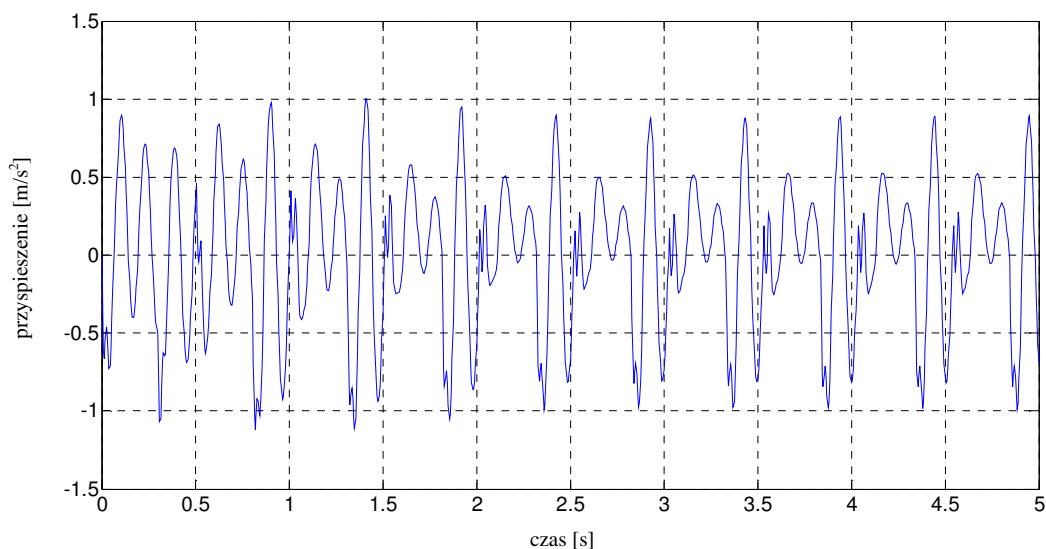
Na Rys. 6.22–6.33 przedstawiono przebiegi czasowe przyspieszeń i przemieszczeń w rozpatrywanych węzłach konstrukcji tymczasowej trybuny stalowej wyposażonej w tłumiki polimerowe (kierunek podłużny Y). Jednocześnie wartości ekstremalnych przyspieszeń i przemieszczeń w analizowanych węzłach zestawiono w Tab. 6.5.



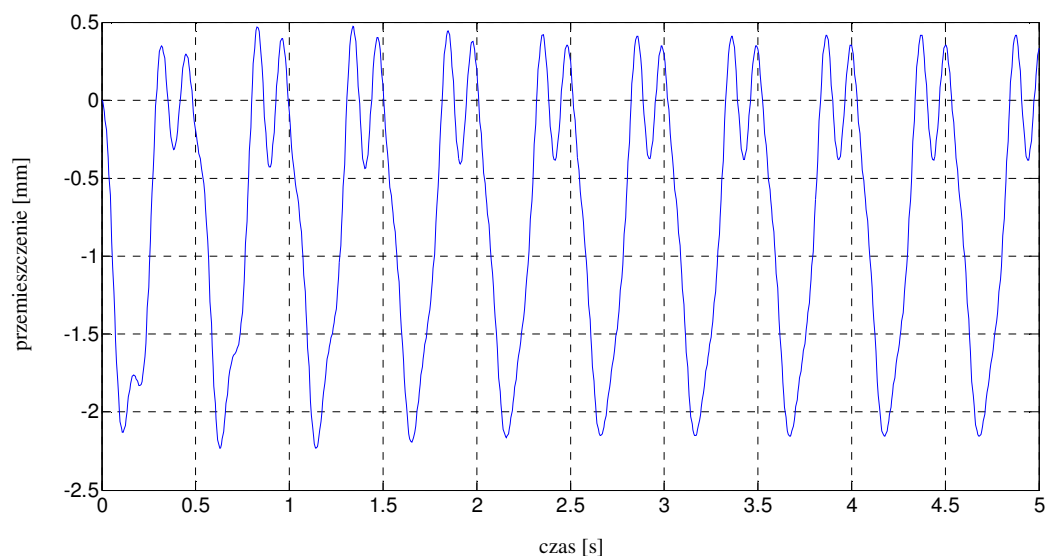
**Rys. 6.22** Przebieg czasowy przyspieszeń trybuny stalowej ze stężeniami rurowymi wywołany podskokami widzów z częstotliwością 2 Hz – kierunek podłużny Y (węzeł 1).



**Rys. 6.23** Przebieg czasowy przemieszczeń trybuny stalowej ze stężeniami rurowymi wywołany podskokami widzów z częstotliwością 2 Hz – kierunek podłużny Y (węzeł 1).

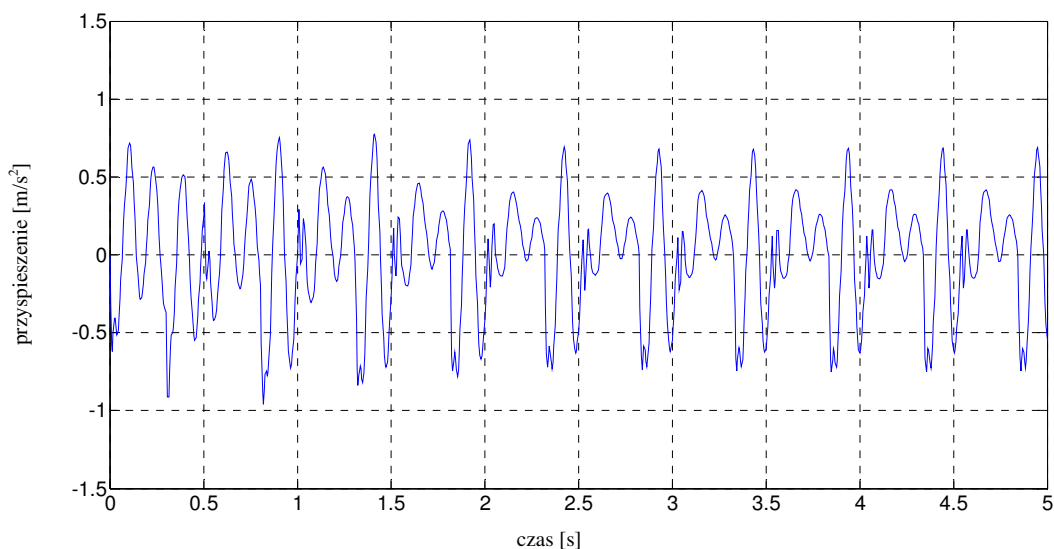


**Rys. 6.24** Przebieg czasowy przyspieszeń trybuny stalowej ze stężeniami rurowymi wywołany podskokami widzów z częstotliwością 2 Hz – kierunek podłużny Y (węzeł 2).

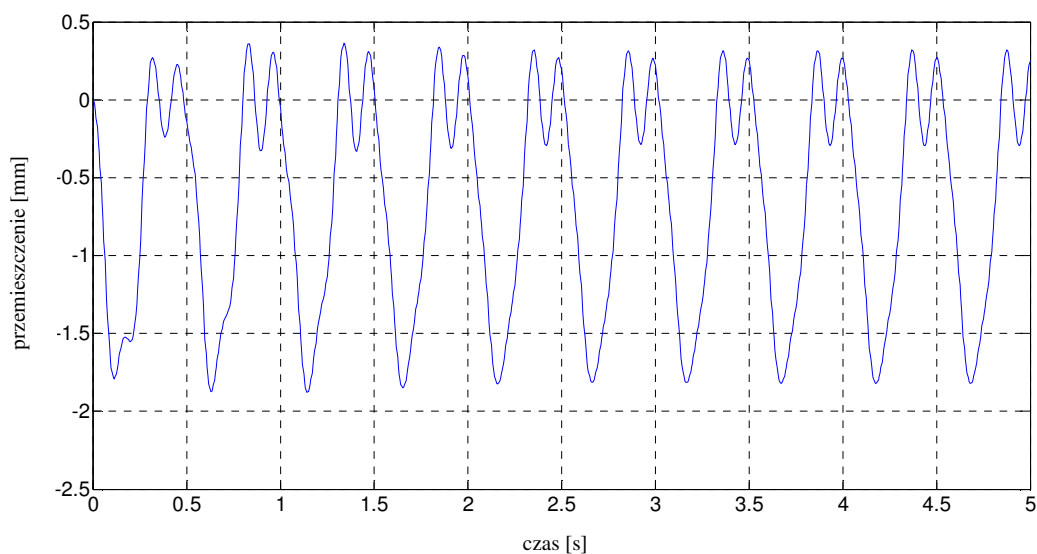


**Rys. 6.25** Przebieg czasowy przemieszczeń trybuny stalowej ze stężeniami rurowymi wywołany podskokami widzów z częstotliwością 2 Hz – kierunek podłużny Y (węzeł 2).

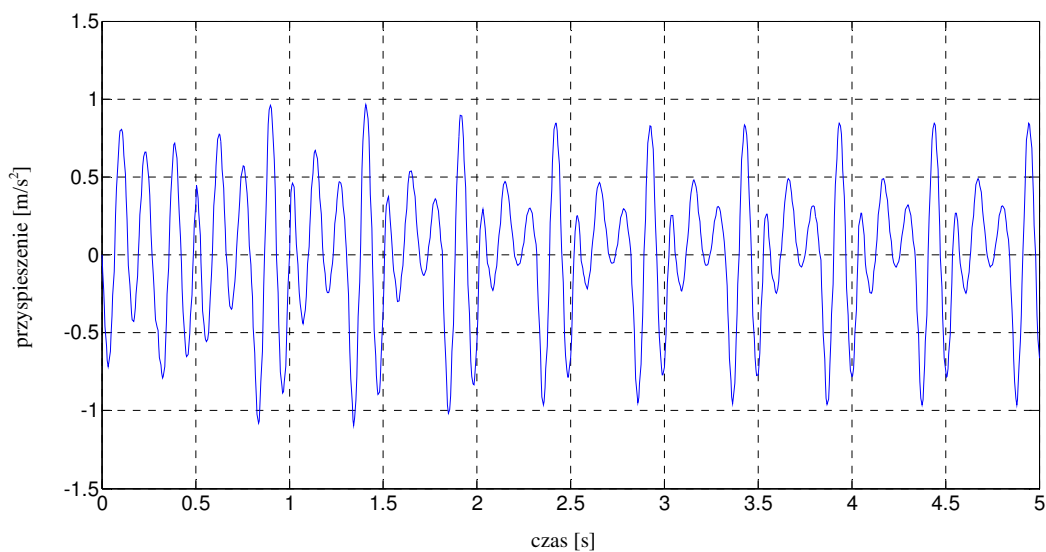




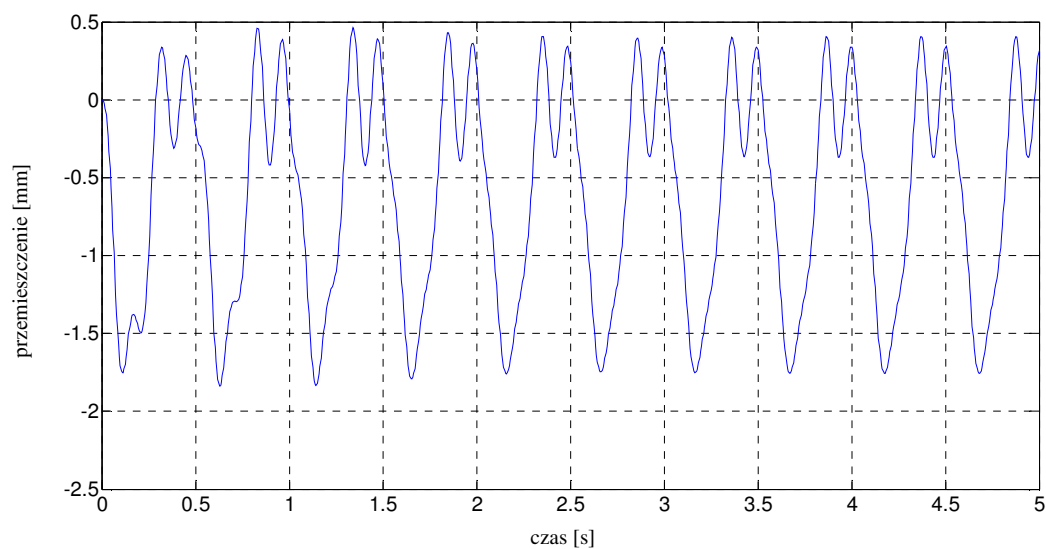
**Rys. 6.26** Przebieg czasowy przyspieszeń trybuny stalowej ze stężeniami rurowymi wywołany podskokami widzów z częstotliwością 2 Hz – kierunek podłużny Y (węzeł 3).



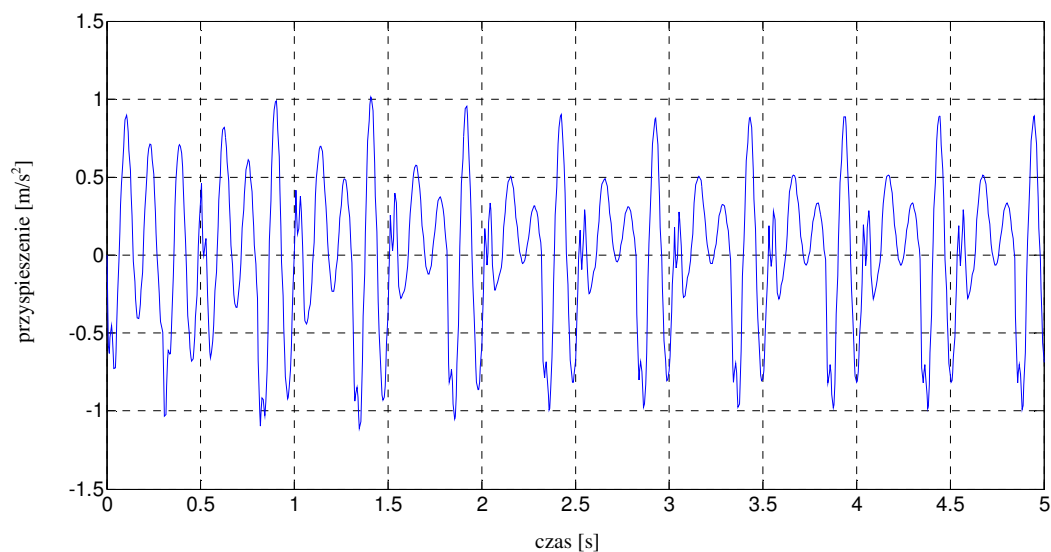
**Rys. 6.27** Przebieg czasowy przemieszczeń trybuny stalowej ze stężeniami rurowymi wywołany podskokami widzów z częstotliwością 2 Hz – kierunek podłużny Y (węzeł 3).



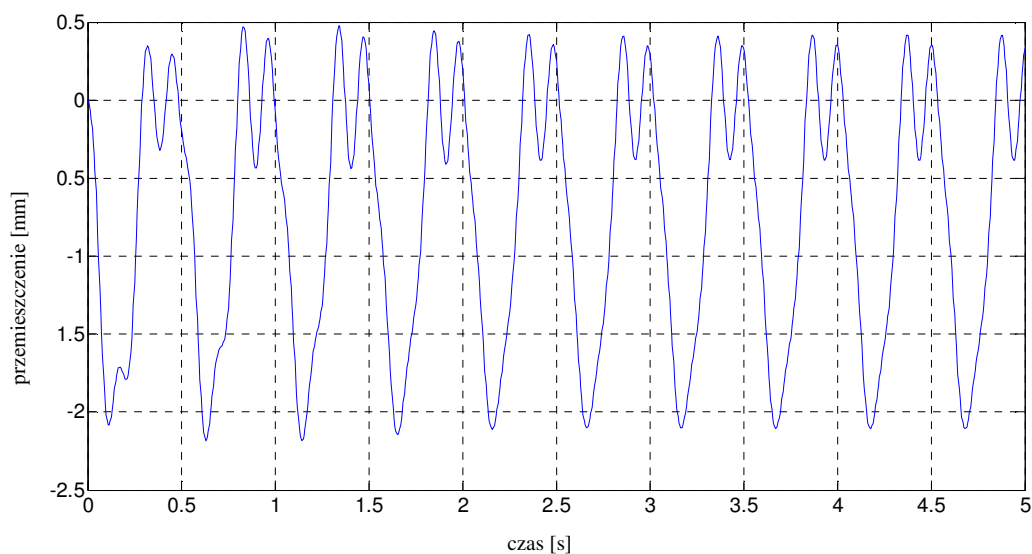
**Rys. 6.28** Przebieg czasowy przyspieszeń trybuny stalowej ze stężeniami rurowymi wywołany podskokami widzów z częstotliwością 2 Hz – kierunek podłużny Y (węzeł 4).



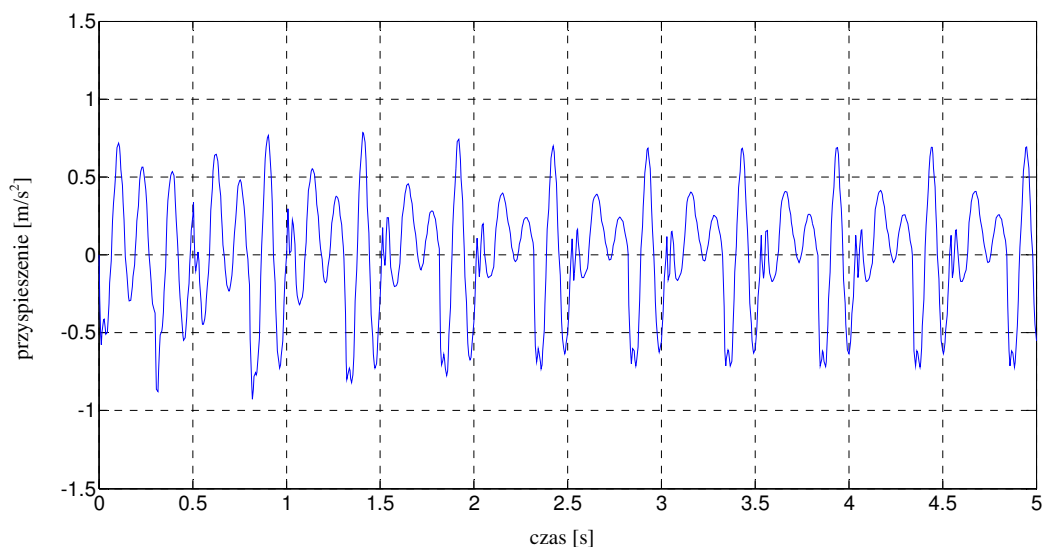
**Rys. 6.29** Przebieg czasowy przemieszczeń trybuny stalowej ze stężeniami rurowymi wywołany podskokami widzów z częstotliwością 2 Hz – kierunek podłużny Y (węzeł 4).



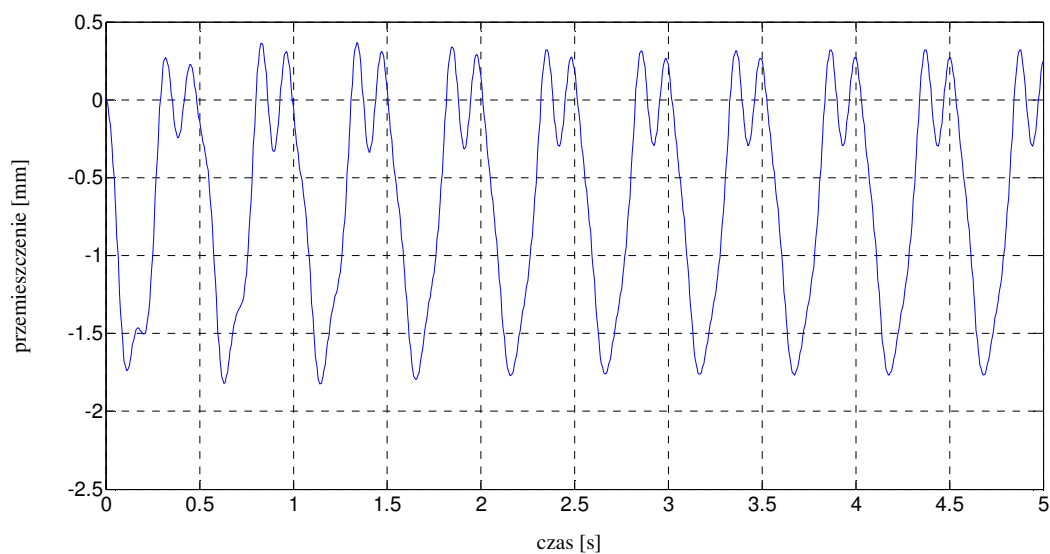
**Rys. 6.30** Przebieg czasowy przyspieszeń trybuny stalowej ze stężeniami rurowymi wywołany podskokami widzów z częstotliwością 2 Hz – kierunek podłużny Y (węzeł 5).



**Rys. 6.31** Przebieg czasowy przemieszczeń trybuny stalowej ze stężeniami rurowymi wywołany podskokami widzów z częstotliwością 2 Hz – kierunek podłużny Y (węzeł 5).



**Rys. 6.32** Przebieg czasowy przyspieszeń trybuny stalowej ze stężeniami rurowymi wywołany podskokami widzów z częstotliwością 2 Hz – kierunek podłużny Y (węzeł 6).



**Rys. 6.33** Przebieg czasowy przemieszczeń trybuny stalowej ze stężeniami rurowymi wywołany podskokami widzów z częstotliwością 2 Hz – kierunek podłużny Y (węzeł 6).

**Tab. 6.5** Ekstremalne wartości przyspieszeń i przemieszczeń (kierunek Y) w wybranych węzłach trybuny z tłumikami polimerowymi.

Nr węzła	Przyspieszenie [m/s <sup>2</sup> ]	Przemieszczenie [mm]
1	1,09	1,83
2	1,12	2,23
3	0,96	1,88
4	1,10	1,84
5	1,11	2,18
6	0,92	1,82

Zaobserwowane wartości przyspieszeń konstrukcji różnią się znacznie porównując dwa modele numeryczne. W przypadku zastosowania tłumików polimerowych, wartość ekstremalna przyspieszeń jest nawet o 69% mniejsza w porównaniu z konstrukcją wyposażoną w stężenia rurowe (por. Tab. 6.5 z Tab. 6.4). Co więcej, spadek wartości ekstremalnej przyspieszeń powoduje znaczną poprawę poziomu komfortu widzów. Wartość ekstremalna przyspieszeń równe  $3,65 \text{ m/s}^2$ , którą uzyskano dla trybuny ze stężeniami rurowymi oznacza poziom komfortu wywołujący panikę (zob. Tab. 2.3). Z kolei, dla przypadku konstrukcji wyposażonej w tłumiki polimerowe wartość ekstremalna przyspieszeń wyniosła  $1,12 \text{ m/s}^2$ , co oznacza jedynie uciążliwy poziom komfortu (zob. Tab. 2.3). Znaczna różnica w odpowiedzi trybuny dotyczy również przemieszczeń. Spadek ekstremalnej wartości przemieszczeń dla modelu z tłumikami polimerowymi wyniósł aż 47% w porównaniu z modelem konstrukcji ze stężeniami rurowymi.

## 7 PODSUMOWANIE

W niniejszej dysertacji opisano wyniki kompleksowych badań dotyczących tymczasowych trybun metalowych poddanych oddziaływaniom dynamicznym wywołanym zachowaniem widzów, w których zastosowano tłumiki polimerowe jako elementy stężające i tłumiące drgania konstrukcji. Badania objęły testy eksperymentalne oraz zaawansowane analizy numeryczne.

### 7.1 WNIOSKI KOŃCOWE

W pierwszej części pracy przeprowadzono wstępne badania eksperymentalne i analizy numeryczne aluminiowych belek wspornikowych. Testom poddano pojedyncze elementy bez warstwy tłumiącej oraz belki z podklejoną od dołu warstwą polimeru. Elementy wzbudzone były do drgań poprzez przemieszczenie pionowe i zwolnienie ich swobodnego końca oraz uderzenie w środku ich rozpiętości młotkiem modalnym. Wyniki tych badań pokazały, że zastosowanie polimeru prowadzi do redukcji drgań aluminiowej belki wspornikowej (zaobserwowano kilkukrotny wzrost liczby tłumienia w porównaniu z pojedynczym płaskownikiem). Następnie, szczegółowo zaprezentowano badania pojedynczej aluminiowej belki wspornikowej oraz belki złożonej z dwóch aluminiowych płaskowników sklejonych warstwą polimeru o różnej grubości. Elementy wzbudzone były do drgań poprzez uderzenie w środku ich rozpiętości młotkiem modalnym. Uzyskane wyniki potwierdziły wnioski wysunięte w pierwszym etapie badań, iż zastosowanie polimeru prowadzi do znacznego wzrostu liczby tłumienia, a w konsekwencji do redukcji drgań aluminiowych belek wspornikowych. Zgodność wyników uzyskanych z badań eksperymentalnych i analiz numerycznych potwierdziła słuszność zastosowania modelu Mooneya-Rivlina do analizy polimeru.

W drugiej części pracy, przedstawiono wyniki badań eksperymentalnych i analiz numerycznych fragmentu tymczasowej trybuny metalowej wyposażonej w dwa różne elementy stężające poddanej oddziaływaniom dynamicznym wywołanym zachowaniem widzów. Wyniki badań porównano z konstrukcją trybuny, w której nie zastosowano

elementów stężających. Pierwszy etap rozważań poświęcono na wyznaczenie dominujących częstotliwości drgań własnych konstrukcji pustej oraz wypełnionej widzami. Wyniki przeprowadzonych testów pokazały, że zastosowanie elementu stężającego zwiększa sztywność analizowanej konstrukcji. Jednocześnie, zaobserwowano, że zamocowanie tłumika polimerowego wpływa nieznacznie na zmianę częstotliwości drgań trybuny w porównaniu z konstrukcją wyposażoną w typowy element stężający o przekroju rurowym, jednak jego zastosowanie znacznie zwiększa wartość liczby tłumienia drgań. Kolejny etap rozważań dotyczył testów dynamicznych, których głównym celem było wyznaczenie przebiegów czasowych odpowiedzi trybuny poddanej oddziaływaniom dynamicznym w postaci kołysania przez pojedynczą osobę (badania eksperymentalne) oraz w postaci synchronicznych i powtarzających się podskoków widzów (analiza numeryczna). Wyniki testów pokazały, iż w przypadku zastosowania tłumika polimerowego, wartości przyspieszeń i przemieszczeń odpowiedzi konstrukcji są znacznie mniejsze w porównaniu z konstrukcją wyposażoną w stężenie rurowe w stosunku do trybuny bez stężenia.

W ostatniej części pracy, przedstawiono wyniki analiz numerycznych rzeczywistej konstrukcji wielkogabarytowej tymczasowej trybuny stalowej wyposażonej w dwa różne typy elementów stężających. W pierwszym etapie rozważań przeprowadzono analizę modalną dla obu wariantów uwzględniając pustą i wypełnioną widzami konstrukcję, celem porównania postaci drgań własnych i odpowiadających im wartości częstotliwości. Wyniki pokazały, że zastosowanie tłumików polimerowych wpływa nieznacznie na zmianę częstotliwości drgań trybuny w porównaniu do konstrukcji wyposażonej w typowe elementy stężające o przekroju rurowym. Kolejny etap poświęcono analizie dynamicznej, której głównym celem było wyznaczenie przebiegów czasowych przyspieszeń i przemieszczeń konstrukcji trybuny poddanej oddziaływaniom dynamicznym w postaci synchronicznych i powtarzających się podskoków widzów. Wyniki analizy pokazały, iż w przypadku zastosowania tłumików polimerowych, wartości przyspieszeń odpowiedzi konstrukcji są znacznie mniejsze w porównaniu z konstrukcją wyposażoną w stężenia rurowe. Co więcej, spadek wartości ekstremalnej przyspieszeń powoduje znaczną poprawę poziomu komfortu widzów (zmiana z poziomu wywołującego panikę na poziom uciążliwy). Podobna sytuacja dotyczy przemieszczeń. Jednocześnie bowiem, zaobserwowano także znaczny

spadek wartości przemieszczeń dla modelu konstrukcji z tłumikami polimerowymi w porównaniu z modelem konstrukcji ze stężeniami o przekroju rurowym.

Wyniki badań eksperymentalnych oraz analiz numerycznych przedstawione w niniejszej dysertacji potwierdzają tezę podaną w rozdziale 1, iż zastosowanie tłumików polimerowych jako elementów stężających konstrukcję tymczasowej trybuny metalowej prowadzi do zwiększenia sztywności całego obiektu, a także wzrostu tłumienia drgań, co skutkuje znacznym zwiększeniem odporności dynamicznej konstrukcji. Wydaje się, zatem, iż zaproponowany w pracy element może być wykorzystywany jako efektywna metoda tłumienia drgań tymczasowych trybun metalowych poddanych oddziaływaniom dynamicznym wywołanym zachowaniem widzów.

## 7.2 ORYGINALNE ELEMENTY PRACY

W opinii autorki, do elementów oryginalnych pracy można zaliczyć:

- przeprowadzenie badań eksperymentalnych belek wspornikowych (pojedynczej belki aluminiowej bez warstwy tłumiącej, belki aluminiowej z podklejoną od dołu warstwą polimeru i belki złożonej z dwóch aluminiowych płaskowników sklejonych warstwą polimeru o różnej grubości),
- zaprojektowanie tłumika polimerowego zbudowanego z dwóch kątowników sklejonych warstwą polimeru,
- przeprowadzenie badań eksperymentalnych i analiz numerycznych fragmentu tymczasowej trybuny stalowej wyposażonej w dwa różne typy elementów stężających (typowy element o przekroju rurowym oraz zaproponowany tłumik polimerowy) poddanej oddziaływaniom dynamicznym,
- wykonanie zaawansowanych dynamicznych analiz numerycznych rzeczywistego obiektu wielkogabarytowej tymczasowej trybuny stalowej wyposażonej w dwa różne typy elementów stężających poddanej oddziaływaniom w postaci synchronicznych i powtarzających się podskoków widzów.



## BIBLIOGRAFIA

### Literatura

- Allen D. E., Rainer J. H., Floor vibration, National Research Council of Canada, Division of building research, *Canadian Building Digest*, 173-178, 1975.
- Ashby M. F., *Dobór materiałów w projektowaniu inżynierskim*, WNT, Warszawa 1998.
- Ashby M. F., Jones D. R. H., *Materiały inżynierskie*, 2, WNT, Warszawa 1996.
- Bachmann H., *Vibration Problems in Structures: Practical Guidelines*, Berlin 1995.
- Bachmann H., Ammann W., Induced by man and machine, *Structural Engineering Documents – IABSE/AIPC/IVBH*, Suica 1987.
- Bednarek S., Materiały lepkosprężyste, *Młody Technik*, 3: 44-46, 2005.
- Bendat J. S., Piersol A. G., *Random Data: Analysis and Measurements Procedures*, Wiley-Interscience, New York 1971.
- Błażejowski P., Marcinowski J., Modyfikacje konstrukcyjne zadaszania stadionu redukujące drgania o charakterze rezonansowym, *Zeszyty Naukowe Politechniki Rzeszowskiej, Budownictwo i Inżynieria Środowiska*, 58-3/11/II (276): 209-216, 2011.
- Bolton A., Fatal mix caused stand fall, *New Civil Engineer*, 18: 5-6, 1992.
- BRE Digest, *The response of structures to dynamic crowd loads*, 426, 1997.
- Brito V., Pimentel R. L., Cases of collapse of demountable grandstands, *Journal of Performance of Constructed Facilities*, 23(3): 151-159, 2009.
- Callister Jr. W. D., *Fundamentals of Materials Science and Engineering*, John Wiley & Sons, New York 2001.
- Carraher Jr. C. E., *Carraher's Polymer Chemistry*, CRC Press, London 2012.

- Chmielewski T., Zembaty Z., *Podstawy dynamiki budowli*, Arkady 1998.
- Chopra A. K., *Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering*, Prentice Hall, New Jersey 1995.
- Clough R.W., Penzien J., *Dynamics of Structures*, International Edition: McGraw-Hill 1993.
- Comer A. J., Williams M. S., Blackeborough A., Experimental determination of crowd load and coherency when jumping on a rigid raked grandstand, *Proceedings of XXV International Modal Analysis Conference*, 4: 2215-2223, Orlando 2007.
- Crick D., Grondin G. Y., Monitoring and analysis of a temporary grandstands, *Structural Engineering Report*, No 275, 2008.
- Dalrymple T., Choi J., Elastomer rate-dependence: A testing and material modeling methodology, *Proceedings of Fall 172nd Technical Meeting of RDACS*, Cleveland 2007.
- Dickie J. F., Demountable grandstands, *Structural Engineer*, 61A(3): 81-86, 1983.
- Dzierża W., *Wpływ budowy segmentowych elastomerów poliuretanowych na ich właściwości deformacyjne*, Uniwersytet M. Kopernika, Toruń 1980.
- Ellis B. R., Ji T., Human-structure interaction in vertical vibrations, *Structures and Buildings*, 122: 1-9, 1997.
- Ellis B. R., Ji T., Littler J. D., The response of grandstands to dynamic loads induced by crowds, *Proceedings of Australasian Structural Engineering Conference*, 457-462, Sydney 1994.
- Ellis B. R., Ji T., Littler J. D., The response of grandstands to dynamic crowd loads, *Structures and Buildings*, 140(4): 355-365, 2000.
- Falborski T., Jankowski R., Polymeric bearings – a new base isolation system to reduce structural damage during earthquakes, *Key Engineering Materials*, 569-570: 143-150, 2013.

- Falborski T., Jankowski R., Kwiecień A., Experimental study on polymer mass used to repair damaged structures, *Key Engineering Materials*, 488-489: 347-350, 2012.
- Finney R. H., *Finite Element Analysis, Engineering with Rubber: How to Design Rubber Components*, Gent A. N., Berlin 2001.
- Finney R. H., Kumar A., Development of material constants for nonlinear finite-element analysis, *Rubber Chemistry and Technology*, 61(5): 879-891, 1988.
- Ginty D., Denvent J. M., Ji T., The frequency range and distribution of dance type loads, *The Structural Engineer*, 79(6): 27-31, 2001.
- Hall J.F., Problems encountered from the use (or misuse) of Rayleigh damping, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 35: 525–545, 2006.
- Haponiuk J., *Polimery amorficzne – inżynieria materiałowa*, Politechnika Gdańska, Gdańsk 2011.
- Homan S. W., Boase A. J., Raider C. J., Jensen H., Matthews H. W., Smith G. B., Wetzel C. H., Horizontal forces produced by movements of the occupants of a grandstand, *American Standards Association Bulletin*, 3(4), 1932.
- Housner G. W., Bergman L. A., Caughey T. K., Chassiakos A. G., Claus R. O., Masri S. F., Skelton R. E., Soong T. T., Spencer B. F., Yao J. T. P., Structural Control: Past, Present, and Future, *Journal of Engineering Mechanics*, 123(9): 897-971, 1997.
- Hu T., Desai J. P., Modeling large deformation in soft-tissues: experimental results an analysis, *Proceedings of EuroHaptic 2004*, 3897-390, Munich 2004.
- Hulimka J., Kałuża M., Preliminary tests of steel-to-steel adhesive joints, *Procedia Engineering*, 172: 385-392, 2017.
- Ibrahim Z., Reynolds P., Pavic A., The effects of crowd occupation on the dynamic performance of a grandstand, *Proceeding of ISMA 2004 - International Conference on Noise and Vibration Engineering*, 797-810, Leuven 2004.
- Ibrahim Z., *The effects of crowds on dynamic characteristic of stadia structures*, PhD Thesis, University of Sheffield, United Kingdom 2006.

- Jacobs N., Temporary demountable structures: the need for guidance, *The Structural Engineer*, 74(5): 84, 1996.
- Janowski Z., Nośność i trwałość konstrukcji murowych w obiektach zabytkowych, *IV Konferencja "REW-INŻ. 1998"*, 1: 23-40, Kraków 1998.
- Jemioło S., *Stadium hipersprężystych własności materiałów izotropowych: modelowanie i implementacja numeryczna*, Prace naukowe - Budownictwo, Nr 140, OWPW, Warszawa 2002.
- Ji T., Ellis B. R., Evaluation of dynamic crowd effects for dance type loads, *Colloquium on Structural Serviceability of Buildings*, 165-172, Zurich 1993.
- Ji T., Ellis B. R., Effective bracing system for temporary grandstands, *The Structural Engineer*, 75(6), 95-100, 1997.
- Jones C. A., Reynolds P., Pavic A., Vibration serviceability of stadia structures subjected to dynamic crowd loads: A literature review, *Journal of Sound and Vibration*, 330(8): 1531-1566, 2011.
- Kałuża M., Hulimka J., Methacrylate Adhesives to create CFRP laminate-steel joints – preliminary static and fatigue tests, *Procedia Engineering*, 172: 489-496, 2017.
- Kasperski M., Actual problems with stand structures due to spectator-induced vibrations, *Proceedings of the 3rd European Conference on Structural Dynamics EURODYN*, 455-461, Florence 1996.
- Kim B., Lee S. B., Lee J., Cho S., Park H., Yeom S., Park S. H., A comparison among Neo-Hookean model, Mooney-Rivlin model, and Ogden model for chloroprene rubber. *International Journal of Precision Engineering and Manufacturing*, 13(5): 759-764, 2012.
- Kwiecień A., *Polimerowe złącza podatne w konstrukcjach murowych i betonowych*, Politechnika Krakowska, Kraków 2012a.
- Kwiecień A., Stiff and flexible adhesives bonding CFRP to masonry substrates— Investigated in pull-off test and Single-Lap test, *Archives of Civil and Environmental Engineering*, 12: 228-239, 2012b.

- Lasowicz N., Jankowski R., Numerical analysis of a temporary steel grandstand, *Shell Structures: Theory and Applications*, 543-546, CRC/Balkema, Leiden 2014.
- Lasowicz N., Jankowski R., Vibration problems of an example of temporary steel grandstand under human-induced excitation, *Civil and Environmental Engineering Reports*, 16: 119-128, 2015.
- Lasowicz N., Jankowski R., Experimental and numerical study on polymer element used for reduction of temporary steel grandstand vibrations, *Recent Progress in Steel and Composite Structures*, 215-222, CRC/Balkema, Leiden 2016a.
- Lasowicz N., Jankowski R., Application of polymer element in reduction of temporary steel grandstand vibrations, *Proceedings of 3<sup>rd</sup> Polish Congress of Mechanics PCM/21st International Conference on Computer Methods in Mechanics CMM*, 331-334, Gdańsk 2016b.
- Lasowicz N., Jankowski R., The effectiveness of polymer damper in damage reduction of temporary steel grandstand, *Key Engineering Materials*, 713: 171-174, 2016c.
- Lasowicz N., Jankowski R., Investigation of behaviour of metal structures with polymer dampers under dynamic loads, *Procedia Engineering*, 199: 2833-2837, 2017a.
- Lasowicz N., Jankowski R., Experimental and numerical analysis of an aluminum cantilevered beam with polymer adhesive, *Procedia Engineering*, 172: 634-639, 2017b.
- Lasowicz N., Kwiecień A., Jankowski R., Experimental study on the effectiveness of polymer damper in damage reduction of temporary steel grandstand, *Journal of Physics: Conference Series*, 628: 1-7, 2015a.
- Lasowicz N., Kwiecień A., Jankowski R., Enhancing the seismic resistance of columns by GFRP confinement using flexible adhesive-experimental study, *Key Engineering Materials*, 624: 478-485, 2015b.
- Lasowicz, N., Kwiecień, A., Zając, B., Jankowski, R., Experimental study on effectiveness of polymer dampers in reduction of structural vibrations, *Proceedings of the IX International Conference on Structural Dynamics EURODYN*, 1623-1630, Porto 2014.

- Lewandowski R., Pawlak Z., Dynamic analysis of frames with viscoelastic dampers modeled by rheological models with fractional derivatives, *Journal of Sound and Vibration*, 330: 923-936, 2011.
- Littler J. D., Temporary demountable grandstands: dynamic response, *Building Research Establishment*, No 3, 2000.
- Macioce P., Viscoelastic damping, *Journal of Sound and Vibration*, 37(4): 8-10, 2003.
- Majewska N., Jankowski R., Modal analysis of a steel grandstand, *Technology and Art*, 3: 94-97, 2012.
- Major M., Różycka J., Gumopochodne materiały hipersprężyste – omówienie i kryteria praktycznego zastosowania, *Zeszyty Naukowe Politechniki Częstochowskiej*, 17: 134-145, 2011.
- Manheim D., Honeck W., A case study of spectator induced vibrations, Use of vibration measurements in structural evaluation, *Proceedings of the Structural Division of the American Society of Civil Engineers*, Atlantic City 1987.
- Marcinowski J., Zagrożenie obiektów budowlanych wynikające z powstania drgań o charakterze rezonansowym, *Przegląd Budowlany*, 5: 129-132, 2012.
- Marinho I. J., Vaz L. E., Pimentel R. L., Optimization of temporary steel grandstands based on static and dynamic behavior, *Proceedings of 17th International Congress of Mechanical Engineering*, 1-8, Sao Paulo 2003.
- New York Times, Temporary stands banned by FIFA, 1992.
- Nhleko S. P., Williams M. S., Blackeborough A., Vibration perception and comfort levels for an audience occupying a grandstand with perceivable motion, *Proceedings of IMAC XXVII: A Conference & Exposition on Structural Dynamics*, Orlando 2009.
- Noormohammadi N., Reynolds P., Control of human induced vibrations in stadia using a hybrid tuned mass damper, *Proceedings of International Conference on Noise and Vibration Engineering ISMA*, 1119-1132, Leuven 2012.



- Noss N., *Investigation of human-structure interaction through experimental and analytical studies*, Bucknell University, Lewisburg 2012.
- Nowak Z., Pęcherski R. B., Plastic strain in metals by shear banding, Numerical identification and verification of plastic flow law accounting for shear banding, *Archives of Mechanics*, 54(5/6): 285-294, 2002.
- Odian G., *Principles of Polymerization*, John Wiley & Sons, New York 2004.
- Ogden R. W., *Non-linear elastic deformations*, Ellis Horwood, Chichester 1984.
- Piszczyk Ł., Danowska M., Mietlarek-Kropidłowska A., Szyszka M., Strankowski M., Synthesis and thermal studies of flexible polyurethane nanocomposite foams obtained using nanoclay modified with flame retardant compound. *Journal of Thermal Analysis and Calorimetry*, 118: 901-909, 2014.
- Reynolds P., Mohanty P., Pavic A., Use of operational modal analysis on empty and occupied stadia structures, *Proceedings of 1st International Operational Modal Analysis Conference*, 75-84, Copenhagen 2005.
- Sacks M. P., Behboudi R., Swallow J. C., Tuned mass dampers for soldier field stadium grandstand vibration, *Journal of the Canadian Acoustical Association*, 33(3): 42-43, 2005.
- Salyards K. A., Firman III R. J., Human-structure interaction: effects of crowd characteristics, *Proceedings of the Society for Experimental Mechanics*, 4: 247-254, Springer, New York 2011.
- Simiu E., Scanlan R. H., *Wind Effects on Structures*, John Wiley & Sons, New York 1996.
- Stein E., de Borst R., Hughes T.J.R., *Encyclopedia of Computational Mechanics*, John Wiley & Sons, Chichester 2004.
- Tatara T., Ptasznik B., Vibrations of sport stadium grandstand structure due to crowd-jumping loads, *Proceedings of the 5<sup>th</sup> International Conference on Computational Methods in Structural Dynamics and Earthquake Engineering*, 2: 2688-2689, Crete 2015.

- Treloar L. R. G., *The Physics of Rubber Elasticity*, Clarendon Press, Oxford 1975.
- Ward I. M., Sweeney J., *An Introduction to the Mechanical Properties of Solid Polymers*, John Wiley & Sons, New York 2004.
- Weber F., Maślanka M., Frequency and damping adaptation of a TMD with controlled MR damper, *Smart Materials and Structures*, 21(5): 055011, 2012.
- Wetton R. E., Marsh R. D., Van de Velde J. G., Theory and application of dynamic thermal analysis, *Thermochimica Acta*, 175: 1-11, 1991.
- Wielgos P., Ocena skuteczności działania wielokrotnych, strojonych tłumików masowych w konstrukcjach budowlanych, Politechnika Lubelska, Lublin 2010.
- Wilczyński K., *Reologia w przetwórstwie tworzyw sztucznych*, WNT, Warszawa 2001.
- Wilde K., Rucka M., Grębowski K., Stan awaryjny trybuny stadionu w Zielonej Górze wywołany synchronicznym tańcem kibiców, *XXVI Konferencja Naukowo-Techniczna - Awarie Budowlane*, 85(1): 28-32, Międzyzdroje 2013.
- Wirpsza Z., *Poliuretany. Chemia technologia zastosowanie*, WNT, Warszawa 2001.
- Wirpsza Z., *Poliuretany. Chemia poliuretanów*, Vol. 2, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2002.
- Wirszyłło R., *Urządzenia sportowe: planowanie, projektowanie, budowa, użytkowanie*, Arkady 1982.
- Wojdak R., *Nietypowe autorskie konstrukcje budowlane. Stadion piłkarski na EURO 2012 w Gdańsku i inne obiekty*, Wydawnictwo Politechniki Gdańskiej, Gdańsk 2010.
- Żółtowski K., *Pieszy na kładkach. Obciążenia i odpowiedź konstrukcji*, Politechnika Gdańska, Gdańsk 2007.



### **Normy i wytyczne do projektowania**

BS 6399-1:1996 Loading for buildings. Code of practice for dead and imposed loads.

DCMS, Guide to Safety at Sports Grounds (Green Guide), fifth ed., The Stationary Office, London, 2008.

Hong Kong Loading Code of Practice for Dead and Imposed Loads, 2011.

ISO 2631-1: 1997 Mechanical vibration and shock - Evaluation of human exposure to whole-body vibration - Part 1: General requirements.

IStructE, Temporary Demountable Structures: Guidance on Design, procurement and Use, Second Edition, Clarke, The Institution of Structural Engineers, London 1999.

National Research Council, User's Guide – NBC 2005, Structural Commentaries (Part 4 of Division B), National Research Council of Canada, Ottawa.

PN-EN 13200-1:2013-02 Obiekty widowiskowe - Część 1: Ogólna charakterystyka widowni.

PN-EN 13200-6:2013-06 Obiekty widowiskowe - Część 6: Trybuny demontowalne (tymczasowe).

PN-EN 1990:2004 Podstawy projektowania konstrukcji.

PN-EN 1991-1:2004 Oddziaływania na konstrukcje - Część 1: Oddziaływania ogólne - Ciężar objętościowy, ciężar własny, obciążenia użytkowe w budynkach.

PN-EN 1993-1:2006 Projektowanie konstrukcji stalowych - Część 1: Reguły ogólne i reguły dla budynków.

The Scottish Office and Department of National Heritage, Guide to Safety at Sports Grounds (Green Guide), fourth ed., The Stationary Office, London, 1997.

### **Strony internetowe**

<http://sports.usatoday.com/2016/04/05>

<http://indymotorspeedway.com>

<http://www.stadiumguide.com>

<http://www.stadiumguide.com>

<http://news.bbc.co.uk/>

<http://www.inquisitr.com>

[www.trybunysportowe.pl](http://www.trybunysportowe.pl)

[www.wamat.com.pl](http://www.wamat.com.pl)

[www.pro-construction.com](http://www.pro-construction.com)

## Załącznik 1 – Wyniki badań eksperymentalnych dla pojedynczej aluminiowej belki wspornikowej (Etap I).

**Tab. Z. 1. 1** Liczba tłumienia dwóch pierwszych częstotliwości drgań poprzecznych aluminiowej belki wspornikowej pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 1 kg).

			$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$	$a_8$	$a_9$	$a_{10}$	$\delta$	$\xi$
Pomiar 94	$f_1$	3,1	0,1757	0,1724	0,169	0,1681	0,1631	0,1622	0,1576	0,1566	0,1522	0,1499	0,015881	0,25288
	$f_2$	37,3	0,5495	0,5283	0,5091	0,4892	0,4718	0,4598	0,444	0,4379	0,4244	0,4075	0,029897	0,47606
Pomiar 95	$f_1$	3,1	0,1616	0,1578	0,1565	0,1564	0,1506	0,1473	0,147	0,1431	0,1405	0,1402	0,014205	0,22620
	$f_2$	37,3	0,6687	0,6479	0,615	0,5837	0,553	0,5283	0,5091	0,4899	0,4718	0,4599	0,037433	0,59606
Pomiar 96	$f_1$	3,1	0,2045	0,2004	0,1967	0,1929	0,1905	0,1868	0,1821	0,1779	0,1743	0,1732	0,016612	0,26452
	$f_2$	37,3	0,1837	0,1786	0,1737	0,1711	0,1685	0,1647	0,1599	0,1536	0,1472	0,1428	0,025186	0,40104
Pomiar 97	$f_1$	3,1	0,1954	0,1867	0,1857	0,1852	0,1798	0,1749	0,1744	0,1679	0,1636	0,1612	0,01924	0,30637
	$f_2$	37,3	0,435	0,416	0,3997	0,3869	0,3741	0,3665	0,3574	0,3476	0,3359	0,324	0,02946	0,46911
Pomiar 98	$f_1$	3,1	0,2454	0,2404	0,2343	0,2301	0,2238	0,2186	0,2159	0,2123	0,2063	0,2032	0,01887	0,30047
	$f_2$	37,3	0,2902	0,2831	0,2776	0,2711	0,2642	0,2548	0,2465	0,2367	0,2271	0,2187	0,028287	0,45042
Pomiar 99	$f_1$	3,1	0,1987	0,1937	0,1927	0,1881	0,1854	0,1799	0,1787	0,1726	0,1711	0,1673	0,017201	0,27389
	$f_2$	37,3	0,3181	0,3099	0,3000	0,2887	0,2784	0,2675	0,258	0,2483	0,2416	0,2357	0,029981	0,47739

**Legenda i objaśnienia:**  
 $f_1$  - częstotliwość odpowiadająca pierwszej postaci drgań [Hz];  
 $f_2$  - częstotliwość odpowiadająca drugiej postaci drgań [Hz];  
 $a_1, a_{i+1}, \dots$  - kolejne maksymalne przyspieszenia w czasie  $t$  [ $m/s^2$ ];  
 $\delta$  - logarytmiczny dekrement tłumienia [-];  
 $\xi$  - liczba tłumienia [%].

	$f_1$	$f_2$	$\xi_1$	$\xi_2$
Wartości średnie	3,1	37,30	0,271	0,478
odchylenie standardowe	0	0	0,021	0,045
współczynnik zmienności	0	0	0,0784	0,0951

**Tab. Z. 1. 2** Liczba tłumienia dwóch pierwszych częstotliwości drgań poprzecznych aluminiowej belki wspornikowej pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 2,5 kg).

			$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$	$a_8$	$a_9$	$a_{10}$	$\delta$	$\xi$
Pomiar 101	$f_1$	2,1	0,0999	0,0972	0,0934	0,0915	0,0895	0,0856	0,0842	0,0825	0,0805	0,0783	0,02428	0,38674
	$f_2$	36,6	1,386	1,342	1,302	1,264	1,226	1,198	1,151	1,131	1,098	1,067	0,02615	0,41651
Pomiar 102	$f_1$	2,1	0,1188	0,1127	0,1094	0,1079	0,105	0,1025	0,0994	0,0980	0,0963	0,0928	0,02462	0,39210
	$f_2$	36,6	0,5021	0,4874	0,4799	0,4699	0,4585	0,4486	0,4391	0,4284	0,4188	0,4108	0,02006	0,31957
Pomiar 103	$f_1$	2,1	0,1427	0,135	0,1344	0,1309	0,1247	0,1245	0,1244	0,1231	0,1153	0,1145	0,02207	0,35058
	$f_2$	36,6	1,311	1,273	1,241	1,209	1,177	1,143	1,114	1,083	1,056	1,03	0,02412	0,38412
Pomiar 104	$f_1$	2,1	0,0187	0,0182	0,0173	0,0178	0,0169	0,0167	0,0159	0,0163	0,0146	0,0154	0,01937	0,30856
	$f_2$	36,6	0,6649	0,6549	0,6398	0,6251	0,6107	0,5945	0,5838	0,5687	0,5572	0,5469	0,01953	0,3111
Pomiar 105	$f_1$	2,1	0,0988	0,0952	0,0932	0,0933	0,0880	0,0862	0,0871	0,0851	0,0816	0,0842	0,01596	0,25421
	$f_2$	36,6	0,7276	0,7111	0,6983	0,6785	0,6661	0,6525	0,6368	0,6216	0,6078	0,5956	0,02001	0,31876
Pomiar 106	$f_1$	2,1	0,1543	0,1528	0,1471	0,1458	0,1431	0,142	0,1379	0,1349	0,1325	0,1291	0,01783	0,28393
	$f_2$	36,6	1,461	1,42	1,37	1,344	1,306	1,269	1,233	1,201	1,173	1,146	0,02428	0,38669

**Legenda i objaśnienia:**  
 $f_1$  - częstotliwość odpowiadająca pierwszej postaci drgań [Hz];  
 $f_2$  - częstotliwość odpowiadająca drugiej postaci drgań [Hz];  
 $a_1, a_{j+1}, \dots$  - kolejne maksymalne przyspieszenia w czasie  $t$  [ $m/s^2$ ];  
 $\delta$  - logarytmiczny dekrement tłumienia [-];  
 $\xi$  - liczba tłumienia [%].

	$f_1$	$f_2$	$\xi_1$	$\xi_2$
Wartości średnie	2,1	36,6	0,329	0,356
odchylenie standardowe	0	0	0,040	0,032
współczynnik zmienności	0	0	0,1208	0,0893

**Tab. Z. 1. 3** Liczba tłumienia dwóch pierwszych częstotliwości drgań poprzecznych aluminiowej belki wspornikowej pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 3,5 kg).

			$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$	$a_8$	$a_9$	$a_{10}$	$\delta$	$\zeta$
Pomiar 108	$f_1$	1,8	0,0544	0,0477	0,0455	0,0474	0,0460	0,0465	0,0434	0,0441	0,0432	0,0425	0,02452	0,39042
	$f_2$	36,6	0,7892	0,7595	0,7284	0,7010	0,6755	0,6489	0,6255	0,6024	0,5799	0,5619	0,03397	0,54092
Pomiar 109	$f_1$	1,8	0,0187	0,0184	0,0183	0,0177	0,0177	0,0175	0,0173	0,0173	0,0168	0,0159	0,01614	0,25703
	$f_2$	36,6	1,0780	1,0360	0,9988	0,9574	0,9211	0,8871	0,8563	0,8135	0,7918	0,7755	0,03294	0,52445
Pomiar 110	$f_1$	1,8	0,0713	0,0696	0,0671	0,0661	0,0658	0,0651	0,0633	0,0618	0,0611	0,0604	0,01658	0,26400
	$f_2$	36,6	1,2630	1,2230	1,1850	1,1340	1,0950	1,0510	1,0050	0,9666	0,9334	0,8931	0,03465	0,55183
Pomiar 111	$f_1$	1,8	0,1056	0,1004	0,0991	0,0987	0,0986	0,0971	0,0943	0,0933	0,0896	0,0900	0,01604	0,25542
	$f_2$	36,6	1,3520	1,2960	1,2460	1,1980	1,1520	1,1130	1,0660	1,0330	0,9936	0,9536	0,03491	0,55589
Pomiar 112	$f_1$	1,8	0,0585	0,0562	0,0531	0,0508	0,0506	0,0495	0,0489	0,0481	0,0477	0,0470	0,02192	0,34907
	$f_2$	36,6	1,7400	1,6550	1,6030	1,5220	1,4680	1,4260	1,3770	1,3210	1,2680	1,2180	0,03567	0,56795
Pomiar 113	$f_1$	1,8	0,0723	0,0711	0,0679	0,0664	0,0662	0,0619	0,0618	0,0607	0,0601	0,0597	0,01922	0,30612
	$f_2$	36,6	0,6727	0,6512	0,6269	0,6059	0,5847	0,5640	0,5446	0,5266	0,5094	0,4916	0,03136	0,49942

**Legenda i objaśnienia:**  
 $f_1$  - częstotliwość odpowiadająca pierwszej postaci drgań [Hz];  
 $f_2$  - częstotliwość odpowiadająca drugiej postaci drgań [Hz];  
 $a_1, a_{j+1}, \dots$  - kolejne maksymalne przyspieszenia w czasie  $t$  [ $m/s^2$ ];  
 $\delta$  - logarytmiczny dekrement tłumienia [-];  
 $\zeta$  - liczba tłumienia [%].

	$f_1$	$f_2$	$\zeta_1$	$\zeta_2$
Wartości średnie	1,8	36,6	0,304	0,540
odchylenie standardowe	0	0	0,04	0,018
współczynnik zmienności	0	0	0,1304	0,0324

**Tab. Z. 1. 4** Liczba tłumienia dwóch pierwszych częstotliwości drgań poprzecznych aluminiowej belki wspornikowej pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 5 kg).

		$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$	$a_8$	$a_9$	$a_{10}$	$\delta$	$\zeta$	
Pomiar 115	$f_1$	1,5	0,0407	0,0389	0,0385	0,0376	0,0368	0,0341	0,0341	0,0328	0,0317	0,0317	0,0252	0,4012
	$f_2$	36,6	1,2190	1,1810	1,1390	1,0990	1,0680	1,0350	1,0020	0,9669	0,9337	0,9018	0,0301	0,4799
Pomiar 116	$f_1$	1,5	0,0219	0,0199	0,0175	0,0166	0,0157	0,0137	0,0132	0,0125	0,0191	0,0177	0,0214	0,3405
	$f_2$	36,6	1,2570	1,2230	1,1890	1,1550	1,1190	1,0890	1,0560	1,0250	0,9976	0,9614	0,0268	0,4269
Pomiar 117	$f_1$	1,5	0,0420	0,0378	0,0369	0,0380	0,0400	0,0368	0,0363	0,0359	0,0354	0,0344	0,0200	0,3186
	$f_2$	36,6	0,7334	0,7122	0,6928	0,6726	0,6531	0,6356	0,6171	0,5985	0,5815	0,5648	0,0261	0,4160
Pomiar 118	$f_1$	1,5	0,0261	0,0254	0,0261	0,0246	0,0237	0,0227	0,0228	0,0229	0,0203	0,0201	0,0260	0,4134
	$f_2$	36,6	0,9021	0,8751	0,8406	0,8235	0,7994	0,7733	0,7478	0,7256	0,7045	0,6839	0,0277	0,4409
Pomiar 119	$f_1$	1,5	0,0510	0,0494	0,0474	0,0425	0,0421	0,0411	0,0392	0,0392	0,0390	0,0390	0,0268	0,4268
	$f_2$	36,6	2,1050	2,0190	1,9650	1,9110	1,8380	1,7860	1,7330	1,6790	1,6290	1,5800	0,0287	0,4568
Pomiar 120	$f_1$	1,5	0,0514	0,0511	0,0499	0,0470	0,0467	0,0455	0,0438	0,0434	0,0430	0,0410	0,0226	0,3598
	$f_2$	36,6	1,9340	1,8630	1,8000	1,7480	1,6940	1,6370	1,5840	1,5280	1,4880	1,4410	0,0294	0,4686

**Legenda i objaśnienia:**  
 $f_1$  - częstotliwość odpowiadająca pierwszej postaci drgań [Hz];  
 $f_2$  - częstotliwość odpowiadająca drugiej postaci drgań [Hz];  
 $a_1, a_{i+1}, \dots$  - kolejne maksymalne przyspieszenia w czasie  $t$  [ $m/s^2$ ];  
 $\delta$  - logarytmiczny dekrement tłumienia [-];  
 $\zeta$  - liczba tłumienia [%].

	$f_1$	$f_2$	$\zeta_1$	$\zeta_2$
Wartości średnie	1,5	36,6	0,377	0,448
odchylenie standardowe	0	0	0,031	0,017
współczynnik zmienności	0	0	0,082	0,039

**Tab. Z. 1. 5** Liczba tłumienia dwóch pierwszych częstotliwości drgań poprzecznych aluminiowej belki wspornikowej pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 6 kg).

			$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$	$a_8$	$a_9$	$a_{10}$	$\delta$	$\xi$
Pomiar 122	$f_1$	1,4	0,0596	0,0532	0,0505	0,0491	0,0437	0,0450	0,0463	0,0435	0,0432	0,0449	0,0284	0,4528
	$f_2$	36,6	0,7669	0,7464	0,7268	0,7054	0,6859	0,6702	0,6562	0,6421	0,6284	0,6118	0,0226	0,3598
Pomiar 123	$f_1$	1,4	0,0342	0,0331	0,0320	0,0310	0,0299	0,0297	0,0281	0,0278	0,0273	0,0272	0,0229	0,3645
	$f_2$	36,6	0,5883	0,5748	0,5619	0,5497	0,5372	0,5264	0,5166	0,5046	0,4925	0,4822	0,0199	0,3167
Pomiar 124	$f_1$	1,4	0,0190	0,0190	0,0185	0,0176	0,0170	0,0164	0,0160	0,0157	0,0148	0,0149	0,0242	0,3854
	$f_2$	36,6	1,0890	1,0620	1,0350	1,0120	0,9859	0,9591	0,9366	0,9147	0,8937	0,8713	0,0223	0,3551
Pomiar 125	$f_1$	1,4	0,0265	0,0264	0,0261	0,0255	0,0250	0,0244	0,0244	0,0223	0,0220	0,0220	0,0186	0,2960
	$f_2$	36,6	0,9073	0,8836	0,8631	0,8456	0,8254	0,8051	0,7862	0,7702	0,7520	0,7360	0,0209	0,3332
Pomiar 126	$f_1$	1,4	0,0239	0,0226	0,0220	0,0219	0,0200	0,0199	0,0193	0,0192	0,0185	0,0184	0,0265	0,4226
	$f_2$	36,6	0,8179	0,7997	0,7824	0,7540	0,7447	0,7305	0,7098	0,6953	0,6808	0,6659	0,0206	0,3274
Pomiar 127	$f_1$	1,4	0,0369	0,0364	0,0340	0,0335	0,0325	0,0320	0,0300	0,0300	0,0297	0,0293	0,0231	0,3673
	$f_2$	36,6	0,8428	0,8225	0,8038	0,7870	0,7689	0,7520	0,7360	0,7215	0,7023	0,6893	0,0201	0,3201

**Legenda i objaśnienia:**  
 $f_1$  - częstotliwość odpowiadająca pierwszej postaci drgań [Hz];  
 $f_2$  - częstotliwość odpowiadająca drugiej postaci drgań [Hz];  
 $a_1, a_{j+1}, \dots$  - kolejne maksymalne przyspieszenia w czasie  $t$  [ $m/s^2$ ];  
 $\delta$  - logarytmiczny dekrement tłumienia [-];  
 $\xi$  - liczba tłumienia [%].

	$f_1$	$f_2$	$\xi_1$	$\xi_2$
Wartości średnie	1,4	36,60	0,381	0,335
odchylenie standardowe	0	0	0,038	0,013
współczynnik zmienności	0	0	0,100	0,0381

## Załącznik 2 – Wyniki badań eksperymentalnych dla aluminiowej belki wspornikowej z podklejoną od dołu warstwą polimeru (Etap I).

**Tab. Z. 2. 1** Liczba tłumienia dwóch pierwszych częstotliwości drgań poprzecznych aluminiowej belki wspornikowej z warstwą polimeru pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 1 kg).

			$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$	$a_8$	$a_9$	$a_{10}$	$\delta$	$\xi$
Pomiar 51	$f_1$	3	0,0603	0,0571	0,0524	0,0494	0,0465	0,0458	0,0437	0,0413	0,0376	0,0364	0,0504	0,8030
	$f_2$	32,9	0,1850	0,1626	0,1443	0,1255	0,1104	0,0955	0,0857	0,0747	0,0683	0,0637	0,1066	1,6975
Pomiar 52	$f_1$	3	0,1810	0,1732	0,1620	0,1531	0,1439	0,1338	0,1245	0,1171	0,1117	0,1053	0,0542	0,8626
	$f_2$	32,8	0,5998	0,5637	0,5154	0,4850	0,4381	0,4035	0,3615	0,3286	0,2890	0,2566	0,0849	1,3520
Pomiar 53	$f_1$	3	0,1909	0,1815	0,1705	0,1635	0,1524	0,1447	0,1342	0,1250	0,1161	0,1119	0,0534	0,8505
	$f_2$	32,9	0,4189	0,3848	0,3486	0,3163	0,2830	0,2521	0,2252	0,2016	0,1811	0,1657	0,0927	1,4768
Pomiar 54	$f_1$	3	0,2057	0,1954	0,1844	0,1748	0,1670	0,1549	0,1447	0,1360	0,1274	0,1190	0,0547	0,8715
	$f_2$	32,9	0,6025	0,5531	0,5034	0,4661	0,4226	0,3884	0,3527	0,3245	0,2885	0,2596	0,0842	1,3407
Pomiar 55	$f_1$	3	0,1290	0,1205	0,1138	0,1057	0,0969	0,0929	0,0834	0,0760	0,0712	0,0655	0,0678	1,0797
	$f_2$	32,9	0,3812	0,3507	0,3181	0,2885	0,2578	0,2324	0,2080	0,1884	0,1710	0,1574	0,0885	1,4085
Pomiar 56	$f_1$	3	0,1344	0,1279	0,1195	0,1112	0,1051	0,0954	0,0898	0,0815	0,0736	0,0691	0,0666	1,0600
	$f_2$	32,9	0,3511	0,3189	0,2894	0,2601	0,2329	0,2102	0,1888	0,1736	0,1591	0,1471	0,0870	1,3853

**Legenda i objaśnienia:**  
 $f_1$  - częstotliwość odpowiadająca pierwszej postaci drgań [Hz];  
 $f_2$  - częstotliwość odpowiadająca drugiej postaci drgań [Hz];  
 $a_1, a_{i+1}, \dots$  - kolejne maksymalne przyspieszenia w czasie  $t$  [ $m/s^2$ ];  
 $\delta$  - logarytmiczny dekrement tłumienia [-];  
 $\xi$  - liczba tłumienia [%].

	$f_1$	$f_2$	$\xi_1$	$\xi_2$
Wartości średnie	3	32,88	0,921	1,443
odchylenie standardowe	0	0,0289	0,083	0,094
współczynnik zmienności	0	0,0009	0,0904	0,0654



**Tab. Z. 2. 2** Liczba tłumienia dwóch pierwszych częstotliwości drgań poprzecznych aluminiowej belki wspornikowej z warstwą polimeru pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 2,5 kg).

			$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$	$a_8$	$a_9$	$a_{10}$	$\delta$	$\xi$
Pomiar 58	$f_1$	2	0,1486	0,1399	0,1306	0,1254	0,1172	0,1122	0,1051	0,1034	0,0998	0,0910	0,0491	0,7812
	$f_2$	31,9	0,7226	0,6603	0,6035	0,5515	0,5034	0,4599	0,4208	0,3861	0,3556	0,3273	0,0792	1,2611
Pomiar 59	$f_1$	2	0,1015	0,0974	0,0947	0,0864	0,0694	0,0641	0,0601	0,0578	0,0564	0,0547	0,0619	0,9857
	$f_2$	31,9	0,9802	0,9055	0,8387	0,7717	0,7096	0,6509	0,5938	0,5430	0,4947	0,4505	0,0777	1,2379
Pomiar 60	$f_1$	2	0,0988	0,0982	0,0914	0,0884	0,0870	0,0848	0,0823	0,0768	0,0733	0,0718	0,0320	0,5089
	$f_2$	32	0,6180	0,5682	0,5209	0,4774	0,4372	0,4041	0,3719	0,3456	0,3183	0,2977	0,0730	1,1631
Pomiar 61	$f_1$	2	0,0808	0,0788	0,0743	0,0684	0,0668	0,0635	0,0624	0,0614	0,0591	0,0570	0,0349	0,5562
	$f_2$	31,9	1,1330	1,0500	0,9701	0,8943	0,8180	0,7466	0,6786	0,6147	0,5598	0,5069	0,0804	1,2807
Pomiar 62	$f_1$	2	0,0740	0,0622	0,0595	0,0571	0,0551	0,0510	0,0507	0,0490	0,0471	0,0466	0,0462	0,7364
	$f_2$	32	0,4884	0,4482	0,4146	0,3826	0,3545	0,3280	0,3069	0,2861	0,2665	0,2501	0,0669	1,0657
Pomiar 63	$f_1$	2	0,1631	0,1577	0,1496	0,1419	0,1364	0,1353	0,1319	0,1301	0,1265	0,1129	0,0368	0,5858
	$f_2$	31,9	1,1650	1,0730	0,9881	0,9025	0,8207	0,7450	0,6732	0,6101	0,5547	0,5023	0,0841	1,3396

**Legenda i objaśnienia:**  
 $f_1$  - częstotliwość odpowiadająca pierwszej postaci drgań [Hz];  
 $f_2$  - częstotliwość odpowiadająca drugiej postaci drgań [Hz];  
 $a_1, a_{j+1}, \dots$  - kolejne maksymalne przyspieszenia w czasie  $t$  [ $m/s^2$ ];  
 $\delta$  - logarytmiczny dekrement tłumienia [-];  
 $\xi$  - liczba tłumienia [%].

	$f_1$	$f_2$	$\xi_1$	$\xi_2$
Wartości średnie	2	31,93	0,692	1,225
odchylenie standardowe	0	0,0365	0,126	0,068
współczynnik zmienności	0	0,0011	0,1824	0,0559

**Tab. Z. 2. 3** Liczba tłumienia dwóch pierwszych częstotliwości drgań poprzecznych aluminiowej belki wspornikowej z warstwą polimeru pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 3,5 kg).

			$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$	$a_8$	$a_9$	$a_{10}$	$\delta$	$\xi$
Pomiar 65	$f_1$	1,7	0,1523	0,1271	0,1172	0,1155	0,1083	0,1062	0,1035	0,1016	0,1006	0,0980	0,0441	0,7017
	$f_2$	31,9	1,0960	1,0190	0,9460	0,8736	0,8079	0,7452	0,6738	0,6229	0,5702	0,5307	0,0725	1,1548
Pomiar 66	$f_1$	1,7	0,1830	0,1768	0,1736	0,1682	0,1573	0,1499	0,1300	0,1198	0,1083	0,0919	0,0689	1,0970
	$f_2$	31,8	1,6560	1,5540	1,4750	1,3860	1,3030	1,2010	1,1190	1,0330	0,9390	0,8607	0,0654	1,0421
Pomiar 67	$f_1$	1,7	0,1893	0,1752	0,1722	0,1690	0,1589	0,1501	0,1469	0,1425	0,1345	0,1301	0,0375	0,5975
	$f_2$	31,8	0,5666	0,5240	0,4884	0,4526	0,4227	0,3917	0,3689	0,3424	0,3232	0,3021	0,0629	1,0014
Pomiar 68	$f_1$	1,7	0,1250	0,1148	0,1108	0,1082	0,1042	0,1008	0,0970	0,0961	0,0946	0,0842	0,0396	0,6301
	$f_2$	31,9	1,2520	1,1610	1,0990	1,0210	0,9489	0,8745	0,8041	0,7343	0,6716	0,6231	0,0698	1,1111
Pomiar 69	$f_1$	1,7	0,1424	0,1319	0,1272	0,1180	0,1100	0,1036	0,1002	0,0995	0,0900	0,0810	0,0564	0,8984
	$f_2$	31,9	1,0840	1,0180	0,9438	0,8804	0,8133	0,7508	0,6856	0,6291	0,5845	0,5397	0,0697	1,1105
Pomiar 70	$f_1$	1,7	0,1178	0,1074	0,0965	0,0946	0,0951	0,0927	0,0920	0,0912	0,0899	0,0783	0,0408	0,6498
	$f_2$	31,8	0,3418	0,3224	0,3040	0,2884	0,2720	0,2583	0,2450	0,2335	0,2213	0,2132	0,0472	0,7514

**Legenda i objaśnienia:**

$f_1$  - częstotliwość odpowiadająca pierwszej postaci drgań [Hz];

$f_2$  - częstotliwość odpowiadająca drugiej postaci drgań [Hz];

$a_1, a_{j+1}, \dots$  - kolejne maksymalne przyspieszenia w czasie  $t$  [ $m/s^2$ ];

$\delta$  - logarytmiczny dekrement tłumienia [-];

$\xi$  - liczba tłumienia [%].

	$f_1$	$f_2$	$\xi_1$	$\xi_2$
Wartości średnie	1,7	31,85	0,762	1,029
odchylenie standardowe	0	0,0387	0,138	0,104
współczynnik zmienności	0	0,0012	0,1815	0,1007

**Tab. Z. 2. 4** Liczba tłumienia dwóch pierwszych częstotliwości drgań poprzecznych belki wspornikowej z warstwą polimeru pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 5 kg).

			$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$	$a_8$	$a_9$	$a_{10}$	$\delta$	$\xi$
Pomiar 72	$f_1$	1,4	0,0628	0,0607	0,0554	0,0456	0,0365	0,0331	0,0298	0,0295	0,0272	0,0234	0,0990	1,5764
	$f_2$	31,8	0,8437	0,7768	0,7003	0,6305	0,5646	0,5024	0,4379	0,3809	0,3291	0,2785	0,1108	1,7649
Pomiar 73	$f_1$	1,4	0,0601	0,0554	0,0453	0,0355	0,0303	0,0300	0,0290	0,0284	0,0280	0,0267	0,0813	1,2939
	$f_2$	31,8	1,2210	1,1370	1,0470	0,9631	0,8782	0,7907	0,6999	0,6207	0,5415	0,4689	0,0957	1,5239
Pomiar 74	$f_1$	1,4	0,0576	0,0532	0,0449	0,0346	0,0311	0,0280	0,0290	0,0283	0,0270	0,0267	0,0769	1,2245
	$f_2$	31,8	0,6763	0,5992	0,5269	0,4600	0,3971	0,3415	0,2912	0,2503	0,2150	0,1860	0,1291	2,0556
Pomiar 75	$f_1$	1,4	0,0615	0,0565	0,0500	0,0364	0,0277	0,0229	0,0225	0,0224	0,0214	0,0207	0,1089	1,7347
	$f_2$	31,8	1,4540	1,3600	1,2660	1,1680	1,0750	0,9710	0,8766	0,7721	0,6887	0,5962	0,0891	1,4196
Pomiar 76	$f_1$	1,4	0,0563	0,0522	0,0444	0,0332	0,0273	0,0237	0,0219	0,0215	0,0206	0,0182	0,1127	1,7953
	$f_2$	31,8	1,1260	1,0350	0,9600	0,8784	0,8018	0,7222	0,6434	0,5657	0,4952	0,4280	0,0967	1,5403
Pomiar 77	$f_1$	1,4	0,0623	0,0576	0,0507	0,0373	0,0280	0,0230	0,0237	0,0250	0,0259	0,0248	0,0921	1,4670
	$f_2$	31,8	1,5650	1,4550	1,3610	1,2670	1,1690	1,0740	0,9758	0,8755	0,7802	0,6897	0,0819	1,3048

**Legenda i objaśnienia:**  
 $f_1$  - częstotliwość odpowiadająca pierwszej postaci drgań [Hz];  
 $f_2$  - częstotliwość odpowiadająca drugiej postaci drgań [Hz];  
 $a_1, a_{i+1}, \dots$  - kolejne maksymalne przyspieszenia w czasie  $t$  [ $m/s^2$ ];  
 $\delta$  - logarytmiczny dekrement tłumienia [-];  
 $\xi$  - liczba tłumienia [%].

	$f_1$	$f_2$	$\xi_1$	$\xi_2$
Wartości średnie	1,4	31,80	1,515	1,602
odchylenie standardowe	0	0	0,163	0,191
współczynnik zmienności	0	0	0,1077	0,1191

**Tab. Z. 2. 5** Liczba tłumienia dwóch pierwszych częstotliwości drgań poprzecznych aluminiowej belki wspornikowej z warstwą polimeru pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 6 kg).

			$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$	$a_8$	$a_9$	$a_{10}$	$\delta$	$\zeta$
Pomiar 79	$f_1$	1,3	0,0614	0,0372	0,0234	0,0133	0,0108	0,0119	0,0122	0,0133	0,0114	0,0111	0,1713	2,7273
	$f_2$	31,8	1,0460	0,9663	0,8900	0,8185	0,7444	0,6750	0,6103	0,5457	0,4869	0,4328	0,0882	1,4052
Pomiar 80	$f_1$	1,3	0,0319	0,0275	0,0221	0,0212	0,0208	0,0202	0,0193	0,0191	0,0190	0,0179	0,0579	0,9220
	$f_2$	31,8	1,1300	1,0440	0,9587	0,8776	0,7982	0,7197	0,6464	0,5751	0,5110	0,4455	0,0931	1,4821
Pomiar 81	$f_1$	1,3	0,0318	0,0270	0,0210	0,0191	0,0179	0,0168	0,0158	0,0155	0,0154	0,0151	0,0744	1,1849
	$f_2$	31,8	0,9750	0,8980	0,8232	0,7531	0,6843	0,6153	0,5539	0,4941	0,4415	0,3926	0,0910	1,4485
Pomiar 82	$f_1$	1,3	0,0664	0,0557	0,0525	0,0455	0,0409	0,0388	0,0380	0,0377	0,0368	0,0338	0,0675	1,0750
	$f_2$	31,8	1,0290	0,9390	0,8708	0,8004	0,7337	0,6650	0,6056	0,5464	0,4882	0,4365	0,0858	1,3655
Pomiar 83	$f_1$	1,3	0,0461	0,0375	0,0287	0,0224	0,0166	0,0155	0,0129	0,0127	0,0121	0,0123	0,1320	2,1025
	$f_2$	31,8	1,2930	1,2020	1,1050	1,0100	0,9142	0,8219	0,7378	0,6595	0,5896	0,5204	0,0910	1,4492
Pomiar 84	$f_1$	1,3	0,0392	0,0353	0,0339	0,0318	0,0305	0,0287	0,0280	0,0258	0,0250	0,0234	0,0516	0,8214
	$f_2$	31,8	1,1570	1,0620	0,9816	0,9105	0,8396	0,7533	0,6988	0,6308	0,5684	0,5071	0,0825	1,3135

**Legenda i objaśnienia:**

$f_1$  - częstotliwość odpowiadająca pierwszej postaci drgań [Hz];

$f_2$  - częstotliwość odpowiadająca drugiej postaci drgań [Hz];

$a_1, a_{j+1}, \dots$  - kolejne maksymalne przyspieszenia w czasie  $t$  [ $m/s^2$ ];

$\delta$  - logarytmiczny dekrement tłumienia [-];

$\zeta$  - liczba tłumienia [%].

	$f_1$	$f_2$	$\zeta_1$	$\zeta_2$
Wartości średnie	1,3	31,80	1,472	1,411
odchylenie standardowe	0	0	0,542	0,044
współczynnik zmienności	0	0	0,3683	0,0313

### Załącznik 3 – Wyniki badań eksperymentalnych dla pojedynczej aluminiowej belki wspornikowej (Etap II).

**Tab. Z. 3. 1** Liczba tłumienia dwóch pierwszych częstotliwości drgań poprzecznych pojedynczej aluminiowej belki wspornikowej.

			$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$	$a_8$	$a_9$	$a_{10}$	$\delta$	$\xi$
Pomiar 231	$f_1$	4	1,5120	1,4850	1,4770	1,4490	1,4310	1,4110	1,3940	1,3760	1,3570	1,3430	0,0119	0,1887
	$f_2$	26,8	2,5390	2,5210	2,5060	2,4960	2,4850	2,4730	2,4540	2,4350	2,4230	2,4130	0,0051	0,0811
Pomiar 232	$f_1$	4	0,7175	0,7116	0,7003	0,6932	0,6871	0,6815	0,6708	0,6653	0,6599	0,6509	0,0097	0,1551
	$f_2$	26,8	0,8821	0,8757	0,8748	0,8678	0,8622	0,8597	0,8548	0,8519	0,8461	0,8386	0,0051	0,0805
Pomiar 233	$f_1$	4	0,9184	0,8872	0,8826	0,8802	0,8702	0,8578	0,8509	0,8403	0,8332	0,8223	0,0111	0,1760
	$f_2$	26,8	1,3220	1,3150	1,3080	1,3010	1,2930	1,2860	1,2780	1,2710	1,2620	1,2550	0,0052	0,0828
Pomiar 234	$f_1$	4	0,6255	0,6136	0,6073	0,6011	0,5963	0,5864	0,5806	0,5773	0,5713	0,5622	0,0107	0,1699
	$f_2$	26,8	1,5840	1,5730	1,5660	1,5560	1,5480	1,5410	1,5330	1,5240	1,5110	1,5030	0,0052	0,0836
Pomiar 235	$f_1$	4	0,8207	0,8076	0,7980	0,7937	0,7850	0,7779	0,7661	0,7620	0,7551	0,7426	0,0100	0,1592
	$f_2$	26,8	0,6839	0,6827	0,6793	0,6755	0,6708	0,6656	0,6634	0,6610	0,6556	0,6517	0,0048	0,0768

**Legenda i objaśnienia:**  
 $f_1$  - częstotliwość odpowiadająca pierwszej postaci drgań [Hz];  
 $f_2$  - częstotliwość odpowiadająca drugiej postaci drgań [Hz];  
 $a_1, a_{i+1}, \dots$  - kolejne maksymalne przyspieszenia w czasie  $t$  [ $m/s^2$ ];  
 $\delta$  - logarytmiczny dekrement tłumienia [-];  
 $\xi$  - liczba tłumienia [%].

	$f_1$	$f_2$	$\xi_1$	$\xi_2$
Wartości średnie	4	26,80	0,170	0,081
odchylenie standardowe	0	0,0000	0,009	0,002
współczynnik zmienności	0	0,0000	0,0501	0,0206

**Tab. Z. 3. 2** Liczba tłumienia dwóch pierwszych częstotliwości drgań poprzecznych pojedynczej aluminiowej belki wspornikowej pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 1 kg).

			$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$	$a_8$	$a_9$	$a_{10}$	$\delta$	$\xi$
Pomiar 237	$f_1$	2,2	0,1770	0,1691	0,1688	0,1635	0,1618	0,1569	0,1534	0,1511	0,1501	0,1461	0,0192	0,3055
	$f_2$	28,4	0,0673	0,0648	0,0628	0,0602	0,0573	0,0527	0,0494	0,0456	0,0430	0,0407	0,0505	0,8035
Pomiar 238	$f_1$	2,2	0,1919	0,1912	0,1882	0,1828	0,1775	0,1762	0,1742	0,1702	0,1668	0,1622	0,0168	0,2677
	$f_2$	28,5	0,0104	0,0102	0,0101	0,0095	0,0091	0,0090	0,0081	0,0080	0,0070	0,0069	0,0419	0,6672
Pomiar 239	$f_1$	2,2	0,1300	0,1231	0,1214	0,1199	0,1155	0,1132	0,1128	0,1119	0,1092	0,1090	0,0176	0,2806
	$f_2$	28,5	0,0152	0,0136	0,0128	0,0123	0,0112	0,0112	0,0109	0,0104	0,0100	0,0097	0,0454	0,7227
Pomiar 240	$f_1$	2,2	0,1998	0,1970	0,1940	0,1915	0,1862	0,1862	0,1806	0,1769	0,1738	0,1690	0,0167	0,2666
	$f_2$	28,6	0,0173	0,0170	0,0169	0,0166	0,0160	0,0158	0,0149	0,0134	0,0121	0,0109	0,0456	0,7260
Pomiar 241	$f_1$	2,2	0,1536	0,1507	0,1480	0,1461	0,1407	0,1391	0,1369	0,1338	0,1314	0,1286	0,0178	0,2829
	$f_2$	28,6	0,0108	0,0107	0,0096	0,0095	0,0094	0,0086	0,0081	0,0076	0,0071	0,0069	0,0448	0,7135
Pomiar 242	$f_1$	2,2	0,2844	0,2778	0,2691	0,2666	0,2602	0,2560	0,2478	0,2430	0,2390	0,2331	0,0199	0,3167
	$f_2$	28,6	0,0136	0,0134	0,0132	0,0125	0,0122	0,0109	0,0101	0,0098	0,0095	0,0093	0,0385	0,6124

**Legenda i objaśnienia:**  
 $f_1$  - częstotliwość odpowiadająca pierwszej postaci drgań [Hz];  
 $f_2$  - częstotliwość odpowiadająca drugiej postaci drgań [Hz];  
 $a_1, a_{j+1}, \dots$  - kolejne maksymalne przyspieszenia w czasie  $t$  [ $m/s^2$ ];  
 $\delta$  - logarytmiczny dekrement tłumienia [-];  
 $\xi$  - liczba tłumienia [%].

	$f_1$	$f_2$	$\xi_1$	$\xi_2$
Wartości średnie	2,2	28,53	0,287	0,708
odchylenie standardowe	0	0,0577	0,014	0,045
współczynnik zmienności	0	0,0020	0,0502	0,0640

**Tab. Z. 3. 3** Liczba tłumienia dwóch pierwszych częstotliwości drgań poprzecznych pojedynczej aluminiowej belki wspornikowej pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 2,5 kg).

			$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$	$a_8$	$a_9$	$a_{10}$	$\delta$	$\xi$
Pomiar 243	$f_1$	1,6	0,0811	0,0794	0,0773	0,0732	0,0715	0,0672	0,0651	0,0645	0,0645	0,0611	0,0282	0,4497
	$f_2$	25,9	0,3692	0,3547	0,3607	0,3579	0,3559	0,3534	0,3481	0,3426	0,3382	0,3324	0,0105	0,1672
Pomiar 244	$f_1$	1,6	0,0818	0,0814	0,0800	0,0765	0,0754	0,0701	0,0696	0,0680	0,0649	0,0640	0,0246	0,3920
	$f_2$	25,9	0,3827	0,3780	0,3711	0,3663	0,3619	0,3574	0,3551	0,3500	0,3422	0,3361	0,0130	0,2068
Pomiar 245	$f_1$	1,6	0,0752	0,0721	0,0647	0,0627	0,0619	0,0602	0,0600	0,0588	0,0585	0,0560	0,0295	0,4691
	$f_2$	25,9	0,3945	0,3885	0,3846	0,3785	0,3756	0,3726	0,3676	0,3643	0,3599	0,3573	0,0099	0,1577
Pomiar 246	$f_1$	1,6	0,0239	0,0232	0,0216	0,0202	0,0201	0,0195	0,0192	0,0187	0,0181	0,0175	0,0310	0,4930
	$f_2$	25,9	0,4769	0,4689	0,4630	0,4598	0,4550	0,4484	0,4425	0,4359	0,4296	0,4242	0,0117	0,1865

**Legenda i objaśnienia:**  
 $f_1$  - częstotliwość odpowiadająca pierwszej postaci drgań [Hz];  
 $f_2$  - częstotliwość odpowiadająca drugiej postaci drgań [Hz];  
 $a_1, a_{j+1}, \dots$  - kolejne maksymalne przyspieszenia w czasie  $t$  [ $m/s^2$ ];  
 $\delta$  - logarytmiczny dekrement tłumienia [-];  
 $\xi$  - liczba tłumienia [%].

	$f_1$	$f_2$	$\xi_1$	$\xi_2$
Wartości średnie	1,6	25,90	0,451	0,180
odchylenie standardowe	0	0,0000	0,024	0,012
współczynnik zmienności	0	0,0000	0,0524	0,0663

**Tab. Z. 3. 4** Liczba tłumienia dwóch pierwszych częstotliwości drgań poprzecznych pojedynczej aluminiowej belki wspornikowej pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 3,5 kg).

			$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$	$a_8$	$a_9$	$a_{10}$	$\delta$	$\zeta$
Pomiar 247	$f_1$	1,5	0,0622	0,0618	0,0598	0,0576	0,0560	0,0559	0,0550	0,0542	0,0522	0,0500	0,0219	0,3481
	$f_2$	29,2	0,3362	0,3315	0,3271	0,3209	0,3140	0,3074	0,3024	0,2992	0,2963	0,2935	0,0136	0,2163
Pomiar 248	$f_1$	1,5	0,0681	0,0663	0,0663	0,0643	0,0635	0,0613	0,0590	0,0577	0,0563	0,0542	0,0228	0,3626
	$f_2$	29,2	0,3067	0,3010	0,2971	0,2960	0,2956	0,2930	0,2902	0,2880	0,2841	0,2792	0,0094	0,1496
Pomiar 249	$f_1$	1,5	0,0723	0,0693	0,0687	0,0673	0,0671	0,0657	0,0635	0,0629	0,0620	0,0602	0,0183	0,2912
	$f_2$	29,2	0,1601	0,1591	0,1565	0,1539	0,1516	0,1498	0,1480	0,1436	0,1382	0,1338	0,0179	0,2858
Pomiar 250	$f_1$	1,5	0,0887	0,0866	0,0832	0,0803	0,0784	0,0767	0,0731	0,0710	0,0693	0,0671	0,0279	0,4437
	$f_2$	29,2	0,1637	0,1623	0,1604	0,1591	0,1581	0,1571	0,1558	0,1535	0,1519	0,1498	0,0089	0,1413
Pomiar 251	$f_1$	1,5	0,0699	0,0678	0,0648	0,0623	0,0622	0,0615	0,0604	0,0559	0,0557	0,0550	0,0239	0,3813
	$f_2$	29,2	0,2696	0,2665	0,2640	0,2623	0,2599	0,2564	0,2517	0,2475	0,2451	0,2442	0,0099	0,1576
Pomiar 252	$f_1$	1,5	0,0451	0,0433	0,0424	0,0421	0,0419	0,0418	0,0411	0,0409	0,0399	0,0359	0,0228	0,3631
	$f_2$	29,2	0,2561	0,2523	0,2488	0,2456	0,2437	0,2415	0,2388	0,2354	0,2306	0,2267	0,0122	0,1942

**Legenda i objaśnienia:**

$f_1$  - częstotliwość odpowiadająca pierwszej postaci drgań [Hz];

$f_2$  - częstotliwość odpowiadająca drugiej postaci drgań [Hz];

$a_1, a_{j+1}, \dots$  - kolejne maksymalne przyspieszenia w czasie  $t$  [ $m/s^2$ ];

$\delta$  - logarytmiczny dekrement tłumienia [-];

$\zeta$  - liczba tłumienia [%].

	$f_1$	$f_2$	$\zeta_1$	$\zeta_2$
Wartości średnie	1,5	29,20	0,365	0,191
odchylenie standardowe	0	0,0000	0,035	0,039
współczynnik zmienności	0	0,0000	0,0957	0,2025



**Tab. Z. 3. 5** Liczba tłumienia dwóch pierwszych częstotliwości drgań poprzecznych pojedynczej aluminiowej belki wspornikowej pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 5 kg).

			$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$	$a_8$	$a_9$	$a_{10}$	$\delta$	$\zeta$
Pomiar 255	$f_1$	1,5	0,0081	0,0079	0,0764	0,0073	0,0070	0,0067	0,0659	0,0062	0,0058	0,0054	0,0398	0,6338
	$f_2$	29,4	0,1229	0,1188	0,1149	0,1106	0,1068	0,1045	0,1016	0,0970	0,0941	0,0920	0,0290	0,4611
Pomiar 256	$f_1$	1,4	0,0246	0,0244	0,0240	0,0237	0,0236	0,0235	0,0233	0,0228	0,0225	0,0219	0,0117	0,1870
	$f_2$	29,4	0,0697	0,0665	0,0659	0,0651	0,0641	0,0634	0,0616	0,0602	0,0593	0,0585	0,0175	0,2791
Pomiar 257	$f_1$	1,3	0,0392	0,0367	0,0342	0,0303	0,0297	0,0292	0,0292	0,0289	0,0284	0,0269	0,0375	0,5970
	$f_2$	29,4	0,1319	0,1285	0,1213	0,1130	0,1084	0,1083	0,1052	0,1027	0,0970	0,0960	0,0318	0,5061
Pomiar 258	$f_1$	1,3	0,0351	0,0334	0,0329	0,0312	0,0296	0,0291	0,0287	0,0285	0,2820	0,0264	0,0282	0,4495
	$f_2$	29,4	0,0764	0,0743	0,0724	0,0712	0,0706	0,0698	0,0690	0,0680	0,0661	0,0641	0,0176	0,2804
Pomiar 259	$f_1$	1,3	0,0338	0,0330	0,0312	0,0309	0,0278	0,0255	0,0255	0,0254	0,0252	0,0246	0,0318	0,5067
	$f_2$	29,4	0,0899	0,0886	0,0855	0,0819	0,0795	0,0780	0,0767	0,0757	0,0742	0,0725	0,0216	0,3437
Pomiar 260	$f_1$	1,3	0,0072	0,0712	0,0068	0,0067	0,0065	0,0063	0,0059	0,0056	0,0052	0,0050	0,0379	0,6037
	$f_2$	29,4	0,2441	0,2403	0,2375	0,2346	0,2317	0,2285	0,2250	0,2214	0,2178	0,2143	0,0130	0,2073

**Legenda i objaśnienia:**  
 $f_1$  - częstotliwość odpowiadająca pierwszej postaci drgań [Hz];  
 $f_2$  - częstotliwość odpowiadająca drugiej postaci drgań [Hz];  
 $a_1, a_{i+1}, \dots$  - kolejne maksymalne przyspieszenia w czasie  $t$  [ $m/s^2$ ];  
 $\delta$  - logarytmiczny dekrement tłumienia [-];  
 $\zeta$  - liczba tłumienia [%].

	$f_1$	$f_2$	$\zeta_1$	$\zeta_2$
Wartości średnie	1,35	29,40	0,496	0,346
odchylenie standardowe	0	0,0000	0,118	0,082
współczynnik zmienności	0	0,0000	0,2372	0,2362

**Tab. Z. 2. 1** Liczba tłumienia dwóch pierwszych częstotliwości drgań poprzecznych pojedynczej aluminiowej belki wspornikowej pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 6 kg).

			$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$	$a_8$	$a_9$	$a_{10}$	$\delta$	$\xi$
Pomiar 261	$f_1$	1,3	0,0117	0,0116	0,0115	0,0115	0,0109	0,0106	0,0102	0,0101	0,0099	0,0098	0,0177	0,2822
	$f_2$	29,4	0,2471	0,2436	0,2413	0,2389	0,2361	0,2321	0,2275	0,2231	0,2188	0,2170	0,0130	0,2068
Pomiar 262	$f_1$	1,3	0,0131	0,0102	0,0121	0,0141	0,0151	0,0131	0,0118	0,0110	0,0109	0,0126	0,0037	0,0596
	$f_2$	29,4	0,2197	0,2169	0,2137	0,2100	0,2069	0,2045	0,2021	0,1988	0,1950	0,1902	0,0144	0,2296
Pomiar 263	$f_1$	1,3	0,0095	0,0086	0,0072	0,0098	0,0088	0,0080	0,0058	0,0043	0,0062	0,0086	0,0099	0,1578
	$f_2$	29,4	0,2454	0,2435	0,2417	0,2388	0,2342	0,2296	0,2256	0,2221	0,2173	0,2148	0,0133	0,2121
Pomiar 264	$f_1$	1,3	0,0187	0,0176	0,0189	0,0204	0,0206	0,0160	0,0142	0,0143	0,0139	0,0151	0,0214	0,3409
	$f_2$	29,4	0,2775	0,2726	0,2685	0,2665	0,2633	0,2611	0,2571	0,2535	0,2504	0,2458	0,0121	0,1932
Pomiar 265	$f_1$	1,3	0,0183	0,0180	0,0201	0,0218	0,0211	0,0189	0,0153	0,0176	0,0175	0,0170	0,0075	0,1199
	$f_2$	29,4	0,2529	0,2491	0,2467	0,2449	0,2421	0,2389	0,2355	0,2332	0,2298	0,2281	0,0103	0,1643

**Legenda i objaśnienia:**  
 $f_1$  - częstotliwość odpowiadająca pierwszej postaci drgań [Hz];  
 $f_2$  - częstotliwość odpowiadająca drugiej postaci drgań [Hz];  
 $a_1, a_{j+1}, \dots$  - kolejne maksymalne przyspieszenia w czasie  $t$  [ $m/s^2$ ];  
 $\delta$  - logarytmiczny dekrement tłumienia [-];  
 $\xi$  - liczba tłumienia [%].

	$f_1$	$f_2$	$\xi_1$	$\xi_2$
Wartości średnie	1,3	29,40	0,192	0,201
odchylenie standardowe	0	0,0000	0,074	0,015
współczynnik zmienności	0	0,0000	0,3832	0,0767

## Załącznik 4 – Wyniki badań eksperymentalnych dla złożonej belki wspornikowej z warstwą polimeru o grubości 0,5 mm (Etap II).

**Tab. Z. 4. 1** Liczba tłumienia dwóch pierwszych częstotliwości drgań poprzecznych złożonej belki wspornikowej z warstwą polimeru o grubości 0,5 mm.

			$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$	$a_8$	$a_9$	$a_{10}$	$\delta$	$\xi$
Pomiar 195	$f_1$	7,7	0,7622	0,7224	0,6843	0,6584	0,6253	0,5842	0,5522	0,5253	0,4925	0,4620	0,0501	0,7972
	$f_2$	40,1	0,5387	0,4933	0,4474	0,4108	0,3793	0,3389	0,3117	0,2863	0,2582	0,2310	0,0847	1,3483
Pomiar 196	$f_1$	7,7	0,6199	0,6088	0,5863	0,5603	0,5274	0,4914	0,4559	0,4292	0,4058	0,3914	0,0460	0,7322
	$f_2$	40,1	0,3082	0,2892	0,2781	0,2446	0,2100	0,1962	0,1873	0,1645	0,1414	0,1320	0,0848	1,3502
Pomiar 197	$f_1$	7,7	0,8667	0,8227	0,7838	0,7433	0,7060	0,6687	0,6358	0,6034	0,5696	0,5429	0,0468	0,7449
	$f_2$	40	0,7563	0,6929	0,6289	0,5749	0,5293	0,4768	0,4342	0,4004	0,3608	0,3210	0,0857	1,3646
Pomiar 198	$f_1$	7,7	0,6971	0,6657	0,6467	0,6175	0,5840	0,5445	0,5098	0,4821	0,4546	0,4341	0,0474	0,7542
	$f_2$	40,2	0,3858	0,3626	0,3434	0,3033	0,2643	0,2451	0,2287	0,2014	0,1748	0,1623	0,0866	1,3788
Pomiar 199	$f_1$	7,7	0,7410	0,7159	0,6825	0,6590	0,6203	0,5808	0,5465	0,5118	0,4839	0,4674	0,0461	0,7338
	$f_2$	40,1	0,4000	0,3634	0,3485	0,3142	0,2694	0,2460	0,2342	0,2093	0,1813	0,1678	0,0869	1,3833
Pomiar 200	$f_1$	7,7	0,6222	0,5952	0,5558	0,5344	0,5087	0,4763	0,4542	0,4286	0,4071	0,3848	0,0481	0,7652
	$f_2$	40,2	0,5941	0,5402	0,4903	0,4498	0,4109	0,3684	0,3364	0,3091	0,2762	0,2478	0,0874	1,3924

**Legenda i objaśnienia:**  
 $f_1$  - częstotliwość odpowiadająca pierwszej postaci drgań [Hz];  
 $f_2$  - częstotliwość odpowiadająca drugiej postaci drgań [Hz];  
 $a_1, a_{i+1}, \dots$  - kolejne maksymalne przyspieszenia w czasie  $t$  [ $m/s^2$ ];  
 $\delta$  - logarytmiczny dekrement tłumienia [-];  
 $\xi$  - liczba tłumienia [%].

	$f_1$	$f_2$	$\xi_1$	$\xi_2$
Wartości średnie	7,7	40,12	0,755	1,370
odchylenie standardowe	0	0,0532	0,017	0,013
współczynnik zmienności	0	0,0013	0,0228	0,0094

**Tab. Z. 4. 2** Liczba tłumienia dwóch pierwszych częstotliwości drgań poprzecznych złożonej belki wspornikowej z warstwą polimeru o grubości 0,5 mm pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 1 kg).

			$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$	$a_8$	$a_9$	$a_{10}$	$\delta$	$\xi$
Pomiar 201	$f_1$	5,3	0,1283	0,1163	0,1083	0,1028	0,0971	0,0902	0,0899	0,0875	0,0849	0,0838	0,0426	0,6788
	$f_2$	40,2	0,8660	0,7840	0,7065	0,6448	0,5943	0,5302	0,4846	0,4466	0,4009	0,3556	0,0890	1,4173
Pomiar 202	$f_1$	5,3	0,1520	0,1349	0,1287	0,1184	0,1102	0,1017	0,0970	0,0943	0,0933	0,0914	0,0509	0,8103
	$f_2$	40,2	0,7144	0,6485	0,5840	0,5306	0,4938	0,4419	0,4001	0,3694	0,3337	0,2959	0,0881	1,4035
Pomiar 203	$f_1$	5,3	0,1484	0,1389	0,1303	0,1215	0,1138	0,1084	0,0991	0,0968	0,0920	0,0877	0,0526	0,8381
	$f_2$	40,2	0,7412	0,6751	0,6087	0,5512	0,5075	0,4554	0,4150	0,3802	0,3413	0,3047	0,0889	1,4155
Pomiar 204	$f_1$	5,3	0,2395	0,2262	0,2111	0,1985	0,1856	0,1753	0,1629	0,1544	0,1445	0,1371	0,0558	0,8883
	$f_2$	40,2	0,6394	0,5831	0,5194	0,4747	0,4357	0,3885	0,3528	0,3263	0,2938	0,2563	0,0914	1,4557
Pomiar 205	$f_1$	5,2	0,1693	0,1558	0,1475	0,1362	0,1321	0,1251	0,1164	0,1101	0,1051	0,0994	0,0532	0,8473
	$f_2$	40,2	0,7380	0,6646	0,6047	0,5516	0,4960	0,4520	0,4153	0,3722	0,3311	0,3022	0,0893	1,4217
Pomiar 206	$f_1$	5,3	0,1628	0,1498	0,1423	0,1330	0,1270	0,1210	0,1196	0,1150	0,1143	0,1104	0,0388	0,6185
	$f_2$	40,2	0,9951	0,8904	0,8152	0,7446	0,6699	0,6096	0,5568	0,4995	0,4436	0,4034	0,0903	1,4378

**Legenda i objaśnienia:**  
 $f_1$  - częstotliwość odpowiadająca pierwszej postaci drgań [Hz];  
 $f_2$  - częstotliwość odpowiadająca drugiej postaci drgań [Hz];  
 $a_1, a_{j+1}, \dots$  - kolejne maksymalne przyspieszenia w czasie  $t$  [ $m/s^2$ ];  
 $\delta$  - logarytmiczny dekrement tłumienia [-];  
 $\xi$  - liczba tłumienia [%].

	$f_1$	$f_2$	$\xi_1$	$\xi_2$
Wartości średnie	5,28	40,20	0,780	1,425
odchylenie standardowe	0	0,0000	0,075	0,013
współczynnik zmienności	0	0,0000	0,0967	0,0092

**Tab. Z. 4. 3** Liczba tłumienia dwóch pierwszych częstotliwości drgań poprzecznych złożonej belki wspornikowej z warstwą polimeru o grubości 0,5 mm pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 2,5 kg).

			$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$	$a_8$	$a_9$	$a_{10}$	$\delta$	$\xi$
Pomiar 207	$f_1$	4,1	0,1675	0,1640	0,1612	0,1559	0,1529	0,1474	0,1414	0,1378	0,1343	0,1303	0,0251	0,3999
	$f_2$	41,5	0,7523	0,6364	0,5484	0,4600	0,3665	0,3012	0,2537	0,2040	0,1602	0,1292	0,1762	2,8054
Pomiar 208	$f_1$	4,1	0,1893	0,1849	0,1810	0,1771	0,1733	0,1668	0,1633	0,1570	0,1528	0,1469	0,0254	0,4038
	$f_2$	41,5	0,9484	0,7912	0,6692	0,5661	0,4689	0,3738	0,3020	0,2471	0,1950	0,1535	0,1821	2,8998
Pomiar 209	$f_1$	4	0,2455	0,2423	0,2384	0,2130	0,2256	0,2173	0,2110	0,2042	0,1975	0,1920	0,0246	0,3914
	$f_2$	41,6	0,9564	0,8302	0,7316	0,6493	0,5611	0,4757	0,4128	0,3591	0,3068	0,2534	0,1328	2,1150
Pomiar 210	$f_1$	4,1	0,2238	0,2183	0,2111	0,2059	0,1977	0,1917	0,1832	0,1767	0,1703	0,1636	0,0313	0,4989
	$f_2$	41,6	0,9769	0,8506	0,7511	0,6581	0,5709	0,4862	0,4188	0,3610	0,3079	0,2577	0,1333	2,1220
Pomiar 211	$f_1$	4	0,1962	0,1925	0,1844	0,1772	0,1732	0,1669	0,1589	0,1543	0,1469	0,1426	0,0319	0,5081
	$f_2$	41,8	0,9099	0,7976	0,7055	0,6222	0,5439	0,4711	0,4078	0,3573	0,3076	0,2620	0,1245	1,9825
Pomiar 212	$f_1$	4	0,2287	0,2242	0,2162	0,2079	0,1977	0,1934	0,1865	0,1792	0,1735	0,1667	0,0316	0,5035
	$f_2$	41,5	0,9551	0,8266	0,7203	0,6235	0,5326	0,4395	0,3735	0,3181	0,2591	0,2121	0,1505	2,3961

**Legenda i objaśnienia:**  
 $f_1$  - częstotliwość odpowiadająca pierwszej postaci drgań [Hz];  
 $f_2$  - częstotliwość odpowiadająca drugiej postaci drgań [Hz];  
 $a_1, a_{j+1}, \dots$  - kolejne maksymalne przyspieszenia w czasie  $t$  [ $m/s^2$ ];  
 $\delta$  - logarytmiczny dekrement tłumienia [-];  
 $\xi$  - liczba tłumienia [%].

	$f_1$	$f_2$	$\xi_1$	$\xi_2$
Wartości średnie	4,05	41,58	0,451	2,387
odchylenie standardowe	0	0,0827	0,041	0,273
współczynnik zmienności	0	0,0020	0,0906	0,1144

**Tab. Z. 4. 4** Liczba tłumienia dwóch pierwszych częstotliwości drgań poprzecznych złożonej belki wspornikowej z warstwą polimeru o grubości 0,5 mm pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 3,5 kg).

			$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$	$a_8$	$a_9$	$a_{10}$	$\delta$	$\xi$
Pomiar 213	$f_1$	3,5	0,0379	0,0363	0,0339	0,0338	0,0295	0,0291	0,0280	0,0261	0,0255	0,0249	0,0420	0,6681
	$f_2$	38,1	0,6790	0,6304	0,5290	0,3973	0,3815	0,3803	0,3232	0,2694	0,2422	0,1944	0,1251	1,9916
Pomiar 214	$f_1$	3,5	0,0463	0,0400	0,0373	0,0342	0,0335	0,0292	0,0290	0,0272	0,0260	0,0256	0,0595	0,9467
	$f_2$	38,1	0,6780	0,6304	0,5296	0,3947	0,3818	0,3815	0,2318	0,2694	0,2422	0,1944	0,1249	1,9892
Pomiar 215	$f_1$	3,6	0,1383	0,1357	0,1322	0,1287	0,1255	0,1207	0,1157	0,1126	0,1090	0,1054	0,0272	0,4326
	$f_2$	38,6	0,4634	0,4283	0,3477	0,2970	0,2673	0,2364	0,2136	0,1855	0,1548	0,1299	0,1272	2,0252
Pomiar 216	$f_1$	3,5	0,1638	0,1590	0,1550	0,1527	0,1468	0,1414	0,1388	0,1353	0,1289	0,1237	0,0281	0,4471
	$f_2$	38,6	0,3935	0,3023	0,2230	0,1978	0,1786	0,1379	0,1323	0,1316	0,1244	0,1195	0,1192	1,8977
Pomiar 217	$f_1$	3,6	0,1160	0,1164	0,1099	0,1031	0,0988	0,0952	0,0947	0,0898	0,0860	0,0839	0,0323	0,5151
	$f_2$	38,5	0,1329	0,1103	0,1180	0,0996	0,0815	0,0614	0,0588	0,0433	0,0405	0,0404	0,1192	1,8981
Pomiar 218	$f_1$	3,5	0,1235	0,1197	0,1146	0,1077	0,1022	0,1002	0,0972	0,0938	0,0885	0,0869	0,0352	0,5599
	$f_2$	38,7	0,1845	0,1576	0,1306	0,0886	0,0762	0,0697	0,0518	0,0514	0,0506	0,0495	0,1315	2,0947

**Legenda i objaśnienia:**

$f_1$  - częstotliwość odpowiadająca pierwszej postaci drgań [Hz];

$f_2$  - częstotliwość odpowiadająca drugiej postaci drgań [Hz];

$a_1, a_{j+1}, \dots$  - kolejne maksymalne przyspieszenia w czasie  $t$  [ $m/s^2$ ];

$\delta$  - logarytmiczny dekrement tłumienia [-];

$\xi$  - liczba tłumienia [%].

	$f_1$	$f_2$	$\xi_1$	$\xi_2$
Wartości średnie	3,53	38,43	0,595	1,983
odchylenie standardowe	0	0,1880	0,136	0,054
współczynnik zmienności	0	0,0049	0,2286	0,0271

**Tab. Z. 4. 5** Liczba tłumienia dwóch pierwszych częstotliwości drgań poprzecznych złożonej belki wspornikowej z warstwą polimeru o grubości 0,5 mm pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 5 kg).

			$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$	$a_8$	$a_9$	$a_{10}$	$\delta$	$\zeta$
Pomiar 219	$f_1$	3,1	0,0872	0,0841	0,0838	0,0782	0,0780	0,0737	0,0703	0,0671	0,0645	0,0627	0,0329	0,5242
	$f_2$	38,5	0,4951	0,4588	0,4215	0,3583	0,3227	0,2958	0,2588	0,2268	0,2014	0,1823	0,0999	1,5909
Pomiar 220	$f_1$	3,1	0,1110	0,1055	0,1035	0,0986	0,0948	0,0929	0,0900	0,0853	0,0831	0,0817	0,0306	0,4874
	$f_2$	38,5	0,8074	0,7353	0,6900	0,6053	0,5338	0,5038	0,4497	0,3840	0,3527	0,3219	0,0920	1,4643
Pomiar 221	$f_1$	3,1	0,1069	0,1045	0,1008	0,0976	0,0937	0,0907	0,0871	0,0847	0,0820	0,0783	0,0312	0,4966
	$f_2$	38,6	0,6029	0,5719	0,5157	0,4433	0,4142	0,3836	0,3242	0,2893	0,2722	0,2355	0,0940	1,4969
Pomiar 222	$f_1$	3,1	0,0895	0,0871	0,0848	0,0802	0,0800	0,0761	0,0727	0,0696	0,0684	0,0655	0,0312	0,4969
	$f_2$	38,6	0,5311	0,4973	0,4479	0,3917	0,3645	0,3306	0,2803	0,2556	0,2353	0,2015	0,0969	1,5432
Pomiar 223	$f_1$	3,1	0,0788	0,0767	0,0742	0,0702	0,0682	0,0651	0,0647	0,0622	0,0592	0,0575	0,0315	0,5013
	$f_2$	38,6	0,6040	0,5459	0,4746	0,4429	0,4072	0,3454	0,3173	0,2903	0,2491	0,2218	0,1002	1,5952
Pomiar 224	$f_1$	3,1	0,0901	0,0855	0,0845	0,0806	0,0798	0,0761	0,0726	0,0699	0,0694	0,0666	0,0302	0,4812
	$f_2$	38,6	0,7758	0,6946	0,6579	0,5958	0,5173	0,4807	0,4429	0,3794	0,3412	0,3158	0,0899	1,4312

**Legenda i objaśnienia:**  
 $f_1$  - częstotliwość odpowiadająca pierwszej postaci drgań [Hz];  
 $f_2$  - częstotliwość odpowiadająca drugiej postaci drgań [Hz];  
 $a_1, a_{i+1}, \dots$  - kolejne maksymalne przyspieszenia w czasie  $t$  [ $m/s^2$ ];  
 $\delta$  - logarytmiczny dekrement tłumienia [-];  
 $\zeta$  - liczba tłumienia [%].

	$f_1$	$f_2$	$\zeta_1$	$\zeta_2$
Wartości średnie	3,1	38,57	0,498	1,520
odchylenie standardowe	0	0,0365	0,010	0,048
współczynnik zmienności	0	0,0009	0,0210	0,0314

**Tab. Z. 4. 6** Liczba tłumienia dwóch pierwszych częstotliwości drgań poprzecznych złożonej belki wspornikowej z warstwą polimeru o grubości 0,5 mm pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 6 kg).

			$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$	$a_8$	$a_9$	$a_{10}$	$\delta$	$\xi$
Pomiar 225	$f_1$	2,9	0,0552	0,0533	0,0518	0,0507	0,0469	0,0460	0,0453	0,0405	0,0401	0,0398	0,0327	0,5209
	$f_2$	38,5	0,6636	0,6305	0,5798	0,5102	0,4663	0,4356	0,3890	0,3466	0,3197	0,2858	0,0842	1,3414
Pomiar 226	$f_1$	2,8	0,0528	0,0514	0,0483	0,0472	0,0457	0,0429	0,0429	0,0403	0,0402	0,0381	0,0327	0,5208
	$f_2$	38,5	0,5313	0,5060	0,4650	0,4059	0,3737	0,3488	0,3094	0,2753	0,2553	0,2313	0,0832	1,3242
Pomiar 227	$f_1$	2,8	0,0640	0,0628	0,0615	0,0602	0,0587	0,0560	0,0545	0,0530	0,0515	0,0462	0,0326	0,5189
	$f_2$	38,6	0,3825	0,3480	0,3289	0,2960	0,2629	0,2404	0,2186	0,1901	0,1729	0,1583	0,0882	1,4048
Pomiar 228	$f_1$	2,8	0,0634	0,0603	0,0576	0,0547	0,0526	0,0504	0,0478	0,0460	0,0451	0,0432	0,0383	0,6100
	$f_2$	38,6	0,4423	0,4158	0,3939	0,3412	0,3086	0,2905	0,2640	0,2312	0,2123	0,1945	0,0822	1,3082
Pomiar 229	$f_1$	2,8	0,0639	0,0611	0,0594	0,0545	0,0533	0,0506	0,0501	0,0495	0,0472	0,0421	0,0417	0,6637
	$f_2$	38,7	0,5756	0,5079	0,4623	0,4331	0,3954	0,3522	0,3234	0,2979	0,2629	0,2364	0,0890	1,4170
Pomiar 230	$f_1$	2,8	0,0850	0,0848	0,0822	0,0815	0,0798	0,0754	0,0724	0,0682	0,0669	0,0647	0,0272	0,4334
	$f_2$	38,6	0,5334	0,4889	0,4536	0,4098	0,3674	0,3386	0,3060	0,2675	0,2440	0,2243	0,0866	1,3794

**Legenda i objaśnienia:**

$f_1$  - częstotliwość odpowiadająca pierwszej postaci drgań [Hz];

$f_2$  - częstotliwość odpowiadająca drugiej postaci drgań [Hz];

$a_1, a_{j+1}, \dots$  - kolejne maksymalne przyspieszenia w czasie  $t$  [ $m/s^2$ ];

$\delta$  - logarytmiczny dekrement tłumienia [-];

$\xi$  - liczba tłumienia [%].

	$f_1$	$f_2$	$\xi_1$	$\xi_2$
Wartości średnie	2,82	38,58	0,545	1,363
odchylenie standardowe	0	0,0532	0,057	0,031
współczynnik zmienności	0	0,0014	0,1049	0,0231



## Załącznik 5 – Wyniki badań eksperymentalnych dla złożonej belki wspornikowej z warstwą polimeru o grubości 1,2 mm (Etap II).

**Tab. Z. 5. 1** Liczba tłumienia dwóch pierwszych częstotliwości drgań poprzecznych złożonej belki wspornikowej z warstwą polimeru o grubości 1,2 mm.

			$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$	$a_8$	$a_9$	$a_{10}$	$\delta$	$\zeta$
Pomiar 159	$f_1$	8,3	0,7051	0,6704	0,6334	0,6006	0,5786	0,5521	0,5243	0,5030	0,4762	0,4438	0,0463	0,7372
	$f_2$	39,9	0,4545	0,4120	0,3968	0,3658	0,3185	0,2900	0,2746	0,2489	0,2200	0,2013	0,0814	1,2968
Pomiar 160	$f_1$	8,3	0,6899	0,6516	0,6205	0,5929	0,5649	0,5391	0,5121	0,4936	0,4674	0,4416	0,0446	0,7104
	$f_2$	39,9	0,4977	0,4550	0,4363	0,3989	0,3481	0,3191	0,2988	0,2717	0,2407	0,2233	0,0801	1,2762
Pomiar 161	$f_1$	8,3	0,5755	0,5503	0,5233	0,4970	0,4736	0,4513	0,4300	0,4073	0,3917	0,3683	0,0446	0,7107
	$f_2$	39,9	0,3729	0,3575	0,3248	0,2819	0,2594	0,2476	0,2243	0,1983	0,1817	0,1706	0,0782	1,2452
Pomiar 162	$f_1$	8,3	0,5400	0,5115	0,4876	0,4643	0,4391	0,4205	0,4004	0,3788	0,3638	0,3469	0,0443	0,7047
	$f_2$	39,9	0,3579	0,3465	0,3206	0,2797	0,2548	0,2403	0,2176	0,1917	0,1767	0,1670	0,0762	1,2138
Pomiar 163	$f_1$	8,3	0,5901	0,5548	0,5273	0,4979	0,4751	0,4525	0,4343	0,4126	0,3899	0,3707	0,0465	0,7403
	$f_2$	39,9	0,4071	0,3729	0,3575	0,3238	0,2836	0,2605	0,2476	0,2243	0,1991	0,1820	0,0805	1,2819
Pomiar 164	$f_1$	8,3	0,6966	0,6547	0,6195	0,5899	0,5710	0,5314	0,5327	0,5057	0,4750	0,4423	0,0454	0,7233
	$f_2$	40,2	0,3555	0,3034	0,2791	0,3659	0,2391	0,2116	0,1967	0,1819	0,1670	0,1468	0,0884	1,4084

**Legenda i objaśnienia:**  
 $f_1$  - częstotliwość odpowiadająca pierwszej postaci drgań [Hz];  
 $f_2$  - częstotliwość odpowiadająca drugiej postaci drgań [Hz];  
 $a_1, a_{i+1}, \dots$  - kolejne maksymalne przyspieszenia w czasie  $t$  [ $m/s^2$ ];  
 $\delta$  - logarytmiczny dekrement tłumienia [-];  
 $\zeta$  - liczba tłumienia [%].

	$f_1$	$f_2$	$\zeta_1$	$\zeta_2$
Wartości średnie	8,3	39,95	0,721	1,287
odchylenie standardowe	0	0,0866	0,011	0,047
współczynnik zmienności	0	0,0022	0,0147	0,0365

**Tab. Z. 5. 2** Liczba tłumienia dwóch pierwszych częstotliwości drgań poprzecznych złożonej belki wspornikowej z warstwą polimeru o grubości 1,2 mm pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 1 kg).

			$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$	$a_8$	$a_9$	$a_{10}$	$\delta$	$\xi$
Pomiar 165	$f_1$	5,6	0,0279	0,0261	0,0250	0,0232	0,0220	0,0203	0,0191	0,0178	0,0165	0,0156	0,0579	0,9220
	$f_2$	40,1	0,9964	0,9159	0,8375	0,7671	0,7177	0,6572	0,5983	0,5453	0,5014	0,4533	0,0788	1,2541
Pomiar 166	$f_1$	5,6	0,0211	0,0203	0,0191	0,0183	0,0170	0,0158	0,0148	0,0137	0,0128	0,0120	0,0565	0,8998
	$f_2$	40,1	0,5514	0,5126	0,4666	0,4296	0,3926	0,3541	0,3242	0,2971	0,2731	0,2498	0,0792	1,2608
Pomiar 167	$f_1$	5,6	0,2623	0,2494	0,2378	0,2240	0,2093	0,1964	0,1835	0,1697	0,1568	0,1460	0,0586	0,9329
	$f_2$	40,1	0,8711	0,7982	0,7301	0,6711	0,6258	0,5704	0,5212	0,4774	0,4346	0,3937	0,0794	1,2646
Pomiar 168	$f_1$	5,6	0,2274	0,2162	0,2033	0,1909	0,1788	0,1654	0,1530	0,1428	0,1346	0,1252	0,0597	0,9503
	$f_2$	40,1	0,8704	0,7986	0,7261	0,6670	0,6240	0,5694	0,5170	0,4761	0,4309	0,3880	0,0808	1,2865
Pomiar 169	$f_1$	5,6	0,2163	0,2045	0,1905	0,1800	0,1673	0,1562	0,1456	0,1358	0,1265	0,1194	0,0594	0,9462
	$f_2$	40,2	0,6903	0,6308	0,5764	0,5275	0,4931	0,4489	0,4102	0,3749	0,3399	0,3062	0,0813	1,2944
Pomiar 170	$f_1$	5,6	0,2524	0,2406	0,2263	0,2136	0,1999	0,1873	0,1725	0,1639	0,1509	0,1413	0,0580	0,9238
	$f_2$	40,2	0,8267	0,7571	0,6899	0,6322	0,5906	0,5413	0,4931	0,4491	0,4095	0,3690	0,0807	1,2845

**Legenda i objaśnienia:**  
 $f_1$  - częstotliwość odpowiadająca pierwszej postaci drgań [Hz];  
 $f_2$  - częstotliwość odpowiadająca drugiej postaci drgań [Hz];  
 $a_1, a_{j+1}, \dots$  - kolejne maksymalne przyspieszenia w czasie  $t$  [ $m/s^2$ ];  
 $\delta$  - logarytmiczny dekrement tłumienia [-];  
 $\xi$  - liczba tłumienia [%].

	$f_1$	$f_2$	$\xi_1$	$\xi_2$
Wartości średnie	5,6	40,13	0,929	1,274
odchylenie standardowe	0	0,0365	0,013	0,012
współczynnik zmienności	0	0,0009	0,0140	0,0091

**Tab. Z. 5. 3** Liczba tłumienia dwóch pierwszych częstotliwości drgań poprzecznych złożonej belki wspornikowej z warstwą polimeru o grubości 1,2 mm pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 2,5 kg).

			$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$	$a_8$	$a_9$	$a_{10}$	$\delta$	$\xi$
Pomiar 171	$f_1$	4,3	0,1388	0,1317	0,1248	0,1174	0,1140	0,1069	0,1008	0,0949	0,0891	0,0868	0,0470	0,7477
	$f_2$	40,7	1,3050	1,1720	1,0480	0,9318	0,8181	0,7275	0,6377	0,5529	0,4879	0,4364	0,1095	1,7443
Pomiar 172	$f_1$	4,3	0,1488	0,1450	0,1376	0,1285	0,1241	0,1173	0,1116	0,1065	0,1006	0,0934	0,0465	0,7409
	$f_2$	40,7	0,9414	0,8492	0,7530	0,6685	0,5900	0,5259	0,4569	0,3980	0,3533	0,3143	0,1097	1,7468
Pomiar 173	$f_1$	4,3	0,1692	0,1611	0,1544	0,1488	0,1406	0,1343	0,1261	0,1213	0,1135	0,1074	0,0455	0,7238
	$f_2$	40,6	0,9425	0,8409	0,7434	0,6591	0,5815	0,5148	0,4427	0,3876	0,3386	0,3024	0,1137	1,8102
Pomiar 174	$f_1$	4,3	0,1229	0,1101	0,1080	0,1071	0,1015	0,0916	0,0858	0,0846	0,0805	0,0732	0,0519	0,8260
	$f_2$	40,8	0,9179	0,8152	0,7286	0,6478	0,5656	0,5007	0,4405	0,3856	0,3366	0,3002	0,1118	1,7797
Pomiar 175	$f_1$	4,3	0,1429	0,1377	0,1304	0,1256	0,1194	0,1131	0,1060	0,1022	0,0967	0,0916	0,0445	0,7085
	$f_2$	40,7	1,0090	0,8972	0,7960	0,7038	0,6203	0,5423	0,4811	0,4191	0,3695	0,3304	0,1116	1,7777
Pomiar 176	$f_1$	4,3	0,1536	0,1465	0,1391	0,1320	0,1256	0,1190	0,1127	0,1081	0,1034	0,0964	0,0465	0,7411
	$f_2$	40,8	1,2160	1,0830	0,9658	0,8598	0,7543	0,6643	0,5824	0,5113	0,4444	0,3937	0,1128	1,7958

**Legenda i objaśnienia:**  
 $f_1$  - częstotliwość odpowiadająca pierwszej postaci drgań [Hz];  
 $f_2$  - częstotliwość odpowiadająca drugiej postaci drgań [Hz];  
 $a_1, a_{j+1}, \dots$  - kolejne maksymalne przyspieszenia w czasie  $t$  [ $m/s^2$ ];  
 $\delta$  - logarytmiczny dekrement tłumienia [-];  
 $\xi$  - liczba tłumienia [%].

	$f_1$	$f_2$	$\xi_1$	$\xi_2$
Wartości średnie	4,3	40,72	0,748	1,776
odchylenie standardowe	0	0,0532	0,029	0,019
współczynnik zmienności	0	0,0013	0,0386	0,0104

**Tab. Z. 5. 4** Liczba tłumienia dwóch pierwszych częstotliwości drgań poprzecznych złożonej belki wspornikowej z warstwą polimeru o grubości 1,2 mm pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 3,5 kg).

			$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$	$a_8$	$a_9$	$a_{10}$	$\delta$	$\zeta$
Pomiar 177	$f_1$	3,7	0,1070	0,0989	0,0937	0,0886	0,0846	0,0797	0,0748	0,0717	0,0659	0,0623	0,0541	0,8615
	$f_2$	41,2	0,7009	0,5558	0,4388	0,3497	0,2872	0,2264	0,1759	0,1501	0,1385	0,1275	0,1704	2,7138
Pomiar 178	$f_1$	3,7	0,1048	0,0994	0,0934	0,0918	0,0830	0,0762	0,0733	0,0681	0,0653	0,0628	0,0512	0,8160
	$f_2$	41,3	0,4562	0,3598	0,2795	0,2205	0,1741	0,1463	0,1282	0,1150	0,1110	0,1002	0,1516	2,4136
Pomiar 179	$f_1$	3,7	0,1115	0,1034	0,0957	0,0923	0,0872	0,0816	0,0771	0,0729	0,0681	0,0655	0,0533	0,8483
	$f_2$	41,5	0,9026	0,7532	0,6209	0,5165	0,4197	0,3359	0,2677	0,2110	0,1661	0,1253	0,1975	3,1442
Pomiar 180	$f_1$	3,7	0,0949	0,0895	0,0851	0,0788	0,0746	0,0733	0,0672	0,0635	0,0597	0,0559	0,0529	0,8428
	$f_2$	41,5	0,7229	0,5971	0,4818	0,3913	0,3127	0,2473	0,1882	0,1440	0,1107	0,0883	0,2103	3,3482
Pomiar 181	$f_1$	3,7	0,0945	0,0861	0,0822	0,0763	0,0726	0,0669	0,0651	0,0598	0,0582	0,0541	0,0557	0,8870
	$f_2$	41,4	0,5760	0,4691	0,3731	0,3002	0,2363	0,1751	0,1296	0,0991	0,0928	0,0903	0,1853	2,9511
Pomiar 182	$f_1$	3,7	0,1117	0,1064	0,0999	0,0950	0,0891	0,0840	0,0800	0,0752	0,0723	0,0677	0,0501	0,7973
	$f_2$	41,7	0,3573	0,2808	0,2189	0,1668	0,1321	0,0968	0,0791	0,0688	0,0551	0,0461	0,2048	3,2618

**Legenda i objaśnienia:**

$f_1$  - częstotliwość odpowiadająca pierwszej postaci drgań [Hz];

$f_2$  - częstotliwość odpowiadająca drugiej postaci drgań [Hz];

$a_1, a_{j+1}, \dots$  - kolejne maksymalne przyspieszenia w czasie  $t$  [ $m/s^2$ ];

$\delta$  - logarytmiczny dekrement tłumienia [-];

$\zeta$  - liczba tłumienia [%].

	$f_1$	$f_2$	$\zeta_1$	$\zeta_2$
Wartości średnie	3,7	41,43	0,842	2,972
odchylenie standardowe	0	0,1238	0,023	0,252
współczynnik zmienności	0	0,0030	0,0269	0,0847

**Tab. Z. 5. 5** Liczba tłumienia dwóch pierwszych częstotliwości drgań poprzecznych złożonej belki wspornikowej z warstwą polimeru o grubości 1,2 mm pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 5 kg).

			$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$	$a_8$	$a_9$	$a_{10}$	$\delta$	$\zeta$
Pomiar 183	$f_1$	3,2	0,0670	0,0627	0,0572	0,0551	0,0508	0,0478	0,0456	0,0436	0,0429	0,0403	0,0509	0,8098
	$f_2$	37,8	0,6756	0,5087	0,3708	0,2919	0,2716	0,2511	0,1837	0,1471	0,1455	0,1230	0,1703	2,7124
Pomiar 184	$f_1$	3,2	0,0650	0,0617	0,0576	0,0529	0,0496	0,0489	0,0442	0,0423	0,0408	0,0397	0,0493	0,7846
	$f_2$	37,8	0,3423	0,2371	0,1900	0,1648	0,1124	0,1096	0,0959	0,0920	0,0820	0,0794	0,1461	2,3267
Pomiar 185	$f_1$	3,2	0,0753	0,0728	0,0661	0,0614	0,0576	0,0541	0,0525	0,0475	0,0455	0,0448	0,0519	0,8266
	$f_2$	37,7	0,1543	0,1288	0,1038	0,0952	0,0788	0,0666	0,0503	0,0414	0,0323	0,0250	0,1818	2,8956
Pomiar 186	$f_1$	3,2	0,0633	0,0612	0,0554	0,0536	0,0510	0,0495	0,0435	0,0417	0,0388	0,0377	0,0519	0,8260
	$f_2$	37,9	0,1306	0,1217	0,1000	0,0898	0,0665	0,0558	0,0397	0,0325	0,0218	0,0210	0,1830	2,9140
Pomiar 187	$f_1$	3,2	0,0983	0,0928	0,0891	0,0839	0,0773	0,0748	0,0712	0,0671	0,0628	0,0591	0,0509	0,8100
	$f_2$	37,8	0,1296	0,1258	0,1094	0,1026	0,0809	0,0662	0,0460	0,0343	0,0219	0,0199	0,1876	2,9869
Pomiar 188	$f_1$	3,2	0,0815	0,0776	0,0722	0,0673	0,0650	0,0603	0,0577	0,0540	0,0529	0,0517	0,0456	0,7260
	$f_2$	37,9	0,2042	0,1665	0,1328	0,1160	0,0917	0,0767	0,0600	0,0500	0,0365	0,0318	0,1860	2,9622

**Legenda i objaśnienia:**  
 $f_1$  - częstotliwość odpowiadająca pierwszej postaci drgań [Hz];  
 $f_2$  - częstotliwość odpowiadająca drugiej postaci drgań [Hz];  
 $a_1, a_{i+1}, \dots$  - kolejne maksymalne przyspieszenia w czasie  $t$  [ $m/s^2$ ];  
 $\delta$  - logarytmiczny dekrement tłumienia [-];  
 $\zeta$  - liczba tłumienia [%].

	$f_1$	$f_2$	$\zeta_1$	$\zeta_2$
Wartości średnie	3,2	37,82	0,797	2,800
odchylenie standardowe	0	0,0532	0,027	0,177
współczynnik zmienności	0	0,0014	0,0338	0,0634

**Tab. Z. 5. 6** Liczba tłumienia dwóch pierwszych częstotliwości drgań poprzecznych złożonej belki wspornikowej z warstwą polimeru o grubości 1,2 mm pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 6 kg).

			$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$	$a_8$	$a_9$	$a_{10}$	$\delta$	$\zeta$
Pomiar 189	$f_1$	2,9	0,0502	0,0486	0,0466	0,0420	0,0394	0,0383	0,0371	0,0354	0,0337	0,0304	0,0501	0,7971
	$f_2$	38,3	0,5262	0,4383	0,3791	0,3126	0,2685	0,2196	0,1933	0,1617	0,1443	0,1253	0,1435	2,2850
Pomiar 190	$f_1$	3	0,0372	0,0367	0,0322	0,0310	0,0288	0,0243	0,0239	0,0226	0,0224	0,0208	0,0583	0,9277
	$f_2$	38,4	0,3451	0,2849	0,2534	0,2068	0,1849	0,1531	0,1374	0,1154	0,1016	0,0856	0,1394	2,2192
Pomiar 191	$f_1$	3	0,0467	0,0406	0,0394	0,0376	0,0354	0,0320	0,0290	0,0277	0,0266	0,0255	0,0604	0,9615
	$f_2$	38,4	0,3149	0,2560	0,2259	0,1848	0,1626	0,1359	0,1178	0,1029	0,0886	0,0790	0,1382	2,2011
Pomiar 192	$f_1$	3	0,0572	0,0556	0,0493	0,0445	0,0415	0,0389	0,0374	0,0346	0,0320	0,0303	0,0634	1,0100
	$f_2$	38,4	0,2460	0,2241	0,1846	0,1645	0,1361	0,1199	0,1033	0,0895	0,0780	0,0676	0,1292	2,0569
Pomiar 193	$f_1$	3	0,0532	0,0513	0,0477	0,0434	0,0394	0,0384	0,0331	0,0293	0,0282	0,0269	0,0684	1,0888
	$f_2$	38,3	0,3988	0,3232	0,2929	0,2350	0,2141	0,1722	0,1576	0,1325	0,1194	0,1013	0,1370	2,1821
Pomiar 194	$f_1$	2,9	0,0567	0,0523	0,0490	0,0428	0,0422	0,0389	0,0380	0,0365	0,0328	0,0296	0,0649	1,0340
	$f_2$	38,2	0,4952	0,4127	0,3612	0,2933	0,2495	0,1984	0,1694	0,1414	0,1241	0,1060	0,1542	2,4547

**Legenda i objaśnienia:**  
 $f_1$  - częstotliwość odpowiadająca pierwszej postaci drgań [Hz];  
 $f_2$  - częstotliwość odpowiadająca drugiej postaci drgań [Hz];  
 $a_1, a_{j+1}, \dots$  - kolejne maksymalne przyspieszenia w czasie  $t$  [ $m/s^2$ ];  
 $\delta$  - logarytmiczny dekrement tłumienia [-];  
 $\zeta$  - liczba tłumienia [%].

	$f_1$	$f_2$	$\zeta_1$	$\zeta_2$
Wartości średnie	2,97	38,33	0,970	2,233
odchylenie standardowe	0	0,0577	0,072	0,093
współczynnik zmienności	0	0,0015	0,0740	0,0417

## Załącznik 6 – Wyniki badań eksperymentalnych dla złożonej belki wspornikowej z warstwą polimeru o grubości 1,75 mm (Etap II).

**Tab. Z. 6. 1** Liczba tłumienia dwóch pierwszych częstotliwości drgań poprzecznych złożonej belki wspornikowej z warstwą polimeru o grubości 1,75 mm.

			$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$	$a_8$	$a_9$	$a_{10}$	$\delta$	$\zeta$
Pomiar 123	$f_1$	8,2	0,3739	0,3435	0,3230	0,3056	0,2878	0,2694	0,2506	0,2306	0,2109	0,1979	0,0636	1,0131
	$f_2$	38,3	0,3769	0,3642	0,3469	0,3100	0,2728	0,2483	0,2307	0,2111	0,1907	0,1734	0,0776	1,2363
Pomiar 124	$f_1$	8,2	0,3783	0,3584	0,3406	0,3140	0,2872	0,2625	0,2455	0,2266	0,2152	0,2073	0,0602	0,9578
	$f_2$	38,3	0,2909	0,2551	0,2371	0,2257	0,2040	0,1782	0,1616	0,1527	0,1414	0,1272	0,0827	1,3172
Pomiar 125	$f_1$	8,2	0,4171	0,3967	0,3649	0,3450	0,3206	0,2976	0,2773	0,2584	0,2477	0,2263	0,0611	0,9737
	$f_2$	38,2	0,2198	0,2072	0,1960	0,1837	0,1651	0,1466	0,1307	0,1147	0,1035	0,0955	0,0834	1,3275
Pomiar 126	$f_1$	8,2	0,3896	0,3683	0,3507	0,3261	0,3030	0,2776	0,2607	0,2422	0,2242	0,2185	0,0578	0,9209
	$f_2$	38,3	0,4366	0,4170	0,3748	0,3288	0,2983	0,2811	0,2584	0,2267	0,2057	0,1912	0,0826	1,3148
Pomiar 127	$f_1$	8,2	0,3699	0,3550	0,3389	0,3145	0,2905	0,2685	0,2477	0,2282	0,2152	0,2038	0,0596	0,9492
	$f_2$	38,3	0,4218	0,4055	0,3868	0,3449	0,3034	0,2777	0,2589	0,2373	0,2120	0,1933	0,0780	1,2425
Pomiar 128	$f_1$	8,2	0,4016	0,3835	0,3580	0,3224	0,3036	0,2792	0,2573	0,2396	0,2214	0,2100	0,0648	1,0324
	$f_2$	38,3	0,3704	0,3268	0,2983	0,2796	0,2556	0,2269	0,2062	0,1907	0,1742	0,1582	0,0851	1,3547

**Legenda i objaśnienia:**  
 $f_1$  - częstotliwość odpowiadająca pierwszej postaci drgań [Hz];  
 $f_2$  - częstotliwość odpowiadająca drugiej postaci drgań [Hz];  
 $a_1, a_{i+1}, \dots$  - kolejne maksymalne przyspieszenia w czasie  $t$  [ $m/s^2$ ];  
 $\delta$  - logarytmiczny dekrement tłumienia [-];  
 $\zeta$  - liczba tłumienia [%].

	$f_1$	$f_2$	$\zeta_1$	$\zeta_2$
Wartości średnie	8,2	38,28	0,975	1,299
odchylenie standardowe	0	0,0289	0,029	0,034
współczynnik zmienności	0	0,0008	0,0301	0,0262

**Tab. Z. 6. 2** Liczba tłumienia dwóch pierwszych częstotliwości drgań poprzecznych złożonej belki wspornikowej z warstwą polimeru o grubości 1,75 mm pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 1 kg).

			$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$	$a_8$	$a_9$	$a_{10}$	$\delta$	$\xi$
Pomiar 129	$f_1$	5,6	0,1937	0,1901	0,1792	0,1755	0,1623	0,1520	0,1412	0,1335	0,1229	0,1155	0,0517	0,8233
	$f_2$	38,5	0,4237	0,4034	0,3756	0,3431	0,3089	0,2779	0,2747	0,2186	0,1948	0,1778	0,0868	1,3827
Pomiar 130	$f_1$	5,6	0,1953	0,1844	0,1677	0,1492	0,1331	0,1181	0,1052	0,0962	0,0890	0,0853	0,0829	1,3194
	$f_2$	38,5	0,4879	0,4507	0,4218	0,3964	0,3706	0,3395	0,3056	0,2727	0,2430	0,2150	0,0819	1,3049
Pomiar 131	$f_1$	5,6	0,1728	0,1605	0,1560	0,1446	0,1329	0,1227	0,1108	0,1051	0,0951	0,0833	0,0730	1,1619
	$f_2$	38,5	0,3921	0,3677	0,3381	0,3104	0,2795	0,2491	0,2220	0,1969	0,1777	0,1593	0,0901	1,4343
Pomiar 132	$f_1$	5,6	0,2132	0,2080	0,1984	0,1908	0,1831	0,1712	0,1631	0,1495	0,1398	0,1297	0,0497	0,7914
	$f_2$	38,5	0,4436	0,4207	0,3951	0,3649	0,3308	0,2980	0,2679	0,2355	0,2092	0,1885	0,0856	1,3628
Pomiar 133	$f_1$	5,6	0,2235	0,2075	0,1975	0,1779	0,1643	0,1495	0,1401	0,1284	0,1178	0,1098	0,0711	1,1318
	$f_2$	38,5	0,4964	0,4695	0,4427	0,4075	0,3697	0,3329	0,2956	0,2600	0,2321	0,2099	0,0861	1,3706
Pomiar 134	$f_1$	5,6	0,2064	0,1952	0,1816	0,1678	0,1500	0,1384	0,1226	0,1155	0,1104	0,1014	0,0711	1,1318
	$f_2$	38,5	0,4046	0,3674	0,3392	0,3040	0,2692	0,2388	0,2096	0,1904	0,1729	0,1600	0,0928	1,4773

**Legenda i objaśnienia:**  
 $f_1$  - częstotliwość odpowiadająca pierwszej postaci drgań [Hz];  
 $f_2$  - częstotliwość odpowiadająca drugiej postaci drgań [Hz];  
 $a_1, a_{j+1}, \dots$  - kolejne maksymalne przyspieszenia w czasie  $t$  [ $m/s^2$ ];  
 $\delta$  - logarytmiczny dekrement tłumienia [-];  
 $\xi$  - liczba tłumienia [%].

	$f_1$	$f_2$	$\xi_1$	$\xi_2$
Wartości średnie	5,6	38,50	1,060	1,389
odchylenie standardowe	0	0,0000	0,147	0,042
współczynnik zmienności	0	0,0000	0,1387	0,0305



**Tab. Z. 6. 3** Liczba tłumienia dwóch pierwszych częstotliwości drgań poprzecznych złożonej belki wspornikowej z warstwą polimeru o grubości 1,75 mm pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 2,5 kg).

			$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$	$a_8$	$a_9$	$a_{10}$	$\delta$	$\xi$
Pomiar 135	$f_1$	4,3	0,1103	0,1044	0,0996	0,0966	0,0896	0,0848	0,0739	0,0691	0,0661	0,0642	0,0541	0,8613
	$f_2$	39,2	0,8246	0,7464	0,6732	0,6095	0,5607	0,5068	0,4601	0,4194	0,3779	0,3374	0,0894	1,4230
Pomiar 136	$f_1$	4,2	0,1499	0,1452	0,1341	0,1266	0,1210	0,1075	0,1068	0,1015	0,0948	0,0860	0,0555	0,8840
	$f_2$	39,2	1,1370	1,0460	0,9729	0,8781	0,7817	0,7161	0,6542	0,5871	0,5303	0,4854	0,0851	1,3554
Pomiar 137	$f_1$	4,3	0,1080	0,1053	0,1008	0,0940	0,0838	0,0803	0,0754	0,0696	0,0665	0,0621	0,0554	0,8817
	$f_2$	39,2	1,1140	1,0150	0,9329	0,8591	0,7754	0,6960	0,6333	0,5746	0,5139	0,4621	0,0880	1,4012
Pomiar 138	$f_1$	4,3	0,1299	0,1255	0,1180	0,1090	0,1032	0,0957	0,0887	0,0853	0,0802	0,0732	0,0574	0,9140
	$f_2$	39,3	1,3270	1,2200	1,1200	1,0130	0,9093	0,8223	0,7436	0,6702	0,6046	0,5477	0,0885	1,4092
Pomiar 139	$f_1$	4,3	0,1216	0,1143	0,1054	0,0990	0,0970	0,0924	0,0879	0,0795	0,0770	0,0727	0,0515	0,8200
	$f_2$	39,2	1,1560	1,0620	0,9737	0,8762	0,7858	0,7146	0,6453	0,5776	0,5205	0,4704	0,0899	1,4317
Pomiar 140	$f_1$	4,3	0,1419	0,1321	0,1241	0,1160	0,1041	0,0984	0,0935	0,0887	0,0825	0,0758	0,0627	0,9991
	$f_2$	39,2	1,4270	1,3040	1,1970	1,1010	0,9892	0,8834	0,8005	0,7268	0,6440	0,5842	0,0893	1,4221
<b>Legenda i objaśnienia:</b>														
$f_1$ - częstotliwość odpowiadająca pierwszej postaci drgań [Hz];														
$f_2$ - częstotliwość odpowiadająca drugiej postaci drgań [Hz];														
$a_1, a_{j+1}, \dots$ - kolejne maksymalne przyspieszenia w czasie $t$ [ $m/s^2$ ];														
$\delta$ - logarytmiczny dekrement tłumienia [-];														
$\xi$ - liczba tłumienia [%].														

	$f_1$	$f_2$	$\xi_1$	$\xi_2$
Wartości średnie	4,28	39,22	0,893	1,407
odchylenie standardowe	0	0,0289	0,043	0,019
współczynnik zmienności	0	0,0007	0,0478	0,0139

**Tab. Z. 6. 4** Liczba tłumienia dwóch pierwszych częstotliwości drgań poprzecznych złożonej belki wspornikowej z warstwą polimeru o grubości 1,75 mm pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 3,5 kg).

			$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$	$a_8$	$a_9$	$a_{10}$	$\delta$	$\zeta$
Pomiar 141	$f_1$	3,7	3,7	0,1119	0,1063	0,0986	0,0958	0,0858	0,0800	0,0789	0,0740	0,0687	0,0675	0,0506
	$f_2$	41,2	40	0,7766	0,6692	0,5701	0,4960	0,4273	0,3594	0,3039	0,2597	0,2150	0,1768	0,1480
Pomiar 142	$f_1$	3,7	3,7	0,1147	0,1103	0,1031	0,0953	0,0896	0,0867	0,0823	0,0734	0,0675	0,0668	0,0541
	$f_2$	41,3	40,1	0,9045	0,7770	0,6600	0,5690	0,4890	0,4035	0,3385	0,2821	0,2335	0,1896	0,1562
Pomiar 143	$f_1$	3,7	3,7	0,1072	0,1014	0,0968	0,0846	0,0836	0,0791	0,0747	0,0718	0,0639	0,0585	0,0605
	$f_2$	41,5	40,2	0,7470	0,6212	0,5248	0,4464	0,3775	0,3150	0,2613	0,2170	0,1779	0,1424	0,1657
Pomiar 144	$f_1$	3,7	3,7	0,0847	0,0740	0,0738	0,0645	0,0620	0,0564	0,0540	0,0498	0,0416	0,0411	0,0724
	$f_2$	41,5	40,3	0,6363	0,5376	0,4560	0,3855	0,2334	0,2696	0,2240	0,1475	0,1185	0,0967	0,1884
Pomiar 145	$f_1$	3,7	3,7	0,1056	0,0953	0,0943	0,0830	0,0810	0,0747	0,0728	0,0647	0,0645	0,0624	0,0526
	$f_2$	41,4	40,3	0,3067	0,2560	0,2086	0,1740	0,1440	0,1138	0,0914	0,0773	0,0602	0,0440	0,1942
Pomiar 146	$f_1$	3,7	3,7	0,1006	0,0908	0,0903	0,0859	0,0712	0,0689	0,0643	0,0640	0,0586	0,0535	0,0631
	$f_2$	41,7	40,3	0,3965	0,3356	0,2772	0,2247	0,1851	0,1529	0,1184	0,0907	0,0750	0,0583	0,1918

**Legenda i objaśnienia:**

$f_1$  - częstotliwość odpowiadająca pierwszej postaci drgań [Hz];

$f_2$  - częstotliwość odpowiadająca drugiej postaci drgań [Hz];

$a_1, a_{j+1}, \dots$  - kolejne maksymalne przyspieszenia w czasie  $t$  [ $m/s^2$ ];

$\delta$  - logarytmiczny dekrement tłumienia [-];

$\zeta$  - liczba tłumienia [%].

	$f_1$	$f_2$	$\zeta_1$	$\zeta_2$
Wartości średnie	3,7	40,20	0,938	2,772
odchylenie standardowe	0	0,0894	0,092	0,225
współczynnik zmienności	0	0,0022	0,0981	0,0811

**Tab. Z. 6. 5** Liczba tłumienia dwóch pierwszych częstotliwości drgań poprzecznych złożonej belki wspornikowej z warstwą polimeru o grubości 1,75 mm pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 5 kg).

			$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$	$a_8$	$a_9$	$a_{10}$	$\delta$	$\zeta$
Pomiar 147	$f_1$	3,2	0,0927	0,0883	0,0808	0,0757	0,0725	0,0688	0,0625	0,0601	0,0540	0,0523	0,0573	0,9128
	$f_2$	36,1	0,3237	0,2779	0,2331	0,1993	0,1604	0,1267	0,0933	0,0721	0,0587	0,0523	0,1823	2,9026
Pomiar 148	$f_1$	3,3	0,0792	0,0737	0,0702	0,0692	0,0619	0,0589	0,0520	0,0518	0,0469	0,0448	0,0570	0,9069
	$f_2$	36,1	0,3808	0,2978	0,2556	0,2276	0,1907	0,1574	0,1245	0,1009	0,0812	0,0668	0,1741	2,7718
Pomiar 149	$f_1$	3,2	0,0818	0,0791	0,0739	0,0702	0,0655	0,0587	0,0565	0,0510	0,0495	0,0466	0,0563	0,8961
	$f_2$	36,2	0,5776	0,5120	0,4436	0,3897	0,3291	0,2741	0,2194	0,1766	0,1384	0,1134	0,1628	2,5923
Pomiar 150	$f_1$	3,3	0,7616	0,7261	0,6738	0,6737	0,6087	0,5593	0,5242	0,4998	0,4940	0,4447	0,0538	0,8567
	$f_2$	36,1	0,3601	0,3221	0,2762	0,2434	0,2043	0,1674	0,1346	0,1071	0,0851	0,0713	0,1619	2,5788
Pomiar 151	$f_1$	3,3	0,0564	0,0524	0,0517	0,0471	0,0454	0,0428	0,0399	0,0387	0,0347	0,0327	0,0545	0,8680
	$f_2$	36,1	0,4246	0,3740	0,3277	0,2915	0,2452	0,2042	0,1656	0,1338	0,1059	0,0866	0,1590	2,5323
Pomiar 152	$f_1$	3,3	0,0712	0,0650	0,0609	0,0595	0,0539	0,0537	0,0476	0,0462	0,0442	0,0425	0,0516	0,8221
	$f_2$	36,1	0,5042	0,4452	0,3899	0,3447	0,2906	0,2429	0,1955	0,1588	0,1281	0,1056	0,1563	2,4894

**Legenda i objaśnienia:**  
 $f_1$  - częstotliwość odpowiadająca pierwszej postaci drgań [Hz];  
 $f_2$  - częstotliwość odpowiadająca drugiej postaci drgań [Hz];  
 $a_1, a_{i+1}, \dots$  - kolejne maksymalne przyspieszenia w czasie  $t$  [ $m/s^2$ ];  
 $\delta$  - logarytmiczny dekrement tłumienia [-];  
 $\zeta$  - liczba tłumienia [%].

	$f_1$	$f_2$	$\zeta_1$	$\zeta_2$
Wartości średnie	3,27	36,12	0,877	2,645
odchylenie standardowe	0	0,0289	0,025	0,112
współczynnik zmienności	0	0,0008	0,0280	0,0425

**Tab. Z. 6. 6** Liczba tłumienia dwóch pierwszych częstotliwości drgań poprzecznych złożonej belki wspornikowej z warstwą polimeru o grubości 1,75 mm pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 6 kg).

			$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$	$a_8$	$a_9$	$a_{10}$	$\delta$	$\zeta$
Pomiar 153	$f_1$	3	0,0520	0,0486	0,0461	0,0434	0,0406	0,0382	0,0359	0,0322	0,0299	0,0269	0,0659	1,0490
	$f_2$	36,2	0,5353	0,4635	0,4130	0,3601	0,3091	0,2701	0,2334	0,2054	0,1784	0,1567	0,1228	1,9562
Pomiar 154	$f_1$	3	0,0638	0,0598	0,0558	0,0534	0,0513	0,0498	0,0447	0,0439	0,0392	0,0354	0,0590	0,9398
	$f_2$	36,2	0,6239	0,5446	0,4831	0,4283	0,3761	0,3319	0,2866	0,2482	0,2088	0,1890	0,1194	1,9017
Pomiar 155	$f_1$	3	0,0659	0,0623	0,0590	0,0551	0,0509	0,0483	0,0477	0,0447	0,0415	0,0384	0,0540	0,8601
	$f_2$	36,3	0,7280	0,6280	0,5562	0,4892	0,4352	0,3845	0,3364	0,2946	0,2550	0,2227	0,1184	1,8861
Pomiar 156	$f_1$	3	0,0813	0,0764	0,0720	0,0679	0,0622	0,0592	0,0561	0,0546	0,0496	0,0470	0,0548	0,8733
	$f_2$	36,3	0,7900	0,6728	0,5964	0,5205	0,4686	0,4144	0,3689	0,3195	0,2809	0,2423	0,1182	1,8819
Pomiar 157	$f_1$	3	0,0540	0,0478	0,0457	0,0449	0,0419	0,0391	0,0368	0,0347	0,0320	0,0301	0,0585	0,9320
	$f_2$	36,2	0,4549	0,4023	0,3553	0,3075	0,2668	0,2265	0,2036	0,1761	0,1569	0,1360	0,1207	1,9226
Pomiar 158	$f_1$	3	0,0674	0,0627	0,0612	0,0580	0,0537	0,0493	0,0476	0,0445	0,0411	0,0389	0,0550	0,8756
	$f_2$	36,2	0,4391	0,3840	0,3454	0,2985	0,2607	0,2180	0,1938	0,1686	0,1501	0,1301	0,1216	1,9370

**Legenda i objaśnienia:**

$f_1$  - częstotliwość odpowiadająca pierwszej postaci drgań [Hz];

$f_2$  - częstotliwość odpowiadająca drugiej postaci drgań [Hz];

$a_1, a_{j+1}, \dots$  - kolejne maksymalne przyspieszenia w czasie  $t$  [ $m/s^2$ ];

$\delta$  - logarytmiczny dekrement tłumienia [-];

$\zeta$  - liczba tłumienia [%].

	$f_1$	$f_2$	$\zeta_1$	$\zeta_2$
Wartości średnie	3	36,23	0,922	1,914
odchylenie standardowe	0	0,0365	0,050	0,021
współczynnik zmienności	0	0,0010	0,0541	0,0109

## Załącznik 7 – Wyniki badań eksperymentalnych dla złożonej belki wspornikowej z warstwą polimeru o grubości 3,1 mm (Etap II).

**Tab. Z. 7. 1** Liczba tłumienia dwóch pierwszych częstotliwości drgań poprzecznych złożonej belki wspornikowej z warstwą polimeru o grubości 3,1 mm.

			$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$	$a_8$	$a_9$	$a_{10}$	$\delta$	$\zeta$
Pomiar 87	$f_1$	8	0,2495	0,2280	0,2153	0,1999	0,1802	0,1588	0,1440	0,1292	0,1142	0,1075	0,0842	1,3407
	$f_2$	35,9	0,5498	0,5096	0,4812	0,4491	0,4172	0,3789	0,3447	0,3207	0,2980	0,2795	0,0677	1,0773
Pomiar 88	$f_1$	8	0,2888	0,2745	0,2564	0,2358	0,2051	0,1846	0,1699	0,1532	0,1414	0,1297	0,0801	1,2747
	$f_2$	35,9	0,6352	0,5888	0,5576	0,5238	0,4780	0,4396	0,4001	0,3708	0,3466	0,3225	0,0678	1,0794
Pomiar 89	$f_1$	8	0,9848	0,9194	0,8318	0,7494	0,6710	0,6104	0,5701	0,5271	0,5096	0,4746	0,0730	1,1624
	$f_2$	35,9	0,7556	0,6854	0,6344	0,5974	0,5592	0,5145	0,4698	0,4291	0,3985	0,3449	0,0784	1,2488
Pomiar 90	$f_1$	8	0,2727	0,2541	0,2302	0,2123	0,1924	0,1691	0,1455	0,1374	0,1228	0,1127	0,0884	1,4071
	$f_2$	35,9	0,6120	0,5642	0,5337	0,5002	0,4630	0,4218	0,3840	0,3567	0,3321	0,3101	0,0680	1,0825
Pomiar 91	$f_1$	8	0,2033	0,1897	0,1792	0,1581	0,1427	0,1265	0,1115	0,0977	0,0901	0,0866	0,0853	1,3591
	$f_2$	35,9	0,5576	0,5099	0,4804	0,4534	0,4207	0,3837	0,3481	0,3232	0,3015	0,2812	0,0685	1,0901
Pomiar 92	$f_1$	8	0,2806	0,2595	0,2415	0,2203	0,1983	0,1804	0,1577	0,1423	0,1292	0,1222	0,0831	1,3237
	$f_2$	35,9	0,5738	0,5451	0,5114	0,4725	0,4316	0,3915	0,3646	0,3389	0,3163	0,2925	0,0674	1,0730

**Legenda i objaśnienia:**  
 $f_1$  - częstotliwość odpowiadająca pierwszej postaci drgań [Hz];  
 $f_2$  - częstotliwość odpowiadająca drugiej postaci drgań [Hz];  
 $a_1, a_{i+1}, \dots$  - kolejne maksymalne przyspieszenia w czasie  $t$  [ $m/s^2$ ];  
 $\delta$  - logarytmiczny dekrement tłumienia [-];  
 $\zeta$  - liczba tłumienia [%].

	$f_1$	$f_2$	$\zeta_1$	$\zeta_2$
Wartości średnie	8	35,90	1,311	1,109
odchylenie standardowe	0	0,0000	0,060	0,049
współczynnik zmienności	0	0,0000	0,0458	0,0440

**Tab. Z. 7. 2** Liczba tłumienia dwóch pierwszych częstotliwości drgań poprzecznych złożonej belki wspornikowej z warstwą polimeru o grubości 3,1 mm pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 1 kg).

			$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$	$a_8$	$a_9$	$a_{10}$	$\delta$	$\xi$
Pomiar 93	$f_1$	5,3	0,1240	0,1205	0,1063	0,0926	0,0852	0,0747	0,0754	0,0639	0,0586	0,0549	0,0816	1,2989
	$f_2$	36	0,8170	0,7755	0,7364	0,6831	0,6223	0,5631	0,5161	0,4756	0,4424	0,4084	0,0693	1,1041
Pomiar 94	$f_1$	5,3	0,2884	0,3728	0,2556	0,2362	0,2173	0,2030	0,1895	0,1721	0,1555	0,1399	0,0723	1,1519
	$f_2$	36	0,6933	0,6353	0,6021	0,5696	0,5231	0,4797	0,4340	0,3981	0,3637	0,3436	0,0702	1,1178
Pomiar 95	$f_1$	5,3	0,1832	0,1706	0,1496	0,1362	0,1181	0,1124	0,1061	0,0938	0,0841	0,0820	0,0804	1,2808
	$f_2$	36	0,9419	0,8316	0,7577	0,7166	0,6831	0,6302	0,5674	0,5194	0,4708	0,4389	0,0764	1,2160
Pomiar 96	$f_1$	5,4	0,2865	0,2690	0,2548	0,2389	0,2184	0,1992	0,1717	0,1503	0,1427	0,1355	0,0749	1,1923
	$f_2$	36	0,9734	0,8789	0,7916	0,7090	0,6447	0,5823	0,5249	0,4737	0,4272	0,3906	0,0913	1,4540
Pomiar 97	$f_1$	5,4	0,2586	0,2386	0,2147	0,1953	0,1758	0,1607	0,1566	0,1438	0,1327	0,1272	0,0710	1,1298
	$f_2$	36	1,2880	1,1600	1,0410	0,9345	0,8488	0,7676	0,6946	0,6260	0,5660	0,5188	0,0909	1,4480
Pomiar 98	$f_1$	5,4	0,1616	0,1453	0,1341	0,1217	0,1061	0,0998	0,0935	0,0872	0,0822	0,0732	0,0792	1,2610
	$f_2$	36	0,4425	0,3938	0,3619	0,3277	0,2961	0,2732	0,2506	0,2280	0,2029	0,1913	0,0839	1,3353

**Legenda i objaśnienia:**  
 $f_1$  - częstotliwość odpowiadająca pierwszej postaci drgań [Hz];  
 $f_2$  - częstotliwość odpowiadająca drugiej postaci drgań [Hz];  
 $a_1, a_{j+1}, \dots$  - kolejne maksymalne przyspieszenia w czasie  $t$  [ $m/s^2$ ];  
 $\delta$  - logarytmiczny dekrement tłumienia [-];  
 $\xi$  - liczba tłumienia [%].

	$f_1$	$f_2$	$\xi_1$	$\xi_2$
Wartości średnie	5,35	36,00	1,219	1,279
odchylenie standardowe	0	0,0000	0,050	0,111
współczynnik zmienności	0	0,0000	0,0411	0,0867

**Tab. Z. 7. 3** Liczba tłumienia dwóch pierwszych częstotliwości drgań poprzecznych złożonej belki wspornikowej z warstwą polimeru o grubości 3,1 mm pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 2,5 kg).

			$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$	$a_8$	$a_9$	$a_{10}$	$\delta$	$\xi$
Pomiar 99	$f_1$	4,2	0,1271	0,1234	0,1172	0,1063	0,0996	0,0918	0,0849	0,0762	0,0695	0,0649	0,0672	1,0700
	$f_2$	37,3	1,6690	1,5470	1,4430	1,3110	1,1910	1,0880	0,9575	0,8461	0,7344	0,6439	0,0952	1,5166
Pomiar 100	$f_1$	4,2	0,1258	0,1207	0,1123	0,1031	0,0956	0,0866	0,0802	0,0753	0,0680	0,0611	0,0722	1,1494
	$f_2$	37,5	1,5310	1,3560	1,2390	1,1000	0,9747	0,8641	0,7505	0,6481	0,5645	0,4856	0,1148	1,8285
Pomiar 101	$f_1$	4,2	0,1399	0,1361	0,1290	0,1190	0,1092	0,0996	0,0944	0,0859	0,0782	0,0753	0,0619	0,9857
	$f_2$	37,8	0,7606	0,6557	0,5753	0,4741	0,3954	0,3312	0,2642	0,2102	0,1705	0,1345	0,1733	2,7588
Pomiar 102	$f_1$	4,2	0,0987	0,0959	0,0920	0,0862	0,0820	0,0723	0,0649	0,0611	0,0578	0,0522	0,0637	1,0148
	$f_2$	37,8	0,7519	0,6422	0,5501	0,4536	0,3731	0,3078	0,2426	0,1922	0,1544	0,1205	0,1831	2,9155
Pomiar 103	$f_1$	4	0,1416	0,1380	0,1258	0,1149	0,1077	0,0983	0,0931	0,0830	0,0787	0,0721	0,0675	1,0750
	$f_2$	37,8	1,3050	1,0600	0,9520	0,8243	0,6808	0,5610	0,4638	0,3646	0,2836	0,2270	0,1749	2,7850
Pomiar 104	$f_1$	4,2	0,1545	0,1487	0,1337	0,1228	0,1109	0,1015	0,0936	0,0882	0,0811	0,0776	0,0689	1,0974
	$f_2$	37,8	1,3500	1,1380	0,9754	0,8415	0,6898	0,5653	0,4656	0,3631	0,2819	0,2224	0,1803	2,8716
<b>Legenda i objaśnienia:</b>														
$f_1$ - częstotliwość odpowiadająca pierwszej postaci drgań [Hz];														
$f_2$ - częstotliwość odpowiadająca drugiej postaci drgań [Hz];														
$a_1, a_{j+1}, \dots$ - kolejne maksymalne przyspieszenia w czasie $t$ [ $m/s^2$ ];														
$\delta$ - logarytmiczny dekrement tłumienia [-];														
$\xi$ - liczba tłumienia [%].														

	$f_1$	$f_2$	$\xi_1$	$\xi_2$
Wartości średnie	4,17	37,67	1,065	2,446
odchylenie standardowe	0	0,1528	0,041	0,431
współczynnik zmienności	0	0,0041	0,0388	0,1763

**Tab. Z. 7. 4** Liczba tłumienia dwóch pierwszych częstotliwości drgań poprzecznych złożonej belki wspornikowej z warstwą polimeru o grubości 3,1 mm pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 3,5 kg).

			$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$	$a_8$	$a_9$	$a_{10}$	$\delta$	$\zeta$
Pomiar 105	$f_1$	3,7	0,0927	0,0811	0,0704	0,0645	0,0628	0,0574	0,0495	0,0471	0,0450	0,0427	0,0774	1,2323
	$f_2$	33,2	1,3660	1,1300	1,1150	1,0600	0,8733	0,6865	0,5992	0,5689	0,5082	0,4192	0,1181	1,8810
Pomiar 106	$f_1$	3,7	0,0776	0,0678	0,0569	0,0548	0,0521	0,0513	0,0456	0,0422	0,0378	0,0371	0,0738	1,1746
	$f_2$	33,4	1,0160	0,8875	0,6963	0,5694	0,5393	0,4911	0,4095	0,3344	0,2915	0,2638	0,1348	2,1472
Pomiar 107	$f_1$	3,7	0,1153	0,0978	0,0889	0,0844	0,0819	0,0739	0,0686	0,0652	0,0575	0,0554	0,0732	1,1660
	$f_2$	33,5	1,3150	1,1770	0,9037	0,7014	0,6815	0,6346	0,5248	0,4207	0,3684	0,3322	0,1376	2,1909
Pomiar 108	$f_1$	3,7	0,1002	0,0896	0,0763	0,0725	0,0725	0,0661	0,0602	0,0569	0,0512	0,0497	0,0702	1,1171
	$f_2$	33,5	1,1830	0,9949	0,7409	0,6104	0,6016	0,5484	0,4392	0,3346	0,3228	0,2934	0,1394	2,2202
Pomiar 109	$f_1$	3,7	0,0887	0,0826	0,0781	0,0750	0,0698	0,0663	0,0618	0,0572	0,0550	0,0491	0,0592	0,9433
	$f_2$	33,6	1,2900	1,2400	1,1040	0,7715	0,6827	0,6537	0,5605	0,4455	0,3795	0,3464	0,1315	2,0936
Pomiar 110	$f_1$	3,7	0,0838	0,0811	0,0759	0,0714	0,0643	0,0612	0,0586	0,0551	0,0505	0,0474	0,0571	0,9094
	$f_2$	33,7	1,2510	1,1570	0,9290	0,7264	0,6606	0,6130	0,5129	0,4128	0,3612	0,3296	0,1334	2,1239

**Legenda i objaśnienia:**

$f_1$  - częstotliwość odpowiadająca pierwszej postaci drgań [Hz];

$f_2$  - częstotliwość odpowiadająca drugiej postaci drgań [Hz];

$a_1, a_{j+1}, \dots$  - kolejne maksymalne przyspieszenia w czasie  $t$  [ $m/s^2$ ];

$\delta$  - logarytmiczny dekrement tłumienia [-];

$\zeta$  - liczba tłumienia [%].

	$f_1$	$f_2$	$\zeta_1$	$\zeta_2$
Wartości średnie	3,7	33,48	1,090	2,109
odchylenie standardowe	0	0,1218	0,094	0,085
współczynnik zmienności	0	0,0036	0,0860	0,0405



**Tab. Z. 7. 5** Liczba tłumienia dwóch pierwszych częstotliwości drgań poprzecznych złożonej belki wspornikowej z warstwą polimeru o grubości 3,1 mm pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 5 kg).

			$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$	$a_8$	$a_9$	$a_{10}$	$\delta$	$\zeta$
Pomiar 111	$f_1$	3,2	0,1034	0,0907	0,0808	0,0728	0,0662	0,0611	0,0539	0,0475	0,0459	0,0449	0,0834	1,3279
	$f_2$	34,9	1,0380	0,8526	0,7220	0,6053	0,5191	0,4322	0,3633	0,3130	0,2637	0,2301	0,1507	2,3989
Pomiar 112	$f_1$	3,2	0,1042	0,0977	0,0900	0,0828	0,0756	0,0669	0,0620	0,0593	0,0523	0,0475	0,0786	1,2519
	$f_2$	34,9	1,0020	0,8051	0,6693	0,5473	0,4766	0,3902	0,3241	0,2858	0,2410	0,2162	0,1534	2,4420
Pomiar 113	$f_1$	3,2	0,0897	0,0781	0,0756	0,0688	0,0652	0,0616	0,0575	0,0511	0,0481	0,0433	0,0729	1,1603
	$f_2$	35	0,7114	0,5777	0,5064	0,4263	0,3731	0,3252	0,2785	0,2501	0,2186	0,2000	0,1269	2,0206
Pomiar 114	$f_1$	3,2	0,0889	0,0822	0,0721	0,0680	0,0588	0,0536	0,0476	0,0438	0,0394	0,0373	0,0870	1,3846
	$f_2$	35	0,6430	0,5666	0,5040	0,4503	0,3865	0,3592	0,3287	0,2956	0,2623	0,2363	0,1001	1,5940
Pomiar 115	$f_1$	3,2	0,0736	0,0667	0,0650	0,0552	0,0502	0,0455	0,0435	0,0430	0,0372	0,0355	0,0729	1,1601
	$f_2$	35,1	0,7421	0,6306	0,5471	0,4610	0,4104	0,3616	0,3108	0,2848	0,2520	0,2217	0,1208	1,9238
Pomiar 116	$f_1$	3,3	0,0873	0,0777	0,0734	0,0670	0,0623	0,0596	0,0568	0,0539	0,0472	0,0447	0,0670	1,0668
	$f_2$	35,1	0,7660	0,6657	0,5636	0,4915	0,4321	0,3717	0,3348	0,2972	0,2684	0,2454	0,1138	1,8126

**Legenda i objaśnienia:**  
 $f_1$  - częstotliwość odpowiadająca pierwszej postaci drgań [Hz];  
 $f_2$  - częstotliwość odpowiadająca drugiej postaci drgań [Hz];  
 $a_1, a_{i+1}, \dots$  - kolejne maksymalne przyspieszenia w czasie  $t$  [ $m/s^2$ ];  
 $\delta$  - logarytmiczny dekrement tłumienia [-];  
 $\zeta$  - liczba tłumienia [%].

	$f_1$	$f_2$	$\zeta_1$	$\zeta_2$
Wartości średnie	3,22	35,00	1,225	2,032
odchylenie standardowe	0	0,0632	0,084	0,235
współczynnik zmienności	0	0,0018	0,0684	0,1159

**Tab. Z. 7. 6** Liczba tłumienia dwóch pierwszych częstotliwości drgań poprzecznych złożonej belki wspornikowej z warstwą polimeru o grubości 3,1 mm pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 6 kg).

			$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$	$a_8$	$a_9$	$a_{10}$	$\delta$	$\xi$
Pomiar 117	$f_1$	3	0,1051	0,0960	0,0899	0,0789	0,0722	0,0632	0,0552	0,0524	0,0444	0,0423	0,0909	1,4477
	$f_2$	35,6	1,1730	1,0450	0,9978	0,8387	0,8087	0,6832	0,6267	0,5568	0,4801	0,4426	0,0975	1,5520
Pomiar 118	$f_1$	3	0,0745	0,0657	0,0592	0,0520	0,0438	0,0426	0,0379	0,0341	0,0310	0,0298	0,0918	1,4611
	$f_2$	35,6	0,1982	0,1732	0,1512	0,1400	0,1211	0,1039	0,0998	0,0878	0,0779	0,0664	0,1093	1,7411
Pomiar 119	$f_1$	3	0,0765	0,0722	0,0689	0,0640	0,0565	0,0530	0,0500	0,0466	0,0423	0,0384	0,0689	1,0979
	$f_2$	35,6	0,6251	0,5600	0,5041	0,4388	0,4009	0,3526	0,3098	0,2726	0,2368	0,2158	0,1064	1,6936
Pomiar 120	$f_1$	3	0,0900	0,0831	0,0764	0,0693	0,0643	0,0565	0,0527	0,0472	0,0430	0,0405	0,0797	1,2696
	$f_2$	35,6	1,2150	1,0890	0,9969	0,8949	0,8171	0,7130	0,6525	0,5695	0,5051	0,4499	0,0993	1,5820
Pomiar 121	$f_1$	3	0,0771	0,0690	0,0628	0,0588	0,0515	0,0475	0,0432	0,0400	0,0357	0,0318	0,0886	1,4101
	$f_2$	35,6	0,7146	0,6340	0,5826	0,5602	0,4827	0,4563	0,3785	0,3450	0,3046	0,2751	0,0955	1,5200
Pomiar 122	$f_1$	3	0,0829	0,0787	0,0761	0,0688	0,0668	0,0608	0,0564	0,0518	0,0449	0,0432	0,0652	1,0379
	$f_2$	35,6	0,9125	0,8281	0,7585	0,6702	0,6151	0,5343	0,4853	0,4186	0,3776	0,3328	0,1009	1,6061

**Legenda i objaśnienia:**  
 $f_1$  - częstotliwość odpowiadająca pierwszej postaci drgań [Hz];  
 $f_2$  - częstotliwość odpowiadająca drugiej postaci drgań [Hz];  
 $a_1, a_{j+1}, \dots$  - kolejne maksymalne przyspieszenia w czasie  $t$  [ $m/s^2$ ];  
 $\delta$  - logarytmiczny dekrement tłumienia [-];  
 $\xi$  - liczba tłumienia [%].

	$f_1$	$f_2$	$\xi_1$	$\xi_2$
Wartości średnie	3	35,60	1,287	1,616
odchylenie standardowe	0	0,0000	0,130	0,060
współczynnik zmienności	0	0,0000	0,1011	0,0373

## Załącznik 8 – Wyniki badań eksperymentalnych dla złożonej belki wspornikowej z warstwą polimeru o grubości 5 mm (Etap II).

**Tab. Z. 8. 1** Liczba tłumienia dwóch pierwszych częstotliwości drgań poprzecznych złożonej belki wspornikowej z warstwą polimeru o grubości 5 mm.

			$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$	$a_8$	$a_9$	$a_{10}$	$\delta$	$\xi$
Pomiar 44	$f_1$	7,5	1,276	1,181	1,078	0,9803	0,8841	0,8067	0,7477	0,7059	0,6677	0,635	0,0698	1,1112
	$f_2$	34,1	0,9828	0,9329	0,8797	0,8201	0,7559	0,6995	0,6482	0,6037	0,5674	0,5331	0,0612	0,9740
Pomiar 45	$f_1$	7,5	0,6969	0,657	0,6168	0,5731	0,5295	0,4917	0,4532	0,4246	0,3951	0,3695	0,0634	1,0103
	$f_2$	34,1	0,926	0,8691	0,8119	0,7497	0,6933	0,6383	0,6006	0,5623	0,5299	0,4945	0,0627	0,9989
Pomiar 46	$f_1$	7,5	0,6881	0,6604	0,6248	0,5854	0,5358	0,4919	0,4501	0,4174	0,3899	0,3668	0,0629	1,0018
	$f_2$	34,1	0,8712	0,8115	0,7498	0,6933	0,6422	0,5994	0,5634	0,5273	0,493	0,4592	0,0640	1,0197
Pomiar 47	$f_1$	7,6	0,7148	0,6784	0,6463	0,6084	0,5559	0,505	0,4618	0,4311	0,4093	0,3884	0,0610	0,9713
	$f_2$	34,1	0,8349	0,77	0,7121	0,6602	0,6146	0,5776	0,5405	0,5066	0,4705	0,4387	0,0643	1,0247
Pomiar 48	$f_1$	7,6	0,7978	0,7469	0,7005	0,6545	0,6128	0,5666	0,5264	0,4898	0,4528	0,4254	0,0629	1,0013
	$f_2$	34,1	1,031	0,9628	0,8897	0,8233	0,762	0,7112	0,6657	0,6244	0,5845	0,543	0,0641	1,0210
Pomiar 49	$f_1$	7,6	0,6766	0,6403	0,5994	0,5607	0,5176	0,4743	0,4397	0,4114	0,3857	0,3682	0,0608	0,9689
	$f_2$	34,1	0,818	0,7617	0,7048	0,6523	0,6033	0,5614	0,529	0,4958	0,465	0,4315	0,0640	1,0185

**Legenda i objaśnienia:**  
 $f_1$  - częstotliwość odpowiadająca pierwszej postaci drgań [Hz];  
 $f_2$  - częstotliwość odpowiadająca drugiej postaci drgań [Hz];  
 $a_1, a_{i+1}, \dots$  - kolejne maksymalne przyspieszenia w czasie  $t$  [ $m/s^2$ ];  
 $\delta$  - logarytmiczny dekrement tłumienia [-];  
 $\xi$  - liczba tłumienia [%].

	$f_1$	$f_2$	$\xi_1$	$\xi_2$
Wartości średnie	7,55	34,10	1,011	1,009
odchylenie standardowe	0	0,0000	0,037	0,014
współczynnik zmienności	0	0,0000	0,0365	0,0137

**Tab. Z. 8. 2** Liczba tłumienia dwóch pierwszych częstotliwości drgań poprzecznych złożonej belki wspornikowej z warstwą polimeru o grubości 5 mm pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 1 kg).

			$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$	$a_8$	$a_9$	$a_{10}$	$\delta$	$\xi$
Pomiar 52	$f_1$	5,1	0,193	0,1835	0,1641	0,1438	0,1245	0,1209	0,1168	0,1029	0,09476	0,08292	0,0845	1,3452
	$f_2$	34,2	0,8879	0,8117	0,7509	0,6924	0,6455	0,5997	0,5618	0,5234	0,4858	0,4445	0,0692	1,1018
Pomiar 53	$f_1$	5,1	0,225	0,2208	0,1947	0,1611	0,1429	0,1375	0,1365	0,1218	0,1065	0,09471	0,0865	1,3778
	$f_2$	34,2	1,023	0,9458	0,8699	0,806	0,7478	0,6973	0,6498	0,6058	0,5644	0,5257	0,0666	1,0601
Pomiar 54	$f_1$	5,1	0,2215	0,2066	0,1879	0,167	0,1523	0,1424	0,137	0,1217	0,112	0,098	0,0815	1,2985
	$f_2$	34,2	0,7169	0,6605	0,6075	0,5585	0,5215	0,4868	0,4553	0,424	0,391	0,3665	0,0671	1,0684
Pomiar 55	$f_1$	5,1	0,2443	0,232	0,211	0,1904	0,17	0,1612	0,1509	0,1351	0,1231	0,1149	0,0754	1,2012
	$f_2$	34,2	1,087	1,009	0,9381	0,8679	0,8056	0,7484	0,6954	0,6435	0,6022	0,5616	0,0660	1,0516
Pomiar 56	$f_1$	5,1	0,2156	0,206	0,1856	0,1597	0,1449	0,1409	0,1289	0,1161	0,107	0,09547	0,0815	1,2972
	$f_2$	34,2	1,081	1,011	0,9401	0,8643	0,8029	0,7394	0,6914	0,645	0,6027	0,5593	0,0659	1,0493
Pomiar 57	$f_1$	5,1	0,2002	0,1866	0,1689	0,1508	0,1364	0,129	0,1196	0,1129	0,1013	0,09227	0,0775	1,2334
	$f_2$	34,2	0,9661	0,9143	0,8587	0,8014	0,7418	0,6871	0,6366	0,5931	0,5518	0,5156	0,0628	0,9999

**Legenda i objaśnienia:**  
 $f_1$  - częstotliwość odpowiadająca pierwszej postaci drgań [Hz];  
 $f_2$  - częstotliwość odpowiadająca drugiej postaci drgań [Hz];  
 $a_1, a_{j+1}, \dots$  - kolejne maksymalne przyspieszenia w czasie  $t$  [ $m/s^2$ ];  
 $\delta$  - logarytmiczny dekrement tłumienia [-];  
 $\xi$  - liczba tłumienia [%].

	$f_1$	$f_2$	$\xi_1$	$\xi_2$
Wartości średnie	5,1	34,20	1,292	1,055
odchylenie standardowe	0	0,0000	0,047	0,023
współczynnik zmienności	0	0,0000	0,0363	0,0222

**Tab. Z. 8. 3** Liczba tłumienia dwóch pierwszych częstotliwości drgań poprzecznych złożonej belki wspornikowej z warstwą polimeru o grubości 5 mm pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 2,5 kg).

			$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$	$a_8$	$a_9$	$a_{10}$	$\delta$	$\xi$
Pomiar 58	$f_1$	4	0,1566	0,1359	0,1115	0,1067	0,0848	0,0813	0,0807	0,0747	0,0637	0,0588	0,0979	1,5587
	$f_2$	30,4	2,1730	1,9720	1,7160	1,2990	1,2650	1,0360	0,7240	0,7152	0,5742	0,4043	0,1682	2,6779
Pomiar 59	$f_1$	4	0,1131	0,1017	0,0858	0,0713	0,0643	0,0580	0,0566	0,0526	0,0473	0,0460	0,0899	1,4311
	$f_2$	30,5	0,9795	0,8053	0,6893	0,6115	0,4967	0,4285	0,3783	0,3004	0,2642	0,2307	0,1446	2,3024
Pomiar 60	$f_1$	4	0,1404	0,1275	0,1175	0,1099	0,1005	0,0969	0,0858	0,0796	0,0724	0,0665	0,0747	1,1900
	$f_2$	30,5	1,1950	0,9633	0,8043	0,7483	0,5971	0,5095	0,4635	0,3704	0,3250	0,2877	0,1424	2,2675
Pomiar 61	$f_1$	4	0,1495	0,1338	0,1170	0,1064	0,1043	0,0978	0,0865	0,0808	0,0742	0,0724	0,0725	1,1550
	$f_2$	30,7	1,2970	1,0760	0,9277	0,8162	0,6688	0,6010	0,5301	0,4190	0,3900	0,3484	0,1314	2,0931
Pomiar 62	$f_1$	4	0,1562	0,1402	0,1143	0,1081	0,0999	0,0995	0,0910	0,0796	0,0795	0,0700	0,0803	1,2781
	$f_2$	30,7	1,2830	1,0980	0,9342	0,8258	0,7024	0,5962	0,5258	0,4449	0,3852	0,3379	0,1334	2,1245
Pomiar 63	$f_1$	4	0,1391	0,1332	0,1254	0,1084	0,0988	0,0976	0,0938	0,0830	0,0760	0,0635	0,0784	1,2476
	$f_2$	30,8	1,0260	0,8982	0,7763	0,6538	0,5850	0,5042	0,4203	0,3841	0,3240	0,2624	0,1364	2,1713

**Legenda i objaśnienia:**  
 $f_1$  - częstotliwość odpowiadająca pierwszej postaci drgań [Hz];  
 $f_2$  - częstotliwość odpowiadająca drugiej postaci drgań [Hz];  
 $a_1, a_{j+1}, \dots$  - kolejne maksymalne przyspieszenia w czasie  $t$  [ $m/s^2$ ];  
 $\delta$  - logarytmiczny dekrement tłumienia [-];  
 $\xi$  - liczba tłumienia [%].

	$f_1$	$f_2$	$\xi_1$	$\xi_2$
Wartości średnie	4	30,60	1,310	2,273
odchylenie standardowe	0	0,1095	0,109	0,152
współczynnik zmienności	0	0,0036	0,0836	0,0667

**Tab. Z. 8. 4** Liczba tłumienia dwóch pierwszych częstotliwości drgań poprzecznych złożonej belki wspornikowej z warstwą polimeru o grubości 5 mm pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 3,5 kg).

			$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$	$a_8$	$a_9$	$a_{10}$	$\delta$	$\xi$
Pomiar 65	$f_1$	3,5	0,0891	0,0787	0,0674	0,0661	0,0622	0,0512	0,0487	0,0412	0,0389	0,0376	0,0863	1,3749
	$f_2$	31,8	0,5103	0,4627	0,3874	0,3253	0,3038	0,2807	0,2441	0,2080	0,1839	0,1695	0,1102	1,7550
Pomiar 66	$f_1$	3,5	0,1164	0,1109	0,0967	0,0844	0,0723	0,0696	0,0681	0,0647	0,0588	0,0512	0,0821	1,3078
	$f_2$	31,8	0,8959	0,6623	0,6359	0,6242	0,5619	0,4651	0,4125	0,3932	0,3526	0,3049	0,1078	1,7163
Pomiar 67	$f_1$	3,5	0,0910	0,0828	0,0754	0,0680	0,0640	0,0600	0,0543	0,0525	0,0493	0,0425	0,0762	1,2131
	$f_2$	31,9	0,4812	0,4369	0,3658	0,3271	0,3191	0,2873	0,2370	0,2083	0,1906	0,1656	0,1067	1,6986
Pomiar 68	$f_1$	3,5	0,0759	0,0684	0,0653	0,0585	0,0556	0,0538	0,0469	0,0451	0,0378	0,0287	0,0972	1,5478
	$f_2$	31,9	0,5753	0,5436	0,4688	0,4008	0,3797	0,3523	0,2992	0,2565	0,2358	0,2106	0,1005	1,6002
Pomiar 69	$f_1$	3,5	0,0748	0,0652	0,0621	0,0562	0,0547	0,0481	0,0448	0,0407	0,0380	0,0326	0,0831	1,3231
	$f_2$	32	0,5577	0,5203	0,4466	0,3859	0,3678	0,3385	0,2830	0,2474	0,2252	0,1995	0,1028	1,6370
Pomiar 70	$f_1$	3,5	0,0879	0,0847	0,0776	0,0682	0,0665	0,0625	0,0543	0,0510	0,0493	0,0440	0,0692	1,1019
	$f_2$	32	0,5052	0,4605	0,4026	0,3799	0,3535	0,3004	0,2584	0,2309	0,2028	0,1747	0,1062	1,6909

**Legenda i objaśnienia:**

$f_1$  - częstotliwość odpowiadająca pierwszej postaci drgań [Hz];

$f_2$  - częstotliwość odpowiadająca drugiej postaci drgań [Hz];

$a_1, a_{j+1}, \dots$  - kolejne maksymalne przyspieszenia w czasie  $t$  [ $m/s^2$ ];

$\delta$  - logarytmiczny dekrement tłumienia [-];

$\xi$  - liczba tłumienia [%].

	$f_1$	$f_2$	$\xi_1$	$\xi_2$
Wartości średnie	3,5	31,90	1,311	1,683
odchylenie standardowe	0	0,0632	0,107	0,039
współczynnik zmienności	0	0,0020	0,0813	0,0234

**Tab. Z. 8. 5** Liczba tłumienia dwóch pierwszych częstotliwości drgań poprzecznych złożonej belki wspornikowej z warstwą polimeru o grubości 5 mm pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 5 kg).

			$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$	$a_8$	$a_9$	$a_{10}$	$\delta$	$\zeta$
Pomiar 72	$f_1$	3,1	0,0710	0,0559	0,0532	0,0459	0,0395	0,0371	0,0316	0,0304	0,0257	0,0239	0,1089	1,7349
	$f_2$	32,6	0,4786	0,4559	0,4046	0,3717	0,3361	0,3040	0,2714	0,2448	0,2241	0,2027	0,0859	1,3681
Pomiar 73	$f_1$	3,1	0,0520	0,0412	0,0402	0,0342	0,0297	0,0269	0,0230	0,0197	0,0189	0,0150	0,1240	1,9749
	$f_2$	32,6	0,4924	0,4232	0,3939	0,3563	0,3153	0,2800	0,2584	0,2275	0,2105	0,1900	0,0952	1,5163
Pomiar 74	$f_1$	3,1	0,0628	0,0493	0,0485	0,0400	0,0378	0,0319	0,0279	0,0256	0,0226	0,0191	0,1192	1,8978
	$f_2$	32,6	0,4385	0,4120	0,3675	0,3374	0,3051	0,2727	0,2396	0,2232	0,1976	0,1819	0,0880	1,4011
Pomiar 75	$f_1$	3,1	0,0713	0,0688	0,0566	0,0522	0,0463	0,0404	0,0363	0,0312	0,0275	0,0244	0,1073	1,7079
	$f_2$	32,6	0,4146	0,3437	0,3294	0,2927	0,2583	0,2358	0,2100	0,1906	0,1720	0,1589	0,0959	1,5271
Pomiar 76	$f_1$	3	0,0972	0,0876	0,0828	0,0775	0,0689	0,0633	0,0586	0,0530	0,0488	0,0450	0,0770	1,2256
	$f_2$	32,4	0,2098	0,1547	0,1304	0,1267	0,1108	0,0867	0,0839	0,0813	0,0767	0,0671	0,1140	1,8160
Pomiar 77	$f_1$	3	0,0580	0,0568	0,0549	0,0490	0,0456	0,0432	0,0370	0,0356	0,0340	0,0250	0,0842	1,3413
	$f_2$	32,4	0,7359	0,6882	0,6278	0,5950	0,5435	0,5010	0,4589	0,4136	0,3788	0,3384	0,0777	1,2370

**Legenda i objaśnienia:**

$f_1$  - częstotliwość odpowiadająca pierwszej postaci drgań [Hz];

$f_2$  - częstotliwość odpowiadająca drugiej postaci drgań [Hz];

$a_1, a_{j+1}, \dots$  - kolejne maksymalne przyspieszenia w czasie  $t$  [ $m/s^2$ ];

$\delta$  - logarytmiczny dekrement tłumienia [-];

$\zeta$  - liczba tłumienia [%].

	$f_1$	$f_2$	$\zeta_1$	$\zeta_2$
Wartości średnie	3,07	32,53	1,647	1,478
odchylenie standardowe	0	0,0730	0,213	0,139
współczynnik zmienności	0	0,0022	0,1292	0,0943

**Tab. Z. 8. 6** Liczba tłumienia dwóch pierwszych częstotliwości drgań poprzecznych złożonej belki wspornikowej z warstwą polimeru o grubości 5 mm pod dodatkowym obciążeniem (odważnik o masie 6 kg).

			$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$	$a_8$	$a_9$	$a_{10}$	$\delta$	$\zeta$
Pomiar 79	$f_1$	2,8	0,0632	0,0498	0,0463	0,0433	0,0377	0,0315	0,0295	0,0258	0,0230	0,0215	0,1081	1,7212
	$f_2$	32	1,0560	0,9835	0,9127	0,8455	0,7869	0,7353	0,6680	0,6151	0,5430	0,5022	0,0743	1,1835
Pomiar 80	$f_1$	2,8	0,0514	0,0444	0,0400	0,0391	0,0360	0,0310	0,0306	0,0281	0,0264	0,0207	0,0911	1,4503
	$f_2$	32,1	0,8070	0,7523	0,7032	0,6455	0,6085	0,5617	0,5164	0,4694	0,4324	0,3879	0,0733	1,1665
Pomiar 81	$f_1$	2,8	0,0583	0,0476	0,0451	0,0413	0,0397	0,0378	0,0348	0,0315	0,0300	0,0236	0,0902	1,4371
	$f_2$	32,1	0,8669	0,8048	0,7598	0,6962	0,6558	0,6019	0,5564	0,5043	0,4642	0,4176	0,0730	1,1631
Pomiar 82	$f_1$	2,8	0,0625	0,0554	0,0473	0,0426	0,0380	0,0374	0,0339	0,0298	0,0275	0,0240	0,0958	1,5260
	$f_2$	32,1	0,9393	0,8616	0,8204	0,7474	0,7078	0,6494	0,6025	0,5481	0,5033	0,4545	0,0726	1,1560
Pomiar 83	$f_1$	2,8	0,0610	0,0534	0,0479	0,0426	0,0411	0,0387	0,0348	0,0338	0,0318	0,0251	0,0889	1,4157
	$f_2$	32,1	0,8938	0,8229	0,7813	0,7104	0,6687	0,6157	0,5682	0,5170	0,4787	0,4309	0,0730	1,1618
Pomiar 84	$f_1$	2,8	0,0576	0,0510	0,0464	0,0452	0,0414	0,0362	0,0333	0,0291	0,0287	0,0244	0,0860	1,3689
	$f_2$	32,1	0,8102	0,7370	0,7088	0,6409	0,6061	0,5562	0,5166	0,4665	0,4338	0,3885	0,0735	1,1704

**Legenda i objaśnienia:**  
 $f_1$  - częstotliwość odpowiadająca pierwszej postaci drgań [Hz];  
 $f_2$  - częstotliwość odpowiadająca drugiej postaci drgań [Hz];  
 $a_1, a_{j+1}, \dots$  - kolejne maksymalne przyspieszenia w czasie  $t$  [ $m/s^2$ ];  
 $\delta$  - logarytmiczny dekrement tłumienia [-];  
 $\zeta$  - liczba tłumienia [%].

	$f_1$	$f_2$	$\zeta_1$	$\zeta_2$
Wartości średnie	2,8	32,08	1,487	1,167
odchylenie standardowe	0	0,0289	0,089	0,007
współczynnik zmienności	0	0,0009	0,0599	0,0057