

## DYNAMICZNY MODEL HISTEREZY MAGNETYCZNEJ

Andrzej WILK

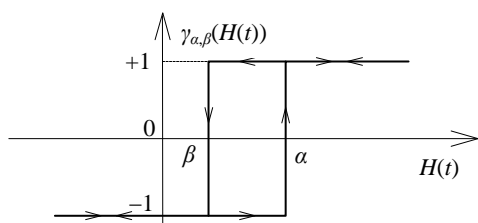
Politechnika Gdańska, ul. G. Narutowicza 11/12, 80-233 Gdańsk  
tel: 058 347 1087 fax: 058 341 0880 e-mail: awilk@ely.pg.gda.pl

**Streszczenie:** W referacie przedstawiono skalarny dynamiczny model histerezy magnetycznej oparty na modelu Preisacha. W modelu tym istotną rolę odgrywają stany tzw. operatorów histerezowych. W modelu dynamicznym zmiany stanów tych operatorów są pewną funkcją czasu. W funkcji tej ukryty jest także parametr  $k$  reprezentujący właściwości magnetyczne materiału. W poniższym artykule stan przejściowy operatora jest określony poprzez nieliniowe równanie różniczkowe pierwszego rzędu. Przedstawiono model dynamiczny uwzględniający szybkość zmian parametrów materiałowych z modelem ze sprzężeniem zwrotnym. To wpływa na większą dokładność modelu zarówno przy małych jak i dużych częstotliwościach przemagnesowywania materiału. Wyznaczono wartość parametru materiałowego  $k$  dla rdzenia zwijanego z blachy transformatorowej typu ET114-27. Przedstawiono wyniki symulacji pętli histerezy przy różnych częstotliwościach przemagnesowywania rdzenia.

**Słowa kluczowe:** histereza magnetyczna, operator histerezowy, model dynamiczny Preisacha.

## 1. WSTĘP

Podstawowym założeniem w modelu Preisacha (MP)[1] jest to, iż przetwornik histerezowy zbudowany jest z nieskończonej liczby elementarnych dwustanowych operatorów histerezowych (rys. 1). Stan operatora histerezowego określa funkcja  $\gamma_{\alpha\beta}(H(t))$  zależna od natężenia pola magnetycznego  $H$ , która może przyjmować w „klasycznym” modelu Preisacha dyskretne wartości ze zbioru  $\{-1, +1\}$ . Każdy operator charakteryzowany jest dwoma niezależnymi od siebie parametrami (współrzednymi)  $\alpha, \beta$ , których miano jest takie samo jak wielkości  $H$ . Operator może zatem mieć dowolną szerokość, ale musi być przy tym spełniony warunek  $\alpha \geq \beta$ .



Rys. 1. Charakterystyka elementarnego operatora histerezowego

Jeśli wymuszenie jako funkcja czasu przyjmuje wartość  $H(t) > \alpha$ , to operator przyjmuje stan  $\gamma_{\alpha\beta}(t) = +1$ ,

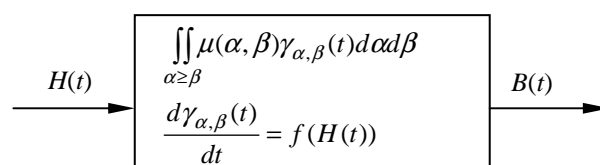
jeśli  $H(t) < \beta$ , to stan operatora jest równy  $\gamma_{\alpha\beta}(t) = -1$ . Parametry  $\alpha, \beta$  przyjmują wartości z pewnego skończonego przedziału wartości  $\alpha, \beta = \langle -H_s, H_s \rangle$ , gdzie  $H_s$  jest wartością nasycenia. Za stan nasycenia przyjmuje się taką wartość natężenia, przy której wszystkie operatory przyjęły stan  $+1$  lub  $-1$ , czyli przetworniki histerezowe zostały nasycone i dalszy wzrost natężenia pola  $H(t)$  nie powoduje zmiany stanu operatorów i – co jest z tym związane – wartości indukcji magnetycznej  $B(t)$ . Charakterystyczne właściwości MP to: „zacieranie” (ang. wiping-out property) zapamiętanych stanów rewersyjnych oraz kongruencja tzw. małych pętli histerezy [1].

W klasycznym MP stan operatora po spełnieniu określonego warunku zmienia się bez zwłoki czasowej. W modelu dynamicznym zmiana stanu operatora jest funkcją czasu i może być opisana za pomocą równania różniczkowego, w którym uwikłane są dodatkowe parametry reprezentujące właściwości materiału oraz sposób wykonania rdzenia (zaplatanie blach, zwijanie blach itp.).

W artykule poniższym omówiono model dynamiczny histerezy dla rdzenia transformatora wykonanego w technologii zwijania z blachy ET114-27. Model klasyczny histerezy dla tego rdzenia opisano w [2], natomiast model ze sprzężeniem zwrotnym w [3]. W punkcie 2 omówiono zagadnienia modelowania histerezy z operatorami, których zmiana stanu określona jest równaniem różniczkowym. W punkcie 3 przedstawiono tzw. model złożony histerezy, czyli skojarzenie modelu dynamicznego z modelem ze sprzężeniem zwrotnym. W 4 przedstawiono wybrane wyniki symulacji modelu złożonego histerezy magnetycznej.

## 2. DYNAMICZNY MODEL HISTEREZY MAGNETYCZNEJ

Zagadnienia modelowania histerezy z uwzględnieniem dynamiki zmian wielkości wejściowej  $H$  przedstawiono między innymi w pracach [4, 5, 6, 7]. Schemat blokowy dynamicznego modelu histerezy Preisacha pokazano na rys. 2.



Rys. 2. Schemat blokowy dynamicznego modelu histerezy Preisacha

Górne wyrażenie zawarte w bloku z rys.2 reprezentuje klasyczny model Preisacha, natomiast dolne wyrażenie reprezentuje dynamikę zmiany stanu operatora według pewnej funkcji  $f(H(t))$ , której jednym z argumentów jest wartość  $H$ . Dynamiczny model matematyczny histerezy Preisacha jest zdefiniowany przez równanie

$$B(t) = \iint_{\alpha \geq \beta} \mu(\alpha, \beta) \gamma_{\alpha\beta}(H(t)) d\alpha d\beta, \quad (1)$$

gdzie  $\mu(\alpha, \beta)$  jest tzw. funkcją dystrybucji Preisacha (DP) [1]. Jest to funkcja skalarna dwóch zmiennych, która wyraża gęstość prawdopodobieństwa istnienia operatorów histerezowych o parametrach  $\alpha, \beta$ . Funkcja DP może być interpretowana jako funkcja wagowa, która określa wagę, z jaką operatory o danych parametrach  $\alpha, \beta$  wpływają na wartość funkcji podcałkowej w (1). Jeśli struktura układu histerezowego nie ulega zmianie, to funkcja DP może być traktowana jako *funkcja charakterystyczna* tegoż układu, która nie zależy od wartości natężenia  $H(t)$ , ani  $B(t)$ . Jest oczywiste, że ze względu na efekt nasycenia funkcja DP zanika do wartości równej zero dla parametrów  $\alpha > H_s$ , lub  $\beta < -H_s$ .

Funkcja  $\gamma_{\alpha\beta}(H(t))$  określająca stan operatora jest zdefiniowana za pomocą równania różniczkowego pierwszego rzędu w postaci

$$\frac{d\gamma_{\alpha,\beta}(t)}{dt} = \begin{cases} k_t(H(t) - \alpha), & \text{dla } H(t) > \alpha \\ k_t(H(t) - \beta), & \text{dla } H(t) < \beta \end{cases} \quad (2)$$

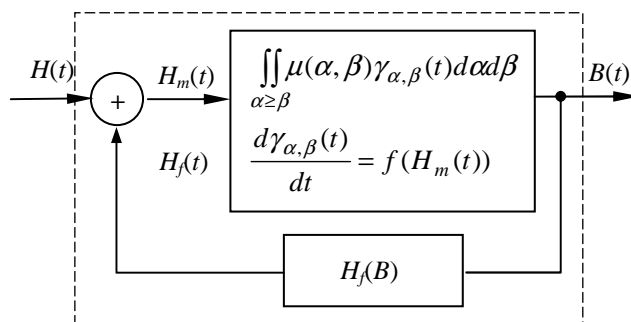
gdzie  $k_t$  jest parametrem (liczba rzeczywista dodatnia) wyznaczanym zazwyczaj na podstawie eksperymentu.

Z wzoru (2) wynikają następujące wnioski. Po pierwsze dynamika zmiany stanu operatora nie jest stała, jeśli w trakcie tego procesu  $H(t)$  jest zmienne. Po drugie dynamika zmiany stanu operatora jest tym większa, im większa jest wartość bezwzględna  $(H(t) - \alpha)$  lub  $(H(t) - \beta)$ . Po trzecie parametr  $k_t$  reprezentuje właściwość materiału ferromagnetycznego. Gdy wartość  $k_t$  dąży do nieskończoności, model dynamiczny zbliża się do modelu klasycznego. Parametr  $k_t$  uwzględnia także w pewnym stopniu strukturę rdzenia (układ blach).

### 3. DYNAMICZNY MODEL HISTEREZY ZE SPRĘŻENIEM ZWROTNYM

W celu zwiększenia dokładności modelu histerezy wprowadza się szereg modyfikacji klasycznego MP. Jednym ze sposobów jest wprowadzenie sprzężenia zwrotnego [3, 8]. W niniejszej publikacji przedstawiono złożenie modelu histerezy ze sprzężeniem zwrotnym z modelem dynamicznym. Sprzężenie zwrotne zwiększa dokładność symulacji pętli histerezy poprzez usunięcie pewnych właściwości modelu klasycznego. Usuwa się przy tym właściwość *kongruencji* małych pętli histerezy [1]. Zdefiniowanie funkcji  $\gamma_{\alpha\beta}(H(t))$ , gdzie zmiana stanu operatora histerezowego jest pochodną czasową zależną od funkcji  $H(t)$  i parametru  $k_t$  pozwala uwzględnić dynamiczne aspekty w histerezie magnetycznej. Relacje wektorowe pomiędzy  $\mathbf{B}$  i  $\mathbf{H}$  w modelowaniu histerezy nie są brane pod uwagę w dalszej części pracy.

Struktura przyjętego do dalszej realizacji złożonego modelu Preisacha przedstawiona jest na rys. 3.



Rys.3. Schemat blokowy dynamicznego modelu histerezy Preisacha ze sprzężeniem zwrotnym

Bloczek górny na schemacie blokowym z rys.3 reprezentuje skalarny model dynamiczny względem wewnętrznej wartości pola  $H_m(t)$ , natomiast blok dolny reprezentuje pętlę sprzężenia zwrotnego według jednoznacznej nieliniowej funkcji  $H_f(B)$ .

Matematyczna formuła złożonego modelu Preisacha przyjętego do implementacji w tej pracy, która uwzględni dynamiczne aspekty przełączania operatorów oraz sprzężenie zwrotne jest następująca

$$B(t) = \iint_{\alpha \geq \beta} \mu[\alpha + H_f(B), \beta + H_f(B)] \gamma_{\alpha,\beta}[H_m(t)] d\alpha d\beta, \quad (3)$$

$$H_m(t) = H(t) + H_f(B(t)), \quad (4)$$

$$\frac{d\gamma_{\alpha,\beta}(t)}{dt} = \begin{cases} k_t[H_m(t) - \alpha], & \text{dla } H_m(t) > \alpha \\ k_t[H_m(t) - \beta], & \text{dla } H_m(t) < \beta \end{cases} \quad (5)$$

W celu implementacji równań (3), (4) i (5) konieczna jest znajomość funkcji  $\mu(\alpha, \beta)$ , która reprezentuje zmiany przenikalności magnetycznej materiału. Zaproponowana przez autora funkcja dystrybucji Preisacha jest skończonym szeregiem funkcyjnym opisanym wzorem

$$\mu(\alpha, \beta) = \sum_{n=1}^N \frac{A_n}{2\pi S_{x,n} S_{y,n}} \exp\left(\frac{-(\alpha + \beta)^2}{2S_{x,n}^2}\right) \exp\left(\frac{-(\alpha - \beta)^2}{2S_{y,n}^2}\right), \quad (6)$$

gdzie  $A_n, S_{x,n}, S_{y,n}$  są nieznanymi parametrami o wartościach charakterystycznych dla danego ferromagnetyka.

Funkcja sprzężenia zwrotnego przyjęta w tym modelu jest wielomianem trzeciego stopnia

$$H_f(B) = K_1 B + K_3 B^3, \quad (7)$$

gdzie  $K_1, K_3$  są stałymi współczynnikami o nieznanym na wstępie wartościach, charakteryzującymi wpływ sprzężenia zwrotnego w materiale rdzenia na wartość indukcji i szerokość pętli histerezy.

Sposób wyznaczania wartości parametrów funkcji DP oraz funkcji sprzężenia zwrotnego przedstawiono w [3]. Wartości tych parametrów podano w tablicy 1 i tablicy 2. Do poprawnej aproksymacji FDP wykorzystano tylko sumę trzech pierwszych wyrazów ( $N=3$ ) szeregu funkcyjnego (6).

Tablica 1. Wartości parametrów  $S_{x,n}$ ,  $S_{y,n}$  podane w A/m

$S_{x,1}$	$S_{x,2}$	$S_{x,3}$	$S_{y,1}$	$S_{y,2}$	$S_{y,3}$
35,17	107,4	1232	17,65	41,67	91,77

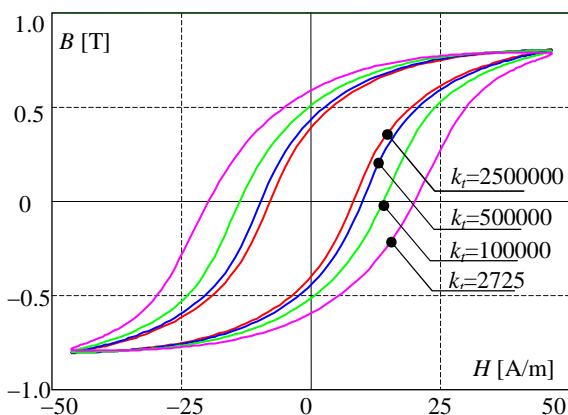
Tablica 2. Wartości parametrów  $K_1$ ,  $K_2$ , i  $A_n$

$A_1$	$A_2$	$A_3$	$K_1$	$K_3$
2,92	0,895	3,43	19,07	-14,86

#### 4. IMPLEMENTACJA DYNAMICZNEGO MODELU HISTEREZY ZE SPRĘŻENIEM ZWROTNYM

Równanie (5) zakłada przyjmowanie przez operator w stanie przejściowym dowolnych wartości z przedziału liczb rzeczywistych  $\langle -1; +1 \rangle$ . Ten stan przejściowy może reprezentować wpływ prądów wewnątrz ferromagnetyka (głównie prądów wirowych) na wartość chwilową pola magnetycznego  $B(t)$  przy zmieniającym się w czasie polu magnetycznym  $H(t)$  wzbudzonym przez prądy w przewodnikach. Przy takim podejściu jednym ze sposobów identyfikacji współczynnika  $k_t$  może być rozdzielanie strat reprezentowanych przez pętlę histerezy, która w modelu dynamicznym zawiera składnik histerezowy i wiropądowy. Pole pętli histerezy w modelu dynamicznym ma większą powierzchnię niż w modelu statycznym. Ta dodatkowa powierzchnia pętli reprezentuje energię dyssypacji wynikającą z przepływu prądów wirowych. Do wyznaczenia współczynnika  $k_t$  wymagane jest zatem rozdzielanie strat wypadkowych na składnik od histerezy statycznej i na składnik od prądów wirowych przy znanej częstotliwości.

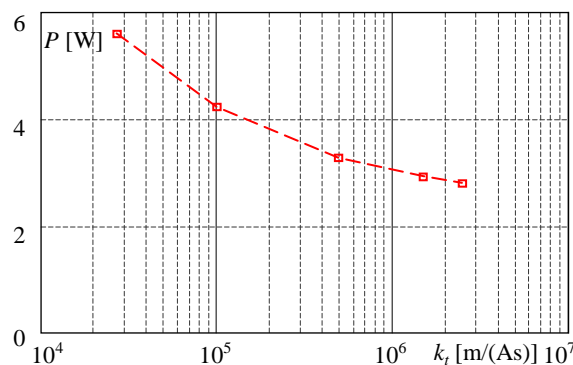
Na rys. 4 pokazano małe symetryczne pętle histerezy wyznaczone na podstawie modelu dynamicznego ze sprzężeniem zwrotnym dla kilku różnych wartości współczynnika  $k_t$ . Założono we wszystkich przypadkach taką samą częstotliwość  $f = 50$  Hz. Dla wartości  $k_t > 2,5E6$  pętle modelu dynamicznego nie różnią się zasadniczo od pętli modelu statycznego. Operatory histerezowe przełączane są na tyle szybko, że nie ma to wpływu na wartość  $B$  przy tej częstotliwości. Gdy wartość  $k_t$  maleje, pętle histerezy obejmują większe powierzchnie, a maksymalna wartość  $B$  nieznacznie maleje.



Rys. 4. Rodzina symetrycznych małych pętli histerezy modelu dynamicznego ze sprzężeniem zwrotnym przy różnych wartościach współczynnika  $k_t$ . Częstotliwość przemagnesowywania 50 Hz

Energia dyssypacji reprezentowana przez pole pętli podzielona na okres cyklu pętli wyraża w modelu

dynamicznym straty na histerezę oraz straty na prądy wirowe. Te wypadkowe straty mocy w funkcji współczynnika  $k_t$  pokazano na rys. 5.



Rys.5. Straty mocy wyznaczone na podstawie dynamicznego modelu histerezy ze sprzężeniem zwrotnym w funkcji współczynnika  $k_t$ . Częstotliwość przemagnesowywania materiału  $f = 50$  Hz, maksymalna indukcja  $B_{max} = 0,8$  T

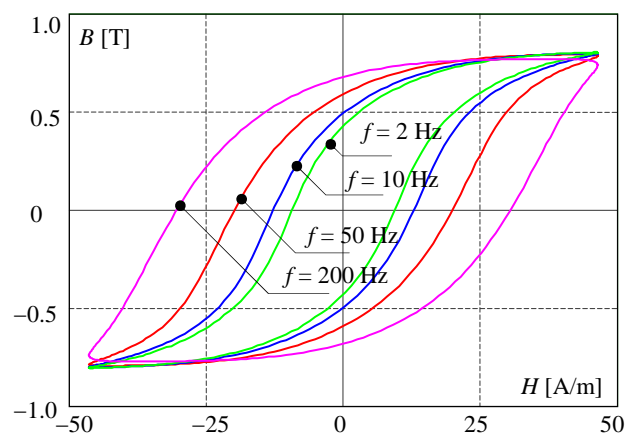
Skala dla  $k_t$  jest na tym wykresie logarytmiczna. Straty obliczone przy  $k_t \geq 2,5E6$  zawierają praktycznie tylko składnik histerezowy równy 2,8 W. Stąd w celu obliczenia  $k_t$  należy pomierzyć wypadkowe straty mocy przy znanej częstotliwości i wartości maksymalnej indukcji w rdzeniu. Straty wypadkowe są sumą strat od histerezy i prądów wirowych

$$P(k_t^*) = P(k_t = 2,5E6) + P_{wirowe} \quad (8)$$

gdzie  $P(k_t^*)$  oznacza wypadkowe straty mocy w rdzeniu,  $P(k_t = 2500000)$  oznacza straty mocy na histerezę (model statyczny), natomiast  $P_{wirowe}$  oznacza straty mocy od prądów wirowych.

Dla toroidalnego rdzenia transformatora opisanego w [3,9] zmierzona wartość  $P(k_t^*) = 5,58$  W, przy częstotliwości  $f = 50$  Hz i maksymalnej indukcji  $B_r = 0,8$  T. Tę samą wartość mocy uzyskuje się na podstawie modelu dynamicznego ze sprzężeniem zwrotnym dla  $k_t^* \approx 27250$ .

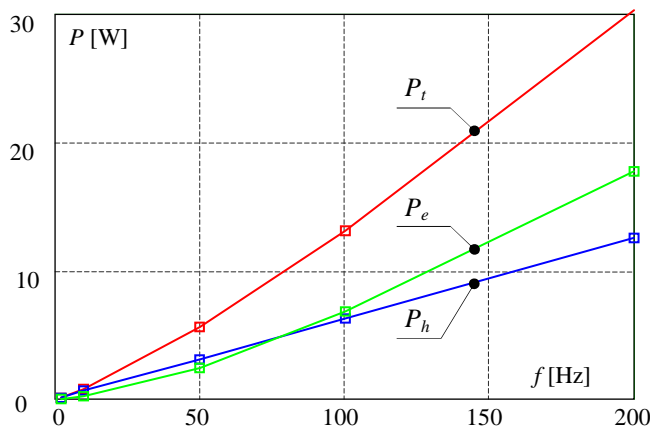
Na podstawie obliczonego współczynnika  $k_t = 27250$  charakteryzującego dynamiczny MHP ze sprzężeniem zwrotnym dla materiału blachy ET114-27 wykonano symulację małych pętli histerezy przy różnych częstotliwościach (rys. 6).



Rys.6. Symetryczne małe pętle histerezy obliczone z dynamicznego MHP ze sprzężeniem zwrotnym przy różnych częstotliwościach. Współczynnik  $k_t = 27250$

Założono przy tym sinusoidalny przebieg natężenia pola magnetycznego  $H(t)$  dla wszystkich przypadków. Pętla przy częstotliwości  $f = 2$  Hz jest bliska tej, jaką generuje model statyczny. Ze wzrostem częstotliwości pole pętli wzrasta. W zakresie częstotliwości  $f$  od 0 Hz do 50 Hz amplituda indukcji nieznacznie obniża się od wartości  $B = 0,805$  T. Przy częstotliwości  $f = 200$  Hz obserwuje się istotne zmniejszenie indukcji maksymalnej do wartości  $B = 0,77$  T.

Wypadkowe straty mocy oraz ich rozdział na składnik histerezowy i wiroprądowy obliczone dla rodziny małych pętli histerezy w funkcji częstotliwości pokazano na rys. 7. Założono sinusoidalny przebieg natężenia pola magnetycznego  $H(t)$  dla wszystkich przypadków w zakresie pokazanym na rys. 6.



Rys. 7. Wypadkowe straty mocy  $P_t$  oraz ich składnik histerezowy  $P_h$  i wiroprądowy  $P_e$  wyznaczone na podstawie dynamicznego MHP ze sprzężeniem zwrotnym w funkcji częstotliwości  $f$ . Symulacje wykonano dla  $k_f = 27250$ , przy sinusoidalnym przebiegu  $H(t)$  w zakresie pokazanym na rys. 6

Wartość strat oraz proporcje składników (histerezowy i wiroprądowy) w dynamicznym MHP ze sprzężeniem zwrotnym zależą od szeregu czynników. Do najważniejszych należą: częstotliwość, zakres zmian natężenia pola magnetycznego w materii oraz kształt funkcji  $H(t)$ . Wyniki przytoczone na rys. 6 są wybranym szczególnym przypadkiem magnesowania rdzenia toroidalnego (związane z blachy ET114-27) i pokazują niektóre możliwości zaimplementowanego dynamicznego modelu histerezy Preisacha, który może być zastosowany dla dowolnego przebiegu natężenia  $H(t)$  i dowolnego zakresu jego zmian.

## 5. WNIOSKI KOŃCOWE

W dynamicznym modelu histerezy magnetycznej opartej na teorii Preisacha operatory histerezowe

zmieniają swoje stany z pewną zwłoką, którą można zdefiniować za pomocą równania różniczkowego. W równaniu tym stan przejściowy operatora zależy od wartości chwilowej natężenia pola magnetycznego  $H(t)$  działającego na operator oraz od parametru  $k_f$ , który uwzględnia właściwości materiałowe rdzenia.

W artykule przedstawiono autorski dynamiczny model histerezy magnetycznej ze sprzężeniem zwrotnym. Wyznaczono wartość parametru  $k_f$  dla układu rdzenia toroidalnego związanego z blachy transformatorowej typu ET114-27. Wykonano badania symulacyjne dla różnych wartości częstotliwości. Wykazano wpływ wzrostu częstotliwości przemagnesowywania rdzenia na wzrost strat wypadkowych. Model może być zastosowany dla różnych funkcji czasowych natężenia pola magnetycznego  $H(t)$ .

## 5. BIBLIOGRAFIA

1. Mayergoyz I. D.: Mathematical models of hysteresis, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. MAG-22, No. 5, Sept. 1986, pp. 603-608.
2. Wilk A.: Representation of magnetic hysteresis in tape wound core using Preisach's theory, Zesz. Nauk. Wydz. Elektrotech. i Automat. Politechniki Gdańskiej, Nr 30, Gdańsk 2011, pp. 133-138.
3. Wilk A.: Representation of magnetic hysteresis in tape wound core using feedback Preisach model, Zesz. Nauk. Wydz. Elektrotech. i Automat. Politechniki Gdańskiej, Nr 36, Gdańsk 2013, pp. 175-178.
4. Bertotti G.: Dynamic generalization of the scalar Preisach model of hysteresis. IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 28, No. 5, September 1992, pp. 2599-2601.
5. Bertotti G., Pasquale M.: Physical interpretation of induction and frequency dependence of power losses in soft magnetic materials. IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 28, No. 5, September 1992, pp. 2787-2789.
6. Mayergoyz I.D.: Dynamic Preisach models of hysteresis, IEEE Transactions on Magnetics, Vol.24. No.6, Nov. 1988, pp. 2925-2927.
7. Rouve L.L., Waeckerle T., Kedous-Lebouc A., Coulomb J.L.: Determination of parameter  $k$  of the generalized dynamic Preisach model. IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 32, No. 3, May 1996. pp. 1124-1127.
8. Della Torre E., Vajda F.: Parameter identification of complete-moving-hysteresis model using major loop data. IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 30, No. 6, November 1994. pp. 4987-5000.
9. Wilk A.: Modelowanie obwodowo-polowe transformatorów trakcyjnych w aspekcie diagnostyki opartej na modelu referencyjnym, Politechnika Gdańska, Monografie 128, Gdańsk 2012.

## DYNAMIC MODEL OF MAGNETIC HYSTERESIS

**Key-words:** magnetic hysteresis, hysteretic operator, dynamic Preisach model

The paper presents the dynamic hysteresis model based on the Preisach theory. In this model the transient state of each hysteretic operator is described by differential equation. In this equation the parameter  $k$  is involved that takes into account the material properties of magnetic core. The dynamic model is coupled with feedback model to increase accuracy of simulation results. Simulations results of hysteresis loops are presented for different frequencies of the magnetic field  $H(t)$ .