



**POLITECHNIKA  
GDAŃSKA**

Wydział Inżynierii Mechanicznej  
i Okrętownictwa



**WYDZIAŁ INŻYNIERII  
MECHANICZNEJ  
I OKRĘTOWNICTWA**

Imię i nazwisko autora rozprawy: Katarzyna Mazur  
Dyscyplina naukowa: Inżynieria Mechaniczna

## ROZPRAWA DOKTORSKA

Tytuł rozprawy w języku polskim: Dobór cech elementu skończonego do wyznaczania naprężeń w tkance kostnej

Tytuł rozprawy w języku angielskim: Selection of finite element features to determine stresses in bone tissue

Promotor	Drugi promotor
<i>podpis</i>	<i>podpis</i>
prof. dr hab. inż. Michał Wasilczuk	<Tytuł, stopień, imię i nazwisko>
Promotor pomocniczy	Kopromotor
<i>podpis</i>	<i>podpis</i>
dr inż. Leszek Dąbrowski	<Tytuł, stopień, imię i nazwisko>

Gdańsk, rok 2023



**GDAŃSK UNIVERSITY  
OF TECHNOLOGY**

Faculty of Mechanical Engineering  
and Ship Technology

Załącznik nr 1/2  
do Zarządzenia Rektora PG nr 5/2015 z 10 lutego 2015 r.



**WYDZIAŁ INŻYNIERII  
MECHANICZNEJ  
I OKRĘTOWNICTWA**

The author of the PhD dissertation: Katarzyna Mazur  
Scientific discipline: Mechanical Engineering

## DOCTORAL DISSERTATION

Title of PhD dissertation: Selection of finite element features to determine stresses in bone tissue

Title of PhD dissertation (in Polish): Dobór cech elementu skończonego do wyznaczania naprężeń w tkance kostnej

Supervisor  <i>signature</i>	Second supervisor  <i>signature</i>
prof. dr hab. inż. Michał Wasilczuk	<Title, degree, first name and surname>
Auxiliary supervisor  <i>signature</i>	Cosupervisor  <i>signature</i>
dr inż. Leszek Dąbrowski	<Title, degree, first name and surname>

Gdańsk, year 2023





## OŚWIADCZENIE

Autor rozprawy doktorskiej: Katarzyna Mazur

Ja, niżej podpisany(a), wyrażam zgodę/~~nie wyrażam zgody\*~~ na bezpłatne korzystanie z mojej rozprawy doktorskiej zatytułowanej:

Dobór cech elementu skończonego do wyznaczania naprężeń w tkance kostnej do celów naukowych lub dydaktycznych.<sup>1</sup>

Gdańsk, dnia .....

.....

*podpis doktoranta*

Świadomy(a) odpowiedzialności karnej z tytułu naruszenia przepisów ustawy z dnia 4 lutego 1994 r. o prawie autorskim i prawach pokrewnych (Dz. U. z 2006 r., nr 90, poz. 631) i konsekwencji dyscyplinarnych określonych w ustawie Prawo o szkolnictwie wyższym (Dz. U. z 2012 r., poz. 572 z późn. zm.),<sup>2</sup> a także odpowiedzialności cywilno-prawnej oświadczam, że przedkładana rozprawa doktorska została napisana przeze mnie samodzielnie.

Oświadczam, że treść rozprawy opracowana została na podstawie wyników badań prowadzonych pod kierunkiem i w ścisłej współpracy z promotorem prof. dr hab. inż. Michał Wasilczuk, ~~drugim promotorem~~, promotorem pomocniczym dr inż. Leszek Dąbrowski, ~~promotorem\*~~.

Niniejsza rozprawa doktorska nie była wcześniej podstawą żadnej innej urzędowej procedury związanej z nadaniem stopnia doktora.

Wszystkie informacje umieszczone w ww. rozprawie uzyskane ze źródeł pisanych i elektronicznych, zostały udokumentowane w wykazie literatury odpowiednimi odnośnikami zgodnie z art. 34 ustawy o prawie autorskim i prawach pokrewnych.

Potwierdzam zgodność niniejszej wersji pracy doktorskiej z załączoną wersją elektroniczną.

Gdańsk, dnia .....

.....

*podpis doktoranta*

Ja, niżej podpisany(a), wyrażam zgodę/~~nie wyrażam zgody\*~~ na umieszczenie ww. rozprawy doktorskiej w wersji elektronicznej w otwartym, cyfrowym repozytorium instytucjonalnym Politechniki Gdańskiej, Pomorskiej Bibliotece Cyfrowej oraz poddawania jej procesom weryfikacji i ochrony przed przywłaszczeniem jej autorstwa.

Gdańsk, dnia .....

.....

*podpis doktoranta*

\*) niepotrzebne skreślić

<sup>1</sup> Zarządzenie Rektora Politechniki Gdańskiej nr 34/2009 z 9 listopada 2009 r., załącznik nr 8 do instrukcji archiwalnej PG.

<sup>2</sup> Ustawa z dnia 27 lipca 2005 r. Prawo o szkolnictwie wyższym: Rozdział 7 Odpowiedzialność dyscyplinarna doktorantów, Art. 226.





## STATEMENT

The author of the PhD dissertation: Katarzyna Mazur

I, the undersigned, agree/~~do not agree~~\* that my PhD dissertation entitled:  
Selection of finite element features to determine stresses in bone tissue  
may be used for scientific or didactic purposes.<sup>1</sup>

Gdańsk,.....

.....  
*signature of the PhD student*

Aware of criminal liability for violations of the Act of 4<sup>th</sup> February 1994 on Copyright and Related Rights (Journal of Laws 2006, No. 90, item 631) and disciplinary actions set out in the Law on Higher Education (Journal of Laws 2012, item 572 with later amendments),<sup>2</sup> as well as civil liability, I declare, that the submitted PhD dissertation is my own work.

I declare, that the submitted PhD dissertation is my own work performed under and in cooperation with the supervision of prof. dr hab. inż. Michał Wasilczuk, ~~the second supervision of~~, the auxiliary supervision of dr inż. Leszek Dąbrowski ~~the cosupervision of~~ \*.

This submitted PhD dissertation has never before been the basis of an official procedure associated with the awarding of a PhD degree.

All the information contained in the above thesis which is derived from written and electronic sources is documented in a list of relevant literature in accordance with art. 34 of the Copyright and Related Rights Act.

I confirm that this PhD dissertation is identical to the attached electronic version.

Gdańsk,.....

.....  
*signature of the PhD student*

I, the undersigned, agree/~~do not agree~~\* to include an electronic version of the above PhD dissertation in the open, institutional, digital repository of Gdańsk University of Technology, Pomeranian Digital Library, and for it to be submitted to the processes of verification and protection against misappropriation of authorship.

Gdańsk,.....

.....  
*signature of the PhD student*

\*) delete where appropriate.

<sup>1</sup> Decree of Rector of Gdansk University of Technology No. 34/2009 of 9<sup>th</sup> November 2009, TUG archive instruction addendum No. 8.

<sup>2</sup> Act of 27<sup>th</sup> July 2005, Law on Higher Education: Chapter 7, Criminal responsibility of PhD students, Article 226.





## **OPIS ROZPRAWY DOKTORSKIEJ**

**Autor rozprawy doktorskiej:** Katarzyna Mazur

**Tytuł rozprawy doktorskiej w języku polskim:** Dobór cech elementu skończonego do wyznaczania naprężeń w tkance kostnej

**Tytuł rozprawy w języku angielskim:** Selection of finite element features to determine stresses in bone tissue

**Język rozprawy doktorskiej:** polski

**Promotor rozprawy doktorskiej:** Michał Wasilczuk

**Drugi promotor rozprawy doktorskiej\*:** <imię, nazwisko>

**Promotor pomocniczy rozprawy doktorskiej\*:** Leszek Dąbrowski

**Kopromotor rozprawy doktorskiej\*:** <imię, nazwisko>

**Data obrony:**

**Słowa kluczowe rozprawy doktorskiej w języku polski:** MES, moduł Younga, kość

**Słowa kluczowe rozprawy doktorskiej w języku angielskim:** FEM, Young's moduls, bone

**Streszczenie rozprawy w języku polskim:** Badania dotyczące obliczeń metodą elementów skończonych dla tkanki kostnej często wykorzystują metodologię budowy maszyn, gdzie używa się materiałów konstrukcyjnych o jednolitych właściwościach. Rzadko uwzględniają zróżnicowanie modułu Younga w obszarze elementów skończonych, gdzie informacje o rozkładzie sztywności tkanki pochodzą z obrazów tomograficznych. Celem pracy jest opracowanie metody modelowania tkanki kostnej uwzględniającej przestrzenne zróżnicowanie modułu Younga w każdym elemencie skończonym i zbadanie korzyści wynikających z takiej rozbudowy. Badania ograniczono do zadania płaskiego. Analizowano różne metody całkowania i liczby węzłów elementu. Średni błąd energii deformacji dla obliczeń ze zmiennym modułem Younga wyniósł około 9%, podczas gdy dla klasycznego algorytmu wyniósł około 28% przy tej samej liczbie węzłów. Algorytm ze zmiennym E okazał się atrakcyjny, a wprowadzenie go do elementów 3D będzie kolejnym etapem badań. Obliczenia zostały zweryfikowane na kości świńskiej poddanej obrazowaniu TK podczas rozciągania do 600N. Porównując obrazy TK, zmierzono rozciągnięcie odcinka pomiarowego kości, które wyniosło 0,12 mm. Obliczenia z uśrednionym modułem Younga dały wynik 0,107 mm, ANSYS z zaimplementowanym zmiennym modułem Younga dał wynik 0,106 mm, a własny skrypt z zaimplementowanym zmiennym modułem Younga dał wynik 0,11 mm, najbliższy pomiarowi.

**Streszczenie rozprawy w języku angielskim:** Research on finite element calculations for bone tissue often uses machine-building methodology where materials with homogenous properties are used. The differentiation of Young's modulus in the area of finite elements is less often taken into account. Information about the distribution of tissue stiffness comes from CT images. The aim of the work is to develop a bone tissue modeling method that takes into account the differentiation of Young's modulus in each finite element and to examine the benefits of such. The research was limited to 2D task. Various methods of integration and the number of nodes of the element were analysed. The average deformation energy error for the variable Young's modulus calculations





was about 9%, while for the classical algorithm, it was about 28% for the same number of nodes. The E-variable algorithm turned out to be attractive, and introducing it to 3D elements will be the next stage of research. The calculations were verified on pig bone subjected to CT imaging when stretched up to 600N. Comparing the CT images, the elongation of the bone measuring area was 0.12 mm. Calculations with averaged Young's modulus gave a result of 0.107 mm, ANSYS with implemented variable Young's modulus gave a result of 0.106 mm, and a custom script with implemented variable Young's modulus gave a result of 0.11 mm, which is the closest to the measurement.

**Streszczenie rozprawy w języku, w którym została napisana\*\*:** <streszczenie, maksymalnie 1400 znaków>

**Słowa kluczowe rozprawy doktorskiej w języku, w którym została napisana\*\*:** <słowa kluczowe>

\*) niepotrzebne skreślić.

\*\*\*) dotyczy rozpraw doktorskich napisanych w innych językach, niż polski lub angielski.





## DESCRIPTION OF DOCTORAL DISSERTATION

**The Author of the PhD dissertation:** Katarzyna Mazur

**Title of PhD dissertation:** Selection of finite element features to determine stresses in bone tissue

**Title of PhD dissertation in Polish:** Dobór cech elementu skończonego do wyznaczania naprężeń w tkance kostnej

**Language of PhD dissertation:** polish

**Supervision:** Michał Wasilczuk

**Second supervision\*:** <first name, surname>

**Auxiliary supervision\*:** Leszek Dąbrowski

**Cosupervision\*:** <first name, surname>

**Date of doctoral defense:**

**Keywords of PhD dissertation in Polish:** MES, moduł Younga, kość

**Keywords of PhD dissertation in English:** FEM, Young's modulus, bone

**Summary of PhD dissertation in Polish:** Badania dotyczące obliczeń metodą elementów skończonych dla tkanki kostnej często wykorzystują metodologię budowy maszyn, gdzie używa się materiałów konstrukcyjnych o jednolitych właściwościach. Rzadko uwzględniają zróżnicowanie modułu Younga w obszarze elementów skończonych, gdzie informacje o rozkładzie sztywności tkanki pochodzą z obrazów tomograficznych. Celem pracy jest opracowanie metody modelowania tkanki kostnej uwzględniającej przestrzenne zróżnicowanie modułu Younga w każdym elemencie skończonym i zbadanie korzyści wynikających z takiej rozbudowy. Badania ograniczono do zadania płaskiego. Analizowano różne metody całkowania i liczby węzłów elementu. Średni błąd energii deformacji dla obliczeń ze zmiennym modułem Younga wyniósł około 9%, podczas gdy dla klasycznego algorytmu wyniósł około 28% przy tej samej liczbie węzłów. Algorytm ze zmiennym E okazał się atrakcyjny, a wprowadzenie go do elementów 3D będzie kolejnym etapem badań. Obliczenia zostały zweryfikowane na kości świnińskiej poddanej obrazowaniu TK podczas rozciągania do 600N. Porównując obrazy TK, zmierzono rozciągnięcie odcinka pomiarowego kości, które wyniosło 0,12 mm. Obliczenia z uśrednionym modułem Younga dały wynik 0,107 mm, ANSYS z zaimplementowanym zmiennym modułem Younga dał wynik 0,106 mm, a własny skrypt z zaimplementowanym zmiennym modułem Younga dał wynik 0,11 mm, najbliższy pomiarowi.

**Summary of PhD dissertation in English:** Research on finite element calculations for bone tissue often uses machine-building methodology where materials with homogenous properties are used. The differentiation of Young's modulus in the area of finite elements is less often taken into account. Information about the distribution of tissue stiffness comes from CT images. The aim of the work is to develop a bone tissue



**GDAŃSK UNIVERSITY  
OF TECHNOLOGY**

Faculty of Mechanical Engineering  
and Ship Technology

Załącznik nr 2/2  
do Zarządzenia Rektora PG nr 5/2015 z 10 lutego 2015 r.



**WYDZIAŁ INŻYNIERII  
MECHANICZNEJ  
I OKRĘTOWNICTWA**

modeling method that takes into account the differentiation of Young's modulus in each finite element and to examine the benefits of such. The research was limited to 2D task. Various methods of integration and the number of nodes of the element were analysed. The average deformation energy error for the variable Young's modulus calculations was about 9%, while for the classical algorithm, it was about 28% for the same number of nodes. The E-variable algorithm turned out to be attractive, and introducing it to 3D elements will be the next stage of research. The calculations were verified on pig bone subjected to CT imaging when stretched up to 600N. Comparing the CT images, the elongation of the bone measuring area was 0.12 mm. Calculations with averaged Young's modulus gave a result of 0.107 mm, ANSYS with implemented variable Young's modulus gave a result of 0.106 mm, and a custom script with implemented variable Young's modulus gave a result of 0.11 mm, which is the closest to the measurement.

**Summary of PhD dissertation in language, in which it was written\*\*:** <summary, up to 1400 characters >

**Keywords of PhD dissertation in language, in which it was written\*\*:** <keywords>\*

\*) delete where appropriate.

\*\*) applies to doctoral dissertations written in other languages, than Polish or English.





## Spis treści

SPIS OZNACZEŃ .....	10
1. WSTĘP .....	11
1.1. Budowa i fizjologia tkanki kostnej.....	11
2. BADANIA I MODELOWANIE TKANKI KOSTNEJ .....	16
2.1. Choroby struktury tkanki kostnej .....	16
2.2. Obrazowanie tkanek, jako źródło informacji o właściwości wytrzymałościowych .....	17
2.3. Modelowanie tkanki kostnej w literaturze .....	25
3. CEL I TEZY PRACY .....	29
4. GENEZA PROBLEMU. MES I JEGO OGRANICZENIA W OBLICZANIU MODELI O ZMIENNYCH WŁAŚCIWOŚCIACH MATERIAŁOWYCH .....	30
4.1. Metoda Elementów Skończonych dla elementów tarczowych.....	31
4.2. Metoda Elementów Skończonych dla materiałów anizotropowych .....	36
4.3. Tkanka kostna w obliczeniach MES, dane materiałowe .....	37
5. ROZWIĄZANIE PROBLEMU – WARIANT 2D.....	45
5.1. Parametry próbki .....	46
5.2. Płaski stan odkształceń czy naprężeń .....	49
5.3. Funkcja kształtu.....	50
5.4. Wybór metody całkowania .....	56
5.5. Warianty elementu dwuwymiarowego o różnych liczbach węzłów .....	65
5.6. Oprogramowanie komercyjne ANSYS .....	80
5.7. Test metody TBDATA z wykorzystaniem elementu tarczowego .....	82
6. EKSPERYMENT .....	85
6.1. Badania przygotowawcze do wykonania próbek kostnych .....	85
6.2. Eksperyment rozciągania próbek kostnych.....	94
6.3. Metoda opracowana wyników badań eksperymentalnych.....	98
6.4. Opracowanie wyników eksperymentu .....	99
6.5. Symulacja obciążenia z wykorzystaniem danych materiałowych badanej próbki kostnej. ....	101
7. Dyskusja wyników badań i obliczeń.....	111
8. Podsumowanie i wnioski .....	113
9. Bibliografia .....	116

## SPIS OZNACZEŃ

- $\gamma$  – składowa styczna odkształcenia (kąt odkształcenia postaciowego),  
 $\epsilon$ ,  $\Delta\epsilon$  – składowa normalna odkształcenia liniowego (wydłużenie jednostkowe), przyrost odkształcenia  
 $\zeta$ ,  $\eta$  – współrzędne bezwymiarowe  
 $\lambda$ ,  $\mu$  – stałe Lamégo  
 $\nu$  – współczynnik Poissona  
 $\rho$  – gęstość  
 $\sigma$ ,  $\Delta\sigma$  – naprężenia normalne, przyrost naprężeń  
 $\tau$  – naprężenia styczne  
 $a$ ,  $b$  – przyrost modułu Younga obliczany dla jednego elementu skończonego  
 $c_1$  – minimalna wartość modułu Younga, w funkcji rosnącej modułu  
 $c_2$  – współczynnik dla funkcji malejącej opisującej zmienność modułu Younga  
 $B$  – macierz liniowej zależności odkształcenia – przemieszczenia  
 $D$  – macierz materiałowa  
 $E$  – moduł sprężystości (Younga)  
 $E_0, E_1, E_2, E_3$  – stałe modułów Younga wyliczone dla węzłów narożnych elementu skończonego  
 $E_{min}, E_{max}$  – minimalna i maksymalna wartość modułu Younga w próbce testowej  
 $f$  – wektor obciążenia  
FEM – Finite Element Method – Metoda elementów skończonych  
 $G$  – moduł odkształcenia postaciowego (Kirchoffa)  
HU – gęstość radiologiczną w jednostkach Hounsfielda  
 $J$  – macierz Jacobiego  
 $k$  – macierz sztywności pojedynczego elementu  
 $K$  – globalna macierz sztywności  
 $m$  – kierunek osiowy odkształcenia  
 $n$  – kierunek odkształcenia prostopadły do osiowego  
MES – metoda elementów skończonych  
N66-N72 – węzły od 66 do 72  
RTG - zdjęcie rentgenowskie, rentgenogram  
 $s$ ,  $t$  – współrzędne znormalizowane  
 $t$  – grubość elementu w macierzy sztywności pojedynczego elementu  
TK – tomograf komputerowy, tomografia komputerowa  
 $u$  – wektor przemieszczeń  
 $U$ ,  $\Delta U$  – energia odkształcenia elementu skończonego, przyrost energii odkształcenia elementu skończonego  
 $V$  – objętość elementu skończonego

## 1. WSTĘP

Nowoczesna medycyna i jej innowacyjne rozwiązania w całości opierają się na rozwoju techniki. Od laboratorium farmakologicznego po najdrobniejsze detale sali operacyjnej medycyna przenika się z inżynierią, i to nie tylko w otaczającym nas świecie, ale i wewnątrz nas np. dzięki rozwojowi implantologii. Implanty kości i endoprotezy stawów to jednak nie tylko samodzielne nowe materiały, ale i towarzyszące im sprzęt, procedury postępowania i przygotowywania zabiegów, które stając się bardziej zaawansowane ułatwiają pracę personelu medycznego i powiększają szanse na pełen sukces zabiegu. Nie każdy zabieg może być jednak przygotowany wyłącznie na podstawie danych, nierzadko lekarze opierają się na własnym doświadczeniu i intuicji. Przykładem takiej sytuacji są operacje na tkance kostnej, której stan określa się na podstawie zdjęć RTG lub Tomografii Komputerowej (TK). Tkanka kostna, podobnie jak każda żywa struktura nie jest materiałem o jednorodnych właściwościach. Jej budowa zależy przede wszystkim od miejsca, w jakim występuje oraz funkcji, jaką spełnia, ale również od rodzaju obciążenia, jakie przenosi w organizmie. Właściwości wytrzymałościowe tej samej kości będą różniły się, zatem nie tylko u osób w różnym wieku, ale również u osób o różnej aktywności fizycznej, diecie i ekspozycji na światło dzienne.

### 1.1. Budowa i fizjologia tkanki kostnej

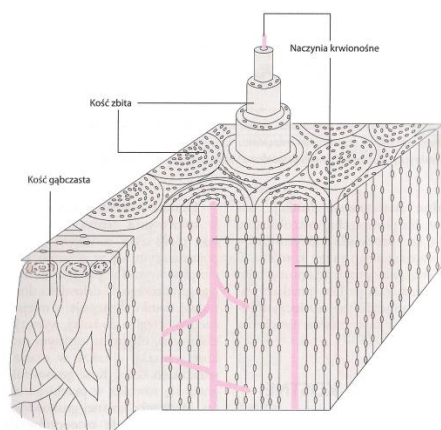
Rusztowaniem dla organizmu człowieka jest jego szkielet zbudowany z kości połączonych ze sobą stawami lub szwami. Oprócz swojej podstawowej funkcji, jaką jest oparcie dla układu mięśniowego pełni on również rolę pancerza chroniącego narządy wewnętrzne oraz mniej oczywistą funkcję magazynu soli mineralnych (głównie wapnia i fosforu) oraz w sposób pośredni funkcję krwiotwórczą. Morfologicznie tkanka kostna zbudowana jest z dwóch frakcji:

- Istoty międzykomórkowej, w której skład wchodzi część organiczna (osseina, ang. osteoid) zbudowana z włókien kolagenowych i substancji bezpostaciowej (głównie białka niekolagenowe odpowiedzialnych za mineralizację i wzrost kości) oraz część nieorganiczna (minerał kości - sole mineralne składające się na hydroksyapatyt). Udział wagowy tych dwóch grup w kości to odpowiednio 25 i 60-70%. Pojedyncze włókno kolagenowe otoczone przez substancję bezpostaciową i minerał kości tworzy blaszkę kostną [1].
- Komórek kostnych:
  - Osteoblasty - ich zadaniem jest synteza i wydzielanie organicznej istoty międzykomórkowej oraz pośrednio pobudzanie mineralizacji kości [2].
  - Osteocyty - powstają z osteoblastów, gdy te zostaną niemal całkowicie otoczone przez zmineralizowaną istotę międzykomórkową i same tej mineralizacji ulegają. Procesu mineralizacji nie przechodzą wypustki cytoplazmatyczne osteoblastu, za pomocą, których komórki przeprowadzają wymianę substancji odżywczych i metabolitów z naczyniem krwionośnym lub innym osteocytom [2].

- Osteoklasty - są rodzajem makrofagów (komórki żerne, uczestniczące w mechanizmach obronnych organizmu) powstają z monocytów, które z krwią przedostały się do kości. Ich zadaniem jest niszczenie tkanki kostnej poprzez obniżanie pH, co powoduje dekalcyfikację okolicy (odwapnienie i degradację kości). Nadmiar osteoklastów powoduje osteoporozę [2].

Ze względu na pełnioną funkcję tkankę kostną dzielimy na dwie grupy:

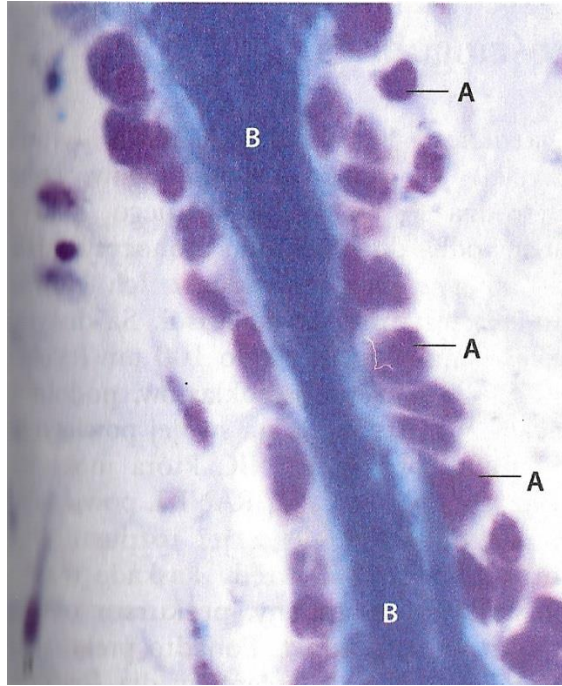
- Tkanka kostna grubowłóknista (splotowata) - w organizmie ludzkim pojawia się, jako pierwsza tkanka kostna jeszcze w życiu płodowym. Jej zadaniem jest budowanie kości. U dorosłego człowieka występuje już tylko w miejscach przyczepu ścięgien, szwach kości czaszki, błędniku kostnym i wyrostkach zębodołowych, pojawia się również w miejscach uszkodzeń kości. Zbudowana jest z grubych pęczków włókien kolagenowych o nieregularnym przebiegu [3]
- Tkanka kostna drobnowłóknista (blaszkowata) - to dojrzała forma tkanki kostnej, zbudowana z blaszek kostnych. Jest dominującą formą tej tkanki u dorosłego człowieka (Rys. 1.1).
  - Istotę gąbczastą - porowata struktura zbudowana z beleczek kostnych (ciasno owinięte wokół siebie blaszki kostne) osłaniająca szpik czerwony – krwiotwórczy. Występuje głównie w nasadach kości długich, ale również we wnętrzu kości krótkich, płaskich i różnokształtnych.  
Beleczki kostne w kości gąbczastej tworzą ażurową strukturę, w której wolnych przestrzeniach znajdują się naczynia krwionośne i szpik kostny. Takie przypominające sieć ułożenie beleczek kostnych ma bardzo wydajne właściwości amortyzujące stąd umiejscowienie tego rodzaju tkanki w nasadach kości długich[3][4][5].
  - Istotę zbitą – struktura blaszek kostnych budującą trzony kości długich oraz zabezpieczająca powierzchniowe warstwy pozostałych kości oraz nasady kości długich. Blaszkki kostne w tkance kostnej zbitej łączą się w układy złożone z 4-20 (najczęściej 4-6) blaszek o kształcie rurek ułożonych jedna w drugiej. Blaszkki te nazywamy blaszkami systemowymi, a układ, który tworzą osteonem lub systemem Haversa. Wewnątrz osteonu znajduje się otwór - kanał Haversa, przez który przechodzą włókna nerwowe oraz włosowate naczynia krwionośne odżywiające kość. Poszczególne blaszki kostne budujące osteon zawierają włókna kolagenowe, które w przeważającej większości zorientowane są równolegle względem siebie i spiralnie względem osi długiej struktury (jednocześnie osi kości w kościach długich). Kierunek ułożenia włókien w blaszkach bezpośrednio ze sobą sąsiadujących jest odchylony o kilka stopni. Wbrew nazwie struktura ta posiada przestrzenie pomiędzy blaszkami zwane jamkami i kanalikami kostnymi. Najbardziej zewnętrzna warstwa systemu Haversa nosi nazwę linii cementowej, jest uboga we włókna kolagenowe i nie zawiera kanalików kostnych [4].



Rys. 1.1. Tkanka kostna drobnowłóknista. Schemat budowy istoty zbitej i istoty gąbczastej [3].

Powstawanie kości może przebiegać na drodze jednego z dwóch procesów: kościotworzenia na podłożu błoniastym lub kościotworzenia na podłożu chrzęstnym. W wyniku kościotworzenia na podłożu błoniastym powstają kości czaszki i twarzy, obojczyki oraz częściowo łopatki, pozostałe kości są wynikiem procesu na podłożu chrzęstnym.

Kościotworzenie na podłożu błoniastym przebiega w błonie mezenchymatycznej (występująca w okresie zarodkowym tkanka łączna, z której ewoluują wszystkie rodzaje tkanek), której komórki stają się osteoblastami i zaczynają wydzielać osseinę: kolagen typu I, proteoglikany oraz białka przyczyniające się do procesu mineralizacji (wapnienia). Zapoczątkowanie mineralizacji kości w fazie płodowej przebiega poprzez odkładanie się bezpostaciowego fosforanu wapnia we włóknach kolagenu, drugim etapem tego procesu jest powstawanie kryształów hydroksyapatytu. W procesie mineralizacji istota międzykomórkowa otacza osteoblasty tworząc dookoła nich jamki i przekształcając je tym samym w osteocyty. Układ komórek tkanki kostnej, w którym osteocyty otoczone są przez osteoblasty nazywamy beleczką kostną (Rys. 1.2). Powiększając się i łącząc beleczki kostne tworzą grubowłóknistą kość splotowatą, która w końcowej fazie życia płodowego zostanie zdegradowana przez osteoklasty, a na jej miejscu osteoblasty wytworzą blaszki kości drobnowłóknistej o kształcie koncentrycznych rurek.



Rys. 1.2. Beleczka kostna (B) podczas tworzenia, w otoczeniu osteoblastów (A) [3].

Kościotworzenie na podłożu chrzęstnym przebiega w podobny sposób, komórki macierzyste tkanki mezenchymatycznej występujące w ochrzęstnej (błona pokrywająca chrząstkę) przekształcają się w osteoblasty, które kształtują beleczki kości grubowłóknistej układające się w kształt mankietu (mankiet kostny). Dookoła mankietu komórki chrząstki degenerują, a powstałe przestrzenie stają się miejscem odkładania się soli wapnia lub dojściem dla nowych komórek macierzystych i naczyń włosowatych. Równocześnie z opisanymi powyżej procesami w centralnej części kości osteoklasty kształtują jamę szpikową.

## 2. BADANIA I MODELOWANIE TKANKI KOSTNEJ

### 2.1. Choroby struktury tkanki kostnej

Podstawowym elementem struktury kości jest blaszka kostna. Prawdopodobnie ukształtowane blaszki kostne ułożone w sieć tworzącą kość są bardzo wytrzymałą strukturą nośną, a ich siła leży między innymi w odpowiednim wysyceniu minerałami. Zaburzenia procesu mineralizacji, a w tym wypadku przede wszystkim wapnienia kości mogą wystąpić zarówno podczas jej tworzenia jak i wtórnie poprzez „wypłukiwanie” soli wapnia tkanki. Najczęściej diagnozowanymi chorobami związanymi z nieprawidłową mineralizacją kości są krzywica, osteopenia, osteomalacja i osteoporoza.

Krzywica jest schorzeniem wieku dziecięcego, w przebiegu, której kości ulegają niedostatecznej mineralizacji, przez co pozostają miękkie i słabe. Bezpośrednią przyczyną choroby jest niedobór witaminy D najczęściej spowodowany zbyt małą ekspozycją na światło słoneczne (promieniowanie UV) lub nieprawidłową dietą. Niedobór witaminy D prowadzi do niedoboru wapnia, co uniemożliwia prawidłową mineralizację kości. Choroba ta w krajach rozwiniętych występuje niezwykle rzadko. Dieta noworodków i niemowląt karmionych mlekiem matki jest suplementowana witaminą D podawaną doustnie w postaci kropli. Natomiast dzieci karmione formułami mleka modyfikowanego mają zapewnioną podstawową suplementację dzięki wzbogaconemu w witaminę D składowi tych mieszanek.

Osteopenia to choroba metaboliczna kości i jednocześnie stan zagrożenia rozwoju osteoporozy. Polega na obniżeniu, w stosunku do przyjętego poprawnego zakresu, poziomu masy kostnej. Ustalenie tego czynnika polega na ilościowym pomiarze gęstości mineralnej kości poprzez badanie densytometryczne (określanie gęstości kości na podstawie obrazowania RTG). Wyróżniamy trzy rodzaje osteopenii, inwolucyjną (postępującą z wiekiem), cukrzycową (demineralizacja kości spowodowana jest towarzyszącą chorobie cukrzycowej niedoborem czynników wzrostowych oraz insuliny) oraz wcześniaczą.

Osteomalacja - krzywica wieku dorosłego. Jej głównym objawem jest spowodowana niedoborem wapnia demineralizacja (rozmiękanie) kości. Występują dwa rodzaje tej choroby [6]:

- Niedoborowa, najczęściej spowodowana niedostatecznym poziomem witaminy D odpowiedzialnej za wchłanianie wapnia w jelicie, ale również nadmiernym wydalaniem wapnia spowodowanym chorobą nerek lub zwiększonym na niego zapotrzebowaniem np. w trakcie ciąży.
- Metaboliczna również spowodowana niedoborem witaminy D, ale o podłożu nieprawidłowego lub zwiększonego jej metabolizowania np. w przebiegu chorób nerek i przytarczyc [7].



Osteoporoza jest uogólnioną chorobą szkieletu, której głównymi czynnikami są zmniejszona mineralizacja oraz zaburzona mikroarchitektura kości [8]. Wbrew szeroko rozpowszechnionej opinii nie jest to chorobą dotyczącą wyłącznie osoby w podeszłym wieku, mogą na nią zapadać również dzieci. Różnicujemy ją na:

- Osteoporozę pierwotną, której przyczyn nie są do końca poznane, a najbardziej prawdopodobne hipotezy rozciągają się od następstw schorzeń endokrynologicznych poprzez niedobory witaminy D aż do wpływu czynników zakaźnych oraz podłożu genetycznym [9].
- Osteoporozę wtórną, której przyczynami są niektóre choroby przewlekłe (np. celiakia powodująca zmniejszone wchłanianie wapnia), stosowanie przez długi czas niektórych leków (np. steroidowych powodujących hamowanie wchłaniania wapnia i fosforanów w jelicie) oraz długotrwałe unieruchomienie [9].

## **2.2. Obrazowanie tkanek, jako źródło informacji o właściwości wytrzymałościowych**

Różnice pomiędzy opisanymi w powyższym rozdziale chorobami są bardzo subtelne, ich wspólną, a zarazem główną przyczyną są zaburzenia gospodarki wapnia i witaminy D. Wspólnym skutkiem i zarazem objawem wszystkich tych chorób jest zmniejszona wytrzymałość kości, objawiająca się albo poprzez ich zwiększoną łamliwość, albo nadmierną elastyczność, czego bezpośrednią przyczyną jest demineralizacja kości.

Kość jest najtwardszą tkanką organizmu człowieka, można ją znaleźć w każdej części ciała i w każdej odległości od jego powierzchni. Człowiek posiada zarówno kości, które od skóry oddziela tylko cienka warstwa tkanki włóknistej np. paliczki jak i kości leżące głęboko wewnątrz ciała np. kość udowa [10][11]. Bez względu na ich położenie urazy i schorzenia kości nie są łatwe do zauważenia gołym okiem. Oczywiście zdarzają się przypadki skrajne gdzie w wyniku złamania kość przebija powłoki ciała, ale zwykłe pęknięcie czy odprysnięcie kości nie jest możliwe do zauważenia gołym okiem. Przełomem w diagnostyce układu kostnego było odkrycie w 1895 roku przez Wilhelma Conrada Roentgena promieniowania X, któremu towarzyszyło zupełnie niezwiązane z prowadzonymi badaniami, przypadkowe zdjęcie ręki badacza trzymającej krążek ołowiu (pierwsze zdjęcia wymagały kilku minut naświetlania trudno mówić tu więc o przypadkowym ujęciu, jednak w tym wypadku do przeprowadzenia eksperymentu na ołowianym krążku zamiast statywu Roentgen użył własnej ręki). Zdjęcie to udowodniło, że obserwowane promieniowanie jest w różnym stopniu zatrzymywane przez części, a w zasadzie tkanki ludzkiego ciała (Rys. 2.1). Światowej nauce wystarczyły niespełna dwa miesiące od publikacji przełomowej pracy Roentgena, aby po raz pierwszy użyć promieniowania X do diagnostyki. Zdjęcia nieprawidłowo zrosniętego złamania przedramienia i nieusuniętego śrutu pozostającego w ręku po postrzale wykonane pod koniec stycznia 1896 roku stały się jednymi z pierwszych wykonanych w celach medycznych [12].



Rys. 2.1. Pierwsze „medyczne” zdjęcie wykonane przez W. Röntgena. Fotografia przedstawia dłoń żony naukowca [13].

Odkrycie niemieckiego naukowca zapoczątkowało nową erę diagnostyki, w której można było zajrzeć do środka ciała człowieka bez konieczności przeprowadzania operacji.

Tworzenie klasycznego zdjęcia RTG polega na umieszczeniu badanego przedmiotu pomiędzy lampą generującą promieniowanie, a światłoczułą błoną rentgenowską (polietylen obustronnie pokryty emulsją fotograficzną, którą stanowi zawiesina bromku i jodku srebra w żelatynie) pokrytą folią wzmacniającą lub folią pamięciową (gdzie sole srebra zastępują związki fosforu lub selenu), której zapis po odczytaniu za pomocą czytnika laserowego przechowuje się w postaci cyfrowej. Lampa generująca promieniowanie X zbudowana jest z dwóch elektrod ujemnej (katody) i dodatniej (anody) umieszczonych w szklanej bańce próżniowej. Podczas pracy z katody emitowane są elektrony, które następnie uderzają w anodę w wyniku, czego ich energia kinetyczna zamienia się w energię promieniowania X oraz ciepło w proporcji 1:99. Rolę katody pełni cienki, spiralnie skręcony drut wolframowy (włókno żarzenia), przez który podczas pracy urządzenia przepływa prąd elektryczny rozgrzewając go do temperatury 2200°C, co wywołuje na nim zjawisko termoemisji elektronów. Anodę może stanowić jedno z dwóch rozwiązań:

- miedziany blok z wtopionym cienkim krążkiem wykonanym ze stopów metali o szczególnej odporności termicznej i mechanicznej np. wolframu. Podczas pracy lampy generowane są duże ilości ciepła, dlatego wewnątrz miedzianego bloku znajduje się układ chłodzenia w postaci kanałów z przepływającą cieczą (głównie woda).

- Tzw. wirująca anoda – ma postać odwróconego talerza, którego zewnętrzną częścią są dwa pierścieniowate pochylenia. Ten rodzaj anody od strony skierowanej ku elektrodzie ujemnej pokryty jest warstwą stopu wolframu z 10% dodatkiem renu. Elektroda ta obracana jest za pomocą silniczka na osi wykonanej z grafitu i molibdenu, których właściwości fizyczne zapewniają dobrą przewodność cieplną.

Podczas wykonywania badania RTG promieniowanie X generowane przez lampę jest osłabiane przez badany obiekt nadając zdjęciu efekt cienia rzucanego na błonę rentgenowską. Jeśli badany obiekt jest jednolity to jego jasność na zdjęciu będzie równomierna, jeśli składa się z różnych materiałów lub ma zróżnicowaną grubość to jasność poszczególnych miejsc zdjęcia będzie z nią korespondowała odnosząc odcień poszczególnych obszarów do stopnia, w jakim dany materiał zatrzymał wiązkę promieniowania. Osłabianie promieniowania realizuje się poprzez pochłanianie i rozpraszanie. Pierwszy z procesów jest skutkiem efektu fotoelektrycznego polegającego na wybiciu elektronu z atomu przez foton promieniowania rentgenowskiego. Wybity elektron staje się fotoelektronem, a uderzony atom jonem dodatnim. Ilość wytwarzanych fotoelektronów zależy od pierwiastków, z jakich zbudowana jest badana materia, a dokładniej od ich liczby atomowej (ilość protonów równa ilości elektronów w niezjonizowanym atomie). Bogate w wodór ( $Z=1$ ), węgiel ( $Z=6$ ), azot ( $Z=7$ ) i tlen ( $Z=8$ ) miękkie części ciała człowieka generują mało fotoelektronów, natomiast kości, w których występują duże ilości wapnia ( $Z=20$ ) generują ich znacznie więcej stąd różnice w jasności obszarów zdjęcia rentgenowskiego odpowiadających powietrzu, tkankom miękkim i kościom. Rozpraszanie promieniowania zachodzi na drodze dwóch oddzielnych procesów: rozpraszania spójnego i rozpraszania Comptona. Pierwszy z procesów zachodzi, gdy foton napotkawszy atom swoją energią wprawia, co najmniej jeden z jego elektronów w drgania o częstotliwości spójnej z jego częstotliwością. Wygaśnięcie drgań powoduje emisję nowego fotonu. Rozpraszanie Comptona natomiast zachodzi, gdy foton promieniowania zderza się z jednym z elektronów zewnętrznej powłoki atomu wybijając go. W procesie tym foton nie traci całej swojej energii, a jedynie wydłuża swoją falę i zmienia kierunek [14].

Zdjęcia RTG mają formę czarnego obrazu, którego jaśniejsze fragmenty stanowią cień, jaki rzuciło badane ciało. Takie zdjęcie jest jednak bardzo dużym uproszczeniem, na jednej warstwie widzimy przekrój przez cały badany przedmiot. Wykonując zdjęcie klatki piersiowej możemy zauważyć między innymi zarys żeber, kręgosłupa, płuc i serca, a identyfikacja kolejnych struktur oparta jest na naszej znajomości anatomii. Jeśli na obrazie pojawi się anomalia może ona z równym prawdopodobieństwem należeć do każdego leżącego na jej wysokości organu. Rozwiązaniem tego problemu są trójwymiarowe modele Tomografii Komputerowej (skaner RTK lub z ang. CT) będące złożeniem wielu "płaskich" zdjęć (przekrojów) wykonanych z różnych położeń układu lampa-detektor (w procesie tomografii błony rentgenowskie zastępowane są przez elektroniczne detektory promieniowania) względem badanego obiektu.

Prekursorem trójwymiarowego spojrzenia na diagnostykę promieniowaniem był Elihu Thompson, który wykonał dwa zdjęcia tego samego obiektu zmieniając położenie lampy i błony, a następnie umieścił je w stetoskopie tworząc pierwszy trójwymiarowy model oparty na zdjęciach RTG [15].

Realizacja tego założenia musiała poczekać jednak aż moc obliczeniowa komputerów dogoni rozwój obrazowania, umożliwiając obróbkę dużej ilości zdjęć i zbudowanie z nich modelu 3D. Udało się to w latach 60-tych XX wieku, na pierwsze kliniczne zastosowanie tomografii komputerowej trzeba było jednak poczekać aż do roku 1972 [15].

Dzisiejsza tomografia komputerowa działa w dużej części w zgodzie z pierwotnym założeniem. Badany obiekt pozostaje nieruchomy, a dookoła niego obracają się pozostające w jednej osi lampa i detektor (zamiast stosowanych w diagnostyce rentgenowskiej błon stosowane są elektroniczne detektory promieniowania) tworząc szereg zdjęć, które później za pomocą obróbki komputerowej przetwarzane są w model komputerowy. Poszczególne części badanego obiektu mające różną gęstość oraz skład w różnym stopniu zatrzymują promieniowanie wysłane przez lampę. Komputer znając położenie lampy jest w stanie rozpoznać, do której części obiektu przyporządkować cień z danego zdjęcia.

Konwencjonalne skanery RTK pracują w trybie sekwencyjnym, po każdym obrocie układu lampa – detektor stół, na którym znajduje się badany obiekt jest przesuwany o zadaną odległość wzdłuż osi wspomnianego obrotu. Ten typ tomografów dzielimy na cztery generacje różnicując je w zależności od ilości lamp i detektorów

- I generacja - jedna lampa i jeden detektor. Lampa emituje pojedynczą prostoliniową wiązkę promieniowania. Urządzenie wykonuje skan linii, następnie obraca się o  $1^\circ$ .
- II generacja - jedna lampa i 3-52 detektorów. Lampa emituje wąską wiązkę wachlarzową odbieraną równocześnie przez kilka detektorów. Im urządzenie zawiera więcej detektorów tym wykonuje większy kąt jednorazowego obrotu

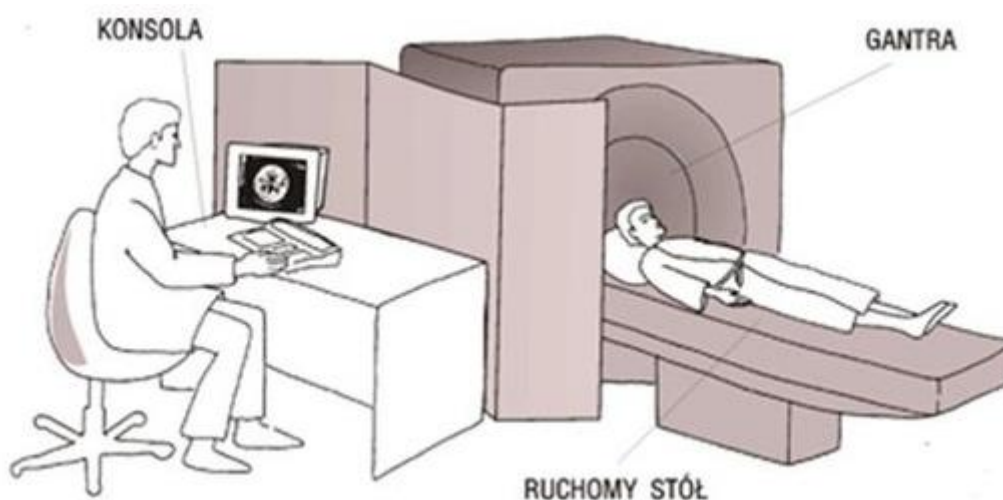


- III generacja - jedna lampa i duża matryca detektorów. Lampa emituje szeroką wiązkę wachlarzową promieniowania.
- IV generacja - jedna lampa i matryca detektorów obejmująca całą średnicę urządzenia. Detektory ułożone dookoła badanego obiektu pozostają nieruchome, lampa wykonuje pełen obrót. Takie rozwiązanie znacząco przyspiesza wykonanie badania, co ma szczególne znaczenie przy badaniu obiektów ruchomych takich jak narządy wewnętrzne człowieka.

Osobnymi wariantami skanerów, które łączą się z generacjami opisanymi powyżej są:

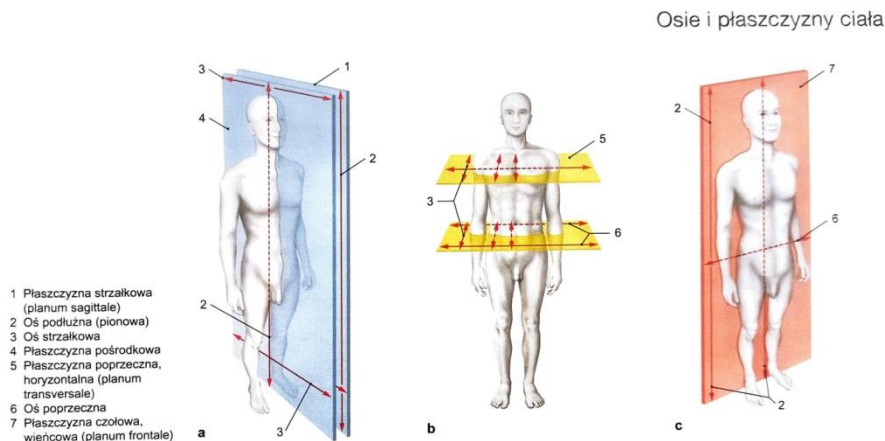
- skanery ultrszybkie [15]
- spiralne – podczas badania stół z badanym obiektem przesuwany jest ze stałą prędkością wzdłuż osi obrotu lampy, który realizowany jest równocześnie (wymaga zwiększonej mocy obliczeniowej, ale daje dokładniejszy wynik)
- wielorzędowe – skaner spiralny posiadający więcej niż jeden rząd detektorów (2-64), skraca czas badania w stosunku do jednorzędowego skanera o takich samych parametrach od 5 do 8 razy

Skanery różnią się od siebie budową, liczbą lamp i detektorów jednak istnieje jeszcze jedna bardzo ważna cecha, która odróżnia poszczególne urządzenia, jest nią rozdzielczość. Pierwszy tomograf wykonywał zdjęcie składające się z siatki 80x80 pikseli. Tak niewielka dokładność wynikała z możliwości obliczeniowych ówczesnych komputerów. Do uzyskania takiego obrazu wykonywano 28 800 projekcji, nowoczesne tomografy wykonują nawet do 2 milionów projekcji, dzięki czemu badany obiekt można obserwować w mikrometrach. Oczywiście każda projekcja wiąże się z dodatkową dawką promieniowania, przez co kliniczne zastosowanie TK ogranicza się do rozdzielczości obrazu gdzie wielkość piksela nie przekracza 1 mm (nie rozpatrując możliwości późniejszej obróbki obrazu) [16].



Rys. 2.2 Schemat budowy Tomografu Komputerowego [17].

Proces uzyskiwania obrazu TK przebiega wieloetapowo najprościej, jako przykładu użyć tomografu klinicznego. Urządzenie w uproszczeniu można podzielić na trzy części pierścienia samego skanera - gantry (w nim znajdują się lampa i detektory), zintegrowany z nim stół, na którym umieszczamy pacjenta lub badany obiekt i konsolę obsługi urządzenia (Rys. 2.2).



Rys. 2.3 Osie i płaszczyzny ciała człowieka [18]

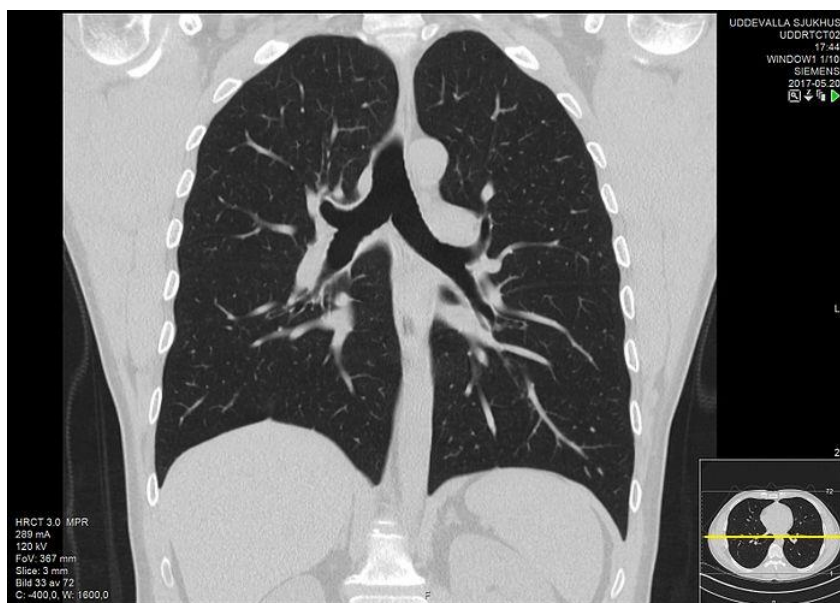
Jeśli badaniu poddawany jest człowiek to oś pierścienia jest równoległa, a wręcz niemal pokrywa się z jego osią pionową (Rys. 2.2, Rys. 2.3). Przed rozpoczęciem właściwego skanowania pacjent ułożony nieruchomo na stole jest przesuwany wzdłuż osi pierścienia tomografu tak, aby płaszczyzna, w której znajduje się układ lampa-detektor znajdowały się nad jednym z końców obszaru, który chcemy zbadać. Technik obsługujący urządzenie wyznacza początek i koniec badanego obszaru, określając tym samym odległość, o jaką w trakcie badania przesunie się stół względem gantry. Odległość ta zostanie podzielona przez liczbę przekrojów, jakie chcemy wykonać na badanym obszarze podając, jako wynik pojedyncze przesunięcie stołu wzdłuż osi obrotu skanera. Cały badany obszar zostanie, zatem podzielony na sekcje, „plasterki” wykonywane prostopadle do osi obrotu skanera. Samo badanie przebiega, zatem w sekwencji [16]:

- Stół i pacjent pozostają nieruchomo, układ lampa-detektory wykonuje obrót dookoła badanej sekcji (plastra) tworząc sekwencję zdjęć. Zdjęcia te mają naturę identyczną jak zwykle zdjęcie RTG, a zatem są cieniem, jaki organy wewnętrzne tworzą zatrzymując część promieniowania rentgenowskiego. Pojedyncze zdjęcie sekwencji nie jest, zatem bardziej użyteczne niż klasyczne RTG. Dopiero obróbka komputerowa całej sekwencji zmienia jakość dostarczonych informacji.

- Komputer znając położenie układu lampa-detektor podczas wykonywania poszczególnych zdjęć sekwencji, za pomocą algorytmów dzieli poszczególne „cienie” budując dwuwymiarowy model przekroju. Proces ten możemy odtworzyć prostym eksperymentem: wyobraźmy sobie balon napełniony jednorodną galaretką, do której przed stężeniem wrzucono metalową nakrętkę. Jeśli zrobimy zwykłe zdjęcie balona zobaczymy cień nakrętki, ale nie będziemy w stanie określić dokładnie, w jakim miejscu balona się ona znajduje (może leżeć nawet za balonem na płaskim zdjęciu nie zauważymy różnicy). Obchodzimy, zatem balon przemieszczając się względem jednej z jego osi o  $90^\circ$  i wykonujemy drugie zdjęcie. Znając położenie aparatu względem balona przy wykonywaniu wszystkich zdjęć możemy łatwo określić położenie nakrętki. Organizm ludzki jest układem dużo bardziej niejednorodnym, a celem badania nie jest jedynie określenie położenia elementu, ale również np. jego gęstości. Sekwencja zdjęć musi, więc zawierać dużo więcej niż 2 obrazy.
- Gdy gantra zakończy jeden obrót stół, na którym znajduje się pacjent przesuwa się i następuje kolejny obrót układu lampa-detektory.

Przedstawiony schemat działania nie oddaje w pełni sposobu działania skanerów wielorzędowych, gdzie podczas wykonywania jednego obrotu gantry jednocześnie powstaje kilka przekrojów przez badany obiekt oraz skanera spiralnego, gdzie obrót układu lampa-detektory następuje jednocześnie z przesunięciem stołu w taki sposób, że tor ruchu lampy odbywa się po linii spirali.

Poszczególne przekroje mogą za pomocą programu komputerowego zostać połączone w trójwymiarowy model badanego obiektu, dzięki czemu możemy oglądać przekroje przez dowolnie ustawioną płaszczyznę (Rys. 2.4). Zmiana płaskich, dwuwymiarowych skanów na trójwymiarowe modele niesie ze sobą potrzebę „wyciągnięcia” poszczególnych pikseli obrazu w trzecim kierunku. Gdy piksel staje się trójwymiarowy mówimy o vokselu.



Rys. 2.4 Obraz tomografii komputerowej klatki piersiowej człowieka. Widzimy dwa przekroje wykonane w płaszczyznach wzajemnie do siebie prostopadłych [19].

Aby jednoznacznie i powtarzalnie odtwarzać obrazy wykonane przy użyciu promieniowania Roentgena równolegle ze skonstruowaniem pierwszego tomografu komputerowego powstała ilościowa skala opisująca gęstość radiologiczną – skala Hounsfielda [HU] [20]. Skala jednostek Hounsfielda to liniowe przekształcenie pierwotnie stosowanego pomiaru współczynnika osłabienia. Istnieją zarówno dodatnie jak i ujemne jednostki Hounsfielda. Za wartość zerową uznajemy gęstość radiologiczną wody destylowanej. Wartość -1000 HU wykazuje powietrze. W obu przypadkach parametr odnosi się do warunków standardowych. Aby obliczyć wartość gęstości radiologicznej określonego materiału wykorzystujemy wzór(1). Przykładowe wartości gęstości radiologicznej podano w Tab. 1.

$$HU = \frac{\mu_x - \mu_{H_2O}}{\mu_{H_2O} - \mu_{powietrza}} \times 1000 \quad (1)$$



Tab. 1 Współczynniki pochłaniania promieni X przez niektóre tkanki i ciecze [14]

Rodzaj struktury	Współczynnik pochłaniania w jednostkach Hounsfielda w skali +1000 do -1000
Kości	>130
Wątroba	65 ± 5
Śledziona	45 ± 5
Trzustka	40 ± 10
Tkanka Tłuszczowa	-80 do -100
Krew	80 ± 10
Surowica krwi	27 ± 2
Woda	0 ± 5
Powietrze w płucach	< -700

### 2.3. Modelowanie tkanki kostnej w literaturze

Sposobem na określenie wytrzymałości dowolnej konstrukcji jest Metoda Elementów Skończonych MES, którą wykorzystuje się również do obliczeń naprężeń w tkance kostnej oraz implantach. Głównym źródłem niedokładności takich obliczeń jest niedostatecznie uwzględniany związek między morfologią kości, jej danymi materiałowymi, a jej wytrzymałością. Kość nie ma jednorodnej struktury wewnętrznej takiej jak np. stopy metali, składa się z połączonych w nieuporządkowany sposób beleczek o różnych wymiarach i składzie procentowym minerałów między innymi wapnia, z tego powodu przypisanie danych materiałowych do modelu MES kości nie jest czynnością oczywistą.

Spośród różnych metod przypisywania właściwości materiałowych tkance kostnej, w tym przede wszystkim modułu Younga, trzy stosowane są najczęściej:

- przypisanie jednej wartości modułu Younga do całej kości lub dużego obszaru modelu [21][22][23]. Jest to najczęściej stosowana metoda [24].
- przypisanie indywidualnego modułu Younga do każdego elementu skończonego modelu, zgodnie z danymi ze zdjęć TK [25][26],
- przypisanie indywidualnego modułu Younga do węzłów modelu z wykorzystaniem elementów B-spline [27].

Ad a) przypisanie jednych uśrednionych danych materiałowych do całego modelu stosuje się zarówno tam gdzie jego rozmiary są niewielkie, jak i tam gdzie model obejmuje całą kość [28]. Niewielkiego rozmiaru modele kości obejmujące zaledwie jej wycinki, lub fragmenty mikrostruktury [29][30], swoją budową i niewielkimi różnicami w danych materiałowych różnych punktów modelu nierzadko pozwalają na sprowadzenie obliczeń do przypadku materiału izotropowego [31] lub izotropowego z wtrąceniami. Jednak nawet wtedy dobieranie wartości modułu Younga z literatury z dużym prawdopodobieństwem zniekształca wynik względem rzeczywistego przypadku, czyli

względem obliczeń gdzie dane materiałowe uzyskuje się np. z obrazów TK. Przykładem obliczeń gdzie dane materiałowe zaczerpnięte zostały z literatury, a tkanka kostna została sprowadzona do heterogenicznego kompozytu wzmocnionego włóknami, w którym każdy składnik ma jedną wartość modułu Younga w całej swojej objętości jest symulacja naprężeń podczas przecinania tkanki wykonana przez Ilige S. Hage, gdzie model osteoblastów (włókien) ma wartość modułu Younga równą 20,8 GPa, a przestrzeń pomiędzy nimi 26,3 GPa [32].

Podobnie w większości publikacji dotyczących stomatologii, stosuje się pojedynczą wartość modułu przypisywaną oddzielnie szkliwu, zębini i kości wyrostka zębowego. Mayank Gupta w symulacji rozkładu naprężeń w ożębnej i kości wyrostka zębodołowego obciążonego ruchami zamków aparatu ortodontycznego przyjmuje wymienione powyżej wielkości, jako 84,1 GPa, 18,3 GPa i 13,7 GPa [33]. Podobnie Cilpa Varghese w publikacji oceniającej rozkład naprężeń w stawie skroniowo żuchwowym podczas masowej retrakcji zębów używa stałej wartości modułu Younga dla całego zęba oraz osobno dla kości wyrostka zębowego, dla obu materiałów przyjmując 20 GPa [34]. M. Wierszycki w publikacji opisującej wybrane problemy biomechaniczne, kości szczęki, w której mocowany jest implant przypisuje pojedynczy moduł Younga dla struktur zbitej 13 GPa, a dla struktury gąbczastej w czterech wariantach dla czterech schematów obliczeń 0,69 GPa, 1,6 GPa, 5,5 GPa i 9,5 GPa [35].

Symulacje komputerowe, których głównym tematem jest rozkład temperatury w tkance kostnej podczas wiercenia również, pomimo jej złożonej struktury, traktują kość jak materiał izotropowy. S. Sezek opisując wpływ parametrów wiercenia na rozkład temperatury i martwicę w kości przyjmuje moduł Younga tkanki, jako zaledwie 10,2 MPa [36]. Huanxin Wang badając schemat rozkładu temperatury w tkance kostnej podczas wiercenia różnicując go w funkcji wieku pacjenta przyjmuje początkowo moduł Younga, jako 20 GPa, a później w zależności od wieku, w przedziale od 13,88 GPa do 16,83 GPa [37]. Seifollah Gholampour symulując proces wiercenia w kości czaszki pod osłoną gazu chłodzącego również przyjął izotropowy charakter tkanki i przeprowadził obliczenia dla modułu równego 18 GPa [38]. Podobnie Mahdi Qasemi w pracy badającej wpływ kierunku ułożenia osteonów na temperaturę frezowania czołowego kości w symulacji, której wyniki porównuje do wyników pomiarów wykorzystuje stały moduł Younga wybrany, dla kości ludzkiej, z przedziału 10-22 GPa i wołowej 10-17 GPa [39]. Podobnie poszczególnym partycjom kości (osteony, cement, macierz) osobne moduły Younga przypisuje M.Chen w publikacji opisującej propagację pęknięć kości w zabiegach laserowych [40]. Kolejnym przykładem w grupie symulacji związanych z temperaturą jest badanie optymalizacji materiału wiertła pod kierunkiem Hossein Haghghi Hassanalideh, gdzie moduł Younga został przydzielony, jako wartość do całego modelu kości udowej 18 GPa i piszczeli 16,7 GPa [41]. W publikacjach



związanych z obróbką kości często przypisuje się tkance kostnej stały moduł Younga [42][43][44]. Podobnie artykuły opisujące implanty kostne [45][46][47][48].

Przytoczone powyżej publikacje dotyczą modeli o niewielkich kształtach, w literaturze znaleźć można jednak również duże kości, których właściwości upraszczane są do izotropowych. Lionel Rayward w publikacji "A subject-specific FEM to predict deep tissue mechanical stresses when supine: Development of efficient contact interfaces using Shared Topology" pomimo posiadania skanu MRI kości udową, krzyżową i miedniczą traktuje, jako materiał jednorodny nadając wartość modułu Younga zaczerpniętą z literatury równą 17,8 GPa [49]. Podobnie J. Marciniak w artykule „Biomechaniczna analiza układu kość udowa - gwóźdź śródszpikowy z wykorzystaniem metody elementów skończonych” kość traktuje jako materiał izotropowy przypisując jej stały moduł Younga o wartości 18,6 GPa [50].

Przypisywanie jednej stałej wartości modułu Younga, zaczerpniętej z literatury, do modeli tkanki kostnej skutkuje rozbieżnością tego parametru w cytowanych źródłach od 10 GPa do 22 GPa. Dwukrotna zmiana wartości tego parametru znacząco wpływa na wyniki obliczeń np. naprężeń.

Równie często publikowane są artykuły, gdzie moduł Younga ma dwie wartości, po jednej dla każdej ze struktur tkanki (zbita i gąbczasta). Również tutaj niemal zawsze wartości podawane są w ślad za literaturą. Mauro Cozzani w publikacji z zakresu ortodoncji analizującej naprężenia przyjmuje wartości modułu Younga 20 GPa dla kości zbitej i 2 GPa dla kości gąbczastej [51]. Podobną proporcję zastosowano w artykule zajmującym się kośćmi szczęki, tj. dziesięciokrotność wartości przyjęta została przez Mohammad Reza Niroomand, wartości odpowiednio 13 GPa i 1,37 GPa [52]. Trzeci przykład różnicowania modułu Younga w obrębie kości szczęki to publikacja Aylin Pasaoglu Bozkurt, gdzie przyjęto wartości 14,7 GPa i 1,3 GPa [53]. Xiao-Fei Song w publikacji, w której przewidywano (symulowano) wartość sił podczas chirurgicznego cięcia kości przyjął wartości modułu Younga 22 GPa dla kości zbitej i 11 GPa dla gąbczastej [54]. Innym podejściem do różnicowania tego parametru są osobne wartości dla różnych kierunków działania obciążenia [55].

Porównując publikacje o zbliżonej tematyce, opisujące ten sam wycinek ciała ludzkiego i tak samo opierające wykorzystane do symulacji wartości na danych literaturowych można zauważyć, iż wartość modułu Younga dla kości zbitej waha się od 13 do 20 GPa, sięgając nawet 22 GPa dla nieznanej lokalizacji. Tak samo wartości dla kości gąbczastej nie są stałe, a zawierają się w przedziale od 1,3 GPa do 2 GPa w publikacjach opisujących kości szczęki oraz do 11 GPa dla nieznanej lokalizacji kości. Wzrost wartości w obszarze badań nad kością gąbczastą sięga więc 0,7 GPa, czyli ok. 50%.

Oba podejścia (taka sama stała wartość modułu Younga dla obu rodzajów kości oraz dwie stałe wartości, po jednej dla kości gąbczastej i zbitej) niosą ze sobą duże ryzyko błędnego wyniku, co wynika z losowości przyporządkowywania wartości w stosunku do

rzeczywistych parametrów badanych obiektów. Taka metoda jest jednak szybka i wymaga wielokrotnie mniejszych zasobów mocy obliczeniowych niż dwie pozostałe, w których dane materiałowe stanowią obszerne macierze wartości zamiast pojedynczej liczby.

Ad b i c) Dwie pozostałe metody przypisywania danych materiałowych opierają się na ich agregacji do poszczególnych punktów modelu, czy to zgodnie z poszczególnymi pikselami obrazu TK [56][57][58] czy bardziej selektywnie tworząc funkcje zmienności [92]. Takie podejście niesie ze sobą powstawanie dużych zadań obliczeniowych, w których zarówno wprowadzenie danych, jak i wykonanie obliczeń wymaga mocy obliczeniowych wykraczających poza możliwości standardowego komputera osobistego. K.Pietroń i inni, w publikacji Correlation of Bone Material Model Using Voxel Mesh and Parametric Optimization poddają próbki kostne o polu przekroju ok  $80\text{mm}^2$  i długości ok 70mm skanowaniu tomografem komputerowym, aby na podstawie uzyskanych obrazów wygenerować siatkę podziału na elementy skończone przekraczającą 200 000 elementów [59]. Skanowanie próbek kości w przeciwieństwie do pracy na obrazach całego organizmu nie niesie za sobą ograniczeń dawki promieniowania.

Traktowanie tkanki kostnej, jako zbitej struktury o stałym module Younga jest powszechnie stosowanym uproszczeniem w budowaniu modeli obliczeniowych w artykułach naukowych. Obserwowane jest nawet w przypadku symulacji skupiających się na rozkładzie naprężeń, gdzie oczywistym jest, iż tak daleko idące uproszczenie wypaczy wynik. W tym wypadku korzystanie z danych literaturowych może przesunąć rzeczywistą wartość modułu Younga nawet o 10 GPa. Średnią wartość zaczerpniętą z literatury znajdujemy nawet w publikacjach, gdzie autorzy posiadali skany TK lub MRI badanego przypadku. Wówczas możliwe byłoby w prosty sposób uzyskanie lokalnych lub chociaż uśrednionych wartości, ale dopasowanych do rzeczywistych właściwości materiałowych badanych kości, co powiększa takie zadanie obliczeniowe, wydłuża czas niezbędny do przygotowania i wykonania symulacji oraz wymaga wielokrotnie większych mocy obliczeniowych.

### 3. CEL I TEZY PRACY

Zgodnie z opisaną powyżej metodyką przypisywania właściwości materiałowych modelowi tkanki kostnej w obliczeniach MES. W tym przede wszystkim modułu Younga, możemy wyróżnić trzy najczęściej stosowane procedury: przypisanie stałego modułu Younga do całości modelu, przypisanie właściwości zgodnie z danymi pobranymi z obrazowania TK oraz modelowanie z wykorzystaniem elementów B-spline. Każda z zastosowanych metod wyróżnia się pewnymi ograniczeniami: małą dokładnością obliczeń, potrzebą zaangażowania dużej mocy obliczeniowych lub losowością wyniku, w zależności od wyboru badanych punktów modelu. Kierunkiem prac badawczych zawartych w niniejszej pracy jest opracowanie metody obliczeniowej minimalizującej lub całkowicie wykluczającej ograniczenia powszechnie używanych metod modelowania kości w metodzie elementów skończonych.

Teza pracy:

- ✓ Model zbudowany z elementów skończonych o zmiennych w obszarze pojedynczego elementu właściwościach materiałowych pozwala, przy mniejszym rozmiarze zagadnienia niż model złożony z większej liczby elementów o stałych właściwościach materiałowych, w prawidłowy sposób wyznaczyć rozkład odkształceń i naprężeń w tkance kostnej.

Cel pracy: opracowanie metody obliczeń wytrzymałościowych materiałów o zmiennych właściwościach materiałowych pozwalającej na wyeliminowanie błędu wynikającego z uproszczenia danych materiałowych do pojedynczej wartości przy zachowaniu krótkiego czasu obliczeń i niskiej wymaganej mocy obliczeniowej.

Aby osiągnąć postawiony cel pracy konieczne jest zrealizowanie celów cząstkowych:

- ✓ Sformułowanie nowego elementu skończonego ze zmiennym w jego obszarze modułem Younga
- ✓ Opracowanie metody przypisywania właściwości materiałowych do poszczególnych obszarów elementu
- ✓ Badanie wpływu liczby punktów całkowania wg. Kwadratury Gaussa na wyniki analizy MES
- ✓ Badanie eksperymentalne weryfikujące poprawność sformułowania

Model w przyszłości może zostać wykorzystywany w procesie przygotowawczym przed zabiegiem wszczepienia implantu, do oceny wytrzymałości tkanki kostnej w żywym organizmie.

#### 4. GENEZA PROBLEMU. MES I JEGO OGRANICZENIA W OBLICZANIU MODELI O ZMIENNYCH WŁAŚCIWOŚCIACH MATERIAŁOWYCH

Sklepienia łukowe, kopuły, zwodzone mosty, maszyny oblężnicze i wiele, wiele innych zmusiły konstruktorów do poszukiwania bardziej pewnej i mniej kłopotliwej niż eksperymenty, formy projektowania konstrukcji. Nowe sposoby obliczeń rozwijały się przez tysiąclecia, ograniczały je jednak możliwości obliczeniowe, i tak jak wspomniany w poprzednim rozdziale tomograf komputerowy od pomysłu do realizacji musiał poczekać, aż myśl dogoni rozwój techniki tak część sposobów obliczeń różnego rodzaju konstrukcji musiała poczekać na technikę komputerową.

Coraz bardziej skomplikowane konstrukcje wymuszały poszukiwanie dokładniejszych i szybszych metod rozwiązywania coraz bardziej złożonych układów równań. Efektem takich poszukiwań było powstanie Metody Elementów Skończonych (MES – z angielskiego FEM Finite Element Method). Metoda Elementów skończonych jest systemem rozwiązywania układów równań różniczkowych. Jej podstawą jest podział dziedziny na elementy skończone, dla których za pomocą funkcji przybliżamy rozwiązanie, a faktyczne obliczenia wykonujemy tylko dla ich węzłów.

Ten sposób rozwiązywania zagadnień rozwinął się równolegle w kilku częściach świata, jako prekursorów uważa się Aleksandra Hrennikoffa i Richarda Couranta [60], którzy prowadzili prace we wczesnych latach czterdziestych XX wieku w Stanach Zjednoczonych, Feng Kanga, który swoje badania realizował w Chinach na przełomie lat 50 i 60 oraz Leonarda Oganesyana, który pierwszą pracę z dziedziny MES opublikował w 1963 roku w ZSRR.

Metoda elementów skończonych opiera się na podziale całości konstrukcji na skończoną liczbę małych elementów. W rzeczywistości stykają się one ze sobą w nieskończonej ilości punktów, zadanie upraszcza się jednak do postaci gdzie stykają się one ze sobą tylko w wybranych punktach nazywanych węzłami. Takie uproszczenie zadania pozwala na jego analizę numeryczną jak w zwykłym przypadku statycznym [61]. W zależności od stopnia złożoności konstrukcji i ilości wymiarów, każdy węzeł przenosi siły i momenty w różnej liczbie zależnej od ilości stopni swobody, jakie ten posiada. Węzeł może przenosić zatem maksymalnie trzy siły, po jednej na każdą oś  $x$ ,  $y$  i  $z$  oraz trzy momenty skręcające. Jednocześnie węzeł może ulegać przemieszczeniu wzdłuż każdej z trzech osi oraz obrotowi wokół każdej z nich. Do sił oddziałujących na węzeł dodajemy siły równoważące obciążenie zewnętrzne oraz te wynikające z odkształceń początkowych. Wynikiem działania sił są powstające w elementach naprężenia, a wynikiem przemieszczeń odkształcenia.

Metoda pozwala na wykonywanie obliczeń zarówno jedno jak i dwu oraz trój wymiarowych, gdzie wraz ze wzrostem liczby wymiarów układu rośnie stopień skomplikowania rozwiązywanych równań.

Aby poprawnie zbudować model dyskretny badanego obiektu z wykorzystaniem MES należy:

1. Zbudować model geometryczny i dokonać podziału badanego obszaru na elementy skończone wybranego rodzaju.
2. Do każdego elementu skończonego przypisać właściwości mechaniczne materiału, z jakiego wykonany jest badany obiekt.
3. Zdefiniować warunki, kierunki, miejsca działania oraz charakter obciążeń zewnętrznych (stałe, zmienne w czasie)
4. Zdefiniować warunki brzegowe (poprzez podanie wartości przemieszczeń, prędkości i przyspieszeń w miejscach gdzie odebrane są stopnie swobody modelowanego obiektu).

Po spełnieniu tych warunków obliczenia sprowadzają się do rozwiązania równań macierzowych.

#### 4.1. *Metoda Elementów Skończonych dla elementów tarczowych*

W przypadku obliczeń wytrzymałościowych kluczowym jest sformułowanie macierzy sztywności elementu skończonego. Odpowiednia agregacja macierzy elementów uwzględniająca ich topologię w siatce modelu globalnego pozwala zbudować macierz globalną badanego obiektu, co w efekcie końcowym prowadzi do stworzenia układu równań algebraicznych w postaci:

$$f = K \cdot u \quad (2)$$

Gdzie:

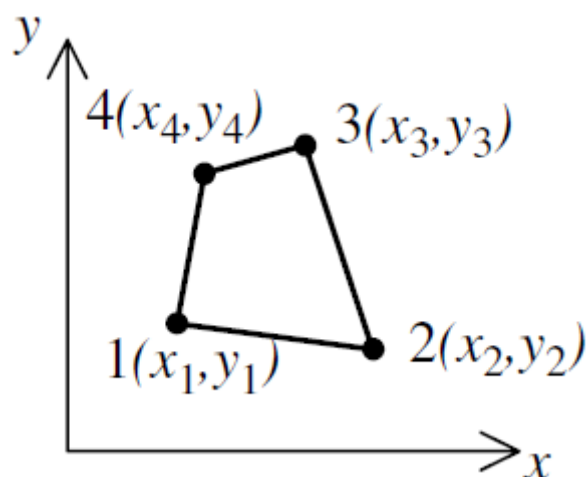
f – wektor obciążenia

K – globalna macierz sztywności

u – wektor przemieszczeń

Globalna macierz sztywności, w literaturze oznaczana dużą literą K, jest sumą macierzy sztywności węzłów poszczególnych fragmentów przestrzeni modelu. Fragmenty przestrzeni modelu to właśnie elementy skończone, o których mowa w nazwie metody obliczeniowej. Lokalna macierz sztywności pojedynczego elementu oznaczana jest w literaturze, jako mała litera k i jest wynikiem całkowania ilorazu trzech kolejnych macierzy (3) [61].

Dalsze obliczenia przedstawiono na przykładzie czterowęzłowego elementu tarczowego (Rys. 4.1).



Rys. 4.1 Element tarczowy czterowzłowy w globalnym układzie współrzędnych [62].

$$[k] = t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [D] [B] [J] d\xi d\eta \quad (3)$$

gdzie:

$t$  – grubość elementu

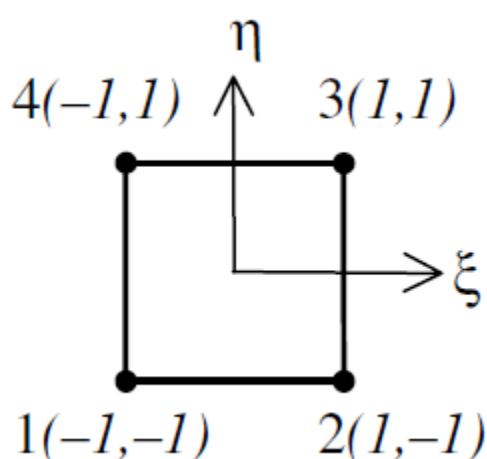
$B$  – macierz liniowej zależności odkształcenia – przemieszczenia

$D$  – macierz materiałowa

$J$  – Jakobian

$d\xi, d\eta$  – całkowanie po współrzędnych bezwymiarowych (znormalizowanych).

W macierzy liniowej zależności odkształceń od przemieszczeń  $B$  współrzędne globalne węzłów obliczanego elementu są sprowadzane do współrzędnych znormalizowanych  $\xi, \eta$  (Rys. 4.2).



Rys. 4.2 Element skończony we współrzędnych znormalizowanych  $\eta$  i  $\xi$  [62].

Numeracja punktów zgodna ze współrzędnymi globalnymi.



Macierz B elementu składa się z lokalnych macierzy  $B_i$  wyznaczonych osobno dla każdego z węzłów tego elementu. Wyznaczanie macierzy węzłów możemy zapisać na kilka sposobów z pomocą Jakobianu  $|J|$  (wyznacznik macierzy Jacobiego) lub z użyciem macierzy operatorów różniczkowych. W obu przypadkach finalnie otrzymamy ten sam wynik macierzy k, w przypadku drugiego zapisu we wzorze 3 wykreślamy Jakobian.

Prześledźmy obliczenia z użyciem macierzy Jacobiego [62]:

$$[B] = \frac{1}{|J|} [B_1 \ B_2 \ B_3 \ B_4] \quad (4)$$

$$B_i = \begin{bmatrix} a \frac{\partial N_i}{\partial \xi} - b \frac{\partial N_i}{\partial \eta} & 0 \\ 0 & c \frac{\partial N_i}{\partial \eta} - d \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ c \frac{\partial N_i}{\partial \eta} - d \frac{\partial N_i}{\partial \xi} & a \frac{\partial N_i}{\partial \xi} - b \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$a = \frac{1}{4} [y_1(\xi - 1) + y_2(-1 - \xi) + y_3(1 + \xi) + y_4(1 - \xi)] \quad (6)$$

$$b = \frac{1}{4} [y_1(\eta - 1) + y_2(1 - \eta) + y_3(1 + \eta) + y_4(-1 - \eta)] \quad (7)$$

$$c = \frac{1}{4} [x_1(\eta - 1) + x_2(1 - \eta) + x_3(1 + \eta) + x_4(-1 - \eta)] \quad (8)$$

$$d = \frac{1}{4} [x_1(\xi - 1) + x_2(-1 - \xi) + x_3(1 + \xi) + x_4(1 - \xi)] \quad (9)$$

$$|J| = \frac{1}{8} [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4] \begin{bmatrix} 0 & 1 - \eta & \eta - \xi & \xi - 1 \\ \eta - 1 & 0 & \xi + 1 & -\xi - \eta \\ \xi - \eta & -\xi - 1 & 0 & \eta + 1 \\ 1 - \xi & \xi + \eta & -\eta - 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \quad (10)$$

W przypadku drugiej metody zapisu otrzymujemy [63]:

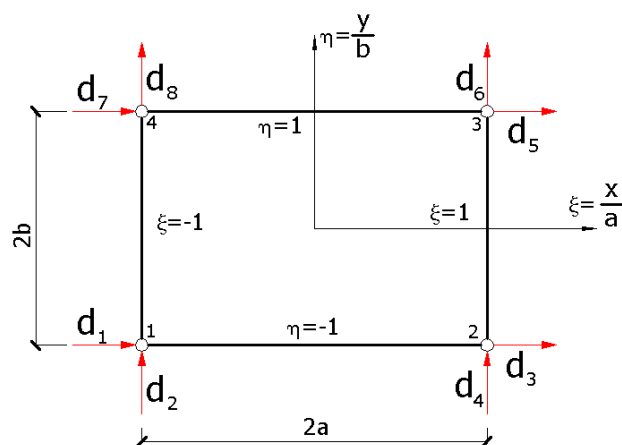
$$[B] = [B_1 \ B_2 \ B_3 \ B_4] \quad (11)$$

$$B_i = \begin{bmatrix} N_{i,x} & 0 \\ 0 & N_{i,y} \\ N_{i,y} & N_{i,x} \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$N_{i,x} = \frac{\partial N_i}{\partial x} = \frac{1}{a} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{1}{a} \cdot N_{i,\xi} \quad (13a)$$

$$N_{i,y} = \frac{\partial N_i}{\partial y} = \frac{1}{b} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial \eta} = \frac{1}{b} \cdot N_{i,\eta} \quad (13b)$$

Symbole  $\xi$  i  $\eta$  odnoszą się do długości boków elementu skończonego po transformacji do układu współrzędnych bezwymiarowych (Rys. 4.3).



Rys. 4.3 czterowzłowy element skończony w układzie współrzędnych znormalizowanych [63].

W obu przypadkach literą  $N$  oznaczone są funkcje kształtu poszczególnych węzłów elementu. Funkcje można zapisać, jako macierz funkcji kształtu.

$$N = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4] \quad (14)$$

$$N_1 = \frac{1}{4} \cdot (1 - \xi) \cdot (1 - \eta) \quad (15)$$

$$N_2 = \frac{1}{4} \cdot (1 + \xi) \cdot (1 - \eta) \quad (16)$$

$$N_3 = \frac{1}{4} \cdot (1 + \xi) \cdot (1 + \eta) \quad (17)$$

$$N_4 = \frac{1}{4} \cdot (1 - \xi) \cdot (1 + \eta) \quad (18)$$

Drugą, wspólną dla wszystkich elementów, macierzą obliczeń macierzy sztywności pojedynczego elementu jest macierz materiałowa  $D$ . Zawiera ona w sobie właściwości sztywnościowe materiału, z którego wykonany jest obliczany model. Dla obliczeń cienkich tarcz wyróżniamy dwie wersje macierzy materiałowej, dla przypadku płaskiego stanu odkształceń i płaskiego stanu naprężeń.

Naprężenia i odkształcenia zapisujemy natomiast w postaci macierzy kolumnowych odpowiednio (19) i (20).

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} \quad (20)$$

W przypadku płaskiego stanu naprężeń (P.S.N.) mówimy, że w płaszczyźnie xy nie występują naprężenia, stąd zakładamy  $\sigma_z=0$ ,  $\tau_{zx}=0$  i  $\tau_{zy}=0$ , co niesie za sobą następujące wartości przemieszczeń:  $\gamma_{xz}=0$ ,  $\gamma_{yz}=0$  i  $\varepsilon_z \neq 0$ . Tym samym sześci-elementowe macierze naprężeń i odkształceń redukują się do trójelementowych [64].

W przypadku płaskiego stanu odkształceń (P.S.O.) zerowe wartości przyjmują wielkości  $\varepsilon_z$ ,  $\gamma_{xz}$  oraz  $\gamma_{yz}$  i w konsekwencji  $\tau_{zy}=0$ ,  $\tau_{zx}=0$  i  $\sigma_z \neq 0$ .

Uogólniając macierz materiałowa ma postać (21):

$$D = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \quad (21)$$

gdzie:

$\lambda$  i  $\mu$  – stałe Lamégo

Stałe Lamégo to stałe materiałowe wyrażone w paskalach opisujące właściwości sztywnościowe materiału izotropowego (materiału, o stałych właściwościach wytrzymałościowych bez względu na kierunek działania obciążenia) (22), (23). Ich zastosowanie dla tego typu materiałów upraszcza zapis prawa Hooke'a. Stała opisana  $\mu$  jest równa modułowi Kirchhoffa.

$$\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (22)$$

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \quad (23)$$

gdzie:

$E$  – moduł Younga

$\nu$  – współczynnik Poissona

Zależność pomiędzy macierzą materiałową  $D$ , a naprężeniami i odkształceniami ma postać (24):

$$\sigma = D\varepsilon \quad (24)$$

Wprowadzenie założeń płaskiego stanu naprężeń i płaskiego stanu odkształceń, a także podstawienie do wzoru ogólnego  $D$  szerzej stosowanych parametrów: modułu Younga i współczynnik Poissona upraszcza zapis macierzy materiałowej do odpowiednio (25) i (26):

$$D = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$D = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (26)$$



Przedstawionych powyżej uproszczeń nie zastosujemy dla elementów przestrzennych, gdzie macierz materiałowa będzie miała postać (21). Jak widać w opisanym przypadku obliczenia wytrzymałościowe przeprowadzone metodą elementów skończonych pozwalają na wprowadzenie jednej wartości właściwości wytrzymałościowych  $E$  i  $\nu$  dla jednego elementu skończonego. W przypadku obliczeń materiałów niejednorodnych np. kompozytów możemy obliczać model złożony z kilku „podmodeli”, z których każdy składał się będzie z elementów o odpowiednich właściwościach materiałowych. Problem pojedynczej stałej, jako odwzorowania właściwości wytrzymałościowych materiału nasila się wraz ze wzrostem złożoności modelu. Jeśli badany przedmiot nie posiada jednorodnych właściwości wytrzymałościowych możemy albo uśrednić je dla całego modelu, albo wykonywać obliczenia przypisując poszczególnym elementom skończonym ich własne właściwości wytrzymałościowe. Żadne z tych rozwiązań nie przyniesie jednak dokładnego rozwiązania. Zgodnie z podstawową wiedzą na temat MES uśrednianie właściwości wytrzymałościowych zmniejsza dokładność obliczeń i „gubi” dokładne dane, jakie opisywały model przed aproksymacją. Przypisywanie osobnych właściwości wytrzymałościowych do poszczególnych modeli powoduje natomiast powstawanie karbów na ich granicach, które w wynikach obliczeń powodują powstawanie spiętrzenia naprężeń, których w rzeczywistości nie ma.

Problem obliczeń wytrzymałościowych modeli zbudowanych z materiałów, którym nie można jednoznacznie określić właściwości wytrzymałościowych, dotyczy przede wszystkim tworzyw pochodzenia naturalnego takich jak drewno czy kości oraz wszystkich materiałów anizotropowych. Możliwość dokładnego poznania wytrzymałości struktury kości ma szczególną wagę przy planowaniu interwencji chirurgicznych takich jak na przykład endoprotezoplastyka stawu biodrowego gdzie wybór rodzaju zastosowanej endoprotezy opiera się między innymi na ocenie stopnia wysycenia kości wapniem. Obecnie stosowany, bazujący na intuicji i szablonach sposób wyboru rodzaju i rozmiaru endoprotezy można byłoby oprzeć na dokładnych obliczeniach wytrzymałościowych. Wynik takich obliczeń uwzględniałby strukturę i jej właściwości wytrzymałościowe, a nie wyłącznie kształt określany na podstawie klasycznego zdjęcia RTG.

#### **4.2. Metoda Elementów Skończonych dla materiałów anizotropowych**

Macierz materiałowa w metodzie elementów skończonych wypełniona jest stałymi opisującymi właściwości materiałowe danego materiału (21). Dla materiałów anizotropowych możliwe jest zastąpienie jej macierzą będącą zbiorem zależności (27), z zachowaniem rozmiaru i jej symetryczności  $D_{ij}=D_{ji}$  [65]. Oznacza to, że dla pojedynczego modelu możemy przypisać do 21 stałych materiałowych, co w przypadku projektowania dużych i wysoce zmiennych modeli wymusi gęsty podział na oddzielne zadania obliczeniowe.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & D_{14} & D_{15} & D_{16} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & D_{24} & D_{25} & D_{26} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & D_{34} & D_{35} & D_{36} \\ D_{41} & D_{42} & D_{43} & D_{44} & D_{45} & D_{46} \\ D_{51} & D_{52} & D_{53} & D_{54} & D_{55} & D_{56} \\ D_{61} & D_{62} & D_{63} & D_{64} & D_{65} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} \quad (27)$$

Możliwe byłoby, zatem wykorzystanie tej metody do obliczeń tkanki kostnej tylko w przypadku niewielkich fragmentów kości

Szczególnym zagadnieniem materiałów anizotropowych są materiały ortotropowe, a zatem takie, których właściwości wytrzymałościowe zależą od kierunku działania siły. Jeśli sprowadzimy wytrzymałość materiału do zagadnienia gdzie moduł Younga zmienia się wzdłuż osi x, y i z wówczas otrzymamy zależność(28).

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & -\frac{\nu_{xy}}{E_y} & -\frac{\nu_{xz}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{yx}}{E_x} & \frac{1}{E_y} & -\frac{\nu_{yz}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{zx}}{E_x} & -\frac{\nu_{zy}}{E_y} & \frac{1}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{xy}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{yz}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{zx}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} \quad (28)$$

gdzie:

$E_x, E_y, E_z$  - moduł Younga zgodny z kierunkiem działania osi

$\nu_{xy}, \nu_{xz}$ , itd. – stała Poissona

$G_{xy}, G_{yz}, G_{zx}$  – moduł Kirchhoffa

W obu przypadkach stałe materiałowe pozostają stałymi wartościami dla całego elementu skończonego.

Tkanka kostna nie jest materiałem ortotropowym,

#### 4.3. Tkanka kostna w obliczeniach MES, dane materiałowe

Wykonywanie obliczeń wytrzymałościowych metodą elementów skończonych wymaga określenia właściwości materiałowych obiektu, który tym obliczeniom jest poddawany. Podstawowymi parametrami są moduł Younga i liczba Poissona.

Liczba Poissona wyraża stosunek odkształcenia poprzecznego do odkształcenia podłużnego w osiowym stanie naprężeń (29), czyli w dużym uproszczeniu o ile zmieni się wielkość przekroju przedmiotu (wykonanego prostopadle do wymiaru jego długości) w stosunku do jego długość przy naprężeniach działających wzdłuż wymiaru jego długości.

$$\nu = -\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_m} \quad (29)$$

gdzie:

$\varepsilon$  – odkształcenie

m – kierunek osiowy

n – kierunek prostopadły do m



Liczba Poissona jest wartością stałą dla materiałów izotropowych np. dla tytanu wynosi 0,34, ale może być również podawana, jako przedział np. dla stali jest to 0,27-0,3, nie wynika to jednak z wahań pomiaru, a z różnorodności stopów. Kość jest materiałem zupełnie nie izotropowym, choć w publikacjach często traktowana jest właśnie jak przypadek izotropowości. Przyjęta wartość najczęściej wynika ze studiów literaturowych [33][34][49][66], czasami różnicowana jest na tkankę zbitą i gąbczastą [51][52][53]. Badania przeprowadzone na końskich kościach przy wykorzystaniu istoty zbitej wykazały, iż liczba Poissona może wahać się od 0,01 do 0,174 w zależności od kierunku obciążenia [67], co oznacza, że wartość jest o połowę mniejsza niż przyjmowana często w obliczeniach [68].

Podobnie niejednoznacznie rzecz ma się z drugą podstawową wielkością określającą właściwości wytrzymałościowe, czyli modułem Younga. Moduł Younga określa sprężystość materiału podczas osiowego ściskania i rozciągania. Definiujemy go, jako stosunek naprężeń do odkształceń liniowych wywołanych przy danym obciążeniu i podajemy w paskalach (30).

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \quad (30)$$

gdzie:

$\sigma$  – naprężenia

$\varepsilon$  – odkształcenia liniowe

Wartość tego współczynnika podobnie jak w przypadku liczby Poissona może być podawana, jako przedział i również tu jest to wynikiem różnorodności materiałów zapisanych pod jedną nazwą. Wartość tego parametru dla kości możemy znaleźć korzystając nawet z ogólnodostępnych źródeł takich jak Wikipedia (wersja angielska stan na 26.08.2018). Figuruje tam, jako stała o wartości 14 GPa, podczas, gdy w publikacjach naukowych i uzależniając pomiar od wielu czynników znajdujemy wartości z przedziału od 0,75 do 22,34 GPa [66].

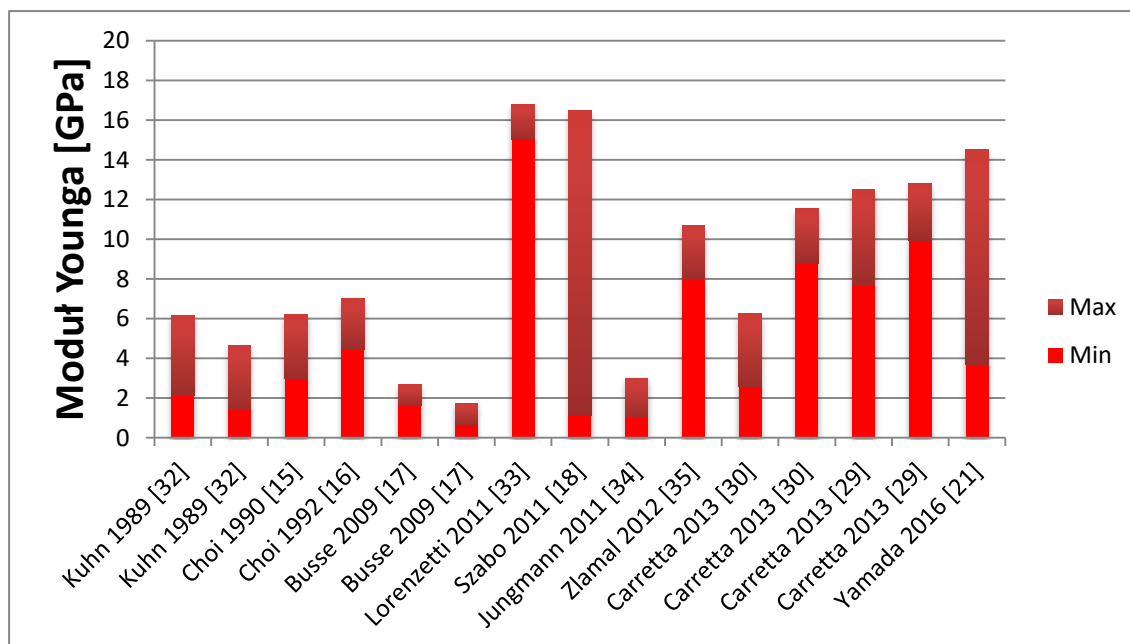
Metoda pozyskiwania obrazu w odniesieniu do struktury kości ma bardzo ważny udział w obrazowaniu różnych rodzajów tkanki, gąbczastej i zbitej. Oba typy zawierają w sobie ten sam rodzaj beleczek kostnych o tych samych właściwościach mechanicznych, a jedynie różnym zagęszczeniu i rozmieszczeniu [21]. W publikacjach, w których znajdujemy odniesienie do wytrzymałości kości rzadko wykorzystywane są dokładne dane materiałowe pojedynczej kości. Najczęstszą metodą jest wykorzystywanie uśrednionych wartości. Dla fragmentów kości zbudowanych ze struktury zbitej moduł Younga określa się w przedziale 3,3 GPa dla obciążeń poprzecznych do 18 GPa dla obciążenia wzdłuż osi długiej, dla kości gąbczastej wartość Modułu Younga przyjmuje się 1 GPa, bez względu na kierunek obciążenia [69].

Badania mające na celu określenie dokładnych właściwości materiałowych tkanki kostnej prowadzone są w trzech stanach obciążenia: podczas zginania [70], rozciągania i ściskania oraz dwoma mniej popularnymi metodami pomiaru: w próbie zginania podczas wyboczenia i badaniach ultrasonograficznych.

W Tab. 2 przedstawiono wyniki wyznaczania modułu Younga w próbie zginania. Zauważyć można, że uzyskane wartości mieszczą się w zakresie 1,13 – 16,8 GPa z błędem pomiarowym przekraczającym nawet 50% (Tab. 2). W większości publikacji obliczenia zginania przeprowadzane są za pomocą teorii zginania pręta Bernoullego-Eulera. Metoda ta nie uwzględnia jednak ścinania i skręcania, przez co w niektórych publikacjach zastępowana jest teorią Timoshenko–Ehrenfesta. B. Busse w publikacji *Increased calcium content and inhomogeneity of mineralization render bone toughness in osteoporosis: Mineralization, morphology and biomechanics of human single trabeculae* [71] bada kości ludzkie, kości miednicy i kręgi pobrane od dawców zdrowych i chorujących na osteoporozę. Podane w tabeli wielkości to uśrednione wyniki, gdzie 1,2 GPa to średnia wartość modułu Younga dla osób chorych, a 2,16 GPa dla zdrowych. Wysuszone beleczki kostne poddawane były trójpunktowemu zginaniu do momentu zniszczenia próbki na specjalnie przygotowanym urządzeniu. Publikacja napisana przez S.Lorenzetti poddaje badaniom zdrowe kości owcze. Wynik 15,0 GPa i 16,8 GPa podany został dla dwóch badanych blaszek wyciętych z głowy kości udowej i poddanych zginaniu [72]. R.Jungmann, M.E.Szabo, R.Carretta i S.Yamada swoje badania oparli na kości udowej bydłowej. R.Jungmann i M.E.Szabo wykorzystali tą samą, co w poprzednio omawianych publikacjach metodę trójpunktowego zginania. Uzyskali wyniki zbliżone do kości ludzkich badanych przez B. Busse. R.Caretta badał oddzielnie próbki pobrane od młodych i starych osobników uzyskując dwa zestawy wyników odpowiednio dla osobników młodych 4,43 GPa i dla starych 10,16 GPa [73]. W cytowanym artykule moduł Younga wyznaczany był za pomocą dwóch metod: zginania i rozciągania próbek. S.Yamada badał beleczki kostne za pomocą gięcia mikrowspornikowego, mocując próbkę tylko z jednej strony, a uginając ją na przeciwnym końcu. Średni wynik modułu Younga osiągnięty za pomocą takiego pomiaru to 9,1 GPa [74].

Tab. 2 Moduł Younga wyznaczony eksperymentalnie zginaniem beleczki kostnej [66]

Źródło	Young's modulus (GPa)
Kuhn 1989 [75]	4,16 ± 2,02
	3,03 ± 1,63
Choi 1990 [76]	4,59 ± 1,6
Choi 1992 [77]	5,72 ± 1,27
Busse 2009 [71]	2,16 ± 0,53
	1,2 ± 0,55
Lorenzetti 2011 [72]	15,0 i 16,8
Szabo 2011 [78]	1,13 – 16,46
Jungmann 2011 [79]	2,0 ± 1,0
Zlamal 2012 [80]	9,34 ± 1,36
Carretta 2013 [73]	4,43 ± 1,83
	10,16 ± 1,37
Carretta 2013 [81]	10,09 ± 2,42
	11,38 ± 1,42
Yamada 2016 [74]	9,1 ± 5,4





Trudność pomiaru modułu Younga za pomocą eksperymentu opartego na zginaniu pojedynczej beleczki kostnej spowodowany jest w największym stopniu niejednorodnym przekrojem poprzecznym próbki na długości zginania. Niejednoznaczności te minimalizuje się poprzez odpowiedni dobór próbek (beleczki o proporcji maksymalnej do minimalnej średnicy przekroju nie większej niż 1,3 : 1) lub poprzez kształtowanie próbki za pomocą frezowania. Frezowanie z kolei niesie ze sobą ryzyko niekontrolowanych zmian w mikrostrukturze tkanki. Bez względu na to, czy próbka była poddana obróbce mechanicznej czy nie, struktura wewnętrzna traktowana jest w obliczeniach, jako homogeniczna.

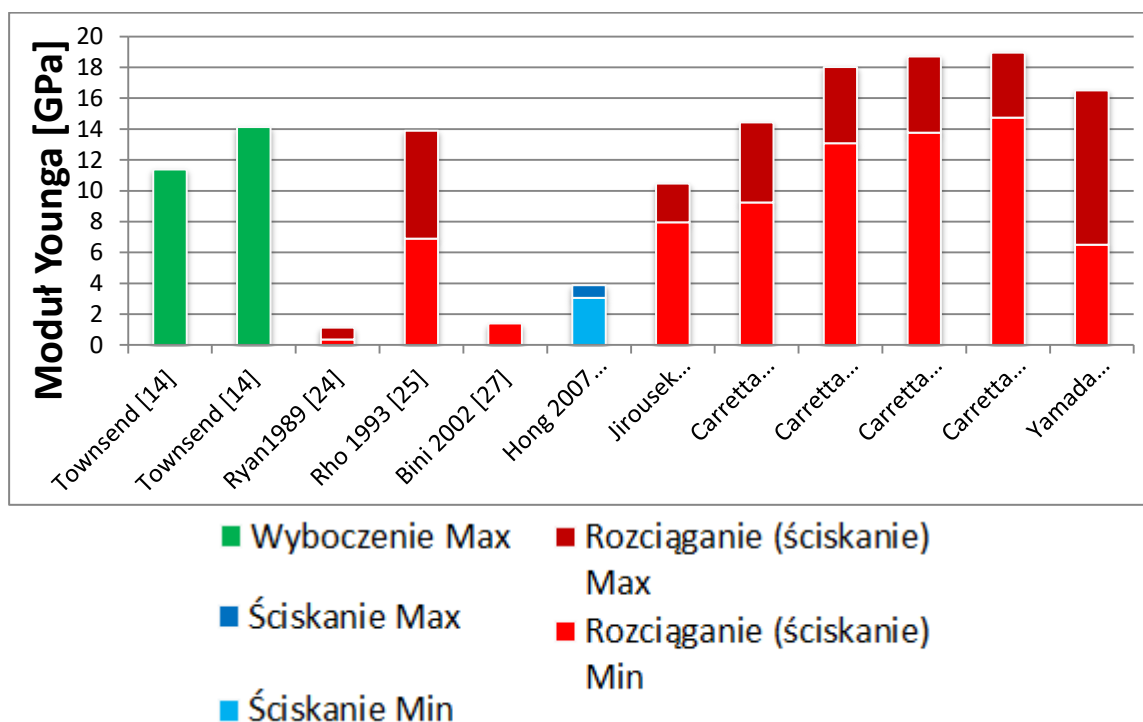
Zginanie beleczek przeprowadzane jest najczęściej jedną z dwóch metod: zginaniem trójpunktowym lub zginaniem z mikropodparciem. W pierwszym przypadku występuje ujemna korelacja modułu Younga z grubością blaszki kostnej, w drugim zaś nie można określić zależności pomiędzy wartością wyznaczonego modułu Younga, a kształtem, rozmiarem i orientacją blaszki w uchwycie. Bez względu na model podparcia zauważalna jest korelacja pomiędzy występującymi w próbce naprężeniami, a zawartością hydroksyapatytu i kolagenu.

Wyznaczanie modułu Younga za pomocą rozciągania i ściskania próbek kostnych pozwala na uzyskanie wartości pomiędzy 0,75, a 16,85 GPa (Tab. 3). W zależności od źródła i tutaj spotkać możemy rozrzut wartości rzędu 50%. Główne źródła niedokładności są jednak inne niż w przypadku poprzednio opisaney metody pomiarowej i są to; niedokładność pomiaru przemieszczeń, niemożliwość dokładnego określenia powierzchni, na jaką działa obciążenie oraz oś, wzdłuż której działa obciążenie (ściskanie w osi długiej  $3,47 \pm 0,41$  GPa, w osiach krótkich  $2,57 \pm 0,28$  GPa i  $2,54 \pm 0,22$  GPa). Ponownie do badań wykorzystano głównie kości bydłecze, w mniejszej liczbie kości ludzkie. Próbki pobierane były w większej części z obszaru kości gąbczastej, ale również z kości zbitej. W teście rozciągania beleczka kostna była sucha, w uchwycie zabezpieczono ją za pomocą kleju. Podwójne wartości modułu Younga w publikacji Novel method to analyze post-yield mechanical properties at trabecular bone tissue level [73] dotyczą kości młodych 11,84 GPa i starych 15,56 GPa. W publikacji Within subject heterogeneity in tissue-level post-yield mechanical and material properties in human trabecular bone wartość 16,24 GPa dotyczy kości od zdrowych dawców, a wartość 16,85 GPa od dawców gdzie zauważono zamiany w tkance kostnej wynikające z postępującej osteoporozy. F.Bini w swojej publikacji również podaje podwójną wartość wyniku wyznaczania modułu Younga. 1,41 GPa to wynik eksperymentu ściskania beleczki kostnej, a 1,89 GPa jej rozciągania [82].

W literaturze nie znaleziono przykładów wyników uzyskanych z badań USG.

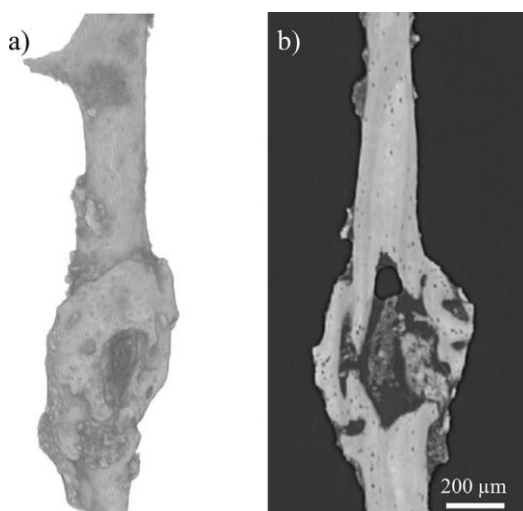
Tab. 3 Moduł Younga wyznaczony eksperymentalnie wyboczeniem, ściskaniem lub rozciąganiem beleczki kostnej [66]

Źródło	Metoda	Young's modulus (GPa)
Townsend [83]	Wyboczenie	11,38
	Wyboczenie	14,13
Ryan1989 [84]	Rozciąganie	0,75 ± 0,39
Rho 1993 [85]	Rozciąganie	10,4 ± 3,5
Bini 2002 [82]	Rozciąganie / Ściskanie	1,41–1,89
Hong 2007 [86]	Ściskanie	3,47 ± 0,41
Jirousek 2011 [87]	Rozciąganie	9,21 ± 1,26
Carretta 2013 [73]	Rozciąganie	11,84 ± 2,6
		15,56 ± 2,47
Carretta 2013 [81]	Rozciąganie	16,24 ± 2,47
		16,85 ± 2,1
Yamada 2014 [88]	Rozciąganie	11,5 ± 5,0



Rozrzut wartości pomiaru odkształcenia w rozciąganiu i ściskaniu próbek wynika ze sposobu ich mocowania. Najczęściej stosowany klej akrylowy ma sztywność mniejsza niż zakładana sztywność próbki, stąd pomiar odległości pomiędzy uchwytami jest sumą odkształcenia badanej kości i kleju. Ponadto osiowy pomiar odległości nie pokrywa się z modelem obciążenia występującym w próbce (oprócz czystego rozciągania/ściskania występuje tam również skręcanie i ściskanie).

Tak duży przedział wielkości modułu Younga wyznaczonego za pomocą różnych metod, ale dla tego samego rodzaju materiału (tkanka kostna z pojedynczej beleczki kostnej) poza już omówionymi błędami może być spowodowany wieloma innymi czynnikami w tym nieznaną wewnętrzną strukturą beleczek (Rys. 4.4). Belecza kostna zbudowana jest z blaszek kostnych, które wzajemnie do siebie ciasno przylegają. Nie gwarantuje to jednak ciągłej pozbawionej porów struktury, której ze względu na wymiary beleczek i blaszek nie można w prosty sposób określić. Taka budowa może powodować brak powtarzalności wyników pomiarów (wytrzymałościowych) oraz przyspieszone niszczenie samych beleczek podczas badania.



Rys. 4.4 Obraz TK pojedynczej beleczki kostnej ludzkiej kości udowej a) rekonstrukcja 3D, b) zdjęcie TK przekrój w osi długiej [66].

Przedział, w którym zawiera się moduł Younga kości jest więc bardzo szeroki i jego uśrednienie lub wybór wartości na podstawie danych literaturowych może zmienić wyznaczone wartości nawet kilkudziesięciokrotnie.

Stosowaną w literaturze zależnością jest więc uzależnienie wartości modułu Younga od gęstości radiologicznej konkretnego obszaru [89][90].

$$\rho \left[ \frac{g}{cm^3} \right] = \frac{(0,63 \cdot HU - 6,7)}{1000} \quad (31)$$

$$E [MPa] = 1904 \cdot \rho^{1,64} \quad (32)$$

Aby wykonać model obliczeniowy kości należy, zatem poddać ją obrazowaniu za pomocą tomografu komputerowego[91]. Jedno skanowanie umożliwia uzyskanie zarówno kształtu jak i danych materiałowych poszczególnych obszarów. Każdy z wokseli (trójwymiarowych pikseli) uzyskanego obrazu tomograficznego przypisujemy jednemu elementowi skończonemu. Element ma wówczas własne właściwości materiałowe, ponieważ stopień szarości punktu na obrazie oddaje jego gęstość radiologiczną w jednostkach Hounsfielda [HU], którą można przeliczyć za pomocą wzorów (31) na gęstość, a następnie za pomocą wzoru (30) na moduł Younga wyrażony w [MPa]. Wzory (31) i (32) są najczęściej pojawiającymi się w przebadanej na rzecz niniejszej pracy literaturze.

Poszczególne woksele obrazu uzyskanego w tomografii klinicznej mają wymiary zależne od podanej dawki promieniowania i zastosowanej metody. Rzadko stosowana technika obrazowania warstwa po warstwie oraz badanie objętościowe pozwalają na uzyskanie wokseli o wymiarach poniżej 1,5 mm. Metody te są czasochłonne i narażają pacjenta na przyjęcie zwiększonej dawki promieniowania. Rutynowe obrazowanie wykonuje się techniką szybkiego badania spiralnego, gdzie grubość warstwy przekracza 2 mm [16].

Jakość danych wykonanego badania TK zależy w dużej mierze od sposobu prezentacji obrazów. Najczęściej wykorzystywane są automatyczne wyświetlanie oraz rekonstrukcja wielopłaszczyznowa. Jakość rekonstrukcji zależy od procenta, w jakim kolejne warstwy zachodzą na siebie (30-50%). W przypadku badania kości grubość warstwy obrazowania to 1-3 mm [16].

Podsumowując, minimalne wymiary woksela nie przekraczają sześciannu o wymiarach 1x1x1 mm, co w przypadku obrazowania kości i przyporządkowywania jednego elementu jednemu wokselowi tworzy model złożony z setek tysięcy elementów. Dla dobra pacjenta często wielkości pikselu obrazu powiększa się, aby zmniejszyć tym samym dawkę przyjętego podczas badania promieniowania. Takie podejście zmniejsza ilość danych wejściowych przetwarzanych przez komputer do uzyskania obrazów TK, tym samym pogarszając dokładność wyniku.

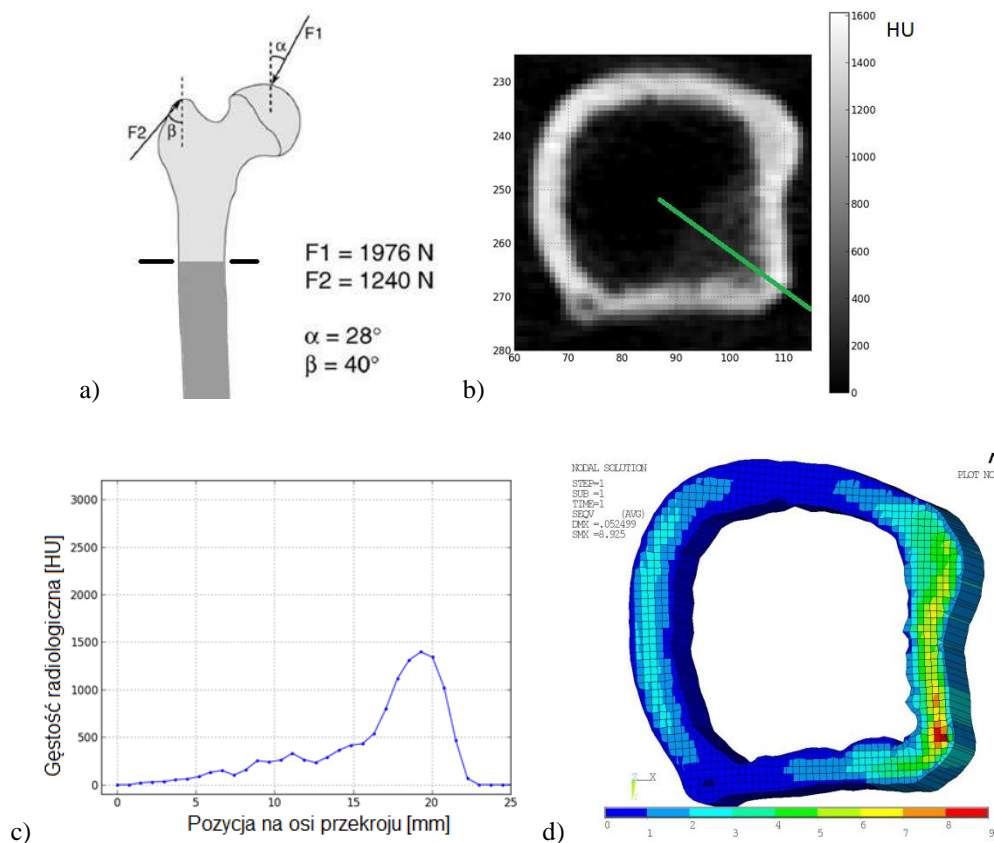
Długość najmniejszej struktury kości, z której składa się jej porowata konstrukcja, a zatem beleczka kostna to maksymalnie ok 3 mm [23]. Element ten nie ma kształtu idealnie prostej belki i jest ustawiony w różnym położeniu względem płaszczyzny skanu. Stąd poszczególne woksele obrazu nie są dokładnym odzwierciedleniem struktury kości w danym miejscu, a jedynie jej uśrednieniem. Woksel jest, więc milimetrem sześciennym obszaru, w którym zawierają się fragmenty beleczek i przestrzeni między nimi, a jego jasność na obrazie to uśredniona wartość wszystkich przenikalności radiologicznych w nim zawartych. Model zbudowany w taki sposób cechuje się skokowymi zmianami właściwości materiałowych w sąsiednich elementach, co powoduje powstawanie lokalnych karbów, skokowych zmian wartości obliczanych naprężeń, które w rzeczywistości nie występują. Aby zapobiec ziarnistości modelu niezbędne jest zagęszczanie siatki podziału, co przy takiej samej ilości danych wejściowych nie spowoduje poprawy wyniku, a jedynie wygładzi wykres. Ponadto takie podejście powiększy i tak duże już zadanie obliczeniowe.

Innym podejściem do obliczeń wytrzymałości kości za pomocą MES jest wykorzystanie elementów B-spline [92]. Metoda ta wymaga poznania danych materiałowych wielu punktów rzeczywistego modelu, które stają się węzłami w modelu MES. Wówczas macierz materiałowa  $D$  staje się funkcją, w której wartość modułu Younga zmienia się odpowiednio do współrzędnych obliczanego węzła. Funkcja zmiany wyznaczana jest pomiędzy znanymi punktami, za pomocą aproksymacji. W wypadku takiego podejścia dużą rolę w zgodności wyniku z rzeczywistością ma wybór punktów pomiaru właściwości materiałowych. Przykładowo pomiar możemy przeprowadzić w dwóch punktach o małej wartości  $E$ , pomiędzy którymi znajduje się skok wartości modułu, który nie zostanie uwzględniony ze względu na brak pomiaru w punkcie wzrostu lub maksymalnej wartości. W tym podejściu nie ma przyporządkowania jednej wartości  $E$  do jednego elementu skończonego, a zakładana jest funkcja zmiany bazująca na wybranych punktach. Dokładność metody zależy w dużej mierze od liczby, gęstości i sposobu rozmieszczenia wyznaczonych punktów. Wzrost dokładności obliczeń wymaga wzrostu wielkości zbioru danych, a co za tym idzie wzrostu, potrzebnej do przeprowadzenia symulacji, mocy obliczeniowej.

## 5. ROZWIĄZANIE PROBLEMU – WARIANT 2D

Pierwszym i jednocześnie podstawowym problemem, który należy rozwiązać, aby przeprowadzić dokładne obliczenia materiału niejednorodnego takiego jak kości [93], jest dyskretna budowa jego obrazu. Dowolny model wykonany opisanym powyżej procesem obrazowania tomografem komputerowym zapewnia dyskretny zestaw danych zarówno kształtu jak i właściwości materiałowych. Oba te parametry stanowią zbiór uśrednionych wartości dla pewnych obszarów. Rozmiar obszarów można zmniejszać, przez co ilość danych dla całego modelu powiększy się, a to z kolei poprawi dokładność końcowego wyniku. Wadą takiego postępowania jest konieczność poddania obiektu dłuższej ekspozycji na szkodliwe promieniowanie rentgenowskie.

Rys. 5.1 przedstawia przykładową symulację obciążenie kości udowej człowieka. Na rysunku a, grubymi liniami oznaczony jest przekrój, którego obrazowanie i model przedstawiono odpowiednio na Rys. 5.1b i d. Skan wykonany został w przekraczającej standardową, rozdzielczości. Płaski obraz tomograficzny został uprzestrzenniony i poddany obliczeniom MES. Wynik tych obliczeń przedstawia Rys. 5.1 d. W prawym dolnym rogu modelu wyraźnie widoczne jest spiętrzenie naprężeń, którego logicznym wytłumaczeniem byłaby obecność karbu, jednak wykres gęstości radiologicznej przedstawiony na Rys. 5.1 c w tym obszarze neguje taką hipotezę. Gęstość radiologiczna oddająca właściwości materiałowe tego obszaru jest funkcją ciągłą, nie ma ani skokowego wzrostu ani spadku wartości, co wyklucza istnienie w tym miejscu np. otworu.



Rys. 5.1 a) Schemat obciążenia kości b) tomografia kości z naniesioną skalą gęstości radiologicznej c) rozkład gęstości na oznaczonym promieniu d) naprężenia zredukowane wg Hubera obliczone MES z elementami skończonymi opartymi na wokselach z rys. b) (opracowanie własne).

Opisane, lokalne spiętrzenie naprężeń spowodowane jest dużą różnicą wartości modułu Younga sąsiadujących ze sobą elementów skończonych, która nie ma uzasadnienia w fizycznej zmianie gęstości kości.

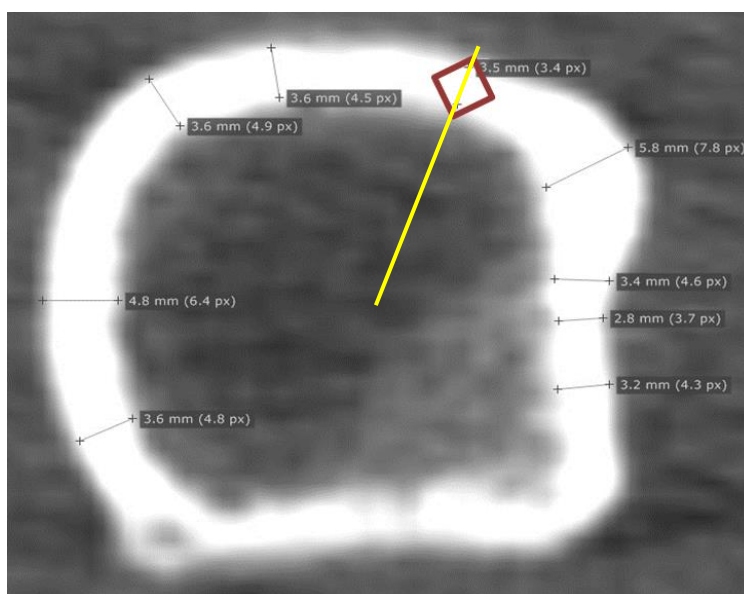
Celem niniejszej pracy jest opracowanie takiej metody obliczeniowej, która bez rozbudowywania zadania obliczeniowego pozwoli na przeprowadzanie obliczeń wytrzymałościowych struktur niejednorodnych takich jak tkanki kostne z ograniczeniem opisanego powyżej błędu.

### 5.1. Parametry próbki

Ogromną zaletą obrazowania w formacie cyfrowym jest jego dostępność, wykonane zdjęcie możemy natychmiast obejrzeć na ekranie samego urządzenia lub w przeciągu kilku sekund wysłać w dowolne miejsce na świecie. Zdjęcia oglądane w formie cyfrowej można zarówno powiększać jak i obrabiać graficznie zaraz po ich wykonaniu. Powiększanie konkretnych obszarów fotografii jest ograniczane tylko ich rozdzielczością, która wyrażana jest liczbą pikseli, im jest ich więcej tym zdjęcie jest dokładniejsze, a poszczególne fragmenty mogą zostać bardziej powiększone.

Powiększanie rozdzielczości zdjęć tomograficznych oprócz potrzeby bardziej czułego aparatu niesie ze sobą również potrzebę zwiększenia dawki promieniowania wysłanej, a zatem i przyjmowanej przez badany obiekt, co w przypadku pacjenta jest nieobojętne dla organizmu.

Na potrzeby zadania stworzono wirtualną dwuwymiarową próbkę o parametrach kości ludzkiej i poddano ją obliczeniom w różnych wariantach opisu jej danych materiałowych. Obszar próbki wybrano na podstawie rzeczywistego obrazu TK kości udowej ludzkiej Rys. 5.1 i Rys. 5.2 tak, aby jej dane materiałowe odpowiadały ścianie tej kości. Wybrane miejsce o przekątnej długości 3,5 mm pozwoliło na stworzenie próbki o podstawowych wymiarach 2,6 x 2,6 mm i 3x3 piksele obrazu TK.



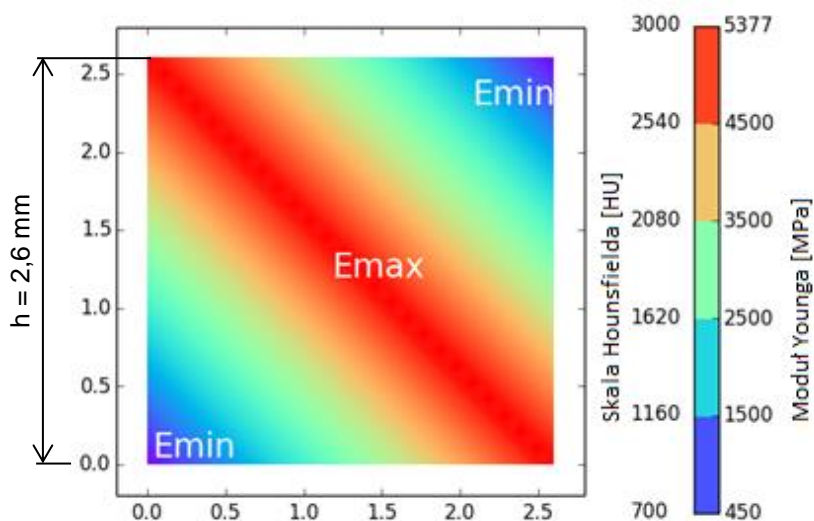
Rys. 5.2 Umiejscowienie próbki na zdjęciu kości udowej (opracowanie własne).

Dane materiałowe tego obszaru przedstawia Rys. 5.3. Za tkankę kostną na obrazie TK uważa się obszary o gęstości radiologicznej powyżej 130 HU [14]. Istota zbita, z jakiej składa się ściana kości udowej ma jednak wyższą wartość, to właśnie ona przenosi największą część obciążeń. Dolną granicę gęstości radiologicznej próbki ustalono zatem na 700 HU, górną na 3000 HU. Wartości przeliczone za pomocą wzorów (31) i (32) na MPa modułu Younga będą wynosiły odpowiednio 450 i 5377 MPa. Taki wybór obszaru do analizy, zapewni maksymalną zmienność w próbce o stosunkowo niedużych wymiarach. Rys. 5.4 przedstawia rozkład gęstości radiologicznej w linii zawierającej przekątną obszaru zaznaczonego, jako wyjściowy dla powstania wirtualnej próbki. Wartość gęstości od brzegów kości rośnie, aby przyjąć maksymalną wartość w centralnej części ściany, a następnie ponownie maleje. W ten sam sposób zamodelowane zostały właściwości badanej wirtualnej próbki.



Rys. 5.3 Niebieska linia – gęstość radiologiczna przekroju zdjęcia TK w przekątnej próbki zaznaczonej na Rys. 5.2. Czerwona linia – gęstość radiologiczna wirtualnej próbki. (opracowanie własne).

Wirtualna próbka otrzymała kształt kwadratu o wymiarach 2,6 x 2,6 mm. Jedna z jej przekątnych pokrywa się z promieniem kości, w taki sposób, że rozkład jej właściwości materiałowych jest zgodny z występującym w rzeczywistej tkance. Moduł Younga wyliczony na podstawie gęstości radiologicznej rośnie, zatem wzdłuż przekątnej do miejsca przecięcia z drugą przekątną, a następnie spada. Drugą przekątną w całości znajduje się w obszarze maksymalnych wartości E (Rys. 5.4).



Rys. 5.4 Rozkład i wartości modułów Younga wirtualnej próbki poddawanej obliczeniom MES (opracowanie własne).



Wartości modułu Younga w obszarze próbki zmieniają się zgodnie ze wzorem (33)

$$E_{xy} = +a \cdot x + b \cdot y + c_1 \quad (33)$$

$$E_{xy} = -a \cdot x - b \cdot y + c_2$$

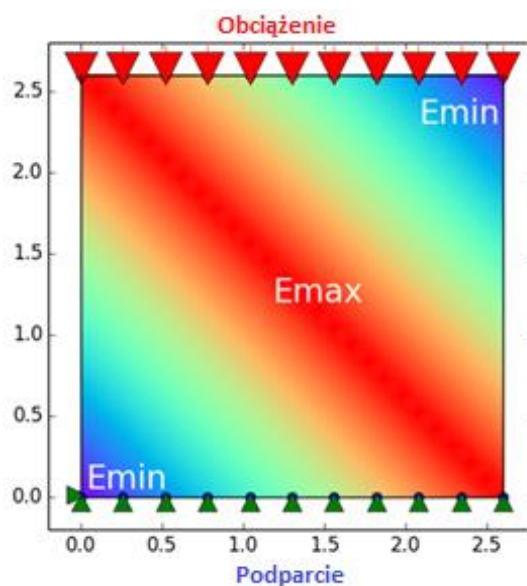
Gdzie:

a, b – przyrost modułu Younga obliczony dla jednego elementu skończonego

$c_1$  – minimalna wartość modułu Younga, w funkcji rosnącej modułu

$c_2$  – współczynnik dla funkcji malejącej modułu

Początkowy etap badań przeprowadzono wykorzystując elementy tarczowe. Dwuwymiarowej próbce nadano grubość 1 mm. Próbkę obciążono siłą ściskającą, w obliczeniach zastępując ją wymuszeniem przemieszeń górnego rzędu węzłów. Wartość przemieszczenia odpowiada temu, jakie uzyskanoby dla próbki zbudowanej z jednolitego materiału o module Younga będącym średnią arytmetyczną ze skrajnych wartości E opisanych powyżej i będącej pod obciążeniem 100 MPa (Rys. 5.5). Dolne węzły będące podstawą próbki pozbawiono możliwości przesunięcia wzdłuż osi Y (zgodnie z kierunkiem obciążenia – pionowa oś próbki), a skrajny lewy węzeł dodatkowo unieruchomiono również względem przesunięcia poziomego.



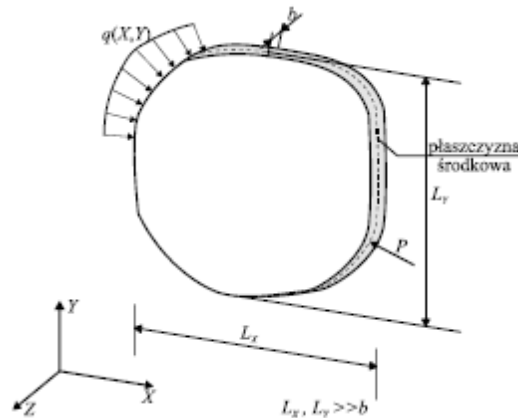
Rys. 5.5 Schemat obciążenia próbki[94].

## 5.2. Płaski stan odkształceń czy naprężeń

W obliczeniach statyki tarcz przyjmuje się jedno z dwóch założeń obliczeniowych, płaski stan naprężenia lub płaski stan odkształcenia.

Płaski stan naprężeń stosujemy, dla tarcz o małej grubości i gdy jej płaszczyzny boczne nie wchodzi w kontakt z innymi elementami tj. pozostają swobodne. Takie cechy obiektu pozwalają na jego odkształcenie w płaszczyźnie prostopadłej do jego głównej powierzchni, a zatem niezerowymi wartościami są odkształcenia liniowe wzdłuż osi x i y (współrzędnych głównej powierzchni tarczy) i postaciowe prostopadłe do tej powierzchni (Rys. 5.6). Zerowe wartości przyjmują natomiast naprężenia normalne

wzdłuż osi z (oś prostopadła do płaszczyzny głównej tarczy) i styczne  $z_x$  i  $z_y$ ,  $\sigma_z=0$ ,  $\tau_{zx}=0$ ,  $\tau_{zy}=0$ .



Rys. 5.6 Schemat budowy tarczy[64].

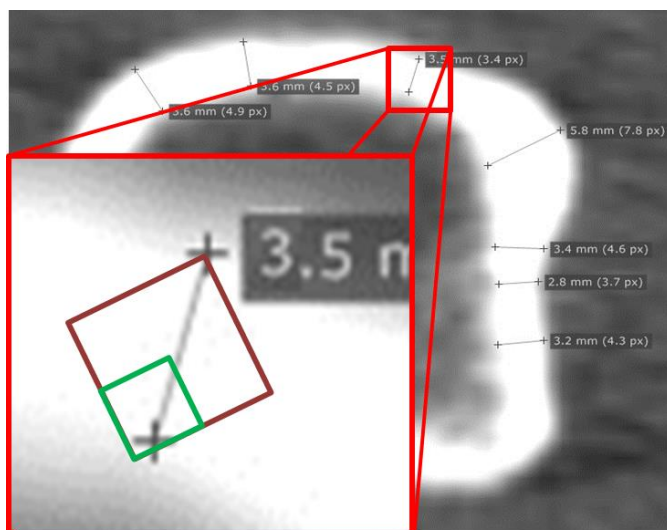
Płaski stan odkształceń to sytuacja przeciwna, wykorzystywana w konstrukcjach o dużej grubości. Obliczeniom poddawana jest cienka warstwa całości, która nie ma możliwości odkształcenia w kierunku prostopadłym do jej przekroju poprzecznego. Dla takiego stanu zerowe wartości przyjmują odkształcenie w osi z i kąty odkształcenia postaciowego  $z_x$  i  $z_y$ , odpowiednio:  $\varepsilon_z=0$ ,  $\gamma_{zx}=0$ ,  $\gamma_{zy}=0$ .

Zgodnie z założonymi cechami próbki poniższe badania prowadzone będą dla płaskiego stanu naprężeń.

### 5.3. Funkcja kształtu

Pytaniem, na jakie należy znaleźć odpowiedź jest to, czy aktualnie wykonywane zdjęcia TK niosą ze sobą wystarczającą ilość danych, aby wykonać model obliczeniowy, który nie będzie posiadał opisywanych powyżej błędów np. sztucznie wygenerowanych karbów, oraz w jaki sposób przypisywać te dane do elementów skończonych.

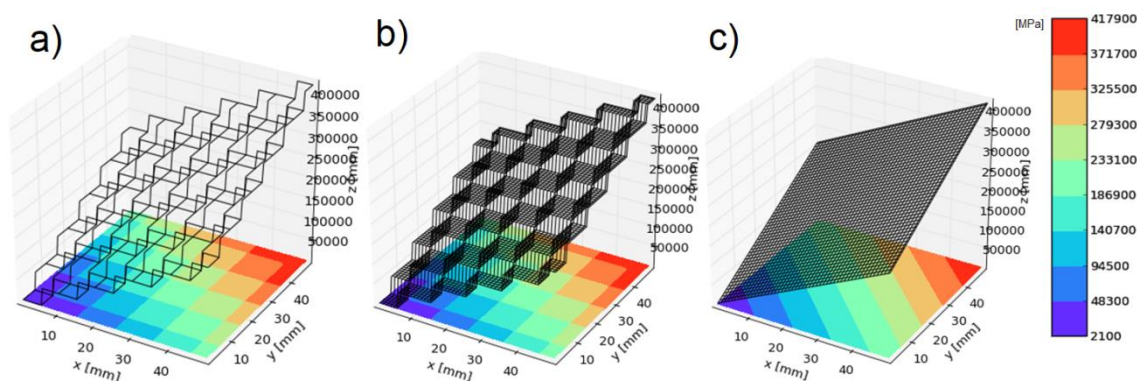
Ten etap badań przeprowadzono na pomniejszonej próbce, w której wartość modułu Younga rośnie wzdłuż jednej przekątnej. Jest to odwzorowanie jednej czwartej docelowej próbki, jej dolna lewa część (Rys. 5.7). Podparcie i obciążenie pozostało bez zmian, a wymiary próbki to 1,3 x 1,3 mm i 1 mm grubości przyjmowana do obliczeń wytrzymałościowych przy wykorzystaniu elementu tarczowego.



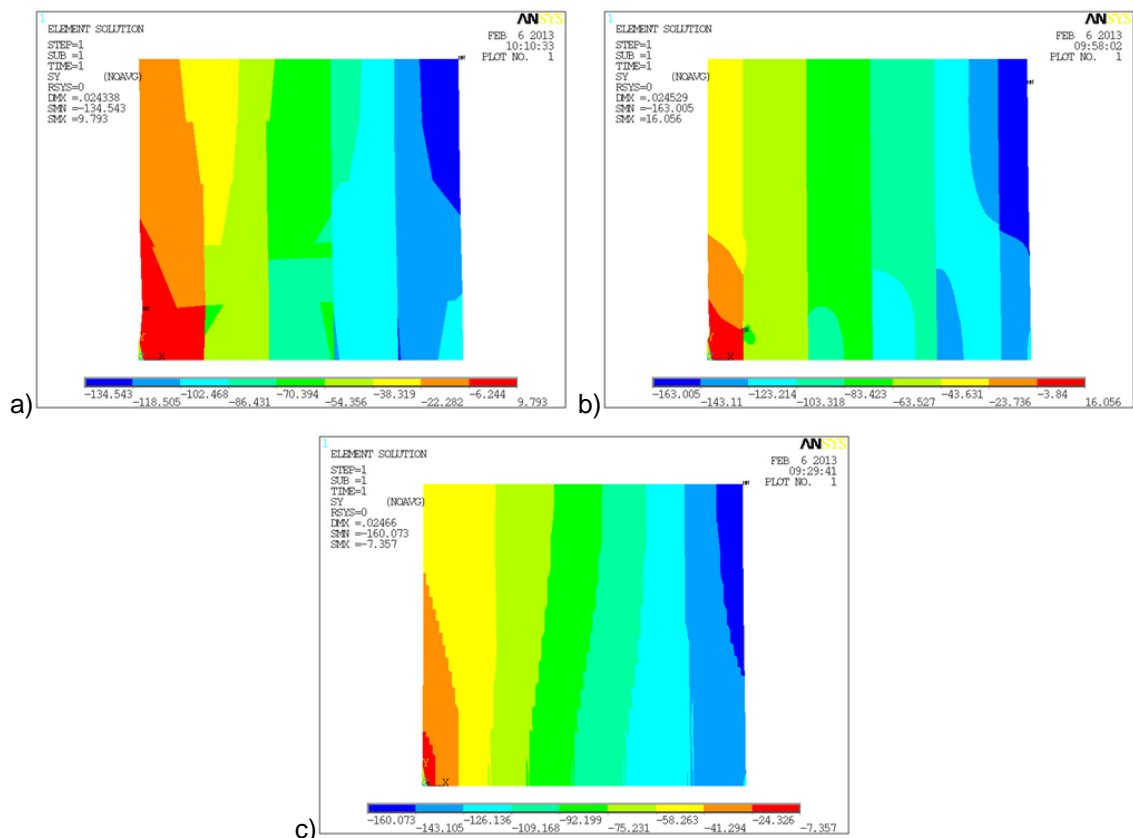
Rys. 5.7 Pozycja pomniejszonej próbki na tle zdjęcia TK kości (na podstawie [94]).

Przeprowadzono obliczenia rozkładu naprężeń wzdłuż osi Y (obciążenie próbki również przebiegało wzdłuż osi Y) korzystając z metody von Misesa. Obliczenia wykonano za pomocą programu ANSYS stosując trzy różne sposoby przypisywania modułu Younga do elementów modelu:

- Każdy z elementów posiada własny wyliczony zgodnie ze wzorem (31) moduł Younga (Rys. 5.8a). Próbka podzielona została siatką 5x5 elementów skończonych (Rys. 5.9a).
- Każdy z obszarów odpowiadających podziałowi siatką 5x5 ma jeden wspólny moduł Younga wyliczony zgodnie ze wzorem (31) (Rys. 5.8b). Każdy obszar podzielony jest dodatkowo na 400 elementów siatką 20x20. W sumie próbka podzielona jest siatką 100x100 elementów skończonych (Rys. 5.9b).
- Każdy z elementów posiada własny wyliczony zgodnie ze wzorem (31) moduł Younga (Rys. 5.8c). Próbka podzielona została siatką 100x100 elementów skończonych (Rys. 5.9c).



Rys. 5.8 Rozkład modułu Younga i siatka podziału elementów (opracowanie własne)



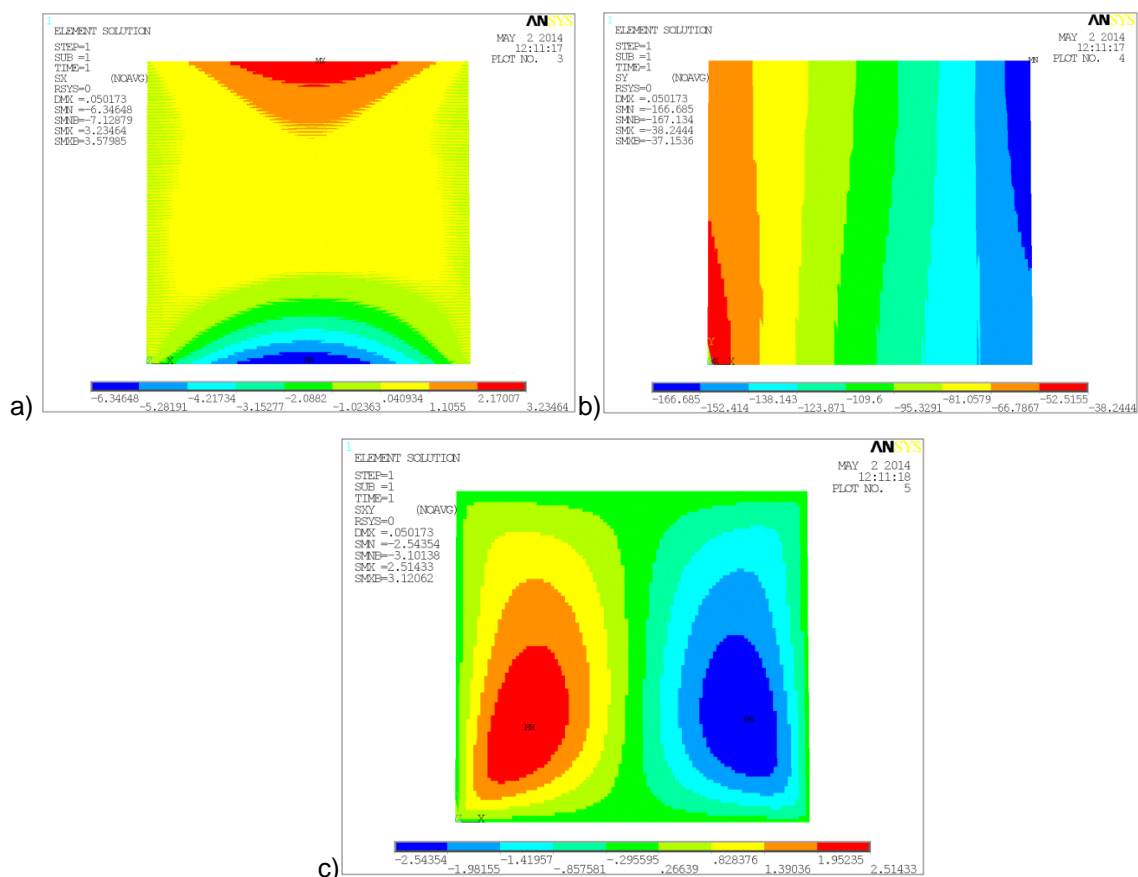
Rys. 5.9 Naprężenia wzdłuż osi pionowej próbki, obliczenia wykonane w programie ANSYS  
a) próbka pokryta siatkę 25 elementów skończonych, zmienność E w zakresie 25 obszarów b) próbka pokryta siatką 10 000 elementów, zmienność E w zakresie 25 obszarów c) próbka pokryta siatką 10 000 elementów, zmienność E w zakresie 10 000 obszarów (opracowanie własne).

Na Rys. 5.9 a-c przedstawiono wyniki symulacji komputerowych dla trzech opisanych powyżej wariantów podziału wyniki są zgodne z dotychczasową wiedzą na temat kształtowania się tego typu naprężeń. Obraz a jest najmniej dokładny, widać na nim ostre szarpane przejścia pomiędzy obszarami naprężeń o tych samych wartościach, co nie ma odniesienia w jednoosiowym ściskaniu nawet biorąc pod uwagę skokowe zmiany wartości modułu Younga. Granice pomiędzy elementami odznaczają się wyraźnie.

Na wyniku obliczeń przedstawionym na Rys. b gdzie siatka 100 x 100 elementów została uzyskana przez podział 25 pierwotnych elementów o stałym indywidualnym module Younga każdy element dodatkowo podzielono siatką 20x20. Widoczne są wygładzone linie przejścia pomiędzy kolejnymi obszarami naprężeń o zbliżonych wartościach, nie uległa jednak zatarciu granica między obszarami o tych samych właściwościach materiałowych, a zatem obszarów pokrywających się z pierwotnymi 25 elementami skończonymi. Dopiero podział próbki bezpośrednio siatką 100x100 elementów, z których każdy otrzymał swoją indywidualną wartość modułu Younga spowodował wyraźną poprawę wyniku.

Zastosowanie większej liczby elementów skończonych w oczywisty sposób pozwala na osiągnięcie dokładniejszego wyniku. Wyraźną poprawę uzyskać można jednak dopiero przy równoczesnym zagęszczeniu siatki i powiększeniu ilości danych wejściowych (wyciągnięcie indywidualnego modułu Younga dla każdego elementu skończonego). Zagęszczanie podziału przy braku dodatkowych danych materiałowych w bardzo niewielkim stopniu poprawia, jakość wyniku, a czas potrzebny na wykonanie obliczeń jest analogicznie dłuższy w stosunku do pierwszego, zawierającego najmniej elementów przypadku. Wyniki obliczeń obu przypadków w podziale próbki na 10 000 elementów otrzymano po porównywalnym czasie, kilkukrotnie dłuższym od czasu obliczeń dla rzadkiego podziału próbki.

Gęsty podział próbki przy zachowaniu zasady przypisywania jednemu elementowi skończonemu jednej wartości modułu Younga daje bardzo miarodajne wyniki (przy długim czasie obliczeń). Dla tej metody wykonano ponowne obliczenia pomniejszonej wirtualnej próbki przy podziale siatką 100 x 100 elementów, z których każdy otrzymał swój własny moduł Younga, w programie ANSYS. Wyniki tej symulacji będą używane, jako referencyjne (Rys. 5.10).



Rys. 5.10 Pomniejszona próbka poddana obciążeniu wzdłuż osi pionowej próbki. a) naprężenia normalne wzdłuż osi X b) wzdłuż osi Y, c) styczne w płaszczyźnie XY (opracowanie własne).

Znacząco lepsze wyniki osiąga się zatem wykorzystując większą ilość danych materiałowych. Jednak, jeśli źródłem danych są zdjęcia tomograficzne to ilość zawartych w nich danych jest z góry określona oraz ograniczona poprzez rozdzielczość obrazu i nie może ulec zmianie. Powiększenie jej zasobu niesie ze sobą wydłużenie czasu badania i tym samym zwiększenie dawki promieniowania przyjętej przez badany obiekt czy pacjenta. W opisanym powyżej teście dane materiałowe obliczono za pomocą funkcji (31). Wyznaczając funkcję rozkładu HU dla dowolnego zdjęcia TK możliwe byłoby zagęszczanie podziału na elementy skończone bez potrzeby dokonywania zmian w samym obrazowaniu.

Na wykresie przedstawiającym rozkład gęstości radiologicznej na promieniu kości (Rys. 5.3) widać niemal idealnie liniowy wzrost, a następnie spadek wartości, można, zatem przyjąć, iż wzór 31 jest wystarczającym przybliżeniem do dalszych badań.

Zaprezentowany powyżej prosty test potwierdza, iż zastąpienie stosowanej dotychczas metody obliczeń, która generuje element skończony na podstawie piksela obrazu, na metodę, która zapewni większą ilość danych materiałowych przy zachowaniu tego samego rodzaju i jakości obrazowania, pozwala uzyskać wyraźnie lepsze wyniki obliczeń.

Zgodnie z opisanym w punkcie 4.1 algorytmem obliczeń MES, moduł Younga, stanowi podstawową daną materiałową w prezentowanych obliczeniach i zazwyczaj jest w nich wartością stałą, (wzór (25)). Liczba ta używana jest w trakcie obliczeń lokalnej macierzy sztywności  $k$  (osobnej dla każdego elementu) zbudowanej poprzez zsumowane wyników obliczeń równań macierzowych kolejnych węzłów elementu. Rozwiązaniem może być zatem przypisanie indywidualnego modułu Younga nie dla elementu skończonego, a dla konkretnego miejsca (punktu lub węzła), dla którego wykonujemy obliczenia.

Wzór (25) poszerzony zostanie, zatem o funkcję (34), której składowymi są wartości modułów Younga wyliczone dla węzłów elementu skończonego ( $E_0+E_3$ ) oraz współrzędne obliczanego punktu  $s$  i  $t$  będące współrzędnymi znormalizowanymi, które stanowią lokalny układ współrzędnych podczas obliczeń pojedynczego elementu, który dowolny kształt płaskiego elementu skończonego będącego czworokątem sprowadza do kwadratu.

$$E = E_0 \cdot \left(-\frac{s}{4} + \frac{1}{4}\right) \cdot (-t + 1) + E_1 \cdot \left(\frac{s}{4} + \frac{1}{4}\right) \cdot (-t + 1) + E_2 \cdot \left(\frac{s}{4} + \frac{1}{4}\right) \cdot (t + 1) + E_3 \cdot \left(-\frac{s}{4} + \frac{1}{4}\right) \cdot (t + 1) \quad (34)$$

Wartości modułów Younga poszczególnych węzłów wyliczone zostały z wzoru (34) lub pobrane bezpośrednio z obrazu tomograficznego, jeśli węzły czworokątnych elementów skończonych umieszczone zostaną w środkach pikseli obrazu. Każdy z węzłów będzie miał wówczas inny moduł Younga.

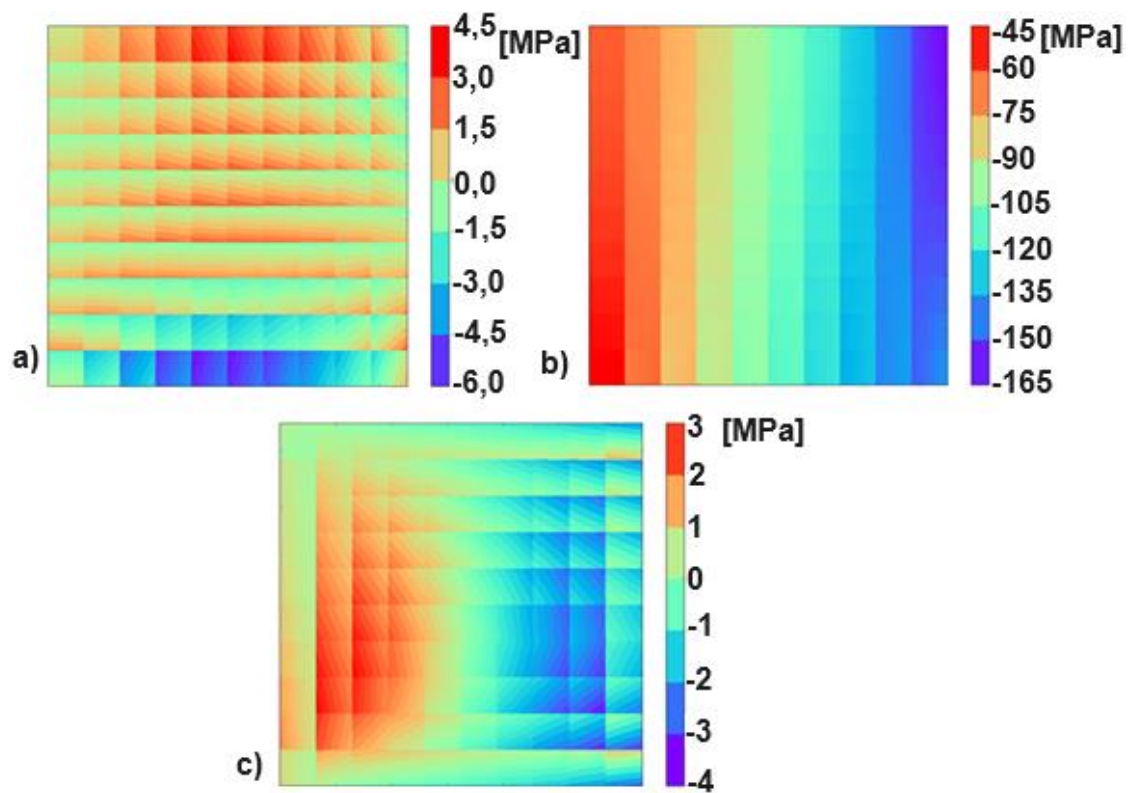
Wzór (33) zawiera stałe  $a$ ,  $b$  i  $c$ , które wyznaczono z wzorów (35-37) znając graniczne wartości modułu Younga oraz wymiary próbki, ( $h=2,6$  mm)

$$a = \pm \frac{0,5 \cdot E_{max}}{h} \quad (35)$$

$$b = \pm \frac{0,5 \cdot E_{max} - E_{min}}{h} \quad (36)$$

$$c = E_{min} \quad (37)$$

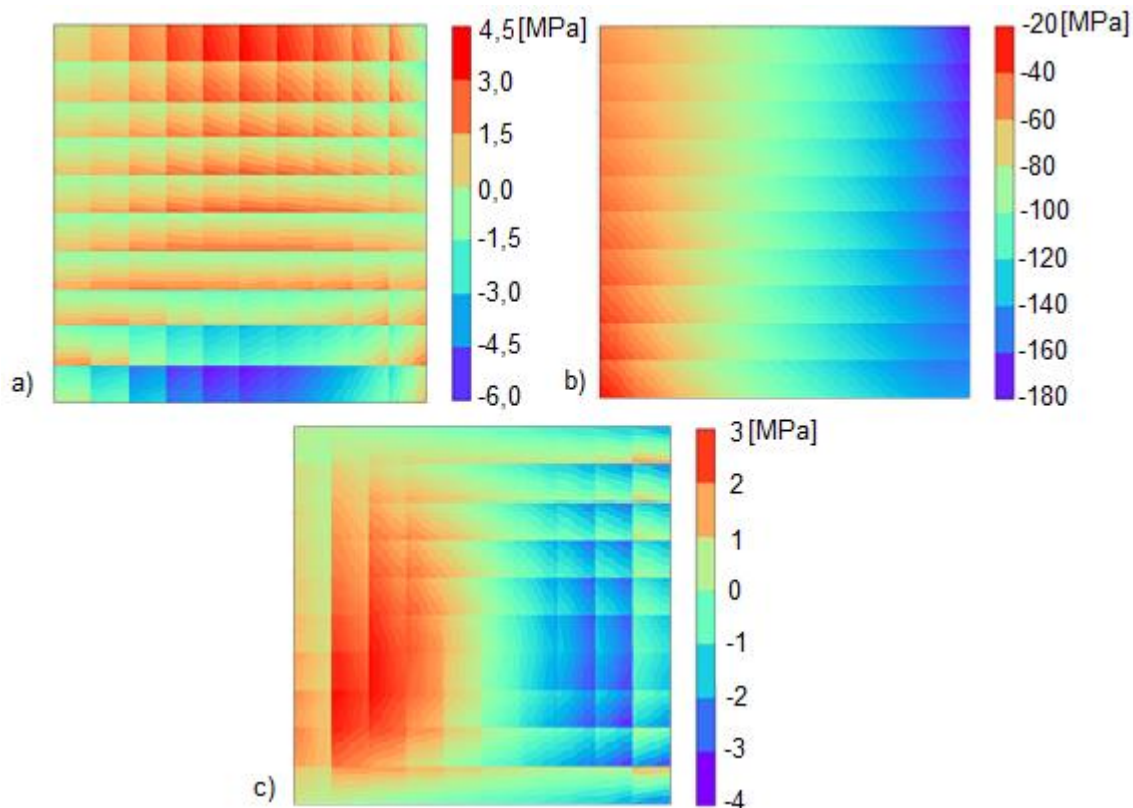
Opisana powyżej zmiana w przeprowadzaniu obliczeń MES nie jest możliwa do zastosowania w komercyjnym oprogramowaniu ANSYS, dalsze obliczenia z wykorzystaniem zmiennego modułu Younga zostały wykonane w zintegrowanym środowisku programistycznym Spyder z wykorzystaniem języka Python. W celu sprawdzenia poprawności stworzonych skryptów obliczeniowych przeprowadzono obliczenia przy zachowaniu stałego modułu Younga dla poszczególnych elementów skończonych i podziale próbki siatką 10x10 elementów. Do obliczeń wykorzystano element tarczowy o 4 węzłach.



Rys. 5.11 Pomniejszona próbka poddana obciążeniu wzdłuż pionowej osi próbki, model własny  
a) naprężenia normalne wzdłuż osi X b) wzdłuż osi Y, c) styczne w płaszczyźnie XY [MPa]  
(opracowanie własne)

Obliczone we własnym skrypcie naprężenia (Rys. 5.11) jakościowo zgadzają się z uzyskanymi w programie ANSYS (Rys. 5.10) zarówno wartościami jak i rozkładem, co oznacza, iż algorytm obliczeniowy jest zbudowany prawidłowo. W kolejnym kroku do algorytmu wprowadzono zmienny moduł Younga, zgodnie z opisanym powyżej schematem i przeprowadzono taką samą symulację ściskania, której wynikiem były 3 wykresy rozkładu naprężeń (Rys. 5.12).

Wszystkie wyniki przedstawione w pracy i obliczone we własnym skrypcie są wynikami surowymi, niepoddanymi żadnej aproksymacji. Takie podejście ma na celu szczegółową obserwację różnic w przedstawianych wynikach.



Rys. 5.12 Pomniejszona próbka poddana obciążeniu wzdłuż pionowej osi próbki, model własny ze zmienną wartością modułu Younga w elemencie. a) naprężenia normalne von Misesa wzdłuż osi X b) naprężenie normalne von Misesa wzdłuż osi Y, c) naprężenia styczne w płaszczyźnie XY (opracowanie własne).

Zarówno wartości jak i rozmieszczenie obszarów naprężeń zaprezentowane na wykresach są wyraźnie jakościowo podobne do referencyjnych, wymagają jednak dokładniejszej weryfikacji. Przed przystąpieniem do niej wykonano szereg testów mających na celu wybór najlepszej metody całkowania. Ponieważ czas obliczeń MES w dużej mierze zależy od obliczeń całek, niezbędne było znalezienie metody o najkorzystniejszym stosunku czasu obliczeń do dokładności wyniku.

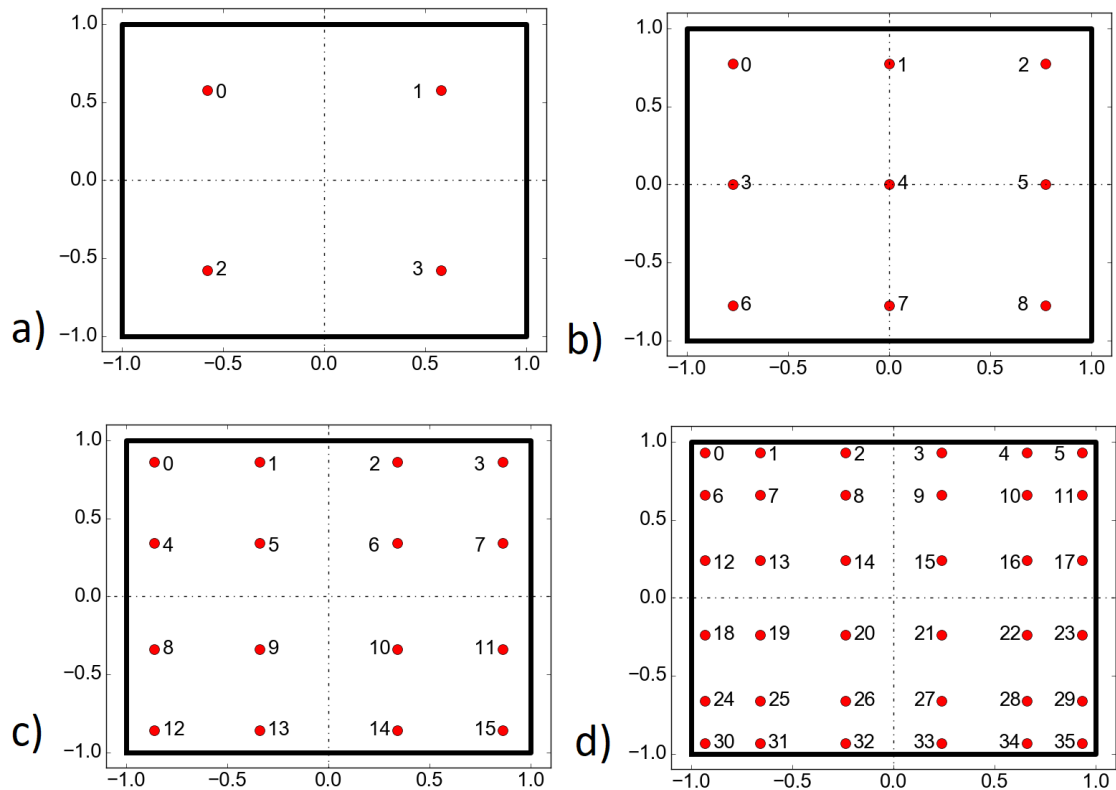
#### 5.4. Wybór metody całkowania

Dotychczasowe obliczenia we własnym skrypcie prowadzone były metodą całkowania numerycznego. Jako alternatywną metodę przyjęto do testów metodę całkowania punktami Gaussa (Rys. 5.13) w różnych wariantach ilościowych:

- Całkowanie kwadraturą Gaussa 2x2 punkty
- Całkowanie kwadraturą Gaussa 3x3 punkty
- Całkowanie kwadraturą Gaussa 4x4 punkty
- Całkowanie kwadraturą Gaussa 6x6 punktów



Dla metody całkowania kwadraturą Gaussa dla każdego z obliczanych punktów (Rys. 5.13) został wyliczony dokładny moduł Younga odpowiadający jego współrzędnymi globalnymi zgodnie ze wzorem (32).

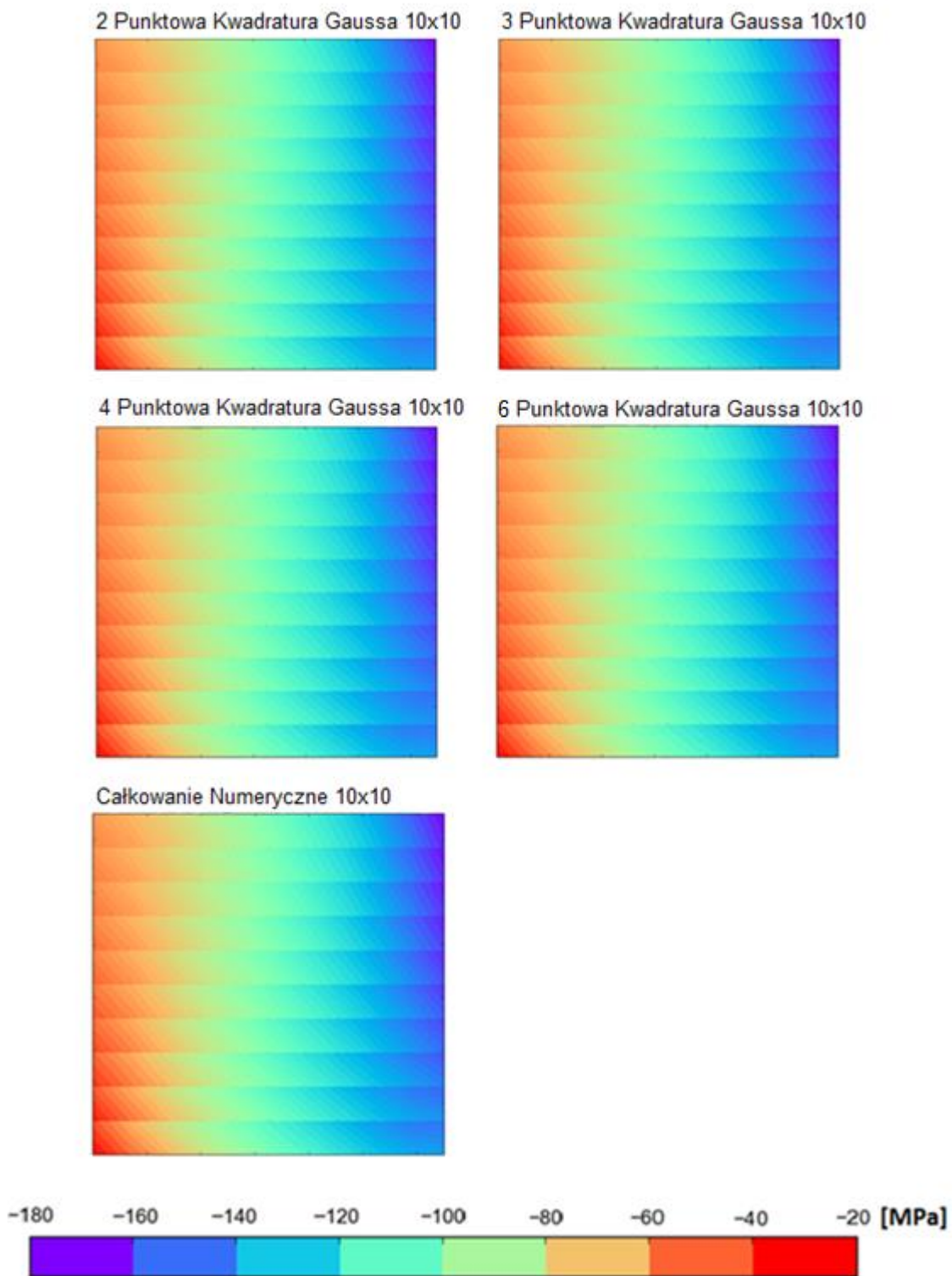


Rys. 5.13 Rozmieszczenie punktów Gaussa dla wariantów a) 2x2 b) 3x3 c) 4x4 d) 6x6 punktów (opracowanie własne).

We wszystkich pięciu wersjach (4 warianty ilościowe kwadratury Gaussa i całkowanie numeryczne) przeprowadzono obliczenia tak samo obciążonej i zróżnicowanej materiałowo próbki w pięciu różnych podziałach siatką elementów skończonych:

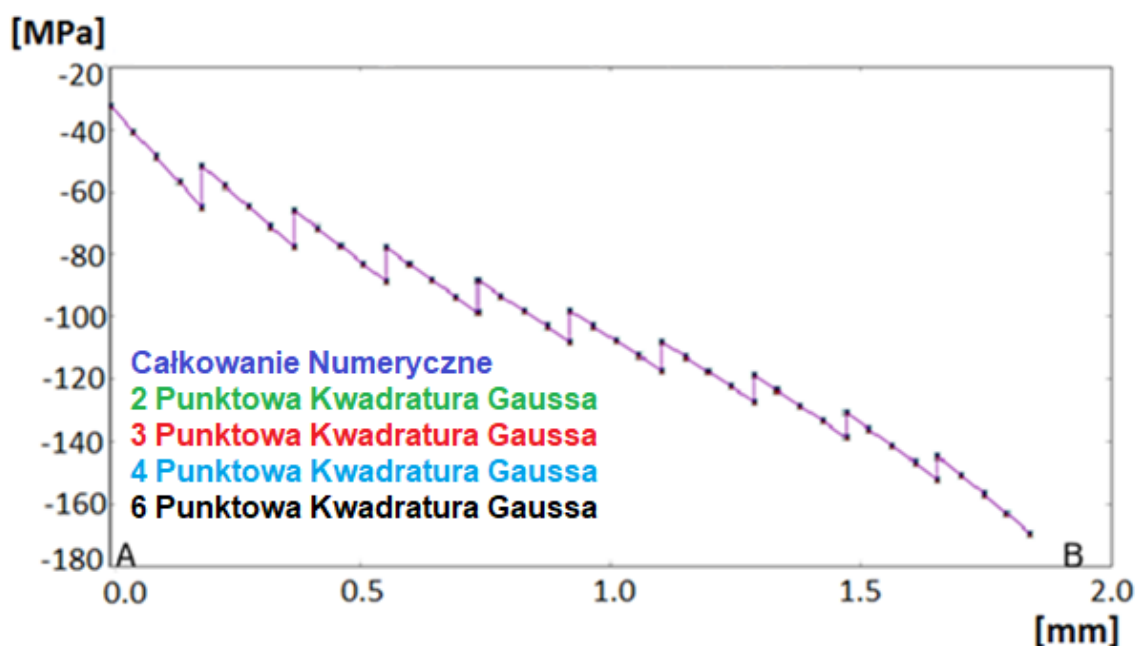
- 3 x 3 elementy
- 10 x 10 elementów
- 25 x 25 elementów
- 50 x 50 elementów
- 100 x 100 elementów

Pierwszą symulację przeprowadzono dla podziału 10x10 elementów. Jako najbardziej korespondujące z eksperymentem ściskania za główne wyniki obrano naprężenia występujące wzdłuż osi działania siły, czyli wzdłuż osi pionowej Y (Rys. 5.14).



Rys. 5.14 Naprężenia normalne wzdłuż osi pionowej próbki dla podziału 10x10 elementów. Model własny [95].

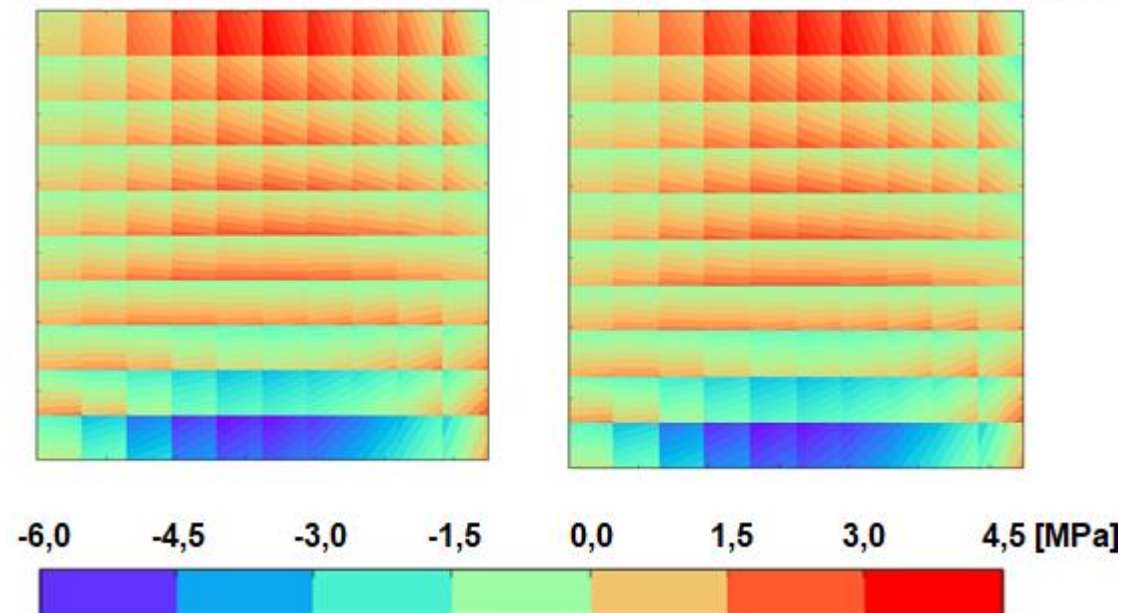
Obrazy rozkładu naprężeń wzdłuż osi pionowej przedstawione na wykresach (Rys. 5.14) są względem siebie niemal identyczne. W celu ilościowego porównania obrazów, wartości liczbowe naprężeń dla punktów leżących na przekątnej o zmiennym module Younga zostały zestawione w formie wykresu liniowego (Rys. 5.15). Wartości liczbowe naprężeń dla poszczególnych metod całkowania przy takiej samej siatce podziału próbki są identyczne, a schodkowy kształt wykresu odzwierciedla przechodzenie między kolejnymi elementami skończonymi. Podwójne wartości naprężeń występują w punktach, na granicach elementów. Każda z granic elementów liczona jest osobno (podwójnie) dla każdego z dwóch elementów, do których należy i które leżą na wspomnianej powyżej przekątnej.



Rys. 5.15 Wykres wartości naprężeń normalnych Y występujących w przekątnej o zmiennym module Younga dla różnych wariantów metody całkowania. Linie wykresu pokrywają się [95].

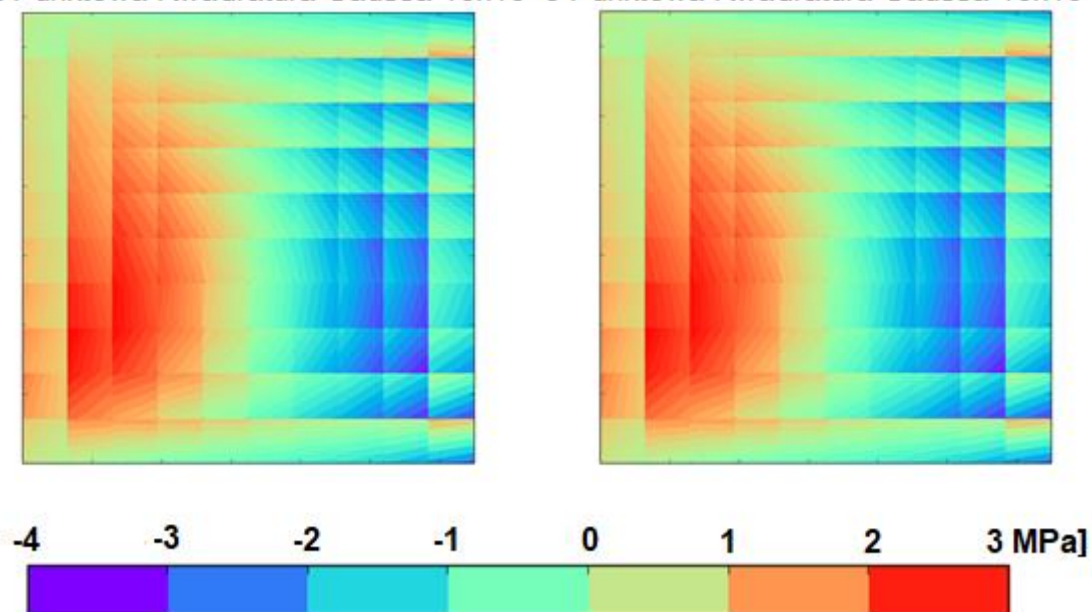
Analogiczne analizy wykonane zostały dla pozostałych rozkładów naprężeń obliczanych metodą von Misesa, czyli naprężeń normalnych wzdłuż osi poziomej (oś x) próbki i naprężeń stycznych (x,y). Z uwagi na niemal identyczne wyniki poniżej przedstawione zostały wyłącznie obliczenia metodą kwadratury Gaussa dla skrajnych, przyjętych liczb punktów obliczeniowych, a zatem 2x2 i 6x6. Wyniki tych symulacji przedstawiają wykresy: Rys. 5.16 i Rys. 5.17.

2 Punktowa Kwadratura Gaussa 10x10 6 Punktowa Kwadratura Gaussa 10x10



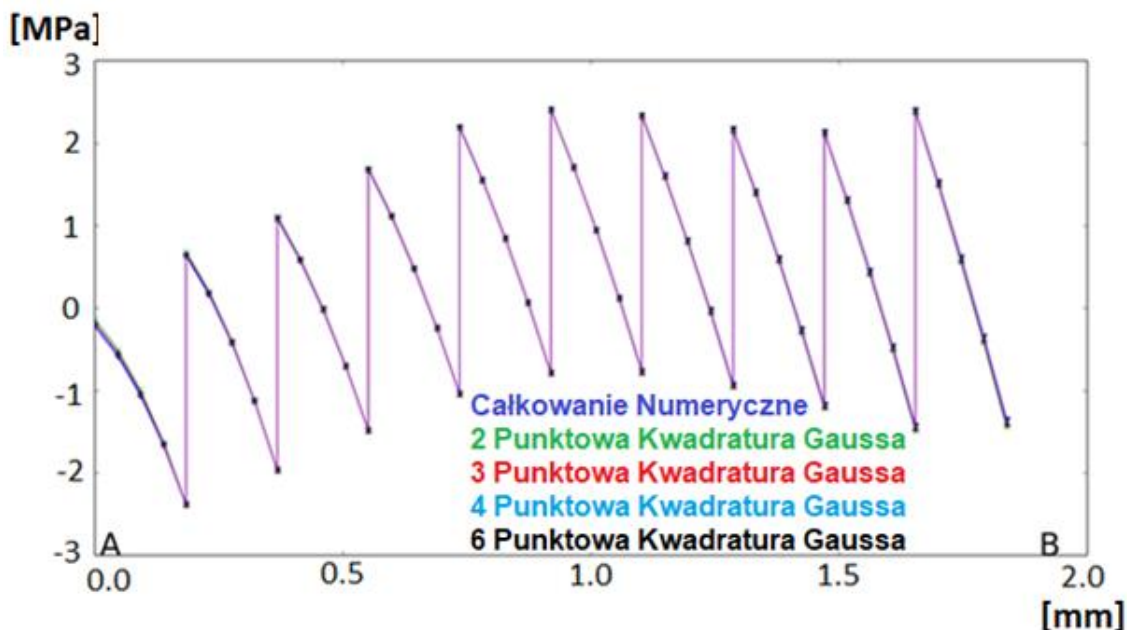
Rys. 5.16 Naprężenia normalne wzdłuż osi poziomej próbki dla podziału 10x10 elementów [95].

2 Punktowa Kwadratura Gaussa 10x10 6 Punktowa Kwadratura Gaussa 10x10

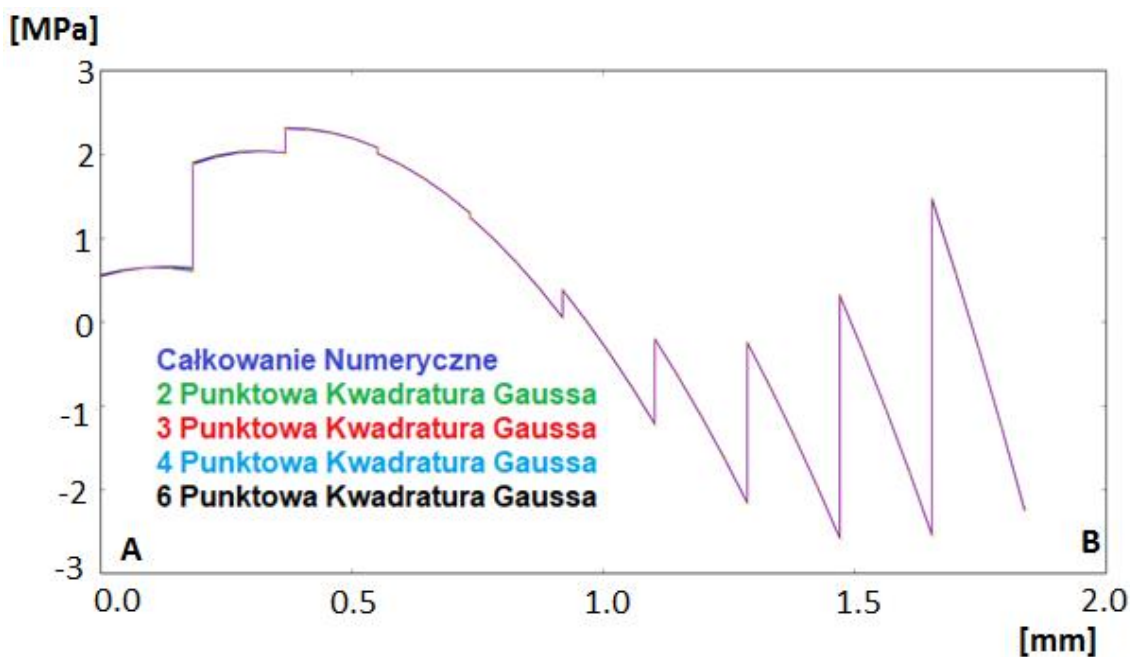


Rys. 5.17 Naprężenia styczne XY dla podziału 10x10 elementów[95].

Podobnie jak w przypadku wyników naprężeń normalnych dla osi Y tak i w przypadku tych dwóch symulacji, wartości zaprezentowane na wykresach w funkcji współrzędnych, są względem siebie niemal identyczne. Porównanie wartości liczbowych wyznaczonych dla punktów znajdujących się w przekątnej próbki o największym zróżnicowaniu właściwości materiałowych przedstawiają wykresy Rys. 5.18 i Rys. 5.19. Podobnie jak dla naprężeń wyznaczanych wzdłuż osi Y tak tu występują skokowe zmiany wartości w miejscach styku elementów.

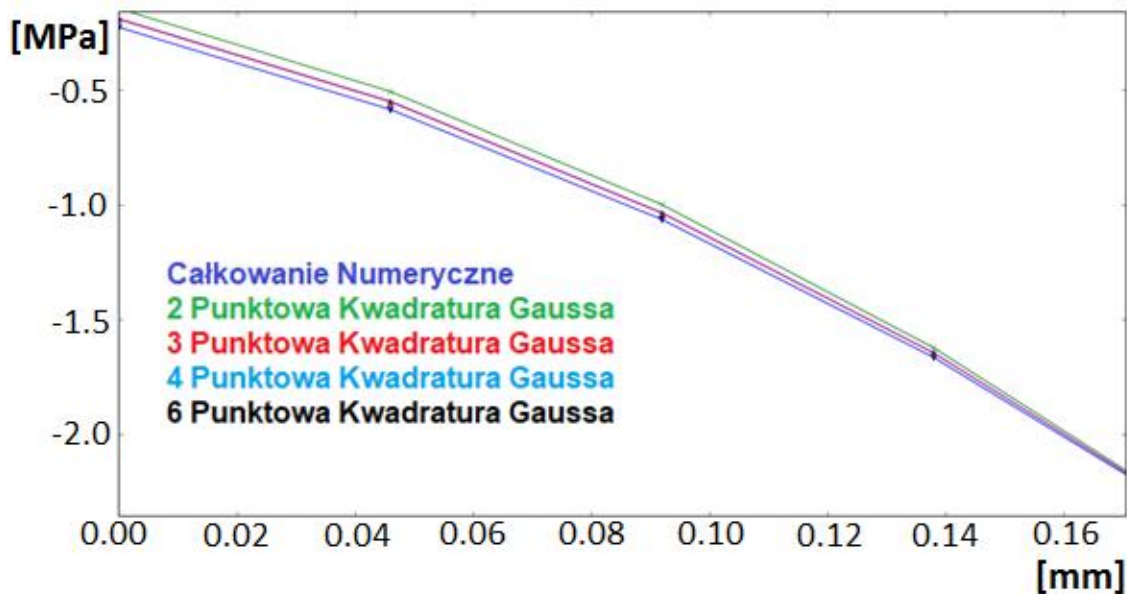


Rys. 5.18 Wykres wartości naprężeń normalnych  $X$  występujących w przekątnej próbki dla różnych wariantów metody całkowania. Linie wykresu pokrywają się [95].



Rys. 5.19 Wykres wartości naprężeń stycznych  $xy$  występujących w przekątnej próbki dla różnych wariantów metody całkowania. Linie wykresu pokrywają się [1].

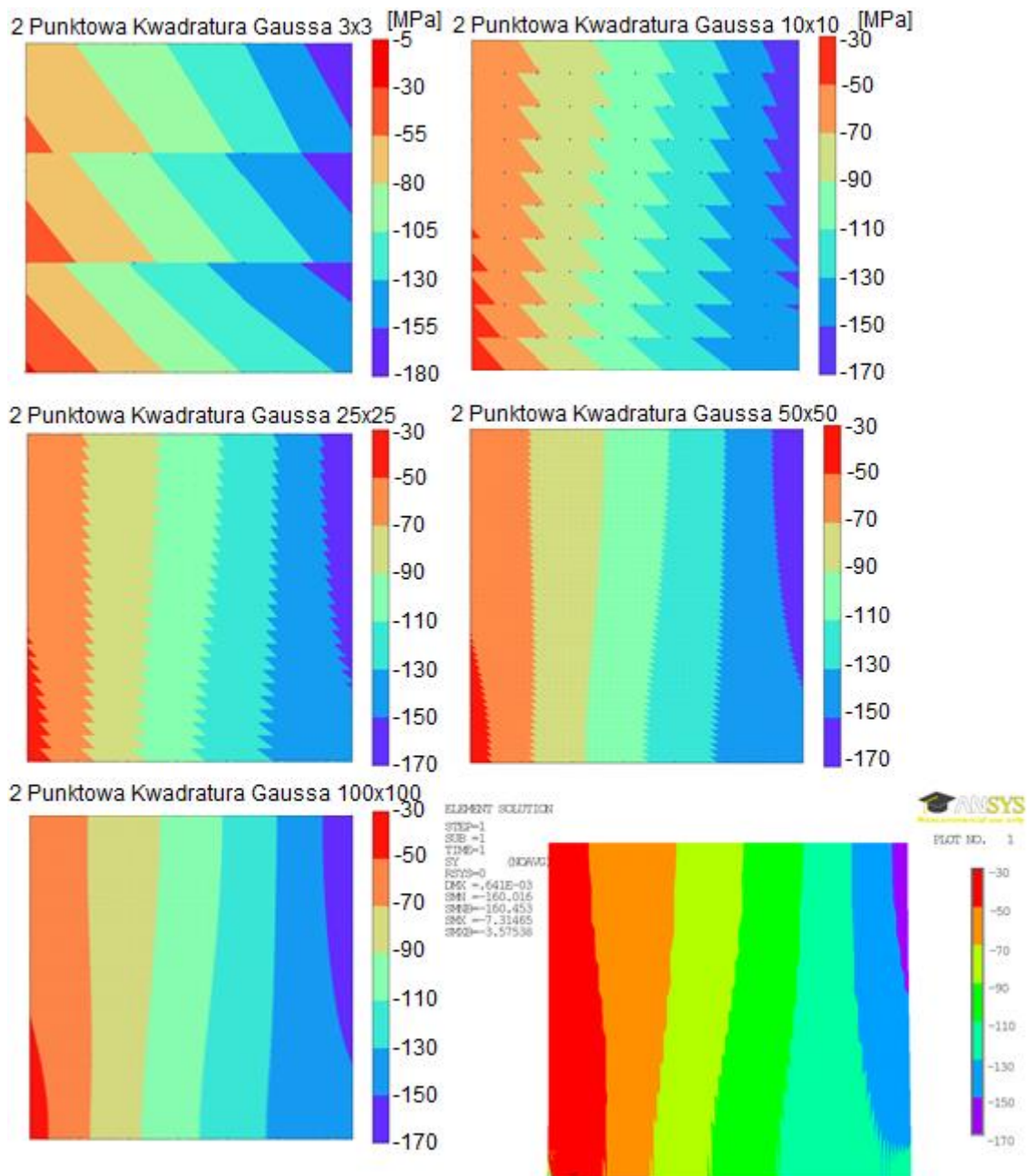
Zaprezentowane powyżej wyniki obliczeń potwierdzają, iż zmiana metody całkowania nie wpływa na ich wyniki. Nieznaczne różnice można zaobserwować w wynikach obliczeń naprężeń normalnych wzdłuż osi  $X$  pierwszego elementu. Powiększenie tej anomalii przedstawia Rys. 5.20. Na powiększeniu widać, iż wartości skrajne przyjmuje metoda 2x2 punkty oraz całkowanie numeryczne, podczas gdy pozostałe metody dają wartości pomiędzy nimi. Jednak porównując wartości liczbowe naprężeń w tym miejscu różnica pomiędzy wielkościami jest mniejsza niż 1%.



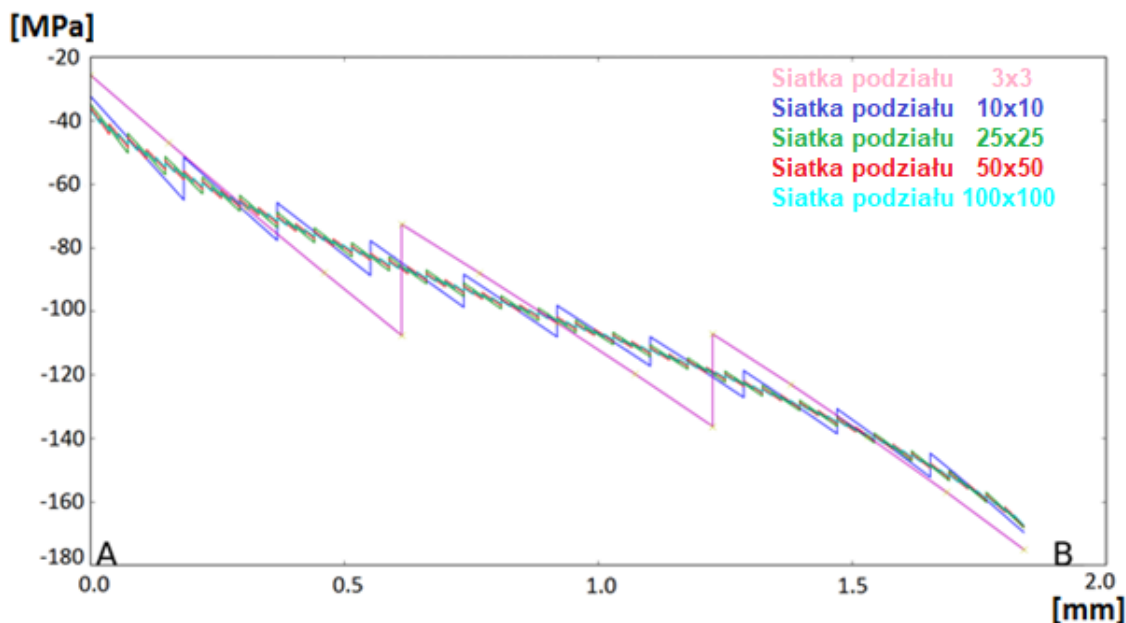
Rys. 5.20 Pierwszy odcinek wykresu wartości naprężeń normalnych X występujących w przekątnej próbki dla różnych wariantów metody całkowania [95].

Jednocześnie, więc zmiana metody całkowania przy stałej siatce podziału próbki na elementy skończone nie wpływa na wartości obliczeń. Obliczone naprężenia w analogicznych punktach są do siebie bardzo zbliżone lub dokładnie sobie równe. W kolejnym kroku sprawdzony został wpływ zmiany metody całkowania na wyniki naprężeń przy różnych siatkach podziału na elementy. Poniżej zaprezentowany został tylko jeden przykładowy wynik rozkładu naprężeń dla różnych siatek podziału, w tym wypadku całkowanie wykonane zostało z wykorzystaniem kwadratury Gaussa dla 2 współrzędnych (Rys. 5.21). Wyniki wyznaczone za pomocą opracowanego skryptu zestawione zostały z obliczeniami wykonanymi za pomocą programu ANSYS, gdzie zastosowano siatkę podziału 100 x 100 elementów. Rozkład i wartości naprężeń są do siebie podobne, ale tym bardziej zgodne w obszarach, tym mniej związanych z granicami elementów im gęstsza jest siatka podziału. Jest to wynik powiększonej rozdzielczości obrazu, a nie prawdziwe uniezależnienie wyniku od granicy elementów modelu. Graniczne wartości naprężeń we wszystkich podziałach oprócz najrzadszego 3x3 wynoszą od -30 do -170 MPa, podczas, gdy dla najrzadszego podziału od -5 do -180 MPa.

Zestawienie wyników symulacji dla punktów wyznaczonych na przekątnej (Rys. 5.22) potwierdza zbieżność wartości. Wykres w porównaniu do poprzednich nie przedstawia idealnie pokrywających się linii, ale zgodny trend wartości.



Rys. 5.21 Naprężenia normalne Y dla różnych podziałów na elementy skończone. Obliczenia wykonane metodą całkowania 2x2 punkty Gaussa – model własny i program ANSYS [95].



Rys. 5.22 Wykres wartości naprężeń normalnych Y występujących w przekątnej próbki dla różnych wariantów podziału na elementy przy całkowaniu 2x2 punkty Gaussa [95].

Ostatnim porównywanym parametrem jest czas obliczeń, którego zestawienie przedstawiono w Tab. 4. Wszystkie zaprezentowane metody całkowania przedstawiały jednakowo dokładne wyniki, czas obliczeń staje się, zatem parametrem decydującym. Oczywistym jest, iż wraz ze wzrostem liczby elementów skończonych rośnie czas wykonywania obliczeń. Jednocześnie powiększają się różnice pomiędzy czasami obliczeń poszczególnych metod całkowania. Różnice czasów obliczeń dla najrzadszej siatki podziału wynoszą części sekundy i stanowią ok 13% (odmierzenie czasu zostało zaimplementowane bezpośrednio w kodzie algorytmu obliczeń). Przy podziale siatką 50x50 elementów różnice są zauważalnie większe i stanowią ok 20% wartości. We wszystkich zaprezentowanych metodach całkowania dokładność była podobna, zatem czas obliczeń staje się parametrem decydującym o wyborze metody. Biorąc pod uwagę zarówno dokładność pomiarów jak i najkrótszy czas do dalszych symulacji i obliczeń wykorzystano metodę całkowania 2x2 punkty Gaussa.



Tab. 4 Czas obliczeń dla różnych wariantów podziału próbki i różnych metod całkowania [s]

Siatka podziału Metoda	3×3	10×10	25×25	50×50	100×100
2 punktowa Kwadratura Gaussa	0,647	2,100	12,061	54,556	420,838
3 punktowa Kwadratura Gaussa	0,678	2,178	12,658	57,111	437,787
4 punktowa Kwadratura Gaussa	0,689	2,320	13,489	59,627	446,040
6 punktowa Kwadratura Gaussa	0,737	2,644	15,410	73,618	470,741
Całkowanie Numeryczne	0,689	2,267	13,302	66,635	460,902

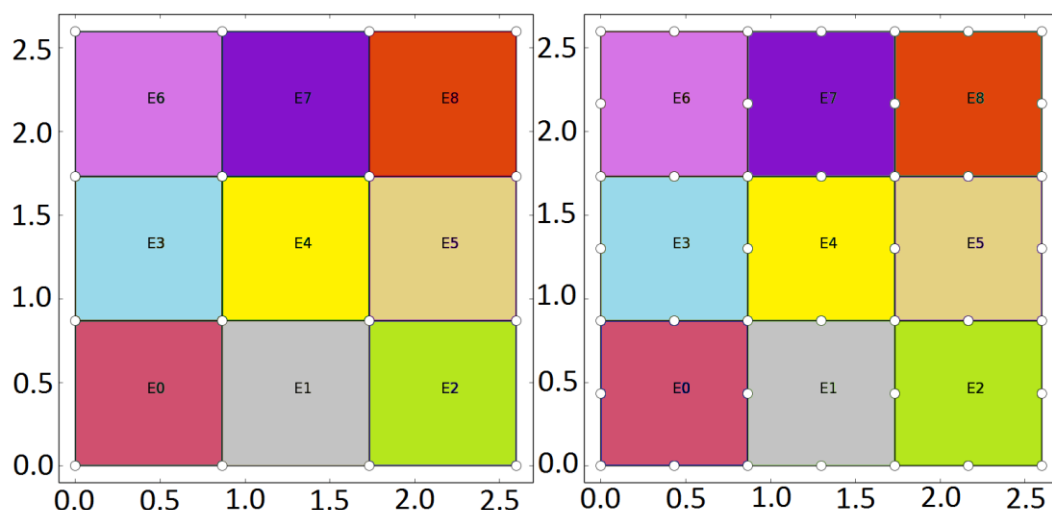
### 5.5. Warianty elementu dwuwymiarowego o różnych liczbach węzłów

Ostatnim krokiem w poszukiwaniu optymalnej metody obliczeń jest wybór rodzaju elementu skończonego. W przypadku zadania dwuwymiarowego najczęściej rozpatrywanymi wariantami są czworokąt i trójkąt zawierające różne liczby węzłów. Wszystkie przedstawione powyżej badania wykonywane były na elemencie czterowęzłowym. Element trójkątny nie został pominięty, jednak, podczas wprowadzania do obliczeń zmienności modułu Younga trójwęzłowy, niesymetryczny kształt okazał się być niepotrzebną komplikacją przy wykorzystaniu metody całkowania 2 punktowej kwadratury Gaussa. Stąd trójwęzłowy element skończony nie będzie miał reprezentacji w niniejszej pracy.

Dalsze badania zrealizowane zostały z wykorzystaniem czworokątnego elementu, w różnych konfiguracjach liczby węzłów. Zaimplementowanie i modyfikacje zmienności modułu Younga dla tego wariantu kształtu elementu nie wymagają dużych zmian podstawowego algorytmu obliczeń MES, szczególnie przy wybranej do dalszych badań metodzie całkowania tj. 2 punktowa kwadratura Gaussa.

Obliczenia prowadzone będą już na całej zamodelowanej na początku badań próbce (Rys. 5.4), a nie tak jak podczas poszukiwania najwydajniejszej metody całkowania na jej ćwiartce (Rys. 5.7). Wymiary próbki odpowiadają rzeczywistej grubości ściany kości udowej człowieka i wynoszą 2,6 x 2,6 mm. Próbka podzielona została, na tyle elementów skończonych ile uzyskano by pikseli na obrazie tomograficznym podczas rutynowego skanu TK. Dla tej wielkości próbki jest to siatka 3 x 3 elementy. W celu porównania obliczeń wykonane zostały również obliczenia dla gęściejszych podziałów.

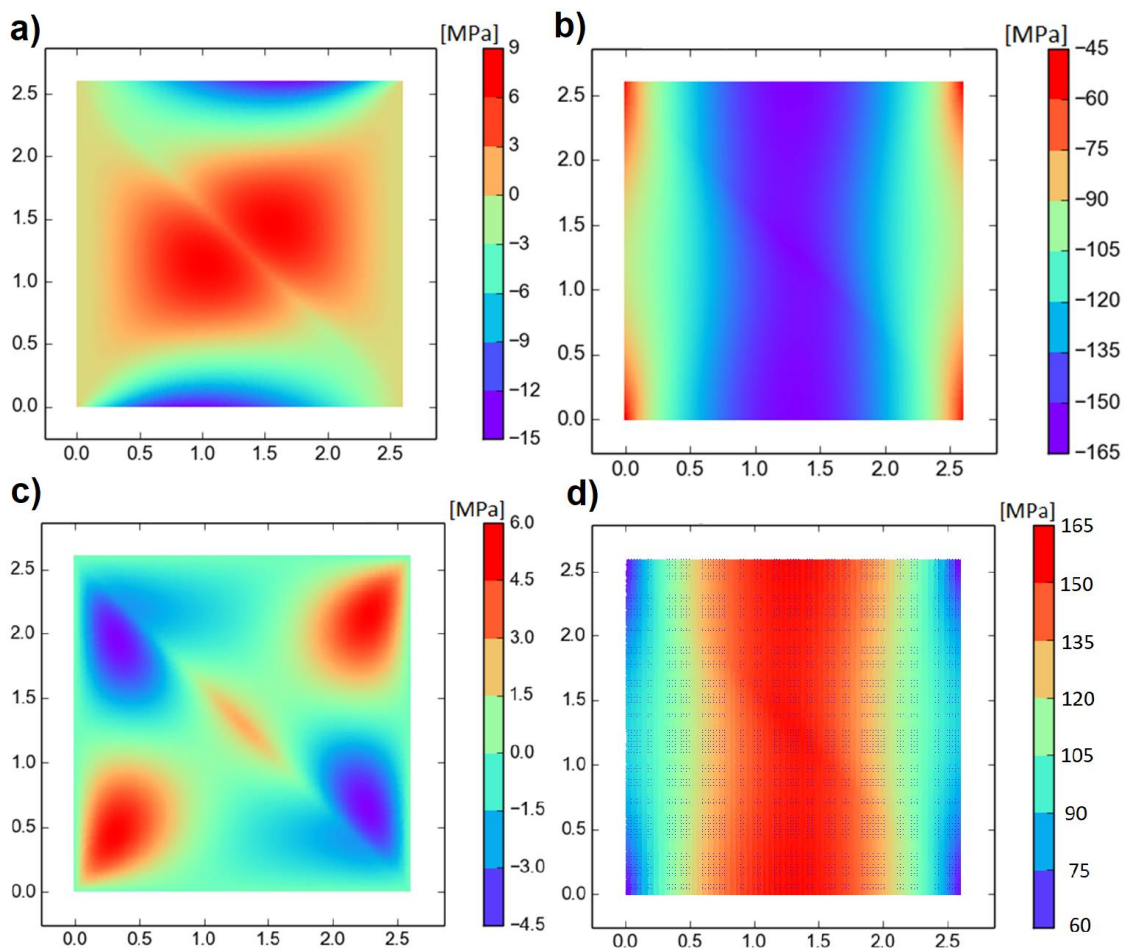
Poniżej przedstawione zostały wyniki obliczone za pomocą dwóch metod, klasycznej (gdzie moduł Younga ma stałą wartość dla poszczególnych elementów skończonych) i z uwzględnieniem zmienności modułu Younga w obszarze poszczególnych elementów. Zastosowano dwa warianty elementu skończonego 4-ro i 8-mio węzłowy, gdzie powiększenie liczby węzłów wiązało się z dodaniem jednego węzła na każdym boku elementu (Rys. 5.23).



Rys. 5.23 Próbka podzielona na elementy cztero- i ośmiowęzłowe [94].

Do sprawdzenia dokładności wykonywanych obliczeń wykorzystano następujące parametry: maksymalny błąd naprężeń (Maximum Compressive Stress Error MCSE) oraz błąd energii deformacji (Relative Deformation Energy Error RDEE). W obu przypadkach do obliczeń niezbędne jest odniesienie do wyniku dokładnego. Jako wynik dokładny przyjęto obliczenia dla siatki 61x61 elementów. Oznacza to zagęszczenie siatki podziału do niemożliwej do uzyskania w tomografii klinicznej rozdzielczości. Symulacja wykonywana jest na wirtualnej próbce, której zmiany właściwości materiałowych opisane są wzorem. Wybór gęstości podziału zależał od możliwości obliczeniowych wykorzystywanego sprzętu komputerowego oraz rozmiaru pozostałych siatek używanych w symulacjach. Celem był taki wybór liczby podziału dla wyznaczenia wyniku dokładnego, aby współrzędne węzłów i punktów Gaussa nie pokrywały się z analogicznymi miejscami porównywanych siatek. Obliczenia wykonano z zastosowaniem siatek podziału od 1x1 do 10x10 powiększając każdy z dwóch wymiarów o jeden i następnie siatkami 15x15, 20x20, 30x30, 40x40 i 50x50. Przy założonych ograniczeniach, najdokładniejsze obliczenia wykonane zostały na próbce podzielonej siatką 61 x 61 elementów. Wykorzystanie liczby pierwszej dało pewność, iż współrzędne węzłów i punktów Gaussa dokładnego rozwiązania nie pokryją się z punktami użytymi do wykonania obliczeń z wykorzystaniem rzadszych siatek elementów.

Wzorcowy (najdokładniejszy) wynik obliczeń wytrzymałościowych całej próbki przedstawiono na Rys. 5.24. Obliczenia wykonane zostały za pomocą klasycznej metody przypisywania właściwości materiałowych w MES (każdy element skończony posiada przypisany sobie moduł Younga), i z wykorzystaniem elementu 8-mio węzłowego i podziałem siatką 61x61 elementów. Podobnie jak w poprzednich rozdziałach ze względu na ściskający charakter obciążenia próbki, dokładnej analizie poddano wynik rozkładu naprężeń normalnych występujących wzdłuż osi Y (pionowej osi próbki), który to wynik jest najbardziej miarodajny. Te, jak i wszystkie pozostałe opisane w tym rozdziale obliczenia wykonane są w środowisku programistycznym Spyder z wykorzystaniem języka Python.



Rys. 5.24 „Wynik dokładny” obliczeń wytrzymałościowych całej próbki poddanej obciążeniu wzdłuż osi pionowej próbki. a) naprężenia normalne X b) Y c) naprężenia styczne XY d) naprężenia wg. Von Misesa. Siatka podziału 61 x 61, element 8-mio węzłowy, model własny (opracowanie własne).

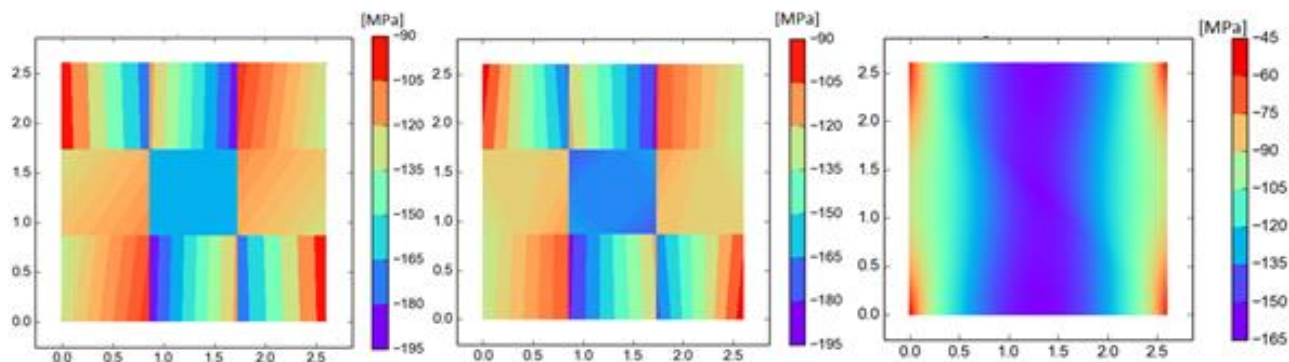
Jak opisano w rozdziale 2, klinicznie dopuszczalną dawką promieniowania, jest dawka pozwalająca na uzyskanie rozdzielczości obrazu o pikselu równym 1x1 mm [16], dlatego podstawową siatką podziału, omawianej niespełna 3 mm próbki, na elementy skończone jest siatka 3x3 generująca 9 elementów. Dla tak małej próbki (2,6 mm x 2,6 mm) pewniejszą do uzyskania byłaby liczba zaledwie 4 elementów skończonych, jednak umiejscowienie tego konkretnego wycinka wzdłuż przekątnej całego obrazu (Rys. 5.2) pozwala na gęstszy niż 4 elementy podział. Dodatkowo podział 3x3 elementy powoduje, iż w modelu znajdują się elementy sąsiadujące ze sobą dwoma, trzema i czterema bokami, co wyczerpuje wszystkie warianty kontaktów, jakie mogą wystąpić.

Podobnie jak podczas badań prowadzonych w celu ustalenia najlepszej metody całkowania macierzy, tak i tu wykonano obliczenia zarówno klasyczną metodą przypisywania właściwości materiałowych, gdzie każdy element skończony ma przypisany indywidualny moduł Younga i stałą Poissona będące stałymi wartościami, jak i zaproponowaną w niniejszej pracy metodą wyliczania wartości modułu Younga dla każdego poddawanego obliczeniom punktu Gaussa osobno (tu stała Poissona pozostaje niezmienna dla całej objętości próbki).

W pierwszej kolejności wykonane zostały obliczenia metodą klasyczną używając do tego własnego skryptu. Wyniki wyznaczone przy użyciu cztero- i ośmiowęzłowego elementu skończonego przedstawiono na Rys. 5.25 a i b. Oba dalekie są od wyniku dokładnego (Rys. 5.24). Nie zgadza się zarówno rozkład jak i wartości naprężeń. W obu przypadkach dolną granicą wartości jest -195 MPa, podczas, gdy wartość referencyjna to -165 MPa. Podobnie w przypadku górnej granicy wartości, gdzie wynik obliczeń to -90 MPa, a wartość referencyjna jest prawie o 50 MPa wyższa i wynosi -45 MPa. Wartość minimalna zaniżona jest o 30 MPa a maksymalna o 45 MPa, co stanowi odpowiednio 25% i 37,5% zakresu dokładnego.

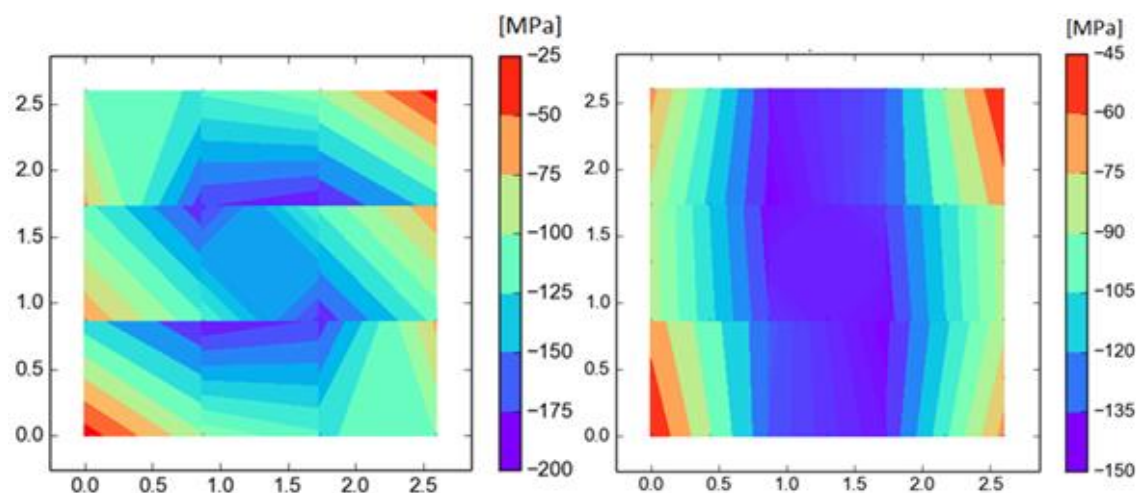
Rozkład naprężeń przedstawiony na obrazach wyników obliczeń jest bardzo niespójny. Sąsiadujące ze sobą obszary są oznaczone kolorami symbolizującymi nawet najbardziej skrajne wartości, co w rzeczywistości nie ma miejsca. Porównując wyniki podziału siatką 3x3 z dokładnym wynikiem zauważyć można, iż jedyne miejsca zgodne, co do rozkładu wartości to centralny element siatki oraz zewnętrzne części naroży próbki gdzie występuje maksymalny moduł Younga, czyli lewy górny i prawy dolny róg. Dwukrotne powiększenie liczby węzłów w obszarze pojedynczego elementu, a zatem przejście od cztero-węzłowego do ośmio-węzłowego elementu nie przynosi radykalnej poprawy wyników. Jak opisano powyżej maksymalne i minimalne wartości naprężeń znacząco mijają się z obliczonymi dla wyniku dokładnego. Zauważalnej poprawie uległ rozkład naprężeń, ale również tylko w przekątnej, w której na próbce występuje maksymalny moduł Younga.





Rys. 5.25 Naprężenia normalne Y przy zastosowaniu stałej wartości modułu Younga dla poszczególnych elementów skończonych. Od lewej podział 3x3 element 4-o węzłowy, podział 3x3 element 8-mio węzłowy, podział 61 x61 element 8-mio węzłowy[94].

W kolejnym etapie do opisanego powyżej eksperymentu dodano zmienność modułu Younga (Rys. 5.26).



Rys. 5.26 Naprężenia normalne Y przy zastosowaniu zmiennych wartości modułu Younga dla poszczególnie obliczanych punktów. Od lewej podział 3x3 element 4-o węzłowy, podział 3x3 element 8-mio węzłowy[94].

Wyniki obliczone za pomocą elementu czterowęzłowego z zaimplementowaną zmiennością modułu Younga znacząco poprawiły rozkład naprężeń. Sąsiadujące ze sobą obszary nie przedstawiają skrajnie różnych wartości naprężeń, a w większości są podobne. Sam kształt i rozmieszczenie obszarów o takich samych naprężeniach przy porównaniu ich do wyniku dokładnego uległ znaczącej poprawie w przeciwieństwie do ich wartości. Minimalne i maksymalne wyznaczone naprężenia to odpowiednio -200 MPa i -25 MPa, co stanowi odchylenie odpowiednio o 35 i 20 MPa względem wyniku dokładnego. Wartości te stanowią odpowiednio 29% i 16,7% zakresu wyniku dokładnego. Sam przedział, w którym zawierają się wyniki równy 175 MPa przy referencyjnych 120 MPa jest o niemal połowę zbyt wysoki.

Poprawę w obu opisywanych obszarach, tak rozkładu, jak i samych wartości naprężeń prezentuje element ośmiowęzłowy. Rozkład naprężeń jest bardzo zbliżony do dokładnego. Wartość maksymalna w nim to  $-45$  MPa, jest równa wynikowi dokładnemu, a minimalna to  $-150$  MPa, przy wzorcowych  $-165$  MPa. Różnica wyniku minimalnego równa  $15$  MPa stanowi zaledwie  $12,5\%$  zakresu wyniku wzorcowego.

Zwiększenie liczby węzłów w elemencie skończonym jest oczywistym i często stosowanym krokiem na drodze do poprawy wyników. Dodanie zmienności modułu Younga w obliczeniach jest jednak nowością, stąd istotnym punktem analizy jest porównanie dokładnych wartości liczbowych takich samych obliczeń dla różnych wariantów tego zagadnienia, a nie jedynie zakresów i wartości skrajnych. Tab. 5-Tab. 7 przedstawiają wartości naprężeń obliczonych dla punktów, leżących wewnątrz elementów skończonych, których współrzędne pokrywają się ze współrzędnymi punktów Gaussa wyznaczonych dla siatki podziału  $3 \times 3$ .

Wynik dokładny (siatka  $61 \times 61$ ) porównano z naprężeniami wyznaczonymi wzdłuż osi pionowej oraz wg von Misesa przy siatce podziału  $3 \times 3$  dla elementów o stałym i zmiennym module Younga.

W Tab. 5, Tab. 6 i Tab. 7 przedstawiono wartości liczbowe naprężeń ściskających dla zadanych punktów. Wiersz i kolumna zaznaczone na białą to wartości współrzędnych wzdłuż osi  $x$  i  $Y$ . W Tab. 8 przedstawiono błąd względny obliczony dla stałego modułu Younga i siatki podziału  $3 \times 3$  elementy i  $61 \times 61$  elementów. Maksymalna wartość błędu to  $28,7\%$ . Średnia arytmetyczna wartości zawartych w tabeli to  $13,2\%$ . Najwyższe wartości błędu zaobserwować można w skrajnych kolumnach tabeli, które odpowiadają pionowym brzegom próbki. W Tab. 9 przedstawiono błąd względny obliczony dla zmiennego modułu Younga i siatki podziału  $3 \times 3$  elementy i stałego modułu Younga i siatki podziału  $61 \times 61$  elementów. Wartość maksymalna błędu jest znacznie mniejsza i wynosi  $3,1\%$ , a średnia  $1,6\%$ . Wskazanie określonego obszaru próbki gdzie błąd przybiera najwyższe wartości jest niemożliwe.

Obliczone wartości błędów, umieszczone w Tab. 8 i Tab. 9 wskazują prawie dziesięciokrotną poprawę wyników po zastosowaniu zmienności modułu Younga w obliczeniach wytrzymałościowych.

W Tab. 10, Tab. 11 i Tab. 12 przedstawiono wartości naprężeń według hipotezy von Misesa, a w Tab. 13 i Tab. 14 błąd względny obliczony ponownie dla obliczeń z wykorzystaniem stałego i zmiennego modułu Younga. Błąd wyliczony dla obliczeń z zastosowaniem stałego modułu Younga sięga maksymalnie  $28,4\%$ , a jego średnia wartość to  $13,2\%$  podczas gdy te same parametry dla wartości wyliczonych ze zmiennym  $E$  to  $3,1\%$  i  $1,6\%$ . Podobnie jak w przypadku naprężeń wzdłuż pionowej osi próbki zaobserwować można prawie dziesięciokrotną poprawę dokładności wyniku.

Tab. 5. Wartości naprężeń normalnych wyznaczonych wzdłuż osi pionowej próbki dla punktów o współrzędnych punktów Gaussa. Obliczenia elementem 8-mio węzłowym przy stałym module Younga i siatce podziału 3x3 elementy[94].

2,42	-107,759	-137,623	-134,265	-163,665	-105,790	-118,745
1,92	-110,084	-136,074	-132,410	-163,610	-105,943	-119,726
1,55	-117,193	-119,090	-148,650	-146,847	-117,710	-118,358
1,05	-118,358	-117,710	-146,847	-148,650	-119,090	-117,193
0,68	-119,726	-105,944	-163,610	-132,410	-136,074	-110,084
0,18	-118,745	-105,790	-163,666	-134,265	-137,624	-107,759
	0,18	0,68	1,05	1,55	1,92	2,42

Tab. 6 Wartości naprężeń normalnych wyznaczonych wzdłuż osi pionowej próbki dla punktów o współrzędnych punktów Gaussa. Obliczenia elementem 8-mio węzłowym przy zmiennym module Younga i siatce podziału 3x3 elementy[94]

2,42	-90,536	-130,887	-147,571	-145,599	-132,439	-90,121
1,92	-94,098	-129,815	-145,900	-142,774	-129,707	-94,858
1,55	-97,657	-127,583	-144,101	-142,454	-127,018	-98,338
1,05	-98,338	-127,018	-142,454	-144,101	-127,583	-97,657
0,68	-94,858	-129,707	-142,774	-145,900	-129,815	-94,098
0,18	-90,121	-132,439	-145,599	-147,571	-130,887	-90,536
	0,18	0,68	1,05	1,55	1,92	2,42

Tab. 7 Wartości naprężeń normalnych wyznaczone wzdłuż osi pionowej próbki dla punktów o współrzędnych punktów Gaussa jak dla siatki 3x3. Obliczenia elementem 8-mio węzłowym przy stałym module Younga i siatce podziału 61x61 elementów [94].

2,42	-90,462	-134,137	-149,579	-146,891	-135,655	-92,268
1,92	-94,259	-133,957	-148,513	-144,871	-131,549	-96,587
1,55	-98,101	-130,459	-148,191	-144,082	-129,658	-99,269
1,05	-99,270	-129,662	-144,093	-148,194	-130,454	-98,097
0,68	-96,586	-131,549	-144,875	-148,521	-133,967	-94,249
0,18	-92,265	-135,654	-146,892	-149,583	-134,147	-90,480
	0.18	0.68	1.05	1.55	1.92	2.42

Tab. 8 Błąd względny naprężeń normalnych wyznaczonych wzdłuż osi pionowej dla siatek podziału 3x3 i 61x61 przy obliczeniach ze stałym modulem Younga [94].

2,42	19,121	2,599	10,238	11,420	22,015	28,695
1,92	16,788	1,580	10,843	12,935	19,464	23,958
1,55	19,461	8,715	0,310	1,920	9,215	19,229
1,05	19,228	9,218	1,911	0,308	8,711	19,466
0,68	23,959	19,465	12,932	10,848	1,573	16,801
0,18	28,700	22,015	11,419	10,241	2,592	19,097
	0,18	0,68	1,05	1,55	1,92	2,42

Tab. 9 Błąd względny naprężeń normalnych wyznaczonych wzdłuż osi pionowej dla siatek podziału 3x3(ze zmiennym modułem Younga) i 61x61(ze stałym modułem Younga[94].

2,42	0,082	2,423	1,343	0,880	2,371	2,327
1,92	0,171	3,092	1,759	1,447	1,400	1,790
1,55	0,453	2,204	2,760	1,130	2,036	0,938
1,05	0,939	2,039	1,137	2,762	2,200	0,449
0,68	1,789	1,400	1,450	1,764	3,099	0,161
0,18	2,324	2,370	0,881	1,345	2,430	0,061
	0,18	0,68	1,05	1,55	1,92	2,42

Tab. 10 Wartości naprężeń wg von Misesa dla punktów o współrzędnych punktów Gaussa. Obliczenia elementem 8-mio węzłowym przy stałym module Younga i siatce podziału 3x3 elementy[94].

2,42	107,800	137,657	134,296	163,680	105,797	118,764
1,92	110,174	136,096	132,423	163,683	106,052	119,814
1,55	117,449	119,090	148,695	147,040	118,023	118,570
1,05	118,570	118,023	147,040	148,695	119,090	117,449
0,68	119,814	106,052	163,683	132,423	136,096	110,174
0,18	118,764	105,797	163,680	134,296	137,657	107,800
	0,18	0,68	1,05	1,55	1,92	2,42

Tab. 11 Wartości naprężeń wg von Misesa dla punktów o współrzędnych punktów Gaussa. Obliczenia elementem 8-mio węzłowym przy zmiennym module Younga i siatce podziału 3x3 elementy[94].

2,42	90,570	130,990	147,743	145,816	132,622	90,241
1,92	94,188	129,966	145,929	142,804	129,887	95,039
1,55	97,684	127,674	144,183	142,594	127,125	98,341
1,05	98,341	127,125	142,594	144,183	127,674	97,684
0,68	95,039	129,887	142,804	145,929	129,967	94,188
0,18	90,241	132,622	145,816	147,743	130,990	90,570
	0,18	0,68	1,05	1,55	1,92	2,42

Tab. 12 Wartości naprężeń wg von Misesa dla punktów o współrzędnych punktów Gaussa dla siatki 3x3. Obliczenia elementem 8-mio węzłowym przy stałym module Younga i siatce podziału 61x61 elementów [94].

2,42	90,516	134,236	149,725	147,079	135,810	92,466
1,92	94,453	133,979	148,533	144,909	131,667	96,744
1,55	98,160	130,560	148,260	144,196	129,745	99,287
1,05	99,287	129,749	144,207	148,262	130,554	98,156
0,68	96,743	131,668	144,913	148,540	133,989	94,443
0,18	92,464	135,890	147,081	149,728	134,245	90,535
	0,18	0,68	1,05	1,55	1,92	2,42





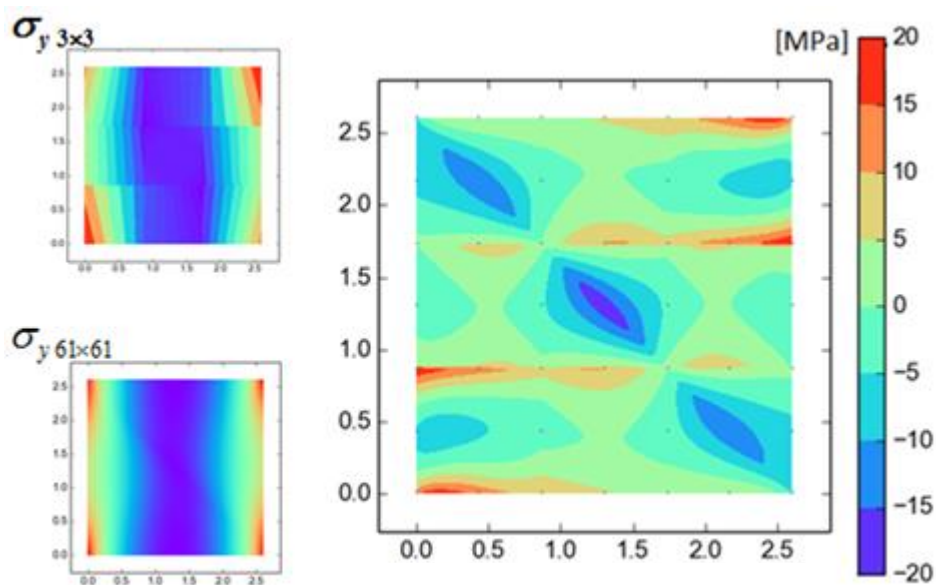
Tab. 13 Błąd względny naprężeń wg von Misesa dla siatek podziału 3x3 i 61x61 przy obliczeniach ze stałym modułem Younga [94].

2,42	19,095	2,548	10,305	11,287	22,099	28,441
1,92	16,643	1,580	10,846	12,956	19,455	23,847
1,55	19,650	8,785	0,293	1,973	9,035	19,422
1,05	19,421	9,038	1,964	0,292	8,781	19,655
0,68	23,848	19,455	12,953	10,851	1,572	16,656
0,18	28,445	22,099	11,286	10,307	2,541	19,071
	0,18	0,68	1,05	1,55	1,92	2,42

Tab. 14 Błąd względny naprężeń wg von Misesa dla siatek podziału 3x3 (ze zmiennym modułem Younga) i 61x61 (ze stałym modułem Younga) [94].

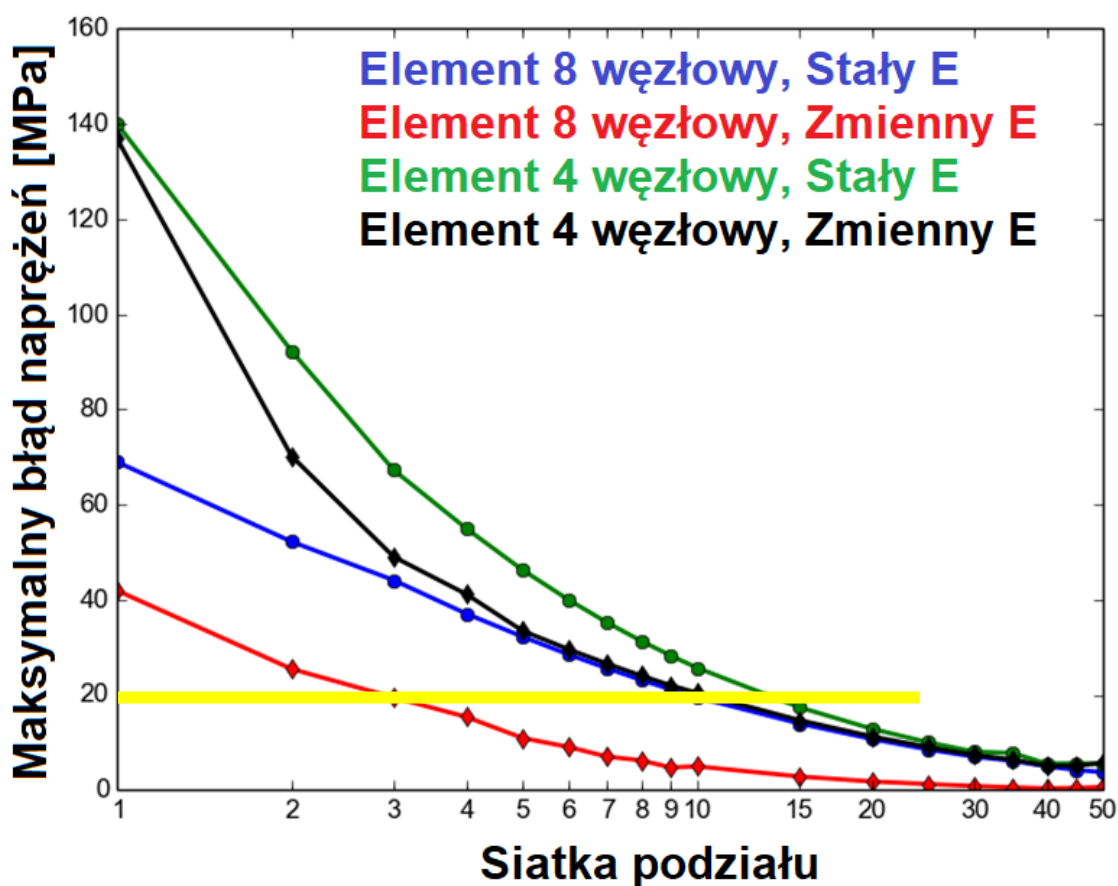
2,42	0,060	2,419	1,323	0,859	2,347	2,407
1,92	0,281	2,995	1,753	1,453	1,352	1,763
1,55	0,485	2,210	2,750	1,110	2,019	0,953
1,05	0,953	2,022	1,118	2,752	2,206	0,481
0,68	1,762	1,352	1,455	1,758	3,002	0,270
0,18	2,404	2,347	0,860	1,326	2,425	0,039
	0,18	0,68	1,05	1,55	1,92	2,42

Kolejnym sposobem oceny wyniku jest obliczenie maksymalnego błędu naprężeń (Rys. 5.27). Naprężenia obliczone ze zmiennym modułem Younga dla siatki podziału 3x3 odejęte zostały od wyniku wyznaczonego przy podziale 61x61.



Rys. 5.27 Maksymalny błąd naprężeń normalnych wzdłuż osi pionowej próbki. Różnica wyników pomiędzy obliczonymi dla podziału 3x3 ze zmiennym i 61x61 elementów ze stałym modułem Younga. W obu przypadkach obliczenia wykonano za pomocą elementu 8-mio węzłowego [94].

Maksymalny błąd naprężeń jest parametrem podawanym w jednostce zgodnej z tymi, w jakich podane zostały wielkości naprężeń, tu w [MPa]. Na wykresie (Rys. 5.27) maksymalna różnica to 20 MPa, a minimalna -20 MPa. Odchylenie od poprawnego wyniku o 20 MPa, gdy zakres dokładnych wartości to 120 MPa oznacza 16,7% błędu względnego. Jest to wartość znacząca jednak taka maksymalna różnica pojawia się tylko w przekątnej próbki gdzie wartości modułu Younga są najwyższe oraz na poziomych (prostopadłych do kierunku obciążenia) granicach elementów skończonych. Oczwistym kierunkiem działań w celu obniżenia wartości tego błędu jest zwiększenie liczby elementów skończonych modelu, w tym przypadku jest to jednak niemożliwe ze względu na ograniczenia dopuszczalnej dawki promieniowania podczas badania TK. Maksymalny błąd naprężeń został wyznaczony również dla pozostałych metod obliczeniowych, w różnych wariantach podziału próbki siatką elementów skończonych oraz dwóch rodzajach elementu skończonego cztero- i ośmio-węzłowym (Rys. 5.28).



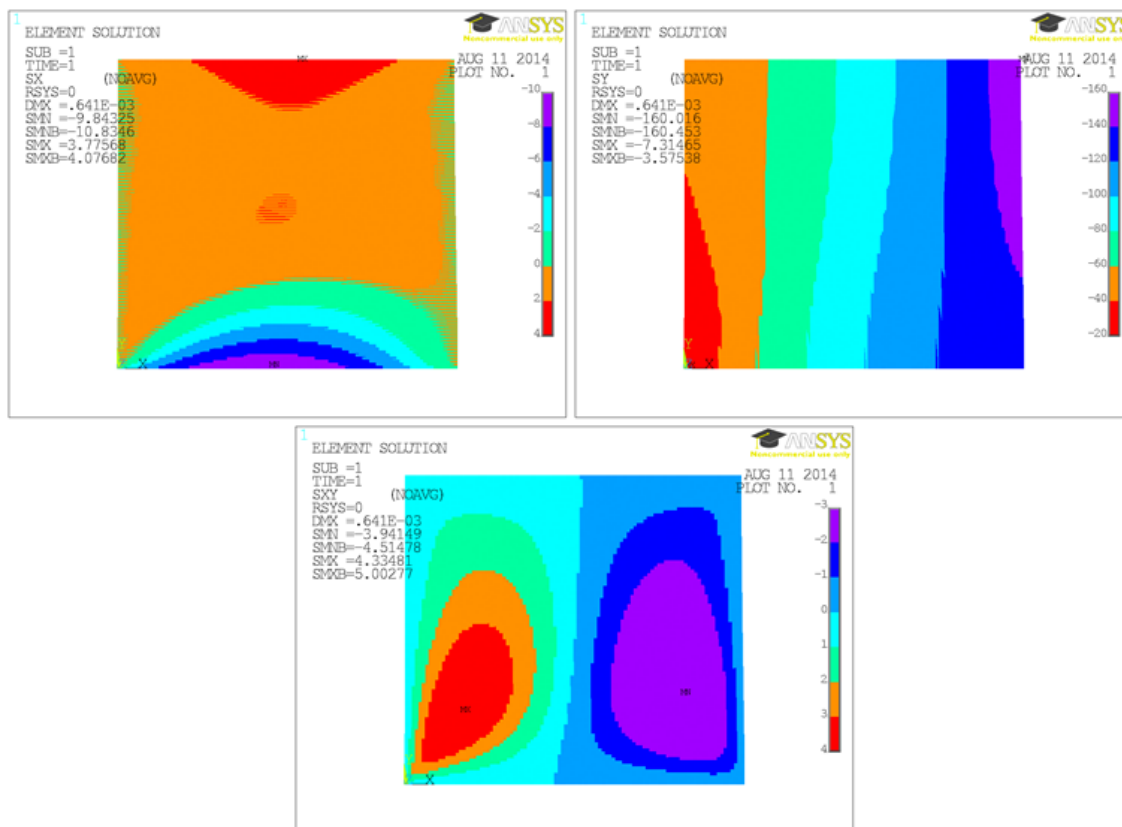
Rys. 5.28 Maksymalny błąd naprężeń normalnych wzdłuż osi pionowej próbki dla różnych metod obliczeniowych i siatek podziału na elementy [94].

Pozostając przy siatce podziału na elementy skończone 3x3, jako poziomie odniesienia, maksymalny błąd rozwiązania wynoszący 20 MPa jest ponad dwukrotnie lepszym wynikiem od uzyskanych za pomocą pozostałych metod, których maksymalny błąd przekracza 40 MPa. Wykres jednoznacznie pokazuje, iż dodanie zmienności modułu Younga do obliczeń MES znacząco poprawia jakość wyniku w stosunku do metody klasycznego przypisywania danych materiałowych, ale przy zastosowaniu takiego samego typu elementu skończonego. Warto zauważyć fakt, iż różnica pomiędzy błędem wyznaczonym dla metody klasycznej (stały moduł Younga) z użyciem elementu ośmiowęzłowego i metody ze zmiennym modułem Younga, ale przy zastosowaniu elementu czterowęzłowego to zaledwie kilka mega paskali na korzyść metody klasycznej, podczas gdy różnice pomiędzy metodami, gdy zastosujemy ten sam rodzaj elementu skończonego należy mierzyć już w dziesiątkach mega paskali .

Warto także porównać wielkości siatek podziału dla uzyskania takich samych dokładności. Stosując element ośmiowęzłowy w klasycznej metodzie MES do osiągnięcia maksymalnego błędu rzędu 20 MPa próbka musiałaby zostać podzielona siatką 15x15 elementów skończonych, co daje aż 25 razy więcej elementów, co znacząco wydłużyłoby czas obliczeń (żółta linia na Rys. 5.28).

Drugą metodą sprawdzenia dokładności uzyskiwanych wyników jest obliczenie błędu energii deformacji. Jest to metoda sprawdzająca korelacje pomiędzy naprężeniami, a deformacją poszczególnych elementów [65].

Klasykzną metodę określania dokładności obliczeń MES przedstawili Zienkiewicz OC, Zhu JZ [96]. Jest ona oparta na ocenie gradientu naprężeń i przemieszczeń na granicy pomiędzy elementami skończonymi, a podstawą oceny konkretnego rozwiązania jest wartość ogólnego błędu w normie energetycznej. Gradienty naprężeń na granicy między elementami są widoczne na wynikach obliczeń MES prezentowaną w niniejszej pracy metodą, przedstawionych na Rys. 5.14 - Rys. 5.21. Szeroki przegląd metod wyznaczania błędów obliczeń MES przedstawili Grätsch T, Bathe K.J. [97]. W powyższych pracach celem jest wyznaczanie błędu w praktycznych zadaniach inżynierskich, kiedy nie jest znany wynik dokładny czy choćby dużo dokładniejszy od ocenianego. Celem niniejszej pracy jest ocena metod obliczeniowych, zwłaszcza przy rzadkim podziale na elementy skończone (co jest charakterystyczne dla interpretacji obliczeniowej danych z tomografii komputerowej), więc oceniane warianty można porównywać z rozwiązaniami uzyskanymi dla bardzo gęstego podziału na elementy skończone, jak podział 100×100 (Rys. 5.21). Rozwiązanie to jest potwierdzone obliczeniami na takiej samej siatce, przeprowadzonymi w Ansysie (Rys. 5.29).



Rys. 5.29 wynik obliczeń wytrzymałościowych połowy próbki poddanej obciążeniu wzdłuż osi pionowej. Naprężenia normalne X, Y i naprężenia styczne XY. Siatka podziału 100 x 100, (opracowanie własne).

Do wyznaczania błędów obliczeń nie stosowano zatem metod opisanych w pracach [96] i [97], ale rozkład błędów naprężeń wyliczono jako prostą różnicę naprężeń ocenianych i naprężeń obliczonych przy gęstości 100×100 (wyliczanych w tych samych współrzędnych na całym obszarze rozwiązania),

błąd energii odkształcenia (uwzględniający poza błędem naprężeń błąd wyliczonych przemieszczeń) wyliczono z sumy różniczek energii naprężenia i energii odkształcenia:

$$U = \frac{1}{2} \cdot V \cdot \sigma \cdot \varepsilon \quad (38)$$

gdzie:

$U$  – energia odkształcenia elementu skończonego

$V$  – objętość elementu skończonego

$\sigma$  – naprężenie elementu skończonego

$\varepsilon$  – odkształcenie względne elementu skończonego.

$$\frac{dU}{d\sigma} = \frac{1}{2} \cdot V \cdot \varepsilon \quad (39)$$

$$\frac{dU}{d\varepsilon} = \frac{1}{2} \cdot V \cdot \sigma \quad (40)$$

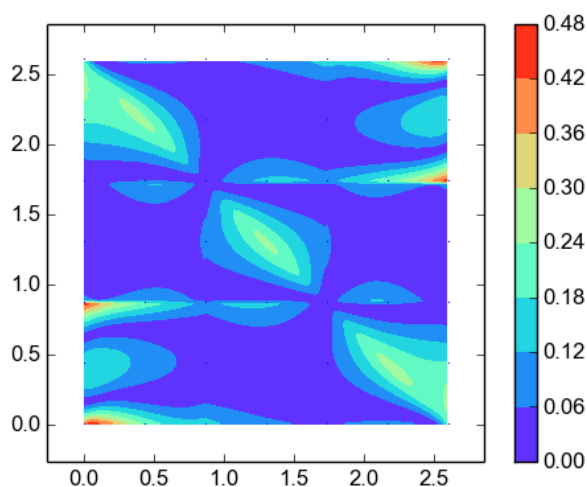
$$\Delta U = |\Delta\sigma| \cdot \frac{dU}{d\sigma} + |\Delta\varepsilon| \cdot \frac{dU}{d\varepsilon} \quad (41)$$

Względny błąd energii odkształcenia wynosi zatem:

$$\frac{\Delta U}{U} = \frac{\frac{1}{2}\sigma \cdot |\Delta\varepsilon| + \frac{1}{2}\varepsilon \cdot |\Delta\sigma|}{\frac{1}{2}\sigma \cdot \varepsilon} \quad (42)$$

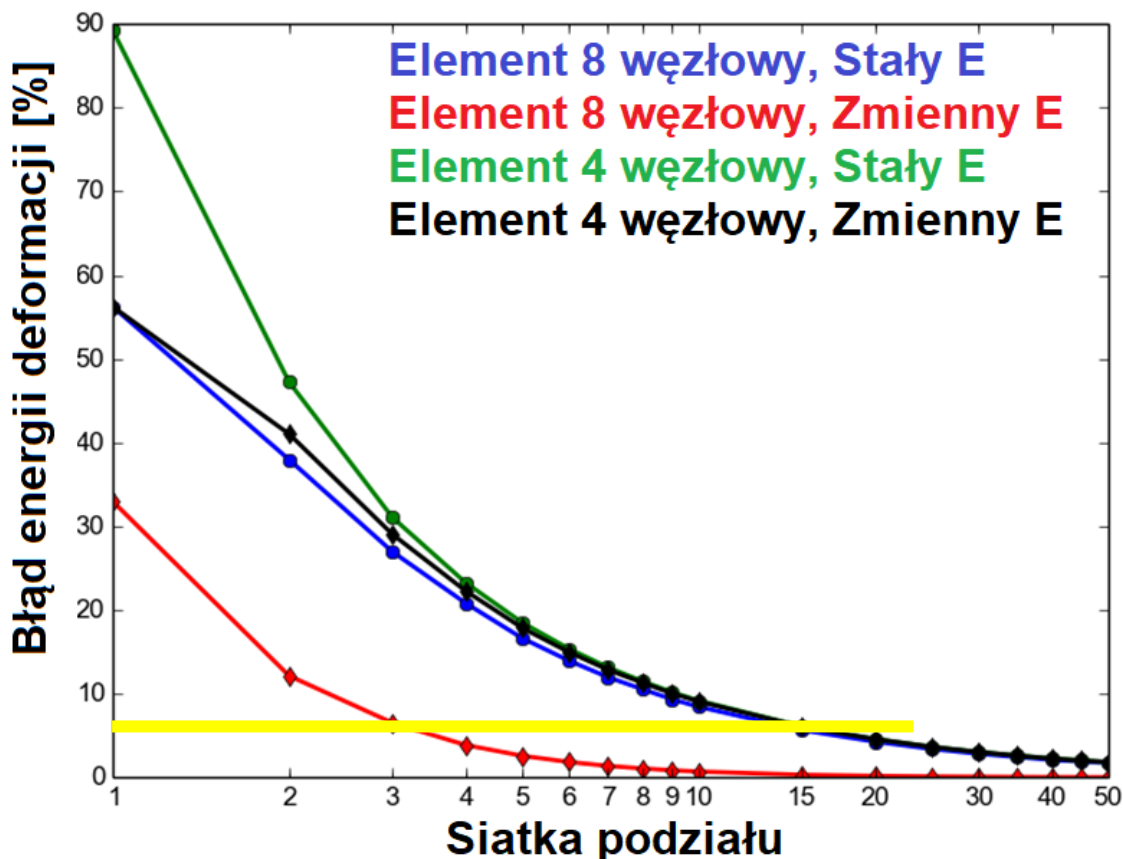
Tę ostatnią formułę wykorzystano do wyznaczenia rozkładu niedokładności względnej energii odkształcenia na obszarze rozwiązania Rys. 5.30.

Wyznaczone wartości błędu energii deformacji wynoszą 0-1 gdzie im niższa wartość tym wynik symulacji MES jest dokładniejszy. Obraz rozkładu błędu energii deformacji dla próbki podzielonej na dziewięć ośmiowzłowych elementów wyznaczony za pomocą zaproponowanej metody przedstawia Rys. 5.30. Błąd deformacji lokalnie sięga prawie 0,5 jednak obszary, w których błąd jest tak duży są niewielkie i występują na granicach elementów skończonych gdzie tego typu problem jest spodziewany. Średni błąd wyliczony dla całej próbki to ok 0,09.



Rys. 5.30 Błąd energii deformacji dla siatki podziału 3x3 elementy, naprężenia normalne Y. Wynik z zastosowaniem zmienności modułu Younga w obliczeniach [94].

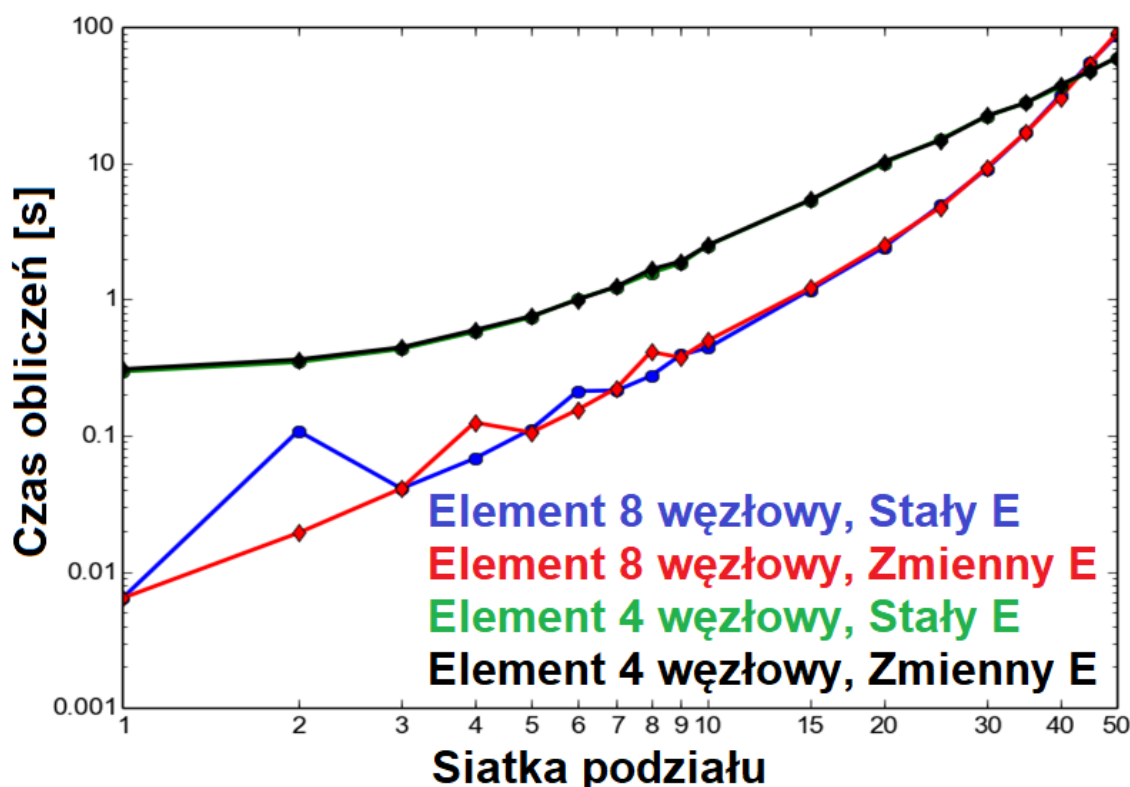
Na Rys. 5.31 przedstawiono zestawienie średnich błędów energii deformacji wyliczonych dla symulacji z pomocą 4-ro i 8-mio węzłowych elementów i z zastosowaniem zmiennego i stałego modułu Younga w obszarze pojedynczego elementu. Aby osiągnąć zaprezentowaną dokładność klasyczna metoda potrzebowałaby podziału próbki siatką 15x15 elementów. Co 25-krotnie zwiększa liczbę elementów.



Rys. 5.31 Błąd energii deformacji dla różnych siatek podziału próbki przy wykonaniu obliczeń elementem 4-ro i 8-mio węzłowym metodą klasyczną i z uwzględnioną zmiennością modułu Younga [94].

Oba zaprezentowane sposoby oceny wyników wyznaczonych za pomocą zaproponowanej metody potwierdziły poprawę wyników obliczeń wytrzymałościowych bez potrzeby zagęszczania siatki podziału na elementy skończone. Trzecim i ostatnim parametrem niezbędnym do sprawdzenia było porównanie czasów obliczeń.

Porównanie czasów obliczeń, podobnie jak w poprzednich dwóch testach wykonane zostało dla dwóch metod i z zastosowaniem dwóch rodzajów elementów skończonych (Rys. 5.32). Cztery warianty obliczeń podzielone zostały na dwie grupy ze względu na typ zastosowanego elementu skończonego. Obie metody MES i z uwzględnieniem zmienności modułu Younga osiągnęły najlepsze i bliskie sobie wyniki przy zastosowaniu elementu 8-mio węzłowego. Wykresy zależności czasu obliczeń od gęstości siatki obliczeń dla obu typów elementów wznoszą się wykładniczo, ale rozpoczynają w różnych miejscach (podział 1x1 element skończony) odpowiednio 8-mio węzłowy 0,007 sekundy, a 4-ro węzłowy 0,3 sekundy. Różne jest również tempo wzrostu wykresów, wykres czasu obliczeń z wykorzystaniem elementu 8-mio węzłowego znajduje się poniżej tego z wykorzystaniem elementu 4-ro węzłowego, ale przecina go, gdy podział siatki wyniesie ok 45x45 elementów. Przedstawione badania dowodzą, iż zaproponowana metoda nie tylko nie jest gorsza od aktualnie wykorzystywanej, ale w wielu przypadkach lepsza.



Rys. 5.32 Czas obliczeń dla różnych siatek podziału próbki przy wykorzystaniu elementu 4-ro i 8-mio węzłowego, metodą klasyczną i z uwzględnioną zmiennością modułu Younga [94].

## 5.6. Oprogramowanie komercyjne ANSYS

Program ANSYS począwszy od wersji 2017 posiada polecenie nadające zmienność właściwości materiału w różnych kierunkach badanego modelu (w chwili otwarcia przewodu moduł ten nie był dostępny). Polecenie TB posiada 64 typy definiujące różne właściwości materiałowe, które mogą przybrać formę zmiennych określonych dla całego modelu. Jednym z typów jest „Elastic”, w którym ustalić można zmienność właściwości materiałowych: modułu Younga i stałej Poissona. Zmienność obu tych parametrów może nabrać charakteru izotropowego, ortotropowego przy dużej i małej wartości stałej Poissona, (jako oddzielne typy polecenia), anizotropowego w funkcji sztywności i zgodności, (jako oddzielne typy polecenia) oraz zdefiniowanej przez użytkownika. Polecenie to zawiera, zatem pełną gamę możliwych zmienności i wartości odpowiednich parametrów mogą być uzależnione nawet od temperatury tak aby określone wielkości właściwości wprowadzane były do modelu tylko po wystąpieniu określonych warunków. Z poleceniem TBElastic współpracuje polecenie TBFIELD, w którym definiuje się współrzędne punktu, któremu następnie nadaje się właściwości wytrzymałościowe za pomocą polecenia TBDATA. Polecenie TBDATA definiuje dane w tabeli materiałowej skryptu. Poniżej przedstawiono układ poleceń dla próbki obliczanej za pomocą jednego elementu skończonego:

**TB,Elastic,1** (wywołanie polecenia TB, zdefiniowanie jego typu, jako Elastic – zmienność Modułu Younga i stałej Poissona, 1- liczba temperatur, dla których dane będą używane; nasze obliczenia nie różnicują temperatur, brak dalszych wartości oznacza wybranie domyślnej izotropowości materiału z dwoma zmiennymi parametrami – w tym przypadku zmienności ulegał będzie tylko moduł Younga, a sposób, w jaki będzie się on zmieniał ustalimy za pomocą poleceń TBFIELD i TBDATA)

TBFIELD,XCOR,0.0 (ustalenie współrzędnych miejsca na próbce, które otrzyma własny moduł Younga. W tym przypadku wszystkie poniżej wyznaczone współrzędne pokrywały się będą ze skrajnymi węzłami całego modelu)



TBFIELD,YCOR,0.0

TBFIELD,ZCOR,0.0

TBDATA,1,490 (Pierwsza liczba definiuje numer pola tabeli materiałowej, od którego rozpoczyna się wpisywanie/nadpisywanie danych. Następnie można podać 6 oddzielonych przecinkami wartości, które zajmą kolejne miejsca tabeli. Wywołanie polecenia TBDATA po zdefiniowaniu współrzędnych miejsca na próbce powoduje utworzenie tabeli dla tego konkretnego miejsca.  
TBFIELD,YCOR,2.7 (Zmienia się tylko współrzędna Y-kowa, pozostałe zostają nie zmienione)

TBDATA,1,490+(((2.7\*0+2.7\*2.7+0)/(5.4+(1/2.7)))<sup>4</sup>4910/2.7)

TBFIELD,XCOR,2.7

TBFIELD,YCOR,0.0

TBDATA,1,490+(((2.7\*2.7+2.7\*0+0)/(5.4+(1/2.7)))<sup>4</sup>4910/2.7)

TBFIELD,YCOR,2.7

TBDATA,1,490+(((2.7\*2.7+2.7\*2.7+0)/(5.4+(1/2.7)))<sup>4</sup>4910/2.7)

TBFIELD,XCOR,0.0

TBFIELD,YCOR,0.0

TBFIELD,ZCOR,1

TBDATA,1,490+(((2.7\*0+2.7\*0+1)/(5.4+(1/2.7)))<sup>4</sup>4910/2.7)

TBFIELD,YCOR,2.7

TBDATA,1,490+(((2.7\*0+2.7\*2.7+1)/(5.4+(1/2.7)))<sup>4</sup>4910/2.7)

TBFIELD,XCOR,2.7

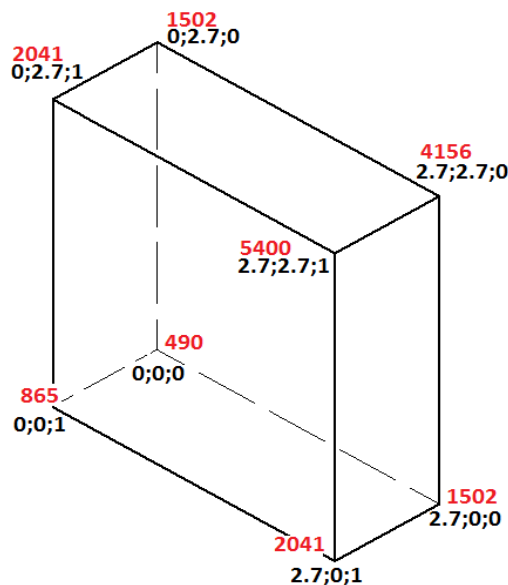
TBFIELD,YCOR,0.0

TBDATA,1,490+(((2.7\*2.7+2.7\*0+1)/(5.4+(1/2.7)))<sup>4</sup>4910/2.7)

TBFIELD,YCOR,2.7

TBDATA,1,490+(((2.7\*2.7+2.7\*2.7+1)/(5.4+(1/2.7)))<sup>4</sup>4910/2.7)

W przedstawionym powyżej kodzie wartości modułu Younga zdefiniowana jest dla naroży próbki (Rys. 5.33). Inaczej niż w poprzednich analizach program dobiera funkcję, według której moduł zmienia się w zależności od dokładnych współrzędnych poddawanych obliczeniom w danym momencie.



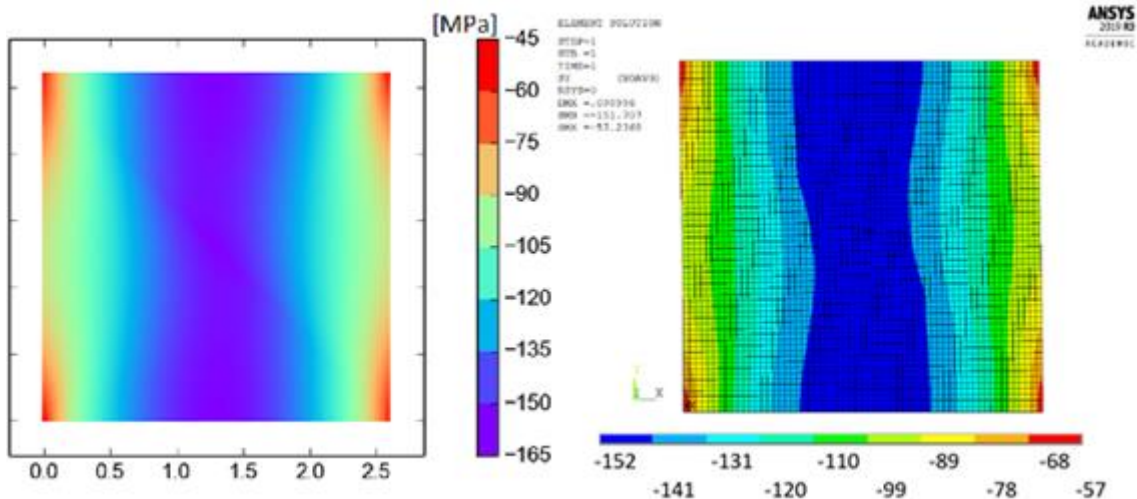
Rys. 5.33 Rozkład modułu Younga w próbce przestrzennej (opracowanie własne).

Dzięki rozwiązaniu, w którym podajemy wartości właściwości tylko dla skrajnych punktów modelu możemy w dowolny sposób podzielić go na elementy skończone o dowolnym kształcie.

#### 5.7. Test metody TBDATA z wykorzystaniem elementu tarczowego

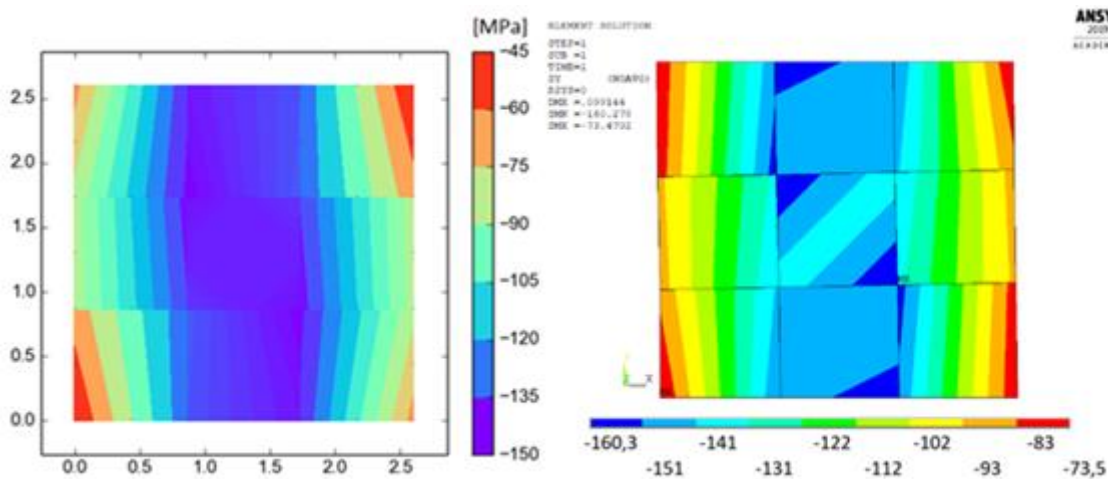
Do obliczeń na próbce zgodnej z opisaną w rozdziale 5.1 (Rys. 5.4 i Rys. 5.5) użyto elementu 8-mio węzłowego Plain183.

Obliczenia wykonane za pomocą własnego skryptu z podziałem siatką 61x61 stanowiły wynik dokładny i do niego, w tej samej siatce podziału, porównano pierwszą symulację obciążenia w programie ANSYS. Wyniki naprężeń wzdłuż osi y (równoległa do kierunku obciążenia) prezentują podobny rozkład, ale różne wartości skrajne (Rys. 5.34). Maksymalny wynik liczbowy w węzłach dla własnego skryptu to -45 MPa, a dla programu ANSYS -57,2 MPa. Przyjmując za wynik referencyjny obliczenia we własnym skrypcie różnica to aż 27%. Minimalne wartości naprężeń w próbce to dla obliczeń we własnym skrypcie -165 MPa, a dla programu ANSYS -151,7 MPa, co daje zmianę o 8%. Zakres wyników to, odpowiednio 120 i 94,5 MPa, w programie ANSYS zakres jest zawężony o 21%. Odnosząc różnice wartości naprężeń do zakresu wartości, jakie występują w całej próbce otrzymujemy 10-11% błędu.



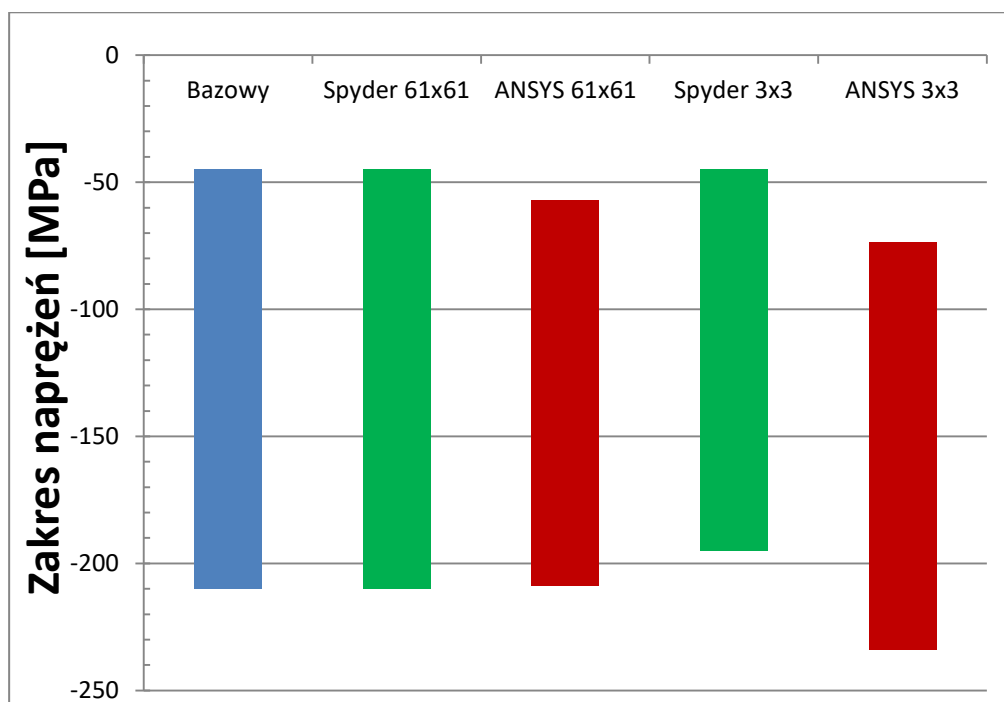
Rys. 5.34 Naprężenia normalne wzdłuż pionowej osi próbki a) model własny (lewa) b) ANSYS. Siatka podziału 61x61 elementów (opracowanie własne).

Pamiętając o ograniczeniach dawki promieniowania podawanej podczas obrazowania kości tak niewielki fragment materiału zgodnie z już przytaczanymi zasadami podzielono siatką 3x3 elementy skończone (Rys. 5.35).



Rys. 5.35 Naprężenia normalne wzdłuż pionowej osi próbki a) model własny (lewa) b) ANSYS (prawa). Siatka podziału 3x3 elementy (opracowanie własne).

We własnym skrypcie przy gęstości siatki 3x3 przedział wyników z obliczonych dla dokładnego wyniku 120 MPa zmniejszył się do 105 MPa (spadek o 12,5%) podczas gdy w programie ANSYS, zakres zmniejszył się aż do 86,8 MPa, co w stosunku do wartości bazowej (120 MPa) stanowi spadek o.28%, a w stosunku do gęstego podziału w samym ANSYS-ie o 8%. Maksymalna wartość naprężeń we własnym skrypcie to -45 MPa, dla ANSYS -73,5, a wzorcowa -45 MPa. Różnica wartości wystąpiła, zatem tylko w programie ANSYS i jest wzrostem o 63% w stosunku do wartości referencyjnej (-45 MPa). Wartość minimalna, we własnym skrypcie to -150 MPa, a w ANSYS -160,3 MPa. Wartość referencyjna to -165 MPa, błędy to odpowiednio wzrost o 9% i 3% (Rys. 5.36).



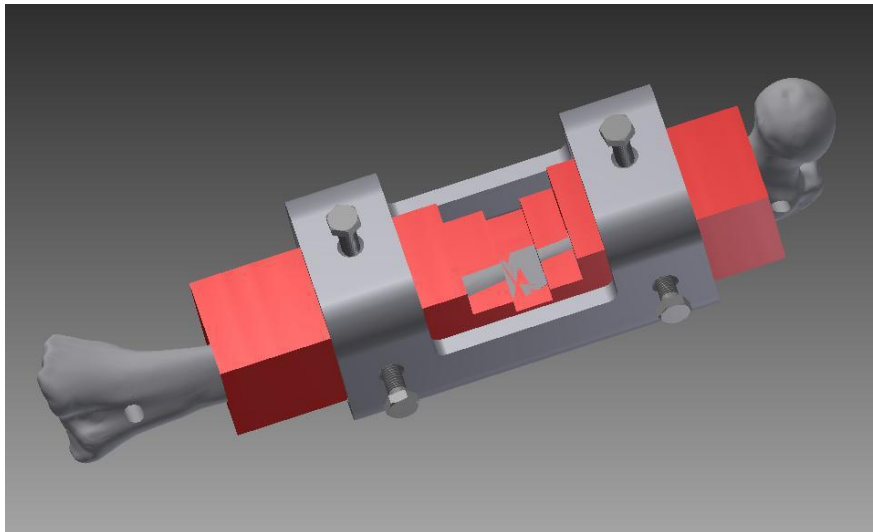
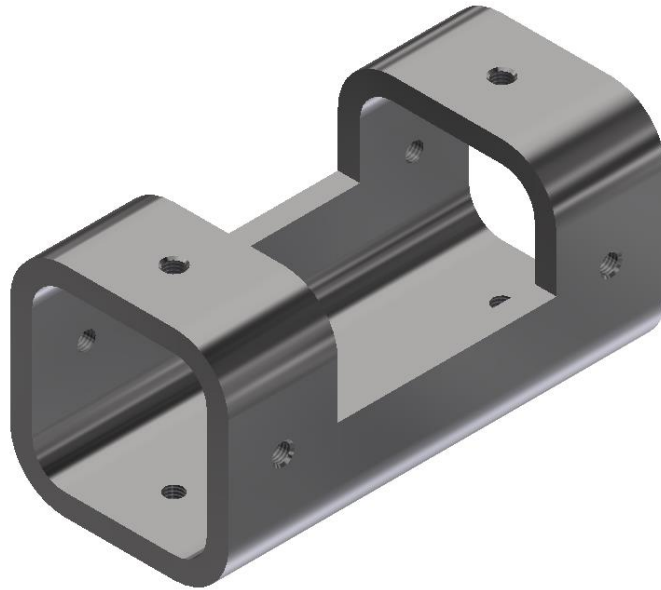
Rys. 5.36 Zakresy pola naprężeń normalnych wzdłuż pionowej osi próbki w poszczególnych algorytmach obliczeniowych (opracowanie własne)

## 6. EKSPERYMENT

Jak wspomniano we wcześniejszych rozdziałach, właściwości mechaniczne tkanki kostnej są różne w zależności od jej wysycenia wapniem oraz budowy wewnętrznej – struktura zbita lub gąbczasta. Przeprowadzony eksperyment miał na celu określenie właściwości wytrzymałościowych, w tym modułu Younga próbek kości wyciętych z kości udowej świńskiej. Próbki zostały poddane obróbce mechanicznej, do kształtu typowego dla próbek poddawanych próbie rozciągania, następnie poddane skanowaniu w tomografie komputerowym, rozciągnięte w specjalnie do tego przeznaczonym uchwycie i poddane tomografii za pomocą mikrotomografu. Mikrotomografia przeprowadzona była przed oraz w trakcie procesu rozciągania.

### 6.1. *Badania przygotowawcze do wykonania próbek kostnych*

Pierwszym etapem przygotowania do eksperymentu było poznanie badanego materiału, kości udowej świńskiej o średniej długości 200 mm oraz średnicy trzonu 42-52 mm [98]. Grubość ściany i dokładny kształt przekroju kości jest różny w zależności od konkretnego przypadku. Aby zbadać czy z zaproponowanej kości uda się wyodrębnić wystarczająco dużo materiału do badań oraz określić najlepszą metodę obróbki wykonano opisany poniżej test. Kość udową świńską wraz z przylegającymi do niej tkankami miękkimi umieszczono w metalowym uchwycie (Rys. 6.1) unieruchamiając ją ośmioma śrubami M10 o zaokrąglonych końcach (otwory w uchwycie są gwintowane). Następnie całość zamrożono w temperaturze  $-18^{\circ}\text{C}$ . Niepozbawianie kości kontaktu z otaczającymi ją tkankami miało na celu określenie dokładnej grubości warstwy struktury zbitej oraz rozpoznanie czy możliwym jest dokładne wskazanie granic kości, okostnej i mięśni.



Rys. 6.1 Uchwyt do frezowania kości (opracowanie własne)

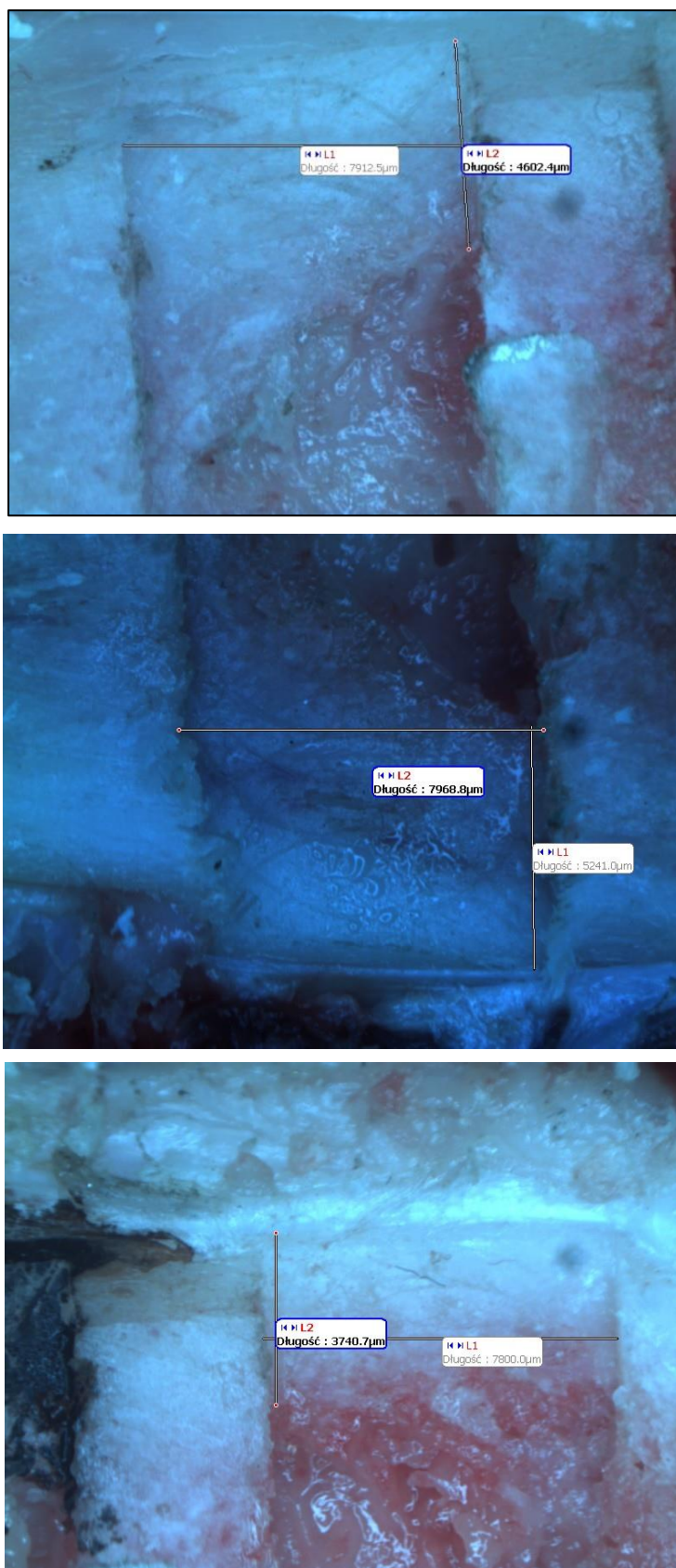
Zamrożenie preparatu, miało na celu ułatwienie obróbki mechanicznej, ograniczenie wycieku płynów, wysychania tkanek oraz spowolnienie procesu rozkładu. W kości wykonano trzy poziome nacięcia (rowki) o szerokości równej średnicy freza  $\phi 8$  i głębokości pozwalającej na odsłonięcie przeciwległych ścian kości. Odstęp pomiędzy rowkami wynosił ok 10 mm. Jeśli kość wyobrazimy sobie, jako rurę wypełnioną szpikiem, usunięta została cała szczytowa część, tak, aby wyraźnie widać było obie pionowe względem uchwytu, ściany kości.

Spośród trzech wykonanych rowków tylko dwa nadawały się do pomiaru. Ostatni, skrajny nacięty został zbyt blisko głowy kości i zawierał fazę przejściową tkanki pomiędzy strukturą gąbczastą, a zbitą, której nie badano.

Pozostałe dwa rowki zostały poddane obserwacji w mikroskopie laboratoryjnym.

Frezowanie kości przebiegało etapami. Niewielka różnica głębokości, (co 1 mm) pomiędzy kolejnymi przejściami frezu pozwoliła określić niezbędną do usunięcia ilość tkanki oraz zapobiegła wykruszaniu się kości. Warto zaznaczyć, iż zbyt duża prędkość obrotowa frezu powodowała przypalanie się tkanki kostnej, podobnie zbyt wolny posuw. W miejscach, w których preparat rozmarzył tkanka mięśniowa zawijała się wokół, a szpik oklejał frez. Problem ten nie występował w początkowej fazie prac, a wiór przypominał kruszony lód.

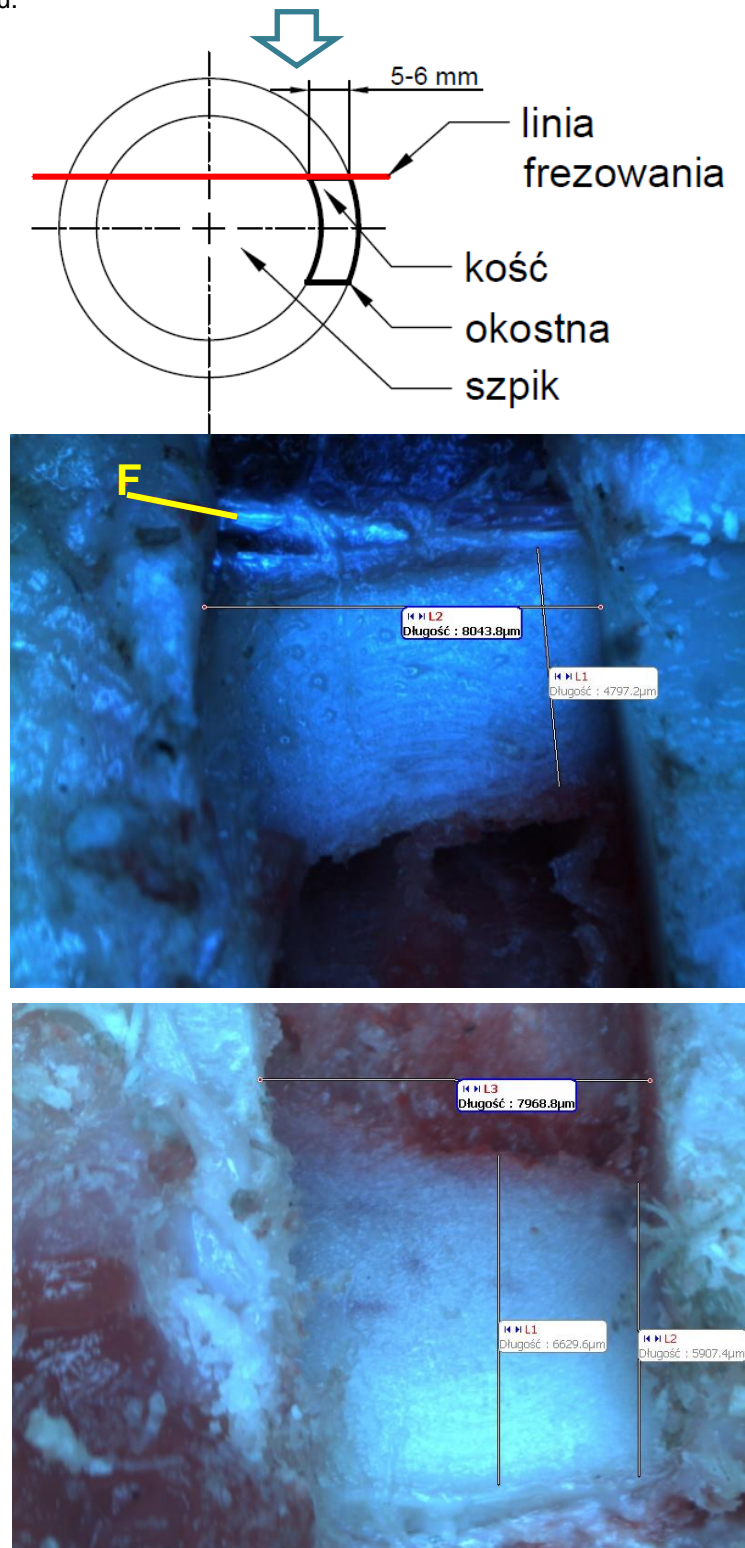
W pierwszym etapie zdjęto 1 mm górnej warstwy kości Rys. 6.2. Granica pomiędzy kością, a szpikiem kostnym nie jest wyraźnie widoczna na zdjęciu, ale wyraźnie odczuwalny jest opór, jaki struktura zbita stawia narzędziom obróbkowym. Zamrożony szpik kostny szybko uplastycznia się podczas obróbki. Powodem jest jego skład, który w większości stanowią tłuszcze.



Rys. 6.2 Tkanka kostna odsłonięta na głębokości 1 mm w głąb kości (ok 1 mm poniżej poziomej względem uchwyty ściany kości). Zdjęcia pierwsze i drugie zmierzona struktura zbita kości. Zdjęcie trzecie struktura przejściowa pomiędzy zbitą, a gąbczastą (opracowanie własne).

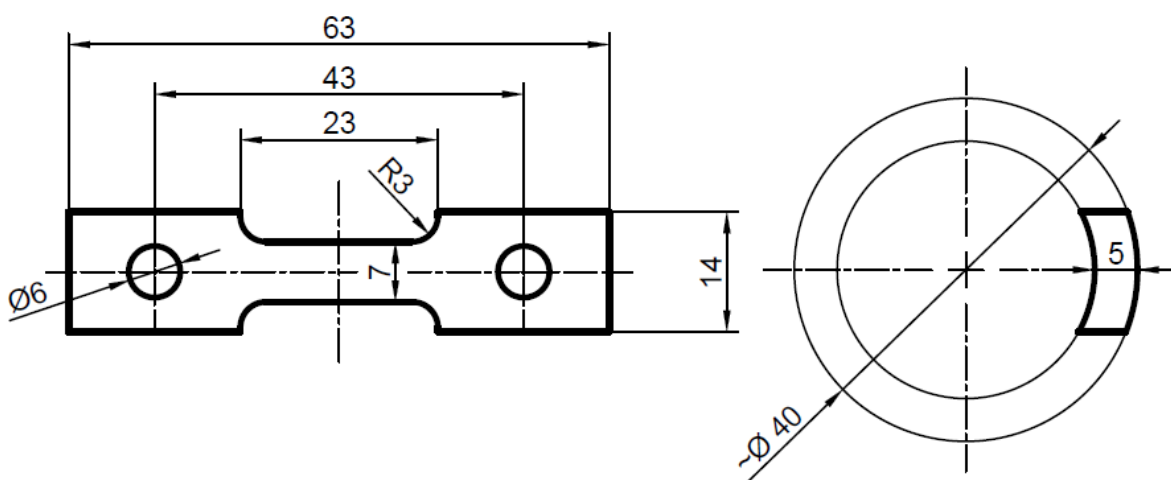


Drugim etapem pomiaru było pogłębienie wycięt o kolejne 2 mm, tak, aby uzyskać całkowitą głębokość 3 mm Rys. 6.3. Grubość struktury zbitej na tej głębokości to 5-6 mm. Granica między kością, a szpikiem jest zdecydowanie wyraźniejsza i wyczuwalna w dotyku.

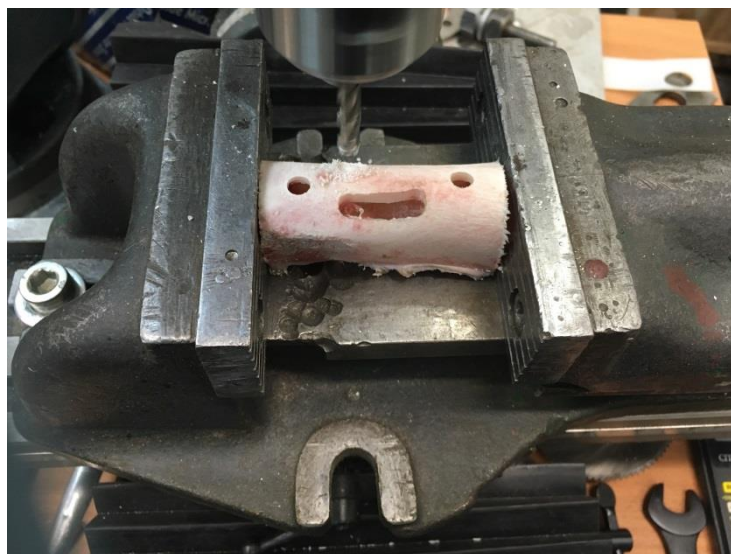


Rys. 6.3 Zdjęcia tkanki kostnej odsłoniętej na głębokości 3 mm w głąb kości. F- okostna (opracowanie własne).

Znając średnicę trzpienia kości (ok 40 mm) i wiedząc, iż niezbędną do usunięcia grubością tkanki od szczytów preparatu jest podwójna wartość 3 mm ustalono, iż ilość pozostałego materiału jest wystarczająca do wykonania próbek badawczych. Obróbka wykazała również, iż grubość ściany kości jest nierównomierna i występują miejscowe nierówności. Założenie wycinania próbek wzdłuż osi głównej kości będzie powodowało, iż w przekroju zamiast typowego dla próbek badanych na rozciąganie prostokąta (próbki tworzyw sztucznych) lub koła (próbki stopów i metali) będzie fragment pierścienia (Rys. 6.4).



Rys. 6.4 Kształt próbki kostnej do badań wytrzymałościowych i mikrotomografii (opracowanie własne).



Rys. 6.5 Wycinanie próbki z trzonu kości udowej świńskiej. Stanowisko frezarskie (opracowanie własne).

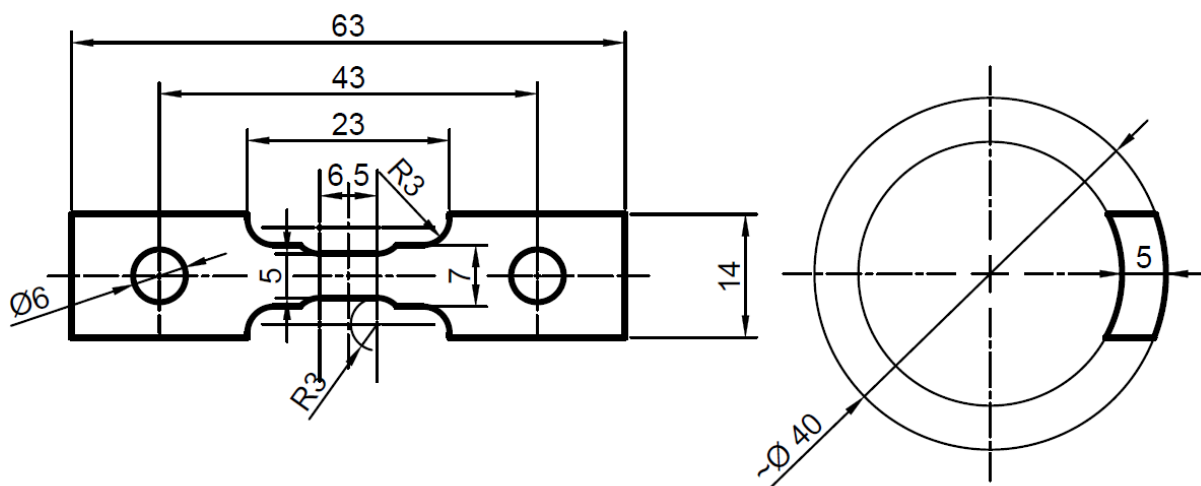
Proces wycinania próbki do próby rozciągania realizowano na oczyszczonej mechanicznie z tkanek miękkich (mięśni i szpiku) kości. Obróbkę przeprowadzono w całości na jednym stanowisku frezerskim (Rys. 6.5) tak, aby zminimalizować czas trwania tego procesu, a zatem ograniczyć wysychanie tkanki kostnej, a co za tym idzie zmianę jej właściwości fizycznych.



Rys. 6.6 Rozciągacz wykonany z PA 2200. Wykonanie na podstawie pracy magisterskiej [99] (opracowanie własne).

Tak ukształtowaną próbkę poddano wstępnej próbie rozciągania w specjalnie zaprojektowanym przyrządzie wykonanym z tworzywa PA 2200 i stali (Rys. 6.6). W przyrządzie rozciągającym górna część próbki umieszczona została w metalowym uchwycie, w którym znajduje się pionowy otwór z gwintem wewnętrznym. W otwór ten wkręcona jest śruba M4x0,7 opierająca się łbem o górną ścianę rozciągacza. Kolejne obroty śruby powodują przesunięcie się jej w głąb otworu, a co za tym idzie przyciągnięcie metalowego uchwytu do rozciągacza i rozciągnięcie próbki kostnej. Każdy pełny obrót śruby to zgodnie z jej skokiem 0,7 mm rozciągnięcia próbki. Celem wstępnej próby było sprawdzenie wytrzymałości próbki na rozciąganie oraz określenie czy jej pęknięcie nastąpi w założonym miejscu – przewężeniu.

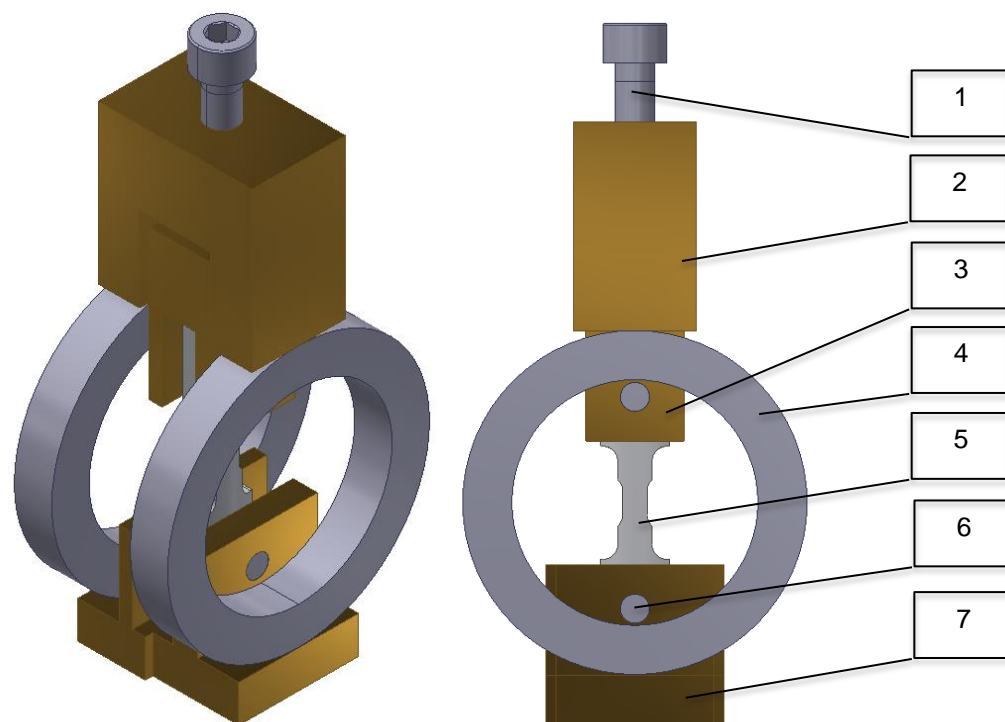
Podczas próbnego rozciągania, próbki pękały po ok 1,5 obrotu śruby w miejscu ich mocowania w przyrządzie, a zatem nie w przewidywanej lokalizacji. Rozciągacz okazał się być zbyt sztywny w stosunku do badanej próbki. Kształt urządzenia również musiał zostać skorygowany ze względu na większe niż zakładano zaokrąglenie powierzchni próbki kostnej. Podczas testów pękanie kości obserwowane było jedynie wizualnie, nie prowadzono badań na mikrotomografii to jest nie obserwowano zmian w mikrostrukturze jak było to wykonywane w końcowej wersji eksperymentu, ani w tomografii, którego skok to aż 1mm, co jest wartością większą niż przemieszczenia otrzymywane podczas pokręcania śrubą o 0-1,5 jej obrotu.



Rys. 6.7 Kształt próbki kostnej do badań wytrzymałościowych i mikrotomografii (opracowanie własne).

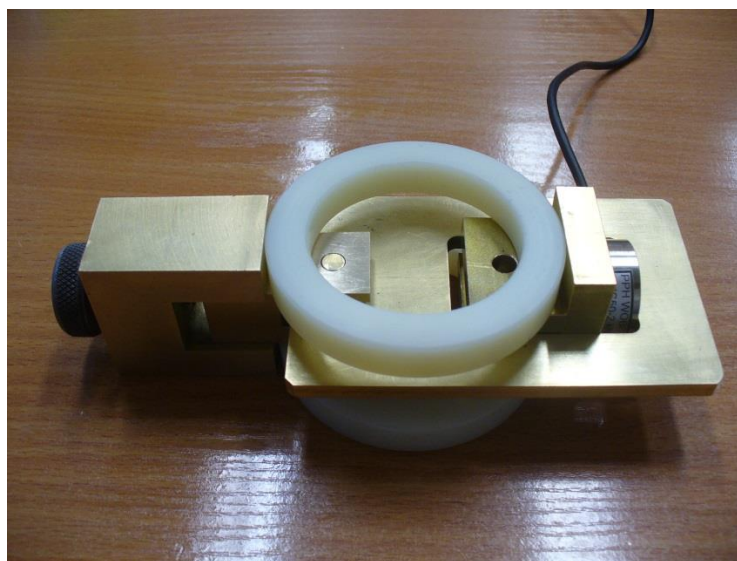
Aby spowodować pękanie w miejscu przewężenia skorygowano jej kształt zmniejszając pole przekroju na jej środku zgodnie z Rys. 6.7, co spowodowało prawidłowe z założeniami zachowanie próbki w kolejnych próbach rozciągania.

Pękanie próbek po niespełna dwóch obrotach śruby wymusiło zmianę koncepcji rozciągacza na bardziej elastyczny, co pozwala na bardziej precyzyjne pomiary. Rolę sprężyny = korpusu urządzenia stanowią dwa wykonane z poliamidu pierścienie umieszczone symetrycznie po bokach rozciągacza (Rys. 6.8). Koncepcja samego procesu rozciągania pozostała bez zmian. W obu przypadkach kość utrzymywana była w zadanym położeniu przez stalowe trzpienie o średnicy 5 mm. Wyeliminowało to wpływ elastyczności kleju na wynik pomiaru średnic. Średnica trzpienia dobrana została eksperymentalnie w kilku próbach, zbyt mała podczas rozciągania przecinała kość, zbyt duża osłabiała górną część próbki.

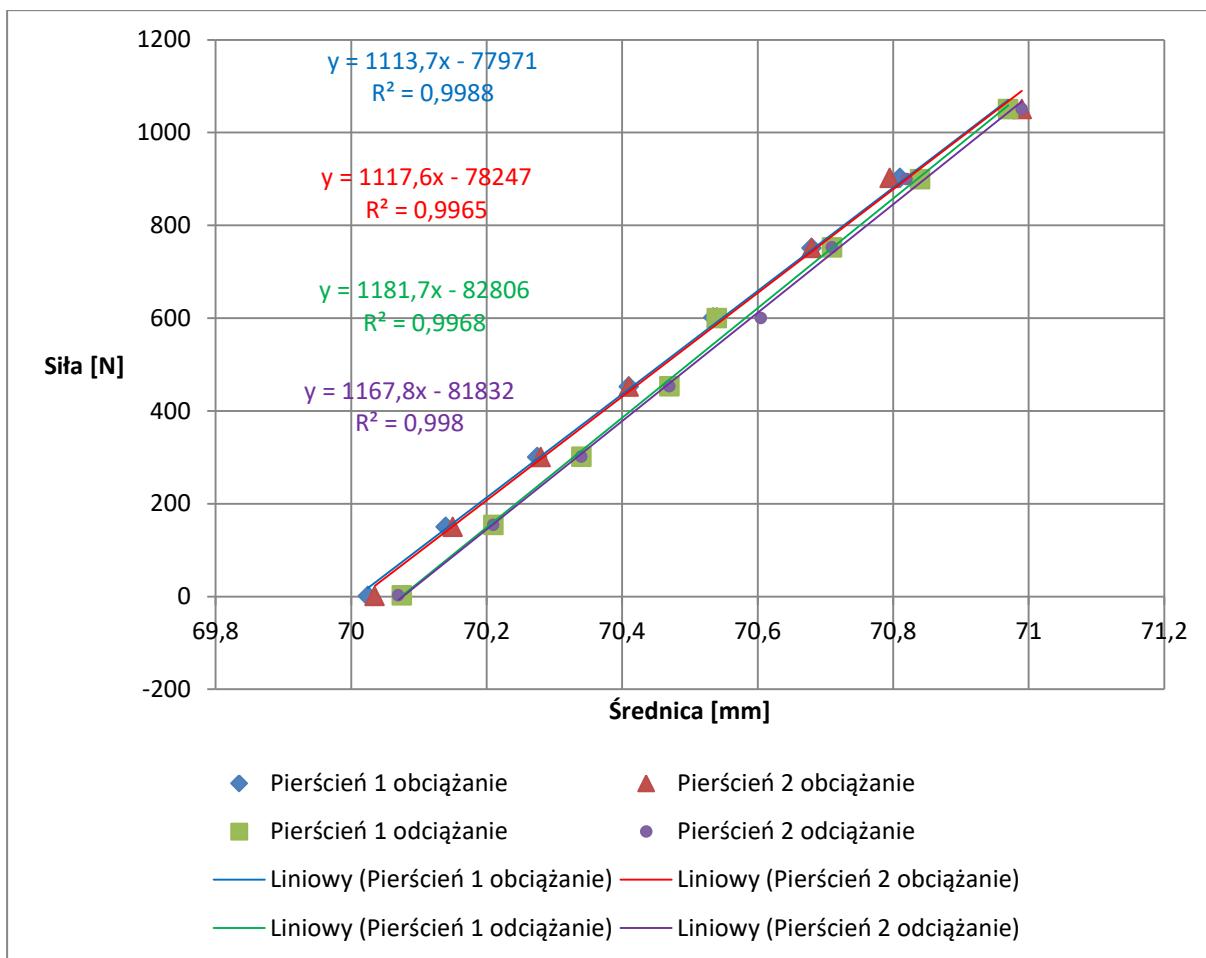


Rys. 6.8 Rozciągacz kości. 1 – śruba napinająca, 2 – nakrętka górna, 3 – uchwyt górny, 4 – pierścień poliamidowy(sprężysty), 5 – próbka kostna, 6 – trzpień podtrzymujący kość, 7 – uchwyt dolny (podstawa) (opracowanie własne).

Próby wstępnego rozciągania w nowej wersji przyrządu poprzedziło jego wzorcowanie. Oba pierścienie umieszczone w rozciągaczu zostały obciążone siłą w przedziale od 1 do 1050 N poprzez napinanie urządzenia śrubą. W tym czasie rolę kości pełniła mosiężna blaszka, pomiar siły wykonano czujnikiem piezoelektrycznym (Rys. 6.9), a pomiar odkształcenia pierścieni suwmiarką elektroniczną.



Rys. 6.9 Wzorcowanie rozciągacza z pierścieniami poliamidowymi (opracowanie własne).



Rys. 6.10 Wzorcowanie rozciągacza (opracowanie własne)

Pierścienie poliamidowe zgodnie z modelem powinny posiadać średnicę zewnętrzną 70 mm, w obu przypadkach została ona zachowana z dokładnością do 0,01 mm, co jest wynikiem zadowalającym. Przeprowadzona próba obciążania i odciążania wykonana w 3 niezależnych próbach i przy zachowaniu odstępu 5 minut pomiędzy kolejnymi pomiarami wielkości pozwoliła stwierdzić, iż stabilność wymiarów dla tego rozwiązania konstrukcyjnego jest zadowalająca (Rys. 6.10).

## 6.2. Eksperyment rozciągania próbek kostnych

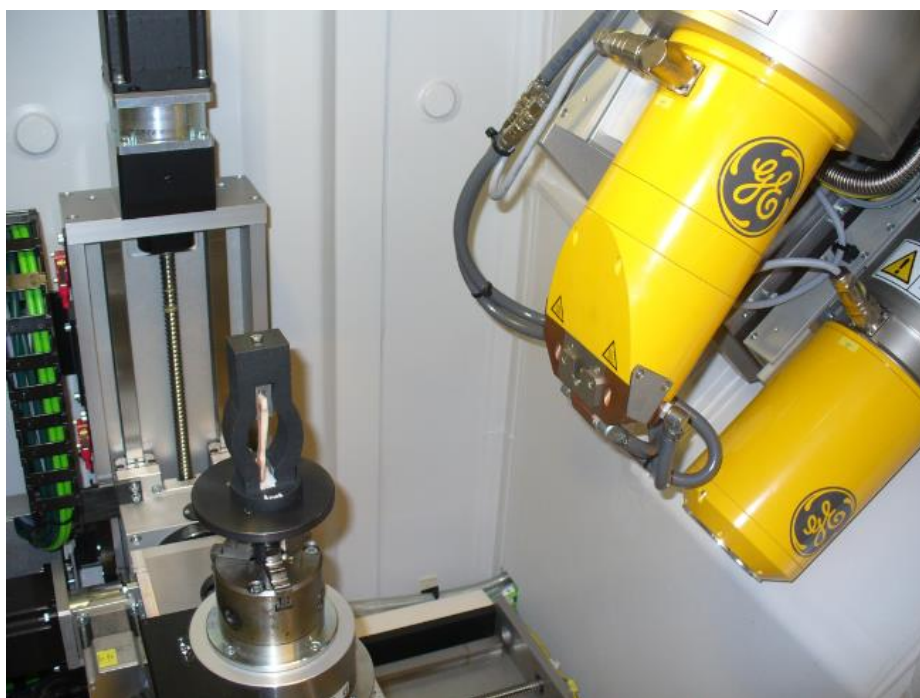
Próbki kostne wykonane zostały z 2 kości udowych świńskich zgodnie z omówioną w poprzednich rozdziałach procedurą. Kości oczyszczono z tkanek miękkich i obrobiono mechanicznie do kształtu zgodnego z Rys. 6.7. Następnie poddano skanowaniu w tomografii klinicznej w Klinice Weterynaryjnej VERUM w Grudziądzu w tomografii Siemens Somatom Emotion Rys. 6.11. Grubość plastra skanu oraz wielkość boku piksela to 1 mm.

Tomografia poszczególnych próbek została zapisana w formacie dicom, który pozwala na odczytywanie gęstości radiologicznej poszczególnych pikseli obrazu. Dzięki wykonaniu tego etapu uzyskano dane materiałowe badanych próbek w rozdzielczości zgodnej z rozdzielczością obrazu.

Następnie próbki poddano skanowaniu w mikrotomografie rentgenowskim Phoenix v|tome|x s (Rys. 6.12), którego rozdzielczość to 1  $\mu\text{m}$ .



Rys. 6.11 Badanie próbek w tomografie klinicznym (opracowanie własne).



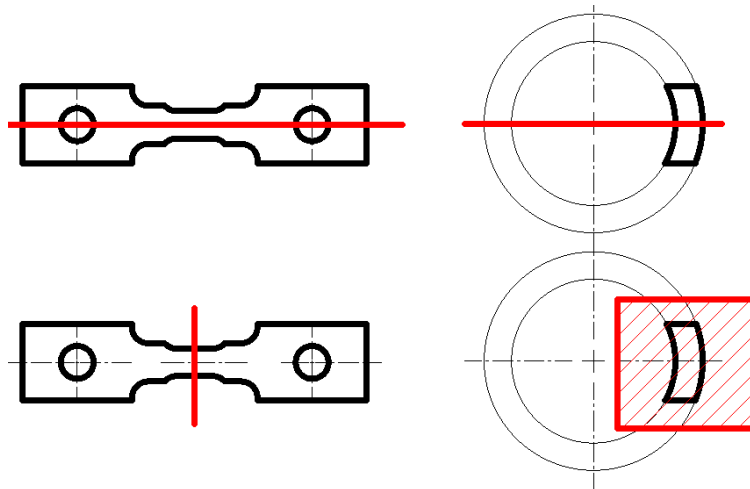
Rys. 6.12 Mikrotomograf rentgenowski Phoenix v|tome|x s. Zdjęcie górne źródło: <https://www.ita-polska.com.pl/product/584/phoenix-v-tome-x-s> (stan 13.09.2021). Zdjęcie dolne próbka kostna unieruchomiona w uchwycie rozciągającym w komorze mikrotomografu (opracowanie własne).

Wykonano 4 kolejne skany próbek. Z zerowym obciążeniem i rozciągnięte siłami kolejno 300 N, 500 N i 600 N. Próba rozciągania 500 N została wykonana ze względu na obawę o zniszczenie próbek przy obciążeniu siłą 600 N. Zniszczenie to nie nastąpiło, a obie próby zostały pomyślnie przeprowadzone.

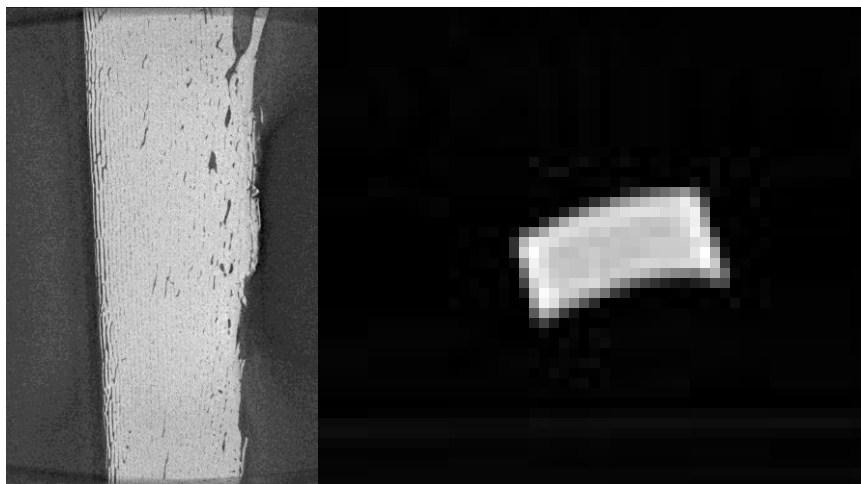
Kształt próbek pozwolił na jednoznaczne określenie obszaru pomiarowego zarówno na zdjęciach tomograficznych o małej jak i dużej rozdzielczości.



Obrazy próbek w obu tomografach wykonywane były w dwóch różnych płaszczyznach. W tomografie klinicznym prostopadle do osi głównej kości, a w mikrotomografie wzdłuż niej Rys. 6.13 Rys. 6.14



Rys. 6.13 Sposób ustawienia płaszczyzny skanowania względem próbki. Rysunek górny mikrotomograf, rysunek dolny tomograf kliniczny (opracowanie własne).

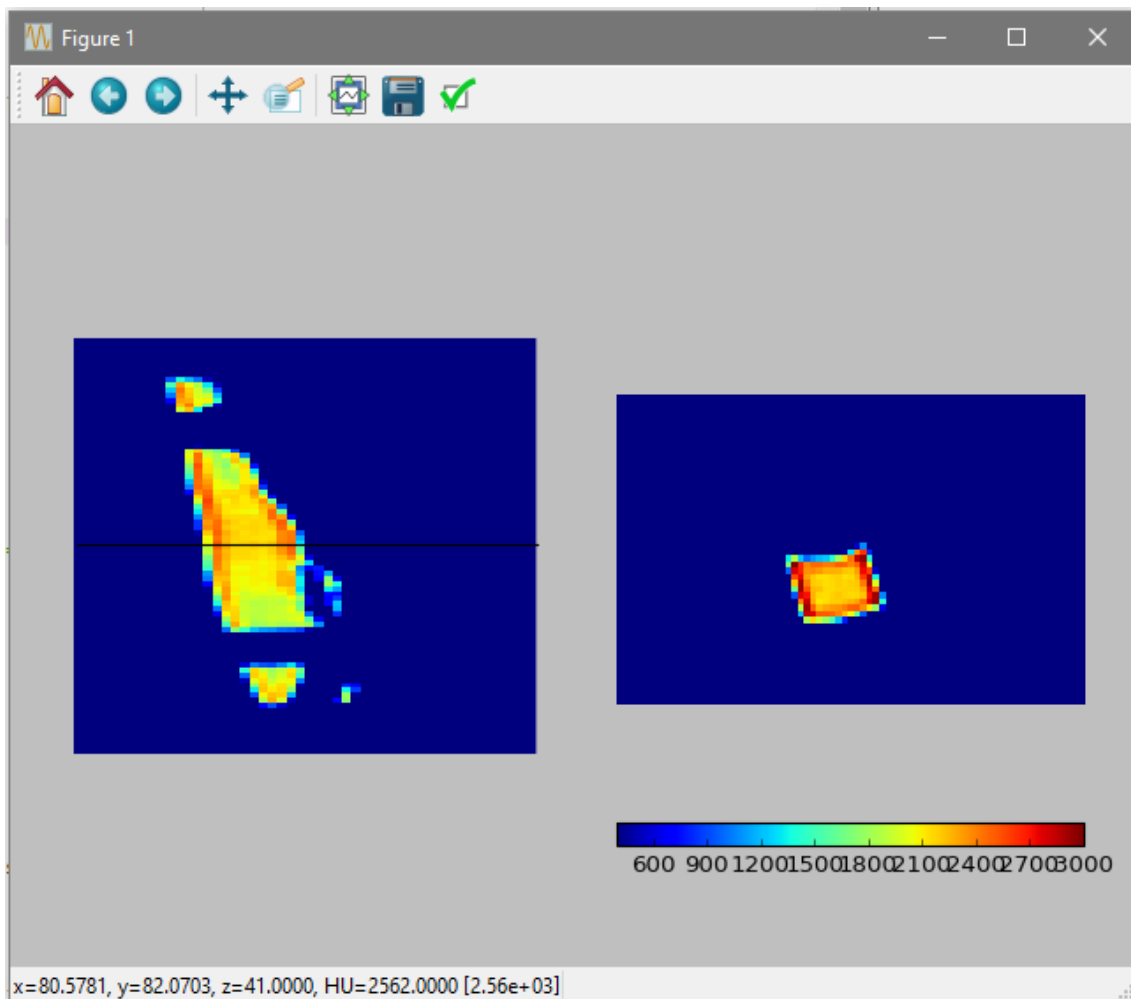


Rys. 6.14 Przykładowe obrazy, wyniki skanowania tej samej próbki kostnej. Po lewej obraz z mikrotomografu w obszarze pomiarowym, po prawej wynik skanowania tomografem klinicznym (opracowanie własne).

### 6.3. Metoda opracowana wyników badań eksperymentalnych

Dane otrzymane z obrazowania tomograficznego posłużyły do budowy dwóch wirtualnych modeli w dwóch oddzielnych skryptach napisanych w języku Python.

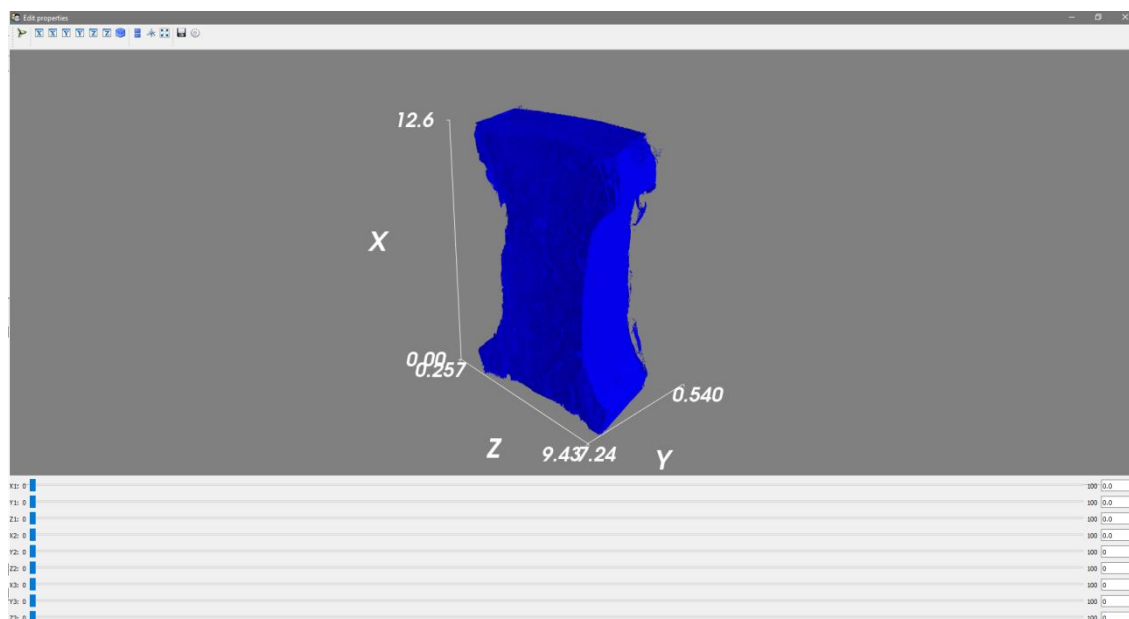
Skrypt dla obrazów uzyskanych za pomocą tomografu klinicznego pozwala na odczyt danych materiałowych w dowolnym miejscu modelu (Rys. 6.15). Obraz interfejsu składa się z dwóch widoków obrazu tomograficznego w przekroju wzdłużnym i poprzecznym próbki. Poszczególne piksele obrazu swoim kolorem oddają zagęszczenie kości w danym miejscu. Za pomocą kursora umieszczonego w wybranym miejscu odczytać można współrzędne oraz wartość gęstości radiologicznej wyrażonej w jednostkach Hounsfielda (HU). Dane te wyświetlane są w lewym dolnym rogu okna.



Rys. 6.15 Widok interfejsu programu do odczytywania danych materiałowych kości ze zdjęć tomografii komputerowej (opracowanie własne).

Osobny skrypt, również napisany w języku Python posłużył do obróbki danych uzyskanych z mikrotomografii. Celem nie było pobranie danych materiałowych, a jak najdokładniejsze odwzorowanie kształtu badanej próbki (Rys. 6.16).

Dzięki ruchomym wskaźnikom graficznym możliwe było określenie przemieszczeń brzegów próbki kostnej w kolejnych etapach jej rozciągania. Pomiar przemieszczenia mierzony na obrazach tomograficznych niesie ze sobą niedokładność pomiarową związaną jedynie z brakiem jednoznacznie określonego punktu pomiarowego, współrzędne jego rzeczywistego położenia mogą zmieniać się o kilka mikrometrów. Użycie podczas eksperymentu zewnętrznych wskaźników przemieszczeń wiązałyby się jednak z potrzebą zamocowania ich na powierzchni próbki, która jest strukturą chropowatą, co wymagałoby użycia substancji klejącej wnikałej w pory tkanki, która zmieniłaby jej właściwości mechaniczne.

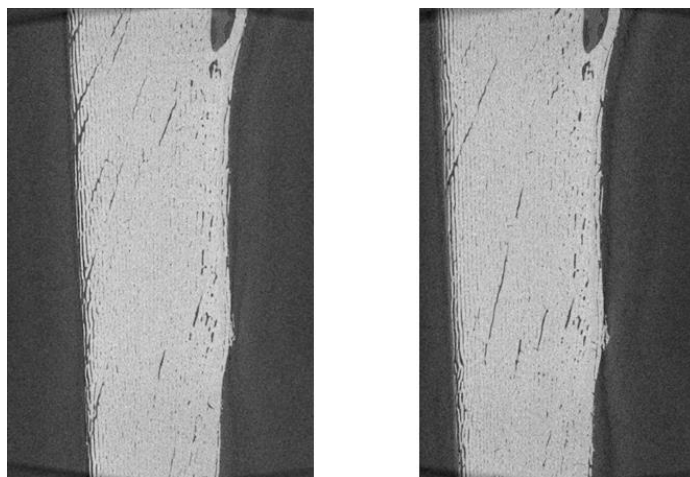


Rys. 6.16 Widok interfejsu programu do odczytywania danych materiałowych kości ze zdjęć tomografii komputerowej (opracowanie własne).

#### 6.4. Opracowanie wyników eksperymentu

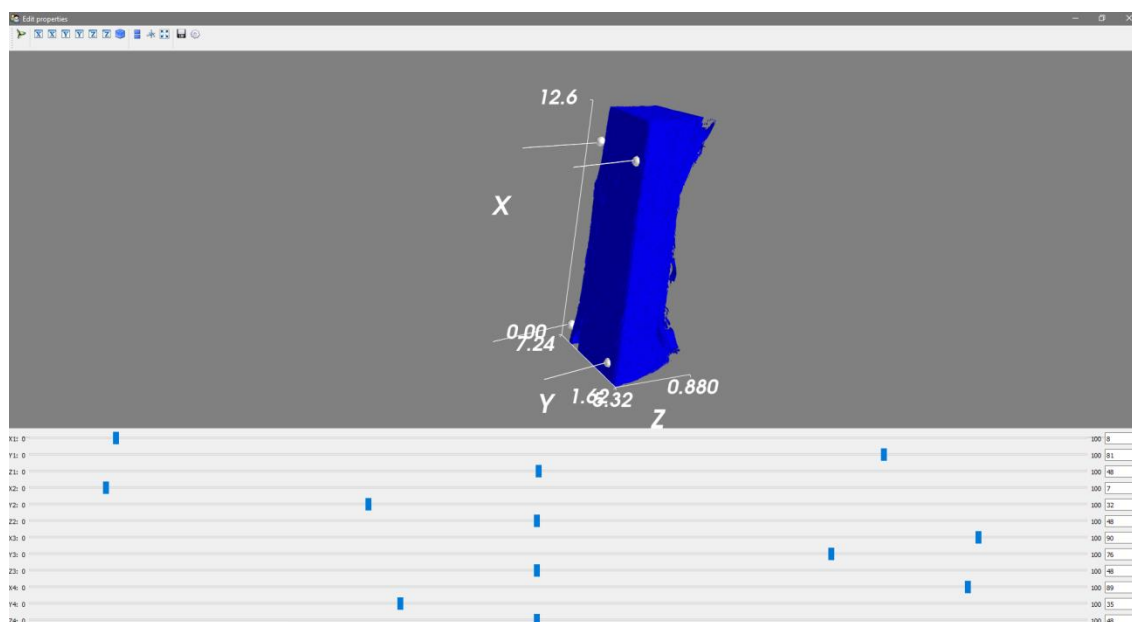
Dane uzyskane z przeprowadzonego eksperymentu są obrazami tomograficznymi zapisanymi w formacie dicom, czyli danymi dwuwymiarowymi, podczas, gdy rozciągana próbka kostna jest modelem przestrzennym. Aby jednoznacznie porównać wyniki eksperymentu z wynikami symulacji niezbędne jest posługiwanie się tym samym typem modelu, w tym wypadku dwuwymiarowym. Obliczenia porównane są zatem w jednym przekroju, w tym wypadku zlokalizowany w środku grubości próbki równoległe do jej osi długiej i promieniowo względem osi głównej kości (płaszczyzna XY Rys. 6.16). Znając dokładne wymiary próbki wybranie środkowego przekroju spośród zdjęć mikrotomograficznych jest zadaniem prostym. Należy jednak pamiętać, że próbka w trakcie badania zmieniała swoje położenie w urządzeniu, co wpłynęło na zmianę położenia współrzędnych globalnych modelu.

Porównanie wyników skanów TK pozwoliło na wyodrębnienie tego samego przekroju próbki kostnej przed i w trakcie maksymalnego obciążenia (Rys. 6.17).



Rys. 6.17 Przekrój przez badaną próbkę kostną, obraz mikrotomografii. Po lewej nieobciążony, po prawej rozciągany siłą 600N (opracowanie własne).

Aby obserwować zmiany zachodzące w próbce wygenerowano dwa nowe wirtualne modele. Tym razem jednak, model stanowi część próbki ograniczoną badanym przekrojem. Dodatkowo wyznaczone są na nim linie znaczników ograniczające obszar pomiarowy (Rys. 6.18). Linie znaczników na wirtualnym modelu odpowiadają linii wyznaczonej przez krawędzie obszaru pomiarowego. Zmiany odległości pomiędzy znacznikami to zmiany długości tego obszaru.

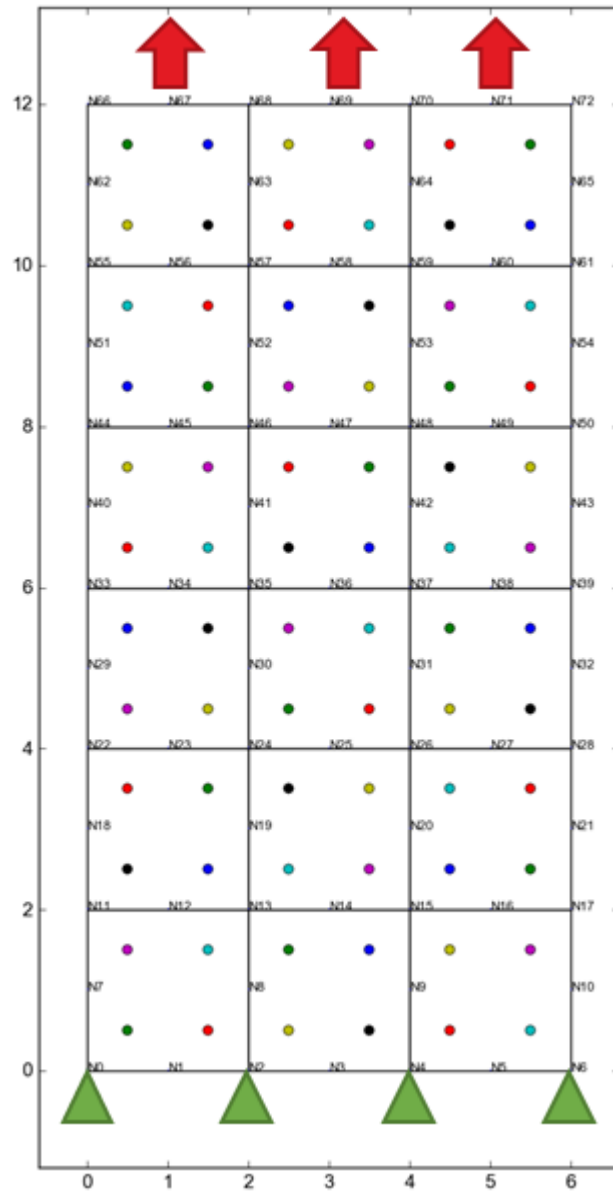


Rys. 6.18 Model próbki kostnej obciążonej siłą 600 N z naniesionymi znacznikami pola badawczego (opracowanie własne).

Górną i dolną część obszaru pomiarowego dzięki znacznikom można traktować, jako płaszczyznę. Odległość pomiędzy nimi stanowi szukaną wartość przyrostu długości spowodowanej rozciąganiem. W przypadku obciążenia siłą 600 N obszar pomiarowy rozciągnął się o 0,12 mm, co przy początkowej długości obszaru równej 12 mm stanowi 1%.

#### **6.5. Symulacja obciążenia z wykorzystaniem danych materiałowych badanej próbki kostnej.**

Dzięki zastosowaniu podwójnego skanowania próbek, za pomocą tomografu klinicznego (wyskalowanym w jednostkach Hounsfielda) oraz mikrotomografu, możliwe jest sprawdzenie dokładnych danych materiałowych przekroju, którego wynik rozciągania uważamy za końcowy rezultat eksperymentu i wykorzystanie tych danych do zbudowania wirtualnego modelu odwzorowującego rzeczywisty eksperyment. Wybrany przekrój, to obszar badawczy (przewężenie próbki) o wymiarach 12 x 6 mm, który podzielono siatką 6 x 3 elementy skończone, umieszczając narożne węzły elementów w pikselach obrazu, ale nie nakładając ich na siebie (każdy piksel został wykorzystany tylko raz, każdy węzeł ma swoje indywidualne dane materiałowe, zgodne z wartością jednostek Hounsfielda jednego piksela obrazu). Dane materiałowe pobrane z obrazu zostały przeliczone na moduł Younga za pomocą wzorów (31) i (32) (Tab. 15). Korzystając z opisanych powyżej skryptów MES python wykonano symulację rozciągania próbki wirtualnej. Kształt i dane materiałowe odpowiadały rzeczywistemu rozciąganiem przekrojowi. Symulację przeprowadzono dla dwóch wersji elementu skończonego, gdzie moduł Younga miał inną wartość w każdym punkcie Gaussa (4 punkty w obszarze jednego elementu skończonego Rys. 6.19), oraz gdzie był on wartością stałą w obszarze pojedynczego elementu skończonego, przyjmował on wówczas wartość średniej arytmetycznej z 4 wartości odczytanych ze skanu TK. Takie podejście pozwoliło na podział próbki siatką o takim samym rozmiarze w obu wariantach obliczeń. Wartości modułów Younga dla poszczególnych symulacji przedstawiono w Tab. 15 (zmienny moduł Younga) i Tab. 16 (stały moduł Younga).



Rys. 6.19 Schemat wirtualnej próbki z zaznaczonymi punktami Gaussa (opracowanie własne).

Tab. 15 Wartości Modułu Younga dla poszczególnych punktów Gaussa

3648,6	2994,1	2908,9	2918,2	3751,8	3481,5
3604,3	3491,4	3073,1	3100,4	3668,9	3701,9
3332,1	3666,3	3067,2	3075,5	3567,8	3760,8
3536,4	3245,7	3164,9	3121,9	3746,7	3414,5
3310,1	3634,6	3203,4	3136,2	3255,4	3852,3
3508,9	3244,5	3147	3181,7	3799,3	3079
3144,6	3287	3193,8	3162,5	2805,2	3755,7
3273,6	3170,9	3123,1	3130,2	3691,8	2571,1
3167,3	3087,3	3121,9	3164,9	2437,6	3648,6
3066	3181,7	3021,1	3051,8	3601,8	3614,4
3051,8	3124,2	2953,1	2892,6	3436,8	3547,7
2976,5	2896,1	2897,3	2944,9	3400,9	3144,6

Tab. 16 Uśrednione wartości Modułu Younga dla poszczególnych elementów

3434,6	3000,1	3651
3445,1	3107,4	3622,4
3424,5	3167,1	3496,5
3219	3152,4	3205,9
3125,6	3089,9	3325,6
3012,2	2922	3382,5

Wirtualną próbkę poddano symulacji rozciągania, o parametrach zgodnych z tymi zastosowanymi podczas eksperymentu. Porównywanym wynikiem symulacji były przemieszczenia węzłów górnej krawędzi próbki. W modelu próbki, górna krawędź zbudowana jest z trzech ośmiowęzłowych elementów skończonych. Zatem sama końcowa krawędź posiada 7 węzłów (N66-N72) (Rys. 6.19), których przemieszczenia zostały obliczone.

Wyniki przemieszczeń w mm dla węzłów górnej krawędzi próbki przy zastosowaniu zmiennego modułu Younga i zaproponowanego sposobu obliczeń przedstawiono w Tab. 17 (Rys. 6.20), zmiennego modułu Younga i skryptu ANSYS Tab. 17 (Rys. 6.21), a przy zastosowaniu stałego modułu dla pojedynczego elementu we własnym skrypcie Tab. 17 i w programie ANSYS Tab. 17.

Tab. 17 Przemieszczenia wzdłużne [mm] węzłów górnej krawędzi próbki

	N66	N67	N68	N69	N70	N71	N72
Model własny ze zmienną wartością modułu Younga w elementach	0,113	0,088	0,091	0,087	0,09	0,086	0,107
Model ANSYS ze zmienną wartością modułu Younga w elementach	0,111	0,091	0,091	0,087	0,088	0,085	0,1
Model własny ze stałą wartością modułu Younga w elementach	0,109	0,086	0,089	0,085	0,087	0,084	0,104
Model ANSYS ze stałą wartością modułu Younga w elementach	0,099	0,078	0,08	0,076	0,08	0,078	0,099
Model ANSYS, jedna stała wartość modułu Younga	0,111	0,088	0,09	0,085	0,088	0,088	0,111

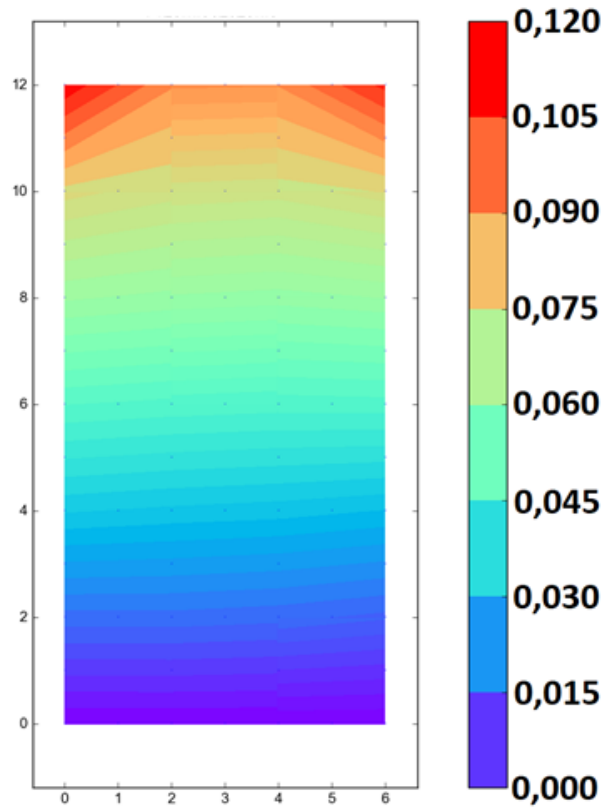
Wartości przemieszczeń dla poszczególnych węzłów porównano z wartością zmierzoną wyliczając ich średnią arytmetyczną, która wynosi odpowiednio 0,095 mm dla zmiennego E we własnym skrypcie i 0,093 mm w skrypcie ANSYS oraz 0,092 mm dla stałego E we własnym skrypcie i 0,084 w ANSYS. Wartości stanowią odpowiednio 79%, 78%, 77% i 70% wyniku eksperymentalnego.

Pomiaru przemieszczenia w fizycznym eksperymencie dokonano oznaczając punkty zlokalizowane na brzegach obszaru pomiarowego. Wykonując analogiczną symulację i do wyznaczenia średniej wykorzystując wartości obliczone tylko dla dwóch węzłów usytuowanych na skrajach obszaru pomiarowego N66 i N72, otrzymujemy wyniki odpowiednio 0,110 mm, 0,106 mm, 0,107 mm i 0,099 mm, co stanowi 92%, 88%, 89% i 83% wyniku eksperymentalnego (eksperyment fizyczny).

Wyniki te porównano z obliczeniami wykonanymi dla jednej wartości modułu Younga. Przyjmując stały moduł Younga dla całej próbki i wyliczając go, jako średnią arytmetyczną z wartości odczytanych z TK rzeczywistej próbki tj. 3265,8 MPa (Rys. 6.22) (Tab. 17) otrzymano średnią wartość przemieszczenia wszystkich 7 skrajnych węzłów równą 0,094 mm, co stanowi 79% wartości wyniku eksperymentalnego. Porównując wynik przemieszczenia do średniej z dwóch skrajnych węzłów próbki N66 i N72 otrzymujemy wynik 0,111 mm, co stanowi 92,5% wyniku eksperymentalnego.

Tak spójne wyniki wynikają z niewielkich wymiarów próbki, a co za tym idzie małej zmienności właściwości wytrzymałościowych.

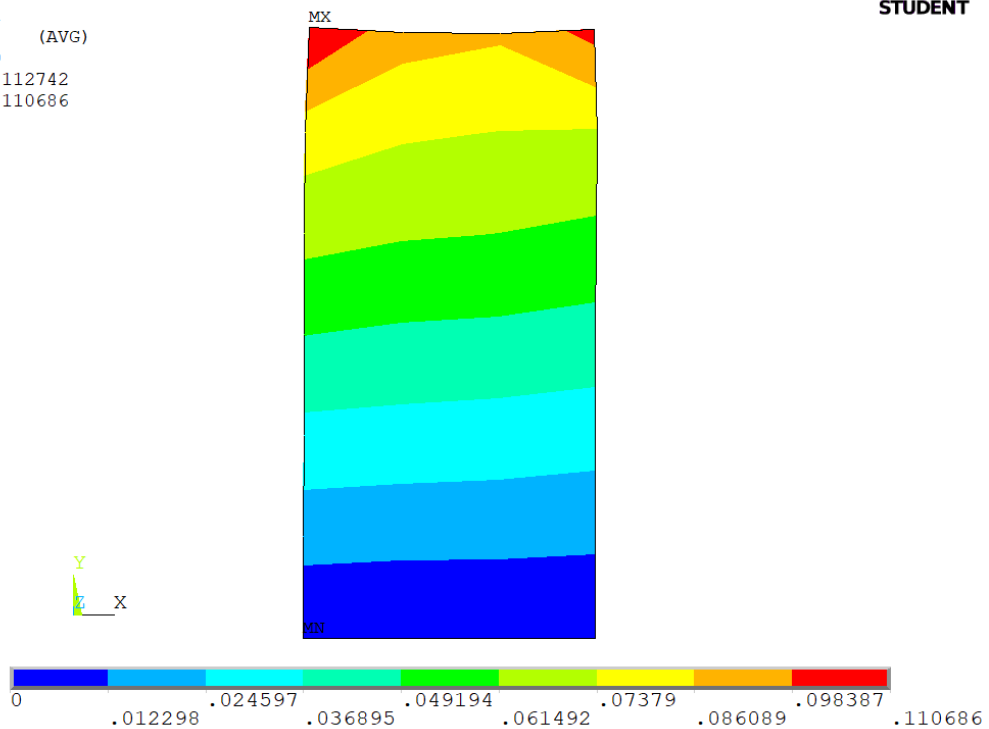




Rys. 6.20 Przemieszczenia wzdłuż osi pionowej [mm]. Symulacja rozciągania próbki z modułem Younga zgodnym z rzeczywistą próbką. Model własny (opracowanie własne).

NODAL SOLUTION  
 SUB =1  
 TIME=1  
 UY (AVG)  
 RSYS=0  
 DMX =.112742  
 SMX =.110686

**Ansys**  
 2023 R1  
 STUDENT

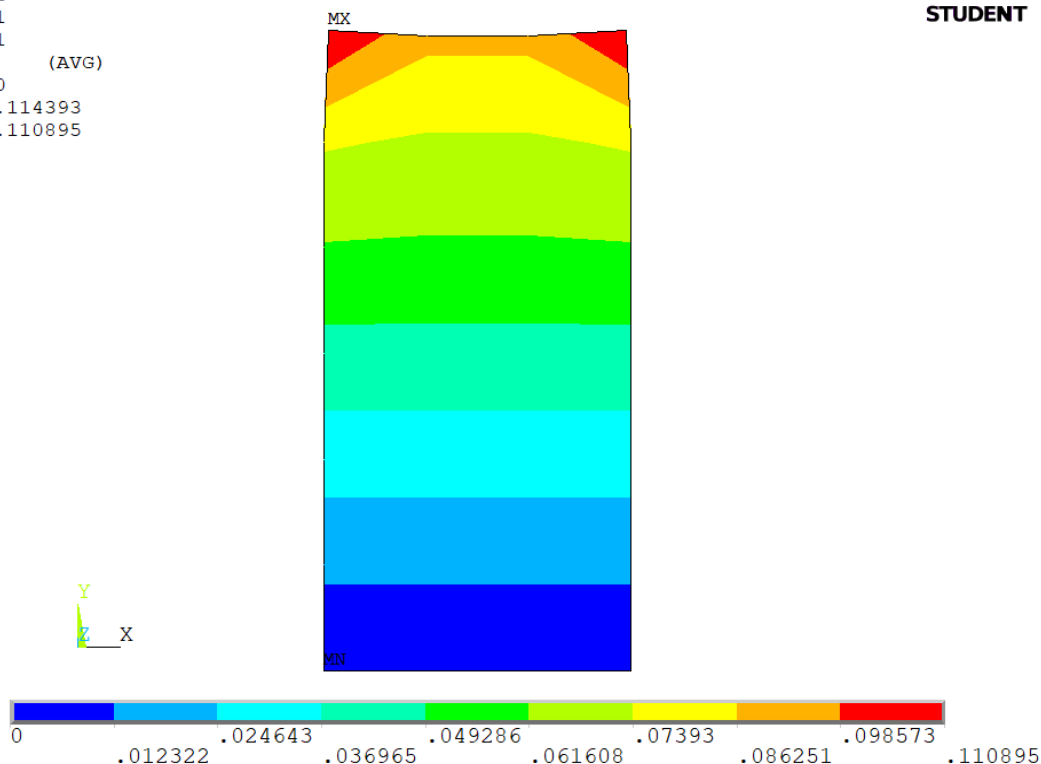


Rys. 6.21 Przemieszczenia wzdłuż osi pionowej [mm]. Symulacja rozciągania próbki z modułem Younga zgodnym z rzeczywistą próbką. Element plane 183, ANSYS (opracowanie własne).

NODAL SOLUTION

STEP=1  
SUB =1  
TIME=1  
UY (AVG)  
RSYS=0  
DMX =.114393  
SMX =.110895

**Ansys**  
2023 R1  
STUDENT



Rys. 6.22 Przemieszczenia wzdłuż osi pionowej [mm]. Symulacja rozciągania próbki ze stałym modułem Younga w całej objętości. Element plane 183, ANSYS, (opracowanie własne).

Opisanego powyżej porównania eksperymentu z dwoma środowiskami obliczeniowymi (ANSYS i Python) nie można odnieść do wyników symulacji naprężeń, które nie zostały pomierzone eksperymentalnie. Poszczególne wyniki eksperymentu numerycznego porównano poniżej.

Naprężenia wyznaczone wzdłuż osi pionowej zgodnej z kierunkiem rozciągania próbki wyliczono dla 5 wariantów rozkładu modułu Younga, w tym zgodnie z zaproponowaną metodą i obliczeniami we własnym skrypcie (Rys. 6.23), obliczeniami w środowisku ANSYS (Rys. 6.24), ze stałym modułem dla poszczególnych elementów również we własnym skrypcie (Rys. 6.25) i osobno za pomocą programu ANSYS (Rys. 6.26) oraz stałym modułem o wartości 3265,8 MPa (średnia arytmetyczna z wartości odczytanych z TK rzeczywistej próbki) obliczenia w środowisku ANSYS (Rys. 6.27).

Wartości naprężeń przedstawione w tej samej kolejności umieszczone są w Tab. 18. Podwójne wartości naprężeń w węzłach 68 i 70 to obliczenia wykonane dla elementu po lewej (wartość powyżej) oraz po prawej (wartość poniżej) stronie danego węzła.

Pomiędzy poszczególnymi programami, ale w obrębie tej samej metody wartości naprężenia różnią się od siebie o znaczące wartości sięgające prawie 21%. Rozkład naprężeń jak i rozmieszczenie skrajnych wartości jest bardzo podobne.

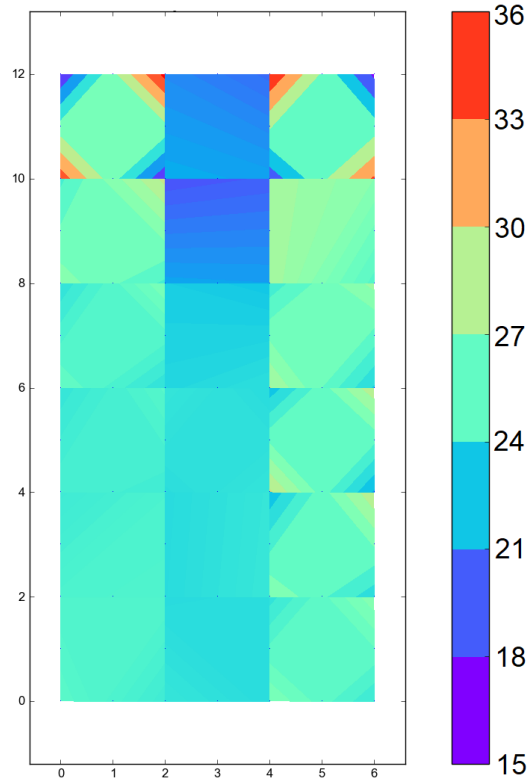
Różnice pomiędzy naprężeniami wyliczonymi dla tego samego węzła za pomocą własnego skryptu przy zmiennym module Younga sięgają 16,5%, przy zmiennym

24,8%. Analogicznie w obliczeniach wykonanych programem ANSYS różnice to odpowiednio 70,9% i 190,9%. Przedstawione wartości są potwierdzeniem dla stawianej w tej pracy tezy o ziarnistości wyniku spowodowanym skokowymi zmianami modułu Younga. Dla najkorzystniejszego przypadku w obu programach i metodach obliczeniowych tj. zmiennego modułu Younga, w zaproponowanym algorytmie obliczeniowym wartość skoku naprężeń zmniejsza się prawie sześciokrotnie.

Obliczenia dla stałego, średniego modułu Younga w objętości całej próbki i dla stałego modułu Younga w pojedynczym elemencie przeprowadzone w programie ANSYS przedstawiają dokładnie takie same wyniki. Niestety nie istnieje możliwość prześledzenia algorytmu obliczeniowego tego programu komercyjnego, w celu poznania przyczyny takiego wyniku.

Tab. 18 Naprężenia normalne wzdłuż pionowej osi próbki [MPa] węzłów górnej krawędzi próbki

	<b>N66</b>	<b>N68</b>	<b>N70</b>	<b>N72</b>
Model własny ze zmienną wartością modułu Younga w elementach	35,73	17,74 19,89	20,7 17,27	35,81
Model ANSYS ze zmienną wartością modułu Younga w elementach	43,12	11,27 19,26	18,83 11,98	42,67
Model własny ze stałą wartością modułu Younga w elementach	35,95	16,77 20,93	20,5 17,14	35,84
Model ANSYS ze stałą wartością modułu Younga w elementach	45,15	7,27 21,15	21,15 7,27	45,15
Model ANSYS, jedna stała wartość modułu Younga	45,15	7,27 21,15	21,15 7,27	45,15



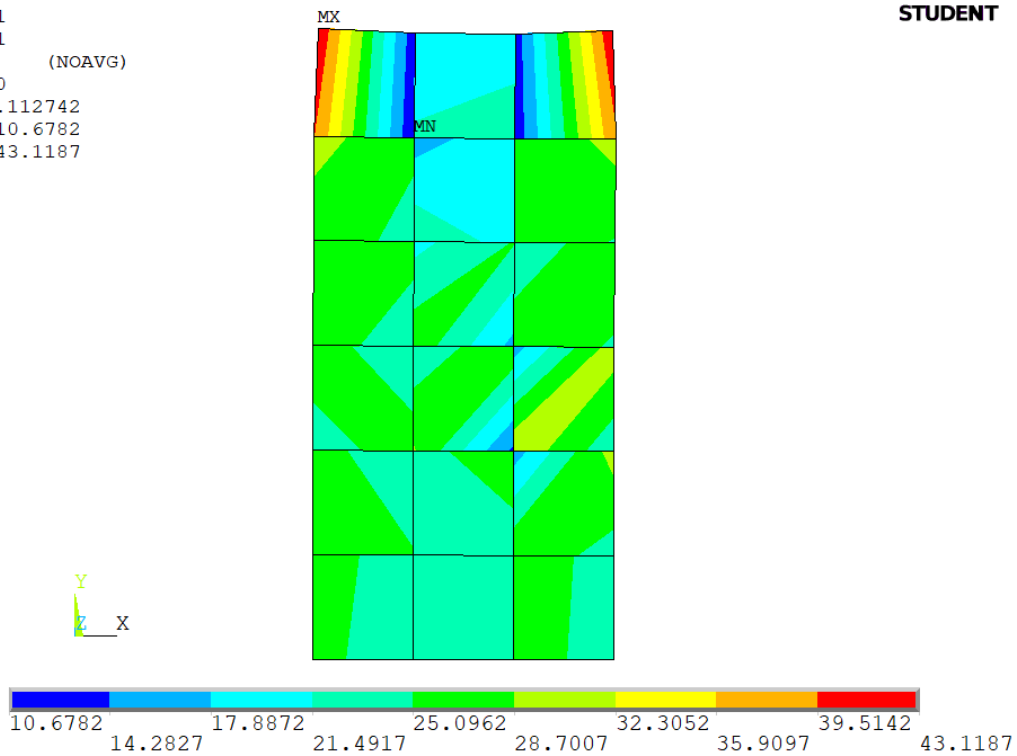
Rys. 6.23 Naprężenia wyznaczone wzdłuż osi pionowej próbki [MPa]. Wyniki symulacji rozciągania próbki ze zmiennym modułem Younga w elementach. Model własny (opracowanie własne).

```

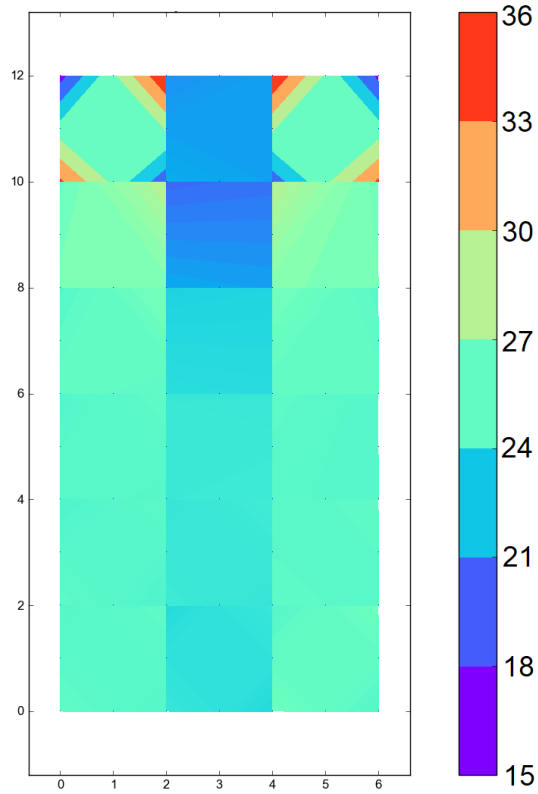
ELEMENT SOLUTION
STEP=1
SUB =1
TIME=1
SY      (NOAVG)
RSYS=0
DMX =.112742
SMN =10.6782
SMX =43.1187

```

**ANSYS**  
2023 R1  
STUDENT



Rys. 6.24 Naprężenia wyznaczone wzdłuż osi pionowej próbki [MPa]. Wyniki symulacji rozciągania próbki ze zmiennym modułem Younga w elementach. Element plane 183 ANSYS (opracowanie własne).



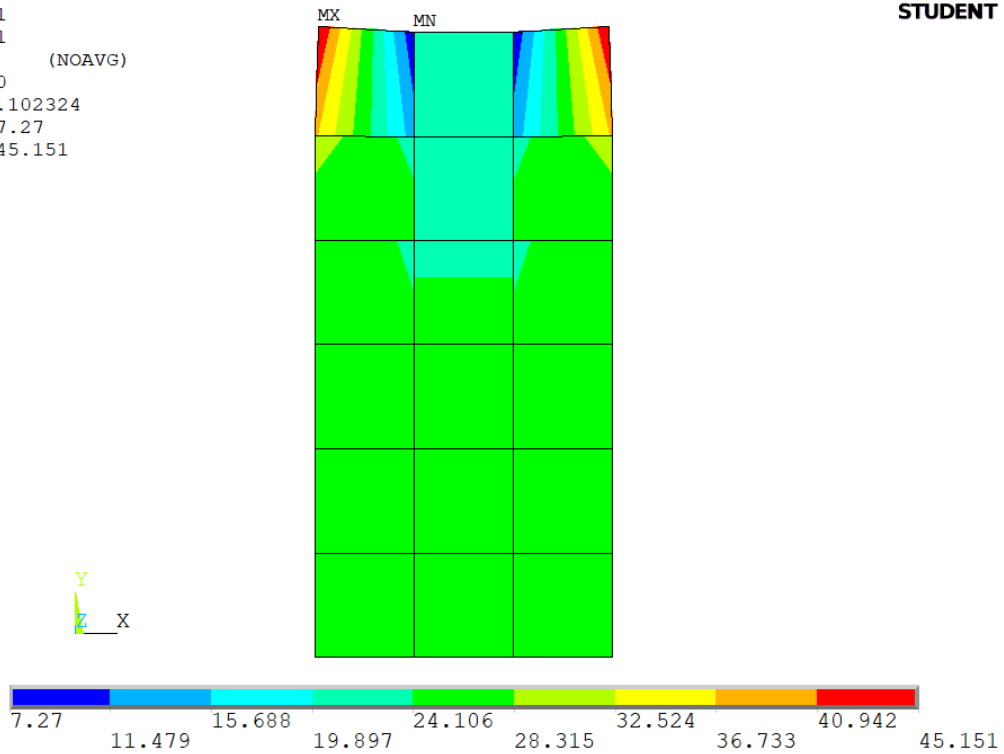
Rys. 6.25 Naprężenia wyznaczone wzdłuż osi pionowej próbki [MPa]. Wyniki symulacji rozciągania próbki ze stałym modułem Younga w elementach. Model własny (opracowanie własne).

```

ELEMENT SOLUTION
STEP=1
SUB =1
TIME=1
SY      (NOAVG)
RSYS=0
DMX = .102324
SMN = 7.27
SMX = 45.151

```

**Ansys**  
2023 R1  
STUDENT

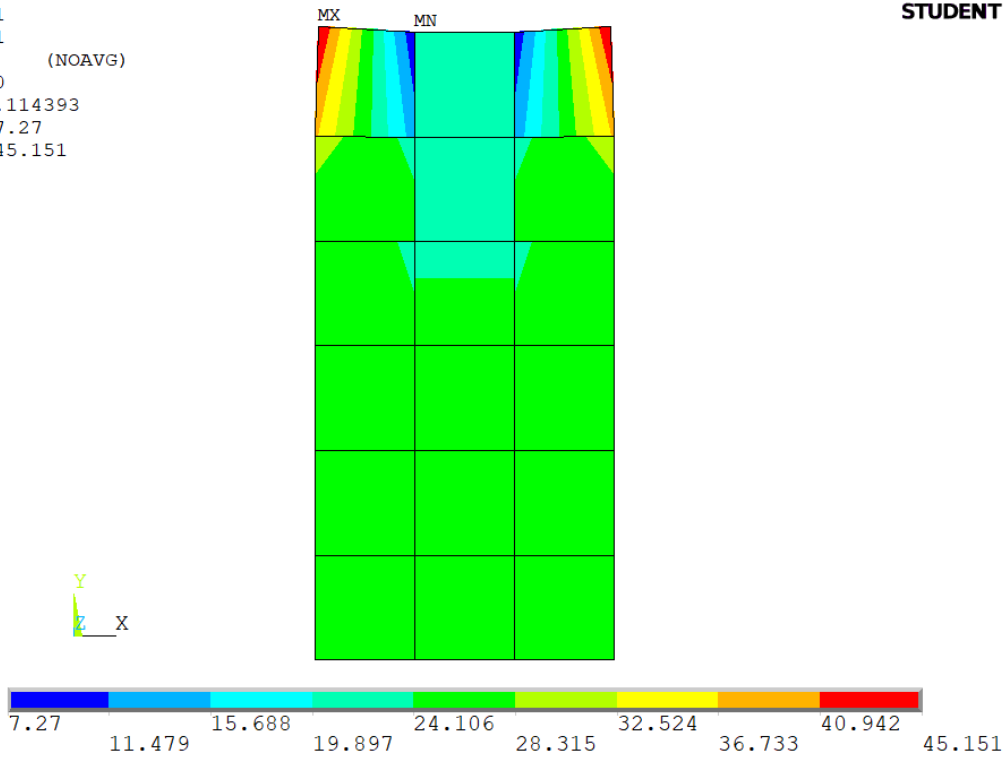


Rys. 6.26 Naprężenia wyznaczone wzdłuż osi pionowej próbki [MPa]. Wyniki symulacji rozciągania próbki ze stałym modułem Younga w elementach. Element plane 183 ANSYS (opracowanie własne).

ELEMENT SOLUTION

STEP=1  
SUB =1  
TIME=1  
SY (NOAVG)  
RSYS=0  
DMX =.114393  
SMN =7.27  
SMX =45.151

**Ansys**  
2023 R1  
STUDENT



Rys. 6.27 Naprężenia wyznaczone wzdłuż osi pionowej próbki [MPa]. Wyniki symulacji rozciągania próbki ze stałym modułem Younga w całej próbce. Element plane 183 ANSYS (opracowanie własne).

## 7. Dyskusja wyników badań i obliczeń

Dane materiałowe pozyskane za pomocą obrazowania posłużyły do zbudowania modelu, który poddany został takim samym obciążeniom jak rzeczywista próbka. Próbka kostna w wykonanych symulacjach i eksperymencie traktowana jest samodzielnie, w dalszych badaniach należy uwzględnić obecność pozostałych tkanek, w tym mięśni [100].

Symulacje przeprowadzono w 3 wariantach:

- ✓ z przyporządkowaniem jednego modułu Younga do jednego elementu skończonego i obliczeniach we własnym skrypcie,
- ✓ z przyporządkowaniem indywidualnego modułu Younga do punktów, których współrzędne pokrywają się ze współrzędnymi punktów Gaussa i obliczeniach we własnym skrypcie
- ✓ z wykorzystaniem funkcji TBDATA w programie ANSYS.

Wirtualną próbkę o wymiarach 6 x 12 mm podzielono siatką elementów 3x6, dzięki czemu zachowano maksymalną rozdzielczość możliwą do uzyskania podczas standardowego badania TK. Uśrednione wyniki przemieszczenia skrajnych górnych węzłów próbek przedstawiono w Tab. 19.

Czas obliczeń przeprowadzonych we własnym skrypcie z wykorzystaniem stałego modułu Younga wynosi 0,469 s, z dodaną zmiennością modułu Younga 0,436 s, a gdy w całej próbce zastosowano jeden moduł Younga 0,428 s. Według Rys. 5.31 błąd energii deformacji dla takiej siatki podziału powinien w przypadku zmiennego modułu Younga być prawie czterokrotnie mniejszy niż dla obliczeń z zastosowaniem stałego modułu.

Tab. 19 Średnia wartości rozciągnięcia skrajnych punktów obszaru pomiarowego pod obciążeniem 600 N.

	Rozciągnięcie obszaru pomiarowego [mm]
Model własny ze stałą wartością modułu Younga w elementach	0,107
Model własny ze zmienną wartością modułu Younga w elementach	0,110
Program ANSYS ze zmienną wartością modułu Younga w elementach	0,106
Pomiar pod obciążeniem 600 N	0,120



Rozciągnięcie rzeczywistej próbki kostnej mierzone za pomocą znaczników na obrazie TK wynosi 0,12 mm. Najbliższym temu wynikowi są obliczenia wykonane ze zmiennością modułu Younga we własnym skrypcie, następnie ze stałym modułem Younga w obszarze elementu w tym samym środowisku, a najbardziej oddalonym od wyniku eksperymentu są obliczenia wykonane w programie ANSYS. Widocznie zauważalna jest, więc poprawa wyników obliczeń numerycznych po dodaniu zmienności modułu Younga. Różnica pomiędzy wynikiem obliczeń ze stałym i zmiennym  $E$  we własnym skrypcie to niespełna 3%, co dla tak niedużej i nisko zróżnicowanej materiałowo próbki nie jest znaczącą wartością. Odnosząc się jednak do przykładów obliczeń próbek o znacznie większej zmienności danych można wnioskować, iż badanie większego obszaru kości będzie ze sobą niosło powstanie bardziej zauważalnego błędu. Wynik obliczeń wykonanych programem ANSYS różni się również o ok 3%. Ze względu na niemożność prześledzenia algorytmu obliczeniowego w programie komercyjnym nie można stwierdzić powodu, dla którego wynik obliczeń odbiega od pomiaru.

Porównanie wyników otrzymanych dzięki obliczeniom MES i pochodzących z eksperymentu, potwierdza, iż zaproponowana metoda obliczeń pozwala na osiągnięcie lepszych wyników symulacji obciążenia kości od aktualnie stosowanej. W trakcie badań, zmierzono rozciąganie tkanki kostnej dla jednej próbki. Wynik ten jest obiecujący, ale wymaga wielokrotnych powtórzeń, które będą obiektem dalszych prac badawczych.



## 8. PODSUMOWANIE I WNIOSKI

W pracy przedstawiono przegląd literatury dotyczącej metod stosowanych do obliczeń modeli wytrzymałościowych tkanki kostnej, a także sposobów pozyskiwania jej danych materiałowych. W tym eksperymentów prowadzonych na próbkach kości oraz metod umożliwiających określenie modułu Younga tkanki kostnej na podstawie obrazów TK.

Literatura dotycząca modelowania kości w metodzie elementów skończonych jest bogata w artykuły naukowe. W większości z nich, pomimo że kość jest materiałem całkowicie anizotropowym, w stosowanych danych materiałowych tkanki wykorzystuje się pojedynczą wartość modułu Younga. Tak wysycenie wapniem poszczególnych beleczek kostnych jak i ich ułożenie mają znaczący wpływ na rzeczywistą wytrzymałość tkanki, odwzorowaniem tych parametrów jest gęstość radiologiczna. Na podstawie gęstości radiologicznej określonej w skali Hounsfielda, na obrazach TK, można wyznaczyć wartość modułu Younga.

Rozdzielczość danych zawartych w obrazach TK jest ściśle związana z dawką promieniowania, jaką przyjmuje pacjent. W praktyce klinicznej dopuszczalne dawki promieniowania, na jakie może być wystawiony pacjent są ściśle określone i nie mogą być przekraczane, stąd zagęszczenie siatki podziału modelu, (który tworzony jest bezpośrednio ze zdjęć TK w proporcji jeden piksel obrazu do jednego elementu skończonego) dzięki bezpośredniemu zwiększeniu rozdzielczości zdjęcia TK jest niemożliwe. Niewielka rozdzielczość, jaka jest uzyskiwana w niektórych badaniach TK może być niewystarczająca do przeprowadzenia dokładnych obliczeń.

Celem pracy było dostosowanie klasycznej metody elementów skończonych do obliczeń materiałów o zmiennym module Younga i charakterystyce przypominającej tkankę kostną. Stała wartość modułu Younga została zastąpiona funkcją zmieniającą się w funkcji współrzędnych obliczanego punktu modelu. Obliczenia wykonano w kilku etapach, zaczynając od napisania standardowego algorytmu MES w języku Python i porównania wyników obliczeń z komercyjnym programem ANSYS. Wyniki zgadzały się ze sobą zarówno co do wartości jak i rozkładu, co oznacza, iż algorytm obliczeniowy został zbudowany prawidłowo. W kolejnym etapie przeprowadzono testy różnych metod całkowania w już zmienionym algorytmie MES, z których do dalszych obliczeń wybrano najlepszą i najszybszą, 2 punktową kwadraturę Gaussa, gdzie każdy z obliczanych w jednym elemencie skończonym, czterech punktów miał przyporządkowaną indywidualną wartość modułu Younga. Testom poddano również dwa rodzaje elementu tarczowego, cztero i ośmiowęzłowy. Element ośmiowęzłowy za pomocą, którego uzyskane wyniki były zdecydowanie bliższe wzorcowym, wybrano do dalszych prac. Algorytm obliczeniowy z dodaną funkcją zmienności i wymienionymi powyżej parametrami obliczeniowymi został poddany testom dokładności, gdzie porównano wyniki obliczeń wykonane na rzadkiej (3x3 elementy) i gęstej (61x61 elementów) siatce podziału próbki. Maksymalny błąd wyznaczonych naprężeń wyniósł niecałe 20 MPa, a średni błąd energii deformacji poniżej 10%, podczas gdy wartości te dla obliczeń bez zastosowanej zmienności wynosiły

odpowiednio ok 40 MPa i 30%. Dobrane parametry elementu i wprowadzona do obliczeń zmienność modułu Younga zmniejszyły również czas potrzebny do przeprowadzenia obliczeń. Obliczenia wykonane opracowaną metodą porównano z wynikami uzyskanymi za pomocą programu ANSYS z wykorzystaniem polecenia TBData umożliwiającego wprowadzenie zmienności danych materiałowych w ograniczonym polu, które zostało zaimplementowane w programie ANSYS po otwarciu przewodu doktorskiego. W odniesieniu do wyniku podziału siatką 61x61 elementów obliczonego we własnym skrypcie, wynik dla podziału 3x3 tym samym algorytmem zachował 87,5%, a ANSYS 72% bazowego zakresu wartości naprężeń. Sam ich rozkład pozostał zbliżony w obu przypadkach.

Etap testów metody obliczeń zakończyło porównanie obliczeń MES próbki tkanki kostnej (poddanej wcześniej eksperymentowi polegającemu na jej stopniowym rozciąganiu) z rzeczywistym eksperymentem. Próbkę kostną wyciętą ze ściany kości udowej świńskiej, poddano obrazowaniu w klinicznej tomografii komputerowej w celu uzyskania pełnych danych kształtu i materiałowych.

Eksperyment weryfikujący założenia obliczeniowe prowadzono na tkance kostnej zwierzęcej, świńskiej, pozyskiwanej z uboju komercyjnego. Podczas przeprowadzania eksperymentu dołożono starań, aby utrzymać właściwości wytrzymałościowe świeżej (niewyschniętej) kości. Zarówno operacje przygotowawcze, cięcie jak i pomiary wykonano na próbkach w czasie poniżej 18 godzin. próbki transportowano w izolowanym środowisku podtrzymującym ich naturalną wilgoć.

Następnie wykonano cztery skany mikrotomograficzne w trakcie, których próbka umieszczona była w rozciągaczu wywierającym na nią kolejne wartości sił: zerową, 300 N, 500 N i 600 N. W rezultacie otrzymano zestaw zdjęć o wysokiej rozdzielczości, na których mierzono odkształcenie obszaru badawczego, ograniczonego fizycznymi znacznikami wyciętymi na próbce. Odkształcenie kości obciążonej siłą 600 N wyniosło 0,12 mm. Na podstawie danych kształtu i właściwości materiałowych wykonano symulację rozciągania za pomocą skryptu obliczeniowego, odtwarzając eksperyment. Wartość wyniku symulacji rozciągania zgadza się z rzeczywistą zmianą długości próbki w 92% (0,11 mm).

Na podstawie powyższych badań można stwierdzić, iż teza pracy została udowodniona, a cele szczegółowe zrealizowane.

W dalszych etapach prac badawczych nad omówionym problemem należy oprogramować przestrzenny element skończony, który będzie wykorzystywał opracowaną metodę implementowania kilku wartości modułu Younga w obszarze jednego elementu przy zachowaniu zbliżonego czasu obliczeń. Opracować metodę automatycznego pozyskiwania danych materiałowych ze zdjęć TK, zarówno danych kształtu ograniczając wybór pikseli obrazu do zawierających określoną minimalną szarość tj. gęstość radiologiczną oraz właściwości materiałowe. Opracować automatyczną metodę ograniczania automatycznego budowania modelu MES do tkanek kostnych to jest pomijania tkanek miękkich.

W części doświadczalnej zwrócić szczególną uwagę nad skróceniem czasu pomiarów tak, aby zmniejszyć wpływ procesu wysychania tkanki kostnej na jej właściwości wytrzymałościowe, co może mieć wpływ na wynik pomiarów. Opracować metodę badania naprężeń występujących w próbce kostnej oraz przemieszczeń i naprężeń w całej kości z uwzględnieniem nie uszkodzenia jej wewnętrznej struktury.

## 9. BIBLIOGRAFIA

- [1] T. Cichoński, J.A. Litwin, J. Mirecka: Kompendium histologii. Kraków: wydawnictwo Uniwersytetu Jagiellońskiego, 2009
- [2] J.T. Malejczyk, Wydawnictwo Lekarskie PZWL., Histologia, wyd. 6 uaktual. i rozsz. – 2 dodr, Warszawa: Wydawnictwo Lekarskie PZWL, [cop. 2012], ISBN 978-83-200-4349-5
- [3] W.Sawicki, J.Malejczyk, Histologia, Wydawnictwo Lekarskie PZWL, Warszawa 2012, ISBN 978-83-200-4349-5
- [4] W. Sawicki, Histologia, Wydawnictwo Lekarskie PZWL, ISBN 978-83-200-3710-4
- [5] Biologia, Wydawnictwo naukowe PWN, Warszawa 2002, ISBN 83-01-13726-6
- [6] K. D. Cashman, Vitamin D in childhood and adolescence, „Postgraduate Medical Journal”, 83 (978), 2007, s. 230–235
- [7] <http://www.fizjoterapeutom.pl/materialy/artykuly/geriatria/osteopenia-osteomalacja-osteoporoza> (stan na 21.06.2018)
- [8] A. Szczeklik, P. Gajewski, Interna Szczeklika 2022, wyd. MP 2022, ISBN: 9788374306683
- [9] pod red. J. E. Badurski, Choroby metaboliczne kości, ISBN 83-85284-49-4
- [10] R.L. Drake, A. W. Vogl, A. W. M. Mitchell, Gray's Basic Anatomy, ISBN 978-1-4557-1078-2 ISBN 978-0-8089-2445-6
- [11] pod red. J. Sokołowskiej-Pituchowej, Anatomia człowieka podręcznik dla studentów medycyny, Państwowy zakład wydawnictw lekarskich, Warszawa 1992, ISBN 83-200-1709-2
- [12][32] pod red. S. Leszczyńskiego, Historia radiologii polskiej na tle radiologii światowej, Wydawnictwo medycyna praktyczna, ISBN 83-88092-07-3
- [13] [https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/e/e3/First\\_medical\\_X-ray\\_by\\_Wilhelm\\_R%C3%B6ntgen\\_of\\_his\\_wife\\_Anna\\_Bertha\\_Ludwig%27s\\_hand\\_-\\_18951222.gif](https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/e/e3/First_medical_X-ray_by_Wilhelm_R%C3%B6ntgen_of_his_wife_Anna_Bertha_Ludwig%27s_hand_-_18951222.gif) (stan na 7.07.2018)
- [14] pod red. B. Pruszyńskiego, Radiologia, diagnostyka, obrazowanie Rtg, TK, USG, MR i medycyna nuklearna, Wyd. Lekarskie PZWL 2008, ISBN 978-83-200-3666-4
- [15] pod red. M. Nałęcz, red. tomu L. Chmielewski, J.L. Kulikowski, A. Nowakowski, Biocybernetyka i inżynieria biomedyczna 2000, tom 8 Obrazowanie biomedyczne Akademicka oficyna wydawnicza EXIT Warszawa 2003. ISBN 83-87674-63-X
- [16] pod red. B. Pruszyński A.Cieszanowski, Radiologia, diagnostyka, obrazowanie Rtg, TK, USG i MR Wyd. Lekarskie PZWL, Warszawa 2020, ISBN 978-83-200-6039-3
- [17] <http://ryszardtadeusiewicz.natemat.pl/166661,ciag-dalszy-zagladania-do-wnetrza-ciala-pacjenta-tomografia-komputerowa> (stan na 12.07.2018)
- [18] red. F.Paulsen, J.Waschke, red. pl. K.S.Jędrzejewski, M.Polguj, Edra Urban&Partner, Sobotta, Atlas Anatomii Człowieka, Wrocław 2019, ISBN 978-83-66310-23-0



- [19] <https://healthcare-in-europe.com/en/news/ct-outperforms-lab-diagnosis-for-coronavirus-infection.html> (stan na 08.04.2023)
- [20] W.E. Brant, C.A. Helms, Podstawy diagnostyki radiologicznej, wyd. medipage Warszawa 2007, ISBN 0-7817-6518-8
- [21] Rh.J. Young., R.B. Ashman, Ch. H. Turner, Young's modulus of trabecular and cortical bone material: Ultrasonic and microtensile measurements, *Journal of Biomechanics* Volume 26, Issue 2, February 1993, Pages 111-119
- [22] R. Shahar, P. Zaslansky, M. Barak, A.A. Friesem, J.D. Currey, S. Weiner, Anisotropic Poisson's ratio and compression modulus of cortical bone determined by speckle interferometry, *Journal of Biomechanics* 40 (2007) 252–264
- [23] D. Wu, T. Joffre, C. O. Magi, S. J. Ferguson, C. Persson, P. Isaksson, A combined experimental and numerical method to estimate the elastic modulus of single trabeculae, *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials* Volume 125, January 2022, 104879
- [24] Q.A. Meslier, S.J. Shefelbine, Using Finite Element Modeling in Bone Mechanoadaptation, *Current Osteoporosis Reports* (2023) 21:105–116
- [25] H.H. Bayraktar, E.F. Morgan, G.L. Niebur, G.E. Morris, E.K. Wong, T.M. Keaveny, Comparison of the elastic and yield properties of human femoral trabecular and cortical bone tissue, *Journal of Biomechanics* 37 (2004) 27–35
- [26] L. Rayward, J.P. Little, A subject-specific FEM to predict deep tissue mechanical stresses when supine: Development of efficient contact interfaces using Shared Topology, *Journal of Biomechanics* 137 (2022) 111085
- [27] U.V. Pise, A.D. Bhatt, R.K. Srivastava, R. Warkedkar, A B-spline based heterogeneous modeling and analysis of proximal femur with graded element, *Journal of Biomechanics* 42 (2009) 1981–1988
- [28] M. K. Gíslason, D. H. Nash, Finite Element Modelling of a Multi-Bone Joint: The Human Wrist, *IntechOpen*
- [29] M. Pakula, F. Padilla, P. Laugier, M. Kaczmarek, Application of Biot's theory to ultrasonic characterization of human cancellous bones: Determination of structural, material, and mechanical properties, *J. Acoust. Soc. Am.* 123, 2415–2423 (2008)
- [30] M. Pakula, F. Padilla, M. Kaczmarek, P. Laugier, Characterization of human cancellous bone specimens in terms of Biot's theory, 2006 IEEE Ultrasonics Symposium
- [31] R.N. Yadav, P. Sihota, P. Uniyal, D. Neradi, J. Ch. Bose, V. Dhiman, Sh. Karn, S. Sharma, S. Aggarwal, V.G. Goni, S. Kumar, S. Kumar Bhadada, N. Kumar, Prediction of mechanical properties of trabecular bone in patients with type 2 diabetes using damage based finite element method, *Journal of Biomechanics* 123 (2021) 110495
- [32] I.S. Hage, R.F. Hamade, Micro-FEM orthogonal cutting model for bone using microscope images enhanced via artificial intelligence, *Procedia CIRP* 8 ( 2013 ) 385 – 390
- [33] M. Gupta, K. Madhok, R. Kulshrestha, S. Chain, H. Kaur, A. Yadav, Determination of stress distribution on periodontal ligament and alveolar bone by various tooth movements – A 3D FEM study, *Journal of Oral Biology and Craniofacial Research* 10 (2020) 758–763

- [34] C. Varghese, P. T. Ramaiah, S. Setty, V. Madhusudhan, M. K. Thimmiah, Ch. K. Dakshina, Evaluation of stress distribution values at the temporomandibular joint and distalization of teeth during en-masse retraction of the mandibular dentition using buccal shelf bone screws: A FEM study, *International Orthodontics* 2023; 21: 1-10
- [35] M. Wierszycki, W. Kąkol, T. Łodygowski, Numerical complexity of selected biomechanical problems, *JOURNAL OF THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS* 44, 4, pp. 797-818, Warsaw 2006
- [36] S. Sezek, B. Aksakal, F. Karaca, Influence of drill parameters on bone temperature and necrosis: A FEM modelling and in vitro experiments, *Computational Materials Science* 60 (2012) 13–18
- [37] H. Wang, X. Gao, B. Wang, M. Wang, Y. Liu, T. Zan, P. Gao, Ch. Liu, Evaluation of temperature distribution for bone drilling considering aging factor, *Medicine in Novel Technology and Devices* 16 (2022) 100174
- [38] S. Gholampour, H.H. Hassanalideh, M. Gholampour, D. Frim, Thermal and physical damage in skull base drilling using gas cooling modes: FEM simulation and experimental evaluation, *Computer Methods and Programs in Biomedicine* 212 (2021) 106463
- [39] M. Qasemi, V. Tahmasbi, M-M. Sheikhi, M. Zolfaghari, An effect of osteon orientation in end milling operation of cortical bone based on FEM and experiment, *Journal of Manufacturing Processes* 81 (2022) 141–154
- [40] M. Chen, L. Ji, L. Zhang, L. Cao, H. Wei, W. Sun, Crack propagation characteristics and inhibition mechanism for laser high-efficient drilling of bone, *Engineering Fracture Mechanics* 291 (2023) 109562
- [41] H.H. Hassanalideh, S. Gholampour, Finding the optimal drill bit material and proper drilling condition for utilization in the programming of robot-assisted drilling of bone, *CIRP Journal of Manufacturing Science and Technology* 31 (2020) 34–47
- [42] P. V. Vaidya, A. Dutta, S. Roop, R. Talukdar, K. Bhombe, V. S. Seesala, Z. Q. Syed, Ta. K. Bandyopadhyay, S. Dhara, Design modification of surgical drill bit for final osteotomy site preparation towards improved bone-implant contact, *Heliyon* 9 (2023) e16451
- [43] S. Song, X. Cheng, T. Li, M. Shi, G. Zheng, H. Liu, Experimental study of bone drilling by Kirschner wire, *Medical Engineering and Physics* 106 (2022) 103835
- [44] A. Zhang, C. Bian, X. Zhang, J. Zhang, Z. Liu, S. Zhang, Effect of feed condition on thrust force and torque during continuous and step-by-step drilling of cortical bone, *Procedia CIRP* 89 (2020) 201–206
- [45] M. De Stefano, A. Lanza, E. Faia, A. Ruggiero, A novel ultrashort dental implant design for the reduction of the bone stress/strain: A comparative numerical investigation, *Biomedical Engineering Advances* 5 (2023)
- [46] M.M. Shahzamanian, R. Banerjee, N. B. Dahotre, A. R. Srinivasa, J.N. Reddy, Analysis of stress shielding reduction in bone fracture fixation implant using functionally graded materials, *Composite Structures* 321 (2023)
- [47] P. Jindal, J. Bharti, V. Gupta, S.S. Dhama, Mechanical behaviour of reconstructed defected skull with custom PEEK implant and Titanium fixture plates under dynamic loading conditions using FEM, *Journal of the mechanical behavior of biomedical materials* 146 (2023)

- [48] N.V. Viet, W. Waheed, A. Alazzam, W. Zaki, Effective compressive behavior of functionally graded TPMS titanium implants with ingrown cortical or trabecular bone, *Composite Structures* 303 (2023)
- [49] L. Rayward, J. P. Little, A subject-specific FEM to predict deep tissue mechanical stresses when supine: Development of efficient contact interfaces using Shared Topology, *Journal of Biomechanics* 137 (2022) 111085
- [50] J. Marciniak, W. Chrzanowski, M. Kaczmarek, Biomechaniczna analiza układu kość udowa - gwóźdź śródszpikowy z wykorzystaniem metody elementów skończonych, *Inżynieria Biomateriałów* 2003 | R. 6, nr 30-33 | 53-55
- [51] M. Cozzani, L. Nucci, D. Lupini, D. Tripodi, N. Noori, M. Hasani, A. Jamilian, Two different designs of mini-screw assisted maxillary expanders, using FEM to analyse stress distribution in craniofacial structures and anchor teeth, *International Orthodontics* 2022; 20: 100607
- [52] M. R. Niroomand, M. Arabbeiki, G. Rouhi, Optimization of thread configuration in dental implants through regulating the mechanical stimuli in neighboring bone, *Computer Methods and Programs in Biomedicine* 231 (2023) 107376
- [53] A. P. Bozkurt, Effects of mechanical vibration on miniscrew implants and bone: Fem analysis, *International Orthodontics* 2019; 17: 38–44
- [54] X.-F. Song, W. Zhang, N. Kang, J. Zhao, X. Jing, Force prediction and analysis in surgical sawing of composite bone involving multi-tooth reciprocating and heterogeneous pore model, *Journal of Materials Processing Tech.* 312 (2023) 117853
- [55] M. Kshirsagar, P. Dhattrak, Strain based in vitro analysis of dental implant using artificial bone model and validation by numerical technique, *Medical Engineering and Physics* 111 (2023) 103931
- [56] A. Šustková, B. Thomková, T. Zikmund, J. Kaiser, M. Joukal, P. Marcián, The influence of image processing of  $\mu$ -CT images on mechanical behavior of mandibular trabecular bone structure using micro finite element method, *Procedia Structural Integrity* 43 (2023) 276–281
- [57] J. Gutiérrez-Gil, E. Nadal, K. Bouza, M. Tur, C.M. Atienza, O. Allix, J.J. Ródenas, Bone remodelling-based numerical evaluation of personalized masticatory forces from CT-scans, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 401 (2022) 115635
- [58] C. Zannoni, R. Mantovani, M. Viceconti, Material properties assignment to finite element models of bone structures: a new method, *Medical Engineering & Physics* 20 (1998) 735–740
- [59] K. Pietroń, Ł. Mazurkiewicz, K. Sybilski, J. Małachowski, Correlation of Bone Material Model Using Voxel Mesh and Parametric Optimization, *Materials* 2022, 15, 5163.
- [60] D. L. Logan, *A first Course in the Finite Element Method*, wyd. Thomson 2007, ISBN 0-534-55298-6
- [61] G. Rakowski, Z. Kacprzyk, *Metoda elementów skończonych w mechanice konstrukcji*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1993, ISBN 83-7207-535-2
- [62] P. Kattan, *Matlab Guide to Finite Elements*, wyd. Springer, ISBN-13 978-3-540-70697-7

- [63] T. Łodygowski, W. Kąkol, Metoda elementów skończonych w wybranych zagadnieniach mechaniki konstrukcji inżynierskich, Politechnika Poznańska 2003 wydanie elektorniczne.
- [64] J. Podgórski, E. Błazik-Borowa, Wprowadzenie do metody elementów skończonych w statyce konstrukcji inżynierskich, wyd. IZS 2001, ISBN
- [65] O.C Zienkiewicz, R.L. Taylor, The Finite Element Method,
- [66] D. Wu, P. Isaksson, S. J. Ferguson, C. Persson, Young's modulus of trabecular bone at the tissue level: A review, *Acta Biomaterialia* 78 (2018) Pages 1-12
- [67] R. Shahar, P. Zaslansky, M. Barak, A.A. Friesem, J.D. Currey, S. Weiner, Anisotropic Poisson's ratio and compression modulus of cortical bone determined by speckle interferometry, *Journal of Biomechanics* 40 (2007) 252–264
- [68] D.Ch. Wirtz, N. Schiffers, T. Pandorf, K. Radermacher, D. Weichert, R. Forst, Critical evaluation of known bone material properties to realize anisotropic FE-simulation of the proximal femur, *Journal of Biomechanics* 33 (2000) 1325-1330.
- [69] J.D.J. Black, B.J. Tadros, Bone structure: from cortical to calcium, *Orthopaedics and Trauma* Volume 34, Issue 3, June 2020, Pages 113-119
- [70] F. Kuhn, R.J. Clausing, A. Stiller, C.A. Fonseca Ulloa, Ch. Foelsch, M. Rickert, A. Jahnke, Determination of E-modulus of cancellous bone derived from human humeri and validation of plotted single trabeculae: Development of a standardized humerus bone model, *Journal of Orthopaedics* 33 (2022) 48–54
- [71] B. Busse, M. Hahn, M. Soltau, J. Zustin, K. Püschel, G.N. Duda, M. Amling, Increased calcium content and inhomogeneity of mineralization render bone toughness in osteoporosis: Mineralization, morphology and biomechanics of human single trabeculae, *Bone*, Volume 45, Issue 6, December 2009, Pages 1034-1043
- [72] S. Lorenzetti, R. Carretta, R. Müller, E. Stüssi, A new device and method for measuring the elastic modulus of single trabeculae, *Medical Engineering & Physics*, Volume 33, Issue 8, October 2011, Pages 993-1000
- [73] R. Carretta, B. Luisier, D. Bernoulli, E. Stüssi, R. Müller, S. Lorenzetti, Novel method to analyze post-yield mechanical properties at trabecular bone tissue level, *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, Volume 20, April 2013, Pages 6-18
- [74] Satoshi Yamada, Shigeru Tadano, Koichi Fukasawa, Micro-cantilever bending for elastic modulus measurements of a single trabecula in cancellous bone, *Journal of Biomechanics*, Volume 49, Issue 16, 8 December 2016, Pages 4124-4127
- [75] J.L. Kuhn, S.A. Goldstein, R. Choi, M. London, L. Feldkamp, L.S. Matthews, Comparison of the trabecular and cortical tissue moduli from human iliac crests, *Journal of Orthopaedic Research* 7 (6) (1989) 876–887.
- [76] K. Choi, J.L. Kuhn, M.J. Ciarelli, S.A. Goldstein, The elastic moduli of human subchondral, trabecular, and cortical bone tissue and the size-dependency of cortical bone modulus, *Journal of Biomechanics*, Volume 23, Issue 11, 1990, Pages 1103-1113
- [77] K. Choi, S.A. Goldstein, A comparison of the fatigue behavior of human trabecular and cortical bone tissue, *Journal of Biomechanics*, Volume 25, Issue 12, December 1992, Pages 1371-1381



- [78] M.E. Szabó, M. Taylor, P.J. Thurner, Mechanical properties of single bovine trabeculae are unaffected by strain rate, *Journal of Biomechanics*, Volume 44, Issue 5, 15 March 2011, Pages 962-967
- [79] R. Jungmann, M.E. Szabo, G. Schitter, Raymond Yue-Sing Tang, D. Vashishth, P.K. Hansma, P.J. Thurner, Local strain and damage mapping in single trabeculae during three-point bending tests, *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, Volume 4, Issue 4, May 2011, Pages 523-534
- [80] P. Zlamal, O. Jirousek, D. Kytýr, T. Doktor, Indirect determination of material model parameters for single trabecula based on nanoindentation and three-point bending test, 18th International Conference ENGINEERING MECHANICS 2012, Svratka, Czech Republic, 2012, pp. 1611–1620
- [81] R. Carretta, E. Stüssi, R. Müller, S. Lorenzetti, Within subject heterogeneity in tissue-level post-yield mechanical and material properties in human trabecular bone, *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, Volume 24, August 2013, Pages 64-73
- [82] F. Bini, A. Marinozzi, F. Marinozzi, F. Patanè, Microtensile measurements of single trabeculae stiffness in human femur, *Journal of Biomechanics*, Volume 35, Issue 11, November 2002, Pages 1515-1519
- [83] P.R. Townsend, R.M. Rose, E.L. Radin, Buckling studies of single human trabeculae, *Journal of Biomechanics*, Volume 8, Issues 3–4, July 1975, Pages 199-200, 201
- [84] S. D. Ryan, J. L. Williams, Tensile testing of rodlike trabeculae excised from bovine femoral bone, *Journal of Biomechanics*, Volume 22, Issue 4, 1989, Pages 351-355
- [85] J. Young Rho, R.B. Ashman, Ch.H. Turner, Young's modulus of trabecular and cortical bone material: Ultrasonic and microtensile measurements, *Journal of Biomechanics*, Volume 26, Issue 2, February 1993, Pages 111-119
- [86] J. Hong, H. Cha, Y. Park, S. Lee, G. Khang, Y. Kim, Elastic Moduli and Poisson's Ratios of Microscopic Human Femoral Trabeculae, 11th Mediterranean Conference on Medical and Biomedical Engineering and Computing 2007, Springer, Berlin Heidelberg, 2007, pp. 274–277.
- [87] O. Jiroušek, J. Nemecek, D. Kytýr, J. Kunecy, P. Zlámal, T. Doktor, Nanoindentation of trabecular bone-comparison with uniaxial testing of single trabecula, *Chem. listy* 105 (2011) 668–671.
- [88] S. Yamada, S. Tadano, S. Fukuda, Nanostructure and elastic modulus of single trabecula in bovine cancellous bone, *Journal of Biomechanics*, Volume 47, Issue 14, 7 November 2014, Pages 3482-3487
- [89] L. Grassi, E. Schileo, F. Taddei, L. Zani, M. Juszczuk, L. Cristofolini, M. Viceconti, Accuracy of finite element predictions in sideways load configurations for the proximal human femur, *Journal of Biomechanics* 45 (2012), 2-3
- [90] R. Fedida, Z. Yosibash, Ch. Milgrom, L. Joskowicz, Femur mechanical stimulation using high-order FE analysis with continuous mechanical properties, II International Conference on Computational Bioengineering (2005), 5-9
- [91] S.K. Parashar, J.K. Sharma, A review on application of finite element modelling in bone biomechanics, *Perspectives in Science* (2016) 8, 696—698

- [92] U.V. Pise, A.D. Bhatt, R.K. Srivastava, R. Warkedkar, A B-spline based heterogeneous modeling and analysis of proximal femur with graded element, *Journal of Biomechanics* 42 (2009) 1981–1988
- [93] S. Poelert, E. Valstar, H. Weinans, A. A. Zadpoor, Patient-specific finite element modeling of bones, (2012) *Journal of Engineering in Medicine* 227(4) 464–478
- [94] K. Mazur, M. Krawczuk, L. Dąbrowski, A New Finite Element with Variable Young's Modulus, *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering* 2023, 39(7),
- [95] K. Mazur, L. Dąbrowski, Cost-Effective and Sufficiently Precise Integration Method Adapted to the FEM Calculations of Bone Tissue, *CMST* 20(3) 101-108 (2014)
- [96] O.C.Zienkiewicz, J.Z.Zhu, A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis, *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, Vol.24, 337-357 (1987)
- [97] T.Gratsch, K.J.Bathe, A posteriori error estimation techniques in practical finite element analysis, *Computers and Structures* 83 (2005) 235–265
- [98] M. Dikić, K. Salajpal, D. Karolyi, D. Dikić, Marija Pavić, I. Jurić, Characteristics of femur and humerus in turopolje pig – an autochthonous croatian breed, ISSN 1330-7142
- [99] I. Radtke, Projekt przyrządu do obciążania próbki kostnej w czasie mikrotomografii, Praca dyplomowa magisterska, Politechnika Gdańska 2014.
- [100] E. Majchrzak, B. Mochnecki, D. Tarasek, M. Dziewoński, The BEM-FDM model of thermal processes proceeding in the domain of the human finger, *Acta of Bioengineering and Biomechanics* Vol. 17, No. 4, 2015