



**POLITECHNIKA
GDAŃSKA**

WYDZIAŁ FIZYKI TECHNICZNEJ
I MATEMATYKI STOSOWANEJ



Imię i nazwisko autora rozprawy: Karol Wroński
Dyscyplina naukowa: matematyka

ROZPRAWA DOKTORSKA

Tytuł rozprawy w języku polskim: Istnienie i regularność heteroklinicznych rozwiązań równania Allena-Cahna z anizotropowym operatorem eliptycznym.

Tytuł rozprawy w języku angielskim: Existence and regularity of heteroclinic solutions of the Allen-Cahn type problem with an anisotropic elliptic operator.

Promotor	Drugi promotor
<i>podpis</i>	
prof. dr hab. Marek Izydorek	
Promotor pomocniczy	Kopromotor
<i>podpis</i>	
dr inż. Jakub Maksymiuk	

Gdańsk, 17.09.2019

Spis treści

Wstęp	1
Spis oznaczeń	5
Rozdział 1. Przydatne definicje i lematy	7
Rozdział 2. Twierdzenie o regularności słabych rozwiązań	15
Rozdział 3. Rozwiązania heterokliniczne problemu Allena-Cahna	29
Uwagi końcowe	39
Bibliografia	41

Wstęp

Celem niniejszej rozprawy jest udowodnienie dwóch twierdzeń dotyczących równań różniczkowych cząstkowych typu eliptycznego. Pierwsze mówi o regularności słabych rozwiązań pewnej klasy równań eliptycznych z operatorem anizotropowym. Drugie mówi o istnieniu heteroklinicznych rozwiązań problemu typu Allena-Cahna z takim operatorem.

Eliptyczne równanie typu Allena-Cahna najczęściej jest zapisywane w postaci

$$-\Delta u(x) + F_u(x, u(x)) = 0,$$

przy dość różnorodnych dziedzinach i warunkach brzegowych. Charakterystyczną cechą rozróżniającą równanie Allena-Cahna od innych równań eliptycznych jest funkcja $F(x, \cdot)$, o której zakłada się, że ma co najmniej dwa miejsca zerowe będące minimami. Typowym przykładem takiej funkcji jest $F(u) = u^2(u - 1)^2$. Równanie ma swoje źródło w artykule Allena i Cahna [4], którzy badali własności stopów metali. Równanie tego typu znalazło także swoje zastosowanie do opisu wielu innych procesów fizycznych jak na przykład badanie przejść fazowych [31], przetwarzanie obrazów [7], czy rozwój nowotworów [25]. Równanie Allena-Cahna jest szczególnym przypadkiem modelu reakcji-dyfuzji i odpowiada mu funkcjonał energii

$$\int \frac{1}{2}|u(x)|^2 + F(x, u(x))dx$$

Zagadnienie reakcji-dyfuzji jest szerzej opisane w [9, 12, 17].

Równanie Allena-Cahna opisuje dużo różnorodnych zjawisk więc było wielokrotnie badane przez matematyków i istnieje wiele czysto matematycznych artykułów na ten temat. Rozważanych było wiele różnych typów rozwiązań tego równania (wiele przykładów znajdziemy np. w [24]). W tej rozprawie udowodnimy istnienie rozwiązań spełniających następujące warunki:

$$u(x + ke_i) = u(x) \text{ dla } 1 < i \leq n, \quad \lim_{x_1 \rightarrow -\infty} u(x) = 0 \quad \text{ i } \quad \lim_{x_1 \rightarrow +\infty} u(x) = 1,$$

czyli okresowych w $n - 1$ ostatnich współrzędnych i heteroklinicznych w pierwszej zmiennej x_1 . Opisane powyżej rozwiązania heterokliniczne można interpretować np. jako stan



przejściowy między dwoma stanami fizycznymi odpowiadającymi miejscom zerowym F , czyli rozwiązaniom stałym. Takie rozwiązania (jak również inne typy rozwiązań) są rozważane w artykule Rabinowitza i Stredulinskiego [24]. Także Alessio, Jeanjean i Montecchiari w [2] i [3] rozważają ten typ rozwiązań, ale przy szczególnej postaci potencjału: $F(x, u) = f(x)F(u)$.

Jest widoczna wyraźna potrzeba uwzględniania niestandardowych operatorów eliptycznych, ponieważ równanie Allena-Cahna czy ogólniej, problem reakcji-dyfuzji w wielu zastosowaniach jest opisywany równaniami z niestandardowymi operatorami eliptycznymi. W wielu materiałach (takich jak np. kryształy) dyfuzja zachodzi anizotropowo, czyli w różnym stopniu zależnie od kierunku [9]. Równanie Allena-Cahna może też być stosowane gdy zamiast zjawiska dyfuzji zachodzi zjawisko super-dyfuzji. Wówczas w równaniu zamiast laplasjanu rozważa się ułamkowy s -laplasjan [14, 30].

W matematycznych artykułach na temat problemu Allena-Cahna jest wielokrotnie cytowany artykuł Mosera [21]. Wyniki z tej pracy zostały później uogólnione przez Bangerta [5], gdzie bada on minima funkcjonału $\int L(x, u(x), \nabla u(x)) dx$ na $W_{loc}^{1,2}$, zaś funkcja L jest okresowa w zmiennej x zaś w zmiennej ∇u jest wypukła. Funkcjonał ten jest bardzo ogólnej postaci, w szczególności nie musi pochodzić od laplasjanu mimo, że zakładany jest wzrost kwadratowy L względem ∇u . Operator eliptyczny w równie ogólnej postaci rozważany jest także w pracy Llave i Valdinoci [10]. Tam również zakładany jest kwadratowy wzrost operatora.

W literaturze dotyczącej problemu Allena-Cahna istotnie dominują operatory ze wzrostem kwadratowym, zaś stosunkowo mało jest wyników uwzględniających operatory mniej standardowe. W szczególności, nie było znane żadne twierdzenie o istnieniu i pełnej regularności rozwiązań heteroklinicznych dla problemu Allena-Cahna z operatorem o innym wzroście. Takie twierdzenie udowodniłem w artykule [32], gdzie rozważam operator eliptyczny w postaci dywergencyjnej $\operatorname{div}(\nabla G(\nabla u(x)))$, przy założeniach izotropowego wzrostu G z m -tą potęgą. Z uwagi na większy wzrost G przestrzeń $W_{loc}^{1,2}$ została tam zastąpiona przez $W_{loc}^{1,m}$. Oczywiście, gdy $G = \frac{1}{2}|\cdot|^2$ to $\operatorname{div}(\nabla G(\nabla u(x))) = \Delta u(x)$.

W tej rozprawie powyższy wynik zostanie uogólniony. W rozdziale 3 zostanie wykazane, że w problemie typu Allena-Cahna operator eliptyczny $\operatorname{div}(\nabla G(\nabla u(x)))$ może pochodzić od anizotropowej funkcji wypukłej G . Analogicznie, przestrzenie Sobolewa $W_{loc}^{1,m}$ zostaną zastąpione anizotropowymi przestrzeniami Orlicza-Sobolewa $W_{loc}^{1,G}$.

Rozważany problem typu Allena-Cahna będzie więc miał następującą postać:

$$\operatorname{div}(\nabla G(\nabla u(x))) + F_u(x, u(x)) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

gdzie F ma dwa minima i jest okresowe względem x . Precyzyjnie sformułowane założenia znajdują się w rozdziale 3.

Rozważane uogólnienie nie jest inspirowane żadnym konkretnym problemem fizycznym, ale niestandardowe operatory eliptyczne związane z problemem reakcji-dyfuzji są często rozpatrywane, więc warto przeanalizować problem również z punktu widzenia potencjalnego użycia przestrzeni Orlicza-Sobolewa.

Zastosowanie operatora pochodzącego od anizotropowej funkcji G o wzroście wielomianowym oraz przestrzeni Orlicza-Sobolewa $W^{1,G}$ spowodowało szereg technicznych trudności. Główną był brak twierdzenia o regularności słabych rozwiązań dla anizotropowych operatorów typu $\operatorname{div}(\nabla G(\nabla u(x)))$. Dotychczas znane twierdzenia (na przykład podane w pracach Marcellini [19] lub [20]) okazały się niemożliwe do zastosowania w rozważanym problemie ze względu na słabe powiązanie przestrzeni funkcyjnej ze wzrostem funkcjonału. Powstała więc potrzeba udowodnienia odpowiedniego twierdzenia o regularności słabych rozwiązań. Jest to twierdzenie 2.1 z rozdziału 2. Dowód bazuje na metodach zbliżonych do dowodu twierdzenia 2.3 z artykułu Marcellini [20] oraz twierdzenia 3.1 z artykułu Siepe [27].

Pierwszy i jednocześnie główny wynik rozprawy jest następujący:

- przy założeniach (G_1) - (G_7) oraz (A_1) - (A_3) z rozdziału 2 słabe rozwiązania równania (1) są klasy $W_{loc}^{1,\infty} \cap W_{loc}^{2,2}$.

Twierdzenie to jest sformułowane z założeniami słabszymi niż założenia twierdzenia o istnieniu rozwiązań heteroklinicznych dowodzonego w rozdziale 3. W szczególności, założenia na funkcję F są dużo ogólniejsze niż w równaniu Allena-Cahna. Dzięki temu samo twierdzenie o regularności jest ciekawym rezultatem w teorii równań eliptycznych.

W twierdzeniu 2.1 zostało założone, że funkcja G spełnia warunki Δ_2 i ∇_2 , a więc jest ograniczona przez wielomiany. Niekoniecznie jednak posiada wzrost związany z jedną ustaloną potęgą. Co więcej, dopuszczony jest też wzrost anizotropowy, tzn. funkcja G może w istotnie różny sposób zależeć od wszystkich pochodnych cząstkowych, a nie tylko od modułu $|Du|$.

W pracy [19] podobne twierdzenie o regularności dowodzone jest przy założeniu p, q - wzrostu. W [20] rozważany jest funkcjonał o wzroście wielomianowym, który może być anizotropowy, ale przestrzeń w której badany jest problem wyznaczona jest przez funkcję izotropową ograniczającą z góry wzrost operatora. W [27] pojawiają się anizotropowe warunki wzrostu, a przestrzeń w której poszukiwane są rozwiązania jest bezpośrednio wyznaczona przez funkcję G . W [27] jednak badany funkcjonał jest w prostszej postaci $\int G(Du)dx$ (czyli



bez zależności od u i x). Główną różnicą pomiędzy twierdzeniem 2.1 a wynikami Marcellini jest zakładana wyjściowa klasa całkowności słabych rozwiązań (czyli przestrzeni w której poszukiwane są minima funkcjonału). W tej rozprawie zakłada się, że są one całkowne po złożeniu pochodnej z funkcją G (czyli $\int G(Dv)dx < \infty$). Marcellini zakłada całkowność pochodnej złożonej z pewną funkcją izotropową, która rośnie szybciej niż wynikałoby to z postaci funkcjonału. Przestrzeń której używa jest podprzestrzenią użytego tu $W^{1,G}$. Rozważanie w [20] takiej przestrzeni i izotropowego warunku wzrostu ułatwia dowód, ale może powodować trudności w zastosowaniu metod wariacyjnych, gdyż ciąg minimalizujący może nie posiadać granicy w tej przestrzeni. Celowość stosowania przestrzeni dobrze powiązanej z funkcjonałem widać w szczególności w rozdziale 3.

Anizotropowe funkcje wypukłe mogą nie być monotoniczne ze względu na moduł, tzn. możliwe jest, że $G(\xi_1) > G(\xi_2)$ gdy $|\xi_1| < |\xi_2|$. Między innymi z tego powodu bezpośrednie stosowanie funkcji anizotropowych w dowodzie twierdzenia 2.1 powoduje różnorodne trudności techniczne. To sprawia, że dowód tego twierdzenia (a w szczególności wiele szacowań podanych w rozdziale 2.3) wymaga nieco innych technik, niż dowód wspomnianego wyżej twierdzenia 2.3 z [20].

Drugim głównym wynikiem jest twierdzenie o istnieniu klasycznych rozwiązań heteroklinicznych problemu (1) będące uogólnieniem wcześniejszego wyniku z [32].

- Jeśli G spełnia warunki (G_1) - (G_7) podane w rozdziale 2 oraz F spełnia założenia (F_1) - (F_4) podane w rozdziale 3, to równanie (1) posiada klasyczne rozwiązania heterokliniczne.

Dowód tego twierdzenia wykorzystuje techniki zbliżone do stosowanych w artykule [24] (twierdzenie 2.1). Jedną z różnic między dowodami jest widoczna na przykład w lemacie 3.8, gdzie niemożliwe okazało się zastosowanie klasycznej zasady maksimum i konieczne było użycie ogólniejszych twierdzeń z [23]. Kolejną istotną różnicą jest zastosowanie twierdzenia o regularności 2.1, zamiast standardowych twierdzeń o regularności odnoszących się do innych operatorów o wzroście potęgowym.

Rozprawa jest podzielona na trzy części. W rozdziale 1 podane zostaną potrzebne definicje i lematy dotyczące ilorazów różnicowych i słabych pochodnych. W kolejnym rozdziale zostanie sformułowane i udowodnione twierdzenie dotyczące regularności słabych rozwiązań. W rozdziale 3 będzie udowodnione twierdzenie o istnieniu rozwiązań heteroklinicznych równania typu Allena-Cahna.



Spis oznaczeń

Poniżej zostały wymienione wybrane symbole, które będą często stosowane w dalszych częściach rozprawy:

- e_s - s -ty wektor bazy standardowej w \mathbb{R}^n ;
- Ω - jeśli nie wskazano inaczej dziedzina w \mathbb{R}^n (zbiór otwarty i spójny);
- $\Omega + he_s$ - zbiór Ω przesunięty o wektor he_s ;
- $\Omega_{|h|} = \{x \in \Omega : d(x, \partial\Omega) > |h|\}$;
- $dist$ - odległość zbiorów lub punktu od zbioru;
- χ_A - funkcja charakterystyczna zbioru A ;
- $\mu(A)$ - miara Lebesgue'a zbioru A ;
- D - pochodna funkcji, D_s pochodna cząstkowa funkcji po s -tej zmiennej, czasem też oznaczana jako F_{x_s} lub G_{ξ_s} ;
- Δ_h - iloraz różnicowy o przyroście h w s -tej zmiennej, oznaczany też jako Δ_h^s przy czym gdy s pozostaje ustalone to jest w oznaczeniach pomijane;
- $div(\nabla G(\nabla u(x))) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (G_{\xi_i}(\nabla u(x)))$;
- $B_r(x)$ - kula o środku x i promieniu r , jeśli środek jest raz ustalony i niezmienny w całych rachunkach kule zapisywane są po prostu jako B_r ;
- $L^G(\Omega) = \left\{ \xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n : \xi\text{-mierzalna, } \exists \lambda > 0 \int_{\Omega} G(\lambda \xi) dx < \infty \right\}$ - przestrzeń Orlicza funkcji o wartościach wektorowych określonych na Ω ;
- $W^{1,G}(\Omega)$ - przestrzeń Orlicza-Sobolewa funkcji skalarnych określonych na Ω , których słabe pochodne należą do $L^G(\Omega)$;
- 2^* - krytyczny wykładnik Sobolewa równy $\frac{2n}{n-2}$.



Przydatne definicje i lematy

1.1. G-funkcje i przestrzenie Orlicza-Sobolewa

G-funkcje są naturalnym uogólnieniem funkcji Younga na dziedziny wielowymiarowe. G-funkcją (w sensie definicji podanej przez Trudingera w [29]) nazywamy wypukłą, parzystą i półciągłą z dołu funkcję $G: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$ spełniającą warunki $G(0) = 0$, $G(\infty) = \infty$ oraz taką, że $G^{-1}(\infty)$ jest oddzielone od 0.

W tym podrozdziale zakładamy, że $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ jest ograniczoną dziedziną (czyli zbiorem otwartym, spójnym i ograniczonym).

Definicja 1.1. *Przestrzeń Orlicza $L^G(\Omega)$ nazywamy zbiór*

$$L^G = \left\{ \xi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n: \xi\text{-mierzalna}, \exists \lambda > 0 \int_{\Omega} G(\lambda \xi) dx < \infty \right\}.$$

Przestrzeń Orlicza $L^G(\Omega)$ jest przestrzenią Banacha z normą Luxemburga

$$\|\xi\|_{L^G(\Omega)} = \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_{\Omega} G\left(\frac{\xi}{\lambda}\right) dx \leq 1 \right\}.$$

Tak zdefiniowane przestrzenie Orlicza są zbyt ogólne dla naszych rozważań. W wielu artykułach (np. [6, 8, 15, 26, 28, 29]) przyjmowane są dodatkowe założenia na G , w zależności od tego jakie własności przestrzeni Orlicza są wymagane. Również w tej rozprawie klasa dopuszczalnych funkcji zostanie zawężona.

Analogicznie do klasycznych przestrzeni Sobolewa, na bazie przestrzeni Orlicza definiuje się przestrzenie Orlicza-Sobolewa.

Definicja 1.2. *Słabo różniczkowalna funkcja $u \in L^2(\Omega)$ należy do przestrzeni Orlicza-Sobolewa $W^{1,G}(\Omega)$ gdy $Du \in L^G(\Omega)$.*



Przestrzeń $W^{1,G}(\Omega)$ z normą

$$\|u\|_{W^{1,G}(\Omega)} = \|u\|_{L^2(\Omega)} + \|Du\|_{L^G(\Omega)}$$

jest przestrzenią Banacha.

Standardowymi warunkami ograniczającymi wzrost G -funkcji są warunki Δ_2 i ∇_2 . Pierwszy z nich ma postać

$$G(2\xi) \leq cG(\xi), \quad \text{dla } |\xi| \geq M, \quad (\Delta_2)$$

a drugi

$$G(2\xi) \geq cG(\xi), \quad \text{dla } |\xi| \geq M. \quad (\nabla_2)$$

Gdy $M > 0$ to mówimy, że warunki te są spełnione w nieskończoności, a jeśli $M = 0$ to mówimy, że są spełnione globalnie.

Wiadomo, że jeżeli G spełnia warunek Δ_2 , to jej wzrost jest ograniczony z góry przez funkcję wielomianową. Jeżeli G spełnia warunek ∇_2 , wtedy jej wzrost jest ograniczony z dołu przez funkcję $|x|^\alpha$, dla pewnego $\alpha > 1$. Można to w skrócie podsumować jako $L^p \subset L^G \subset L^q$ gdy $|\cdot|^q \prec G \prec |\cdot|^p$. Precyzyjne sformułowanie i dowód tych faktów znajduje się np. w [11] - lemat 2.4.

Wprost z definicji wynika, że jeśli funkcja wypukła G spełnia warunek Δ_2 , to spełnia także nierówność $G(k\xi) \leq cG(\xi)$ z dowolną stałą k (przy ewentualnie innym c i M). Wobec tego przy założeniu Δ_2 warunek definiujący przestrzeń Orlicza, czyli $\int_{\Omega} G(\lambda\xi) dx < \infty$, można zastąpić prostszym warunkiem $\int_{\Omega} G(\xi) dx < \infty$.

Jeśli założymy, że G spełnia warunki Δ_2 i ∇_2 w nieskończoności oraz $|\Omega| < \infty$, to wtedy wyznaczone przez nią przestrzenie Orlicza i Orlicza-Sobolewa są refleksywne ([26] wniosek 7.2). Jeśli $|\Omega| = \infty$, to warunki Δ_2 i ∇_2 muszą być spełnione globalnie.

Na potrzeby dowodu lematu 1.5 wykażemy następujący fakt:

Lemat 1.3. Niech G będzie G -funkcją spełniającą warunek Δ_2 w nieskończoności i spełniającą warunek $|\cdot|^\alpha \prec G \prec |\cdot|^\beta$, gdzie $2 \leq \alpha \leq \beta$. Załóżmy ponadto, że $\beta \leq \alpha^*$. Przyjmujemy $\alpha^* = \frac{n\alpha}{n-\alpha}$ gdy $\alpha < n$ oraz α^* dowolne gdy $\alpha \geq n$. Przez ξ oznaczmy dowolny ustalony niezerowy wektor i zdefiniujmy funkcję $\tilde{G}(t) = G(t\xi)$. Wówczas przestrzeń Orlicza-Sobolewa $W^{1,G}(\Omega)$ zawiera się w przestrzeni Orlicza $L^{\tilde{G}}(\Omega)$.

Dowód: Prawdziwy jest ciąg zawierania

$$W^{1,G}(\Omega) \subset W^{1,\alpha}(\Omega) \subset L^{\alpha^*}(\Omega) \subset L^\beta(\Omega) \subset L^{\tilde{G}}(\Omega)$$

Pierwsze wynika z $|\cdot|^\alpha \prec G$ i definicji $W^{1,G}$. Kolejne jest konsekwencją standardowych włożeń Sobolewa (zob. twierdzenie 4.12 z [1]). Trzecie zawieranie jest oczywiste, gdyż

$\beta \leq \alpha^*$. Czwarte włożenie wynika z tego, że $\tilde{G} \prec |\cdot|^\beta$, co jest konsekwencją definicji \tilde{G} i założenia $G \prec |\cdot|^\beta$. \square

W dalszych rozważaniach, istotną rolę odgrywać będą także lokalne przestrzenie Orlicza - Sobolewa $W_{\text{loc}}^{1,G}(\Omega)$. Przestrzenie te definiujemy standardowo

$$W_{\text{loc}}^{1,G}(\Omega) = \{u \in W^{1,G}(K) : K \subset\subset \Omega\}.$$

Przestrzenie $W_{\text{loc}}^{1,G}(\Omega)$ są przestrzeniami metrycznymi zupełnymi z metryką daną wzorem

$$d(u, v) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|u - v\|_{W^{1,G}(K_n)}}{2^k(1 + \|u - v\|_{W^{1,G}(K_n)})},$$

gdzie K_n są tak wybrane, aby $K_n \subset\subset K_{n+1}$ oraz $\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$.

1.2. Ilorazy różnicowe i słabe pochodne

Ilorazy różnicowe pełnią ważną rolę w dowodach twierdzeń o regularności rozwiązań. W szczególności cały dowód pierwszej części twierdzenia 2.1 będzie oparty o ich własności. Poniżej podane zostaną własności ilorazów różnicowych, które będą wykorzystywane w tej pracy. Są one w większości dobrze znane w literaturze (np. [13, 16, 27]). W wybranych lematkach zostaną podane także dowody, gdyż metody tam stosowane są interesujące z punktu widzenia dalszych rozważań. W całym rozdziale przyjmujemy, że Ω jest dziedziną. Symbolem D oznaczamy pochodną a symbolem D_s pochodną cząstkową po s -tej zmiennej. W tym rozdziale będziemy zakładać, że funkcja G spełnia warunek Δ_2 w nieskończoności.

Definicja 1.4. *Ilorazem różnicowym funkcji $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ z przyrostem $h \in \mathbb{R}$ w kierunku wektora e_s nazywamy funkcję*

$$\Delta_h^s u(x) = \frac{u(x + he_s) - u(x)}{h}$$

określoną na $\Omega_{|h|} = \{x \in \Omega : d(x, \partial\Omega) > |h|\}$.

W dalszych rachunkach, jeśli tylko górny indeks s będzie pozostawał dowolnie ustalony i niezmienny, to zostanie w zapisach pominięty.

Pierwszy lemat jest inspirowany lematem 3.3 z [20] i podaje elementarne własności ilorazów różnicowych, wynikające wprost z definicji ilorazu różnicowego.

Lemat 1.5. *Niech $u, w \in W^{1,G}(\Omega)$. Wówczas:*

$$(A) \quad \Delta_h u \in W^{1,G}(\Omega_{|h|}),$$

- (B) jeśli $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełnia warunek Lipschitza, jest nieparzysta, niemalejąca i wypukła na $[0, \infty)$, to $\psi(\Delta_h u) \in W^{1,G}(\Omega_{|h|})$,
- (C) jeśli ponadto $\eta \in C_0^1(\Omega)$ a G jest takie jak w lemacie 1.3, to $\eta\psi(\Delta_h u) \in W^{1,G}(\Omega_{|h|})$,
- (D) $D_i(\Delta_h u) = \Delta_h(D_i u)$,
- (E) jeśli $\text{supp } u \subset \Omega_{|h|}$ lub $\text{supp } w \subset \Omega_{|h|}$, to $\int u \Delta_h w \, dx = - \int w \Delta_{-h} u \, dx$,
- (F) $\Delta_h(uw)(x) = u(x + he_s) \Delta_h w(x) + w(x) \Delta_h u(x)$.

Dowód: Własność (A) wynika wprost z liniowości przestrzeni.

Niech L będzie stałą Lipschitza dla ψ . Wówczas

$$G(D(\psi(\Delta_h u))) = G(\psi'(\Delta_h u)D(\Delta_h u)) \leq G(LD(\Delta_h u)).$$

Jako, że $\Delta_h u \in W^{1,G}(\Omega_{|h|})$ to prawa strona powyższej nierówności jest całkowna a więc również lewa jest całkowna, co dowodzi, że $\psi(\Delta_h u) \in W^{1,G}(\Omega_{|h|})$.

Dowód (C) rozpoczniemy od nierówności wynikającej z wypukłości G :

$$\begin{aligned} G(D(\eta\psi(\Delta_h u))) &= G(D\eta\psi(\Delta_h u) + \eta D(\psi(\Delta_h u))) \leq \\ &\leq \frac{1}{2}G(2D\eta\psi(\Delta_h u)) + \frac{1}{2}G(\eta D(\psi(\Delta_h u))) \end{aligned}$$

Całkowalność drugiego składnika prawej strony wynika z punktu (B) i ograniczoności η .

Z własności ψ wynika, że $|\psi(t)| \leq L|t|$. Ograniczoność $D\eta$ gwarantuje istnienie takiego wektora ξ_0 , że $G(D\eta) \leq G(\xi_0)$ na Ω . Wówczas $G(2D\eta\psi(\Delta_h u)) \leq G(2\xi_0 L|\Delta_h u|)$. Przyjmując w lemacie 1.3 $\xi = 2L\xi_0$ otrzymujemy $\Delta_h u \in L^{\tilde{G}}(\Omega_{|h|})$. To gwarantuje całkowalność $G(2D\eta\psi(\Delta_h u))$ i kończy dowód własności (C).

Kolejny punkt jest bezpośrednią konsekwencją liniowości pochodnej. Własność (E) wynika z definicji ilorazu różnicowego:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u \Delta_h w \, dx &= \frac{1}{h} \int_{\Omega} u(x)w(x + he_s) - u(x)w(x) \, dx = \\ &= -\frac{1}{h} \int_{\Omega} u(x)w(x) - u(x - he_s)w(x) \, dx = - \int_{\Omega} w \Delta_{-h} u \, dx \end{aligned}$$

Również z definicji dowodzimy ostatniej równości:

$$\begin{aligned} \Delta_h(uw)(x) &= \\ &= \frac{1}{h} (u(x + he_s)w(x + he_s) - u(x + he_s)w(x) + u(x + he_s)w(x) - u(x)w(x)) = \\ &= u(x + he_s)\Delta_h w(x) + w(x)\Delta_h u(x) \end{aligned}$$

□

Kolejne lematy pochodzą z książki Giusti [13]. Opisują one związki ilorazów różnicowych i słabych pochodnych funkcji należących do przestrzeni Sobolewa.

Lemat 1.6. Niech $\Omega_0 \subset\subset \Omega$, $|h| < d(\Omega_0, \partial\Omega)$, $1 \leq p < \infty$. Dla każdego $v \in W^{1,p}(\Omega)$ zachodzą nierówności

$$\int_{\Omega_0} |\Delta_h v|^p dx \leq \int_{\Omega} |D_s v|^p dx \leq \int_{\Omega} |Dv|^p dx.$$

Dowód: Wprost z definicji ilorazu różnicowego mamy $\Delta_h v = \int_0^1 D_s v(x + the_s) dt$. Z nierówności Jensena wynika, że

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_0} |\Delta_h v|^p dx &= \int_{\Omega_0} \left| \int_0^1 D_s v(x + the_s) dt \right|^p dx \leq \int_0^1 \int_{\Omega_0} |D_s v(x + the_s)|^p dx dt = \\ &= \int_0^1 \int_{\Omega_0 + the_s} |D_s v|^p dx dt \leq \int_{\Omega} |D_s v|^p dx \leq \int_{\Omega} |Dv|^p dx. \end{aligned}$$

Symbolem $\Omega_0 + the_s$ oznaczono zbiór $\{x + the_s : x \in \Omega_0\}$. \square

Jeśli słaba pochodna istnieje w $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$, to ilorazy różnicowe są do niej zbieżne w $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$.

Lemat 1.7. Załóżmy, że funkcja $v \in L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ posiada słabą pochodną $D_s v \in L^p_{\text{loc}}(\Omega)$. Wówczas $\Delta_h v \rightarrow D_s v$ w $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$.

Dowód: Weźmy $\Sigma \subset\subset \Omega$ i dowolne $w \in C^1(\Sigma) \cap W^{1,p}(\Sigma)$. Wówczas stosując lemat 1.6, dla każdego $\Sigma \subset\subset \Omega$ mamy

$$\begin{aligned} \|\Delta_{h_n} v - D_s v\|_{L^p(\Sigma)} &\leq \|\Delta_{h_n} v - \Delta_{h_n} w\|_{L^p(\Sigma)} + \|\Delta_{h_n} w - D_s w\|_{L^p(\Sigma)} + \|D_s w - D_s v\|_{L^p(\Sigma)} \leq \\ &\leq 2\|D_s(w - v)\|_{L^p(\Sigma)} + \|\Delta_{h_n} w - D_s w\|_{L^p(\Sigma)}. \end{aligned}$$

Funkcje klasy C^1 tworzą gęstą podprzestrzeń $W^{1,p}$ oraz $\Delta_{h_n} w \rightarrow D_s w$ w $L^p(\Sigma)$, więc obydwa składniki mogą być wybrane dowolnie małe, co kończy dowód. \square

Następny lemat pokazuje, że z ograniczoności norm ilorazów różnicowych można wywnioskować istnienie słabej pochodnej. Jest to prosta modyfikacja lematu 8.2 z [13] polegająca na zastąpieniu ogólnej zbieżności $h \rightarrow 0$ ciągiem $h_n \rightarrow 0$. Będzie to ważne narzędzie wykorzystywane w dowodzie pierwszej części twierdzenia 2.1.

Lemat 1.8. Niech $v \in L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$. Załóżmy, że istnieją $M > 0$ i ciąg $h_n \rightarrow 0$ takie, że $\int_{\Omega_{|h_n|}} |\Delta_{h_n}^s v|^p dx \leq M$. Wówczas $\int_{\Omega} |D_s v|^p dx \leq M$ (więc $D_s v \in L^p(\Omega)$) i $\Delta_{h_n}^s v \rightarrow D_s v$ w $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$.



Dowód: Niech

$$g_n(x) = \begin{cases} \Delta_{h_n} v & \text{dla } x \in \Omega_{|h_n|} \\ 0 & \text{dla } x \in \Omega \setminus \Omega_{|h_n|} \end{cases}$$

Ciąg g_n jest ograniczony w $L^p(\Omega)$, więc można wybrać podciąg (wciąż oznaczany jako g_n) słabo zbieżny do pewnego $g \in L^p(\Omega)$. Oczywiście $\|g\|_{L^p(\Omega)} \leq M$. Dla każdego $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \phi g \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \phi \Delta_{h_n} v \, dx = - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} v \Delta_{h_n} \phi \, dx = - \int_{\Omega} v D_s \phi \, dx,$$

więc $g = D_s v$. Pozostała część tezy wynika z Lematu 1.7. \square

Warto zauważyć, że gdy Ω jest ograniczona, to w powyższym lemacie zbieżność w L_{loc}^p można zastąpić zbieżnością w L^p . Taka wersja tego lematu będzie wykorzystywana w dowodzie twierdzenia 2.1.

Następny lemat o zbieżności ciągu norm jest dobrze znany, dowód można znaleźć na przykład w [22].

Lemat 1.9. *Niech Ω będzie zbiorem ograniczonym.*

a) *Jeśli $v \in L^\infty(\Omega)$, to wówczas*

$$\|v\|_{L^\infty(\Omega)} = \lim_{p \rightarrow \infty} \|v\|_{L^p(\Omega)}.$$

b) *Jeśli $v \in L^{p_k}(\Omega)$ dla pewnego ciągu $p_k \rightarrow \infty$ oraz ciąg $\|v\|_{L^{p_k}(\Omega)}$ jest ograniczony, to wówczas $v \in L^\infty(\Omega)$.*

Wykorzystując powyższe własności, otrzymujemy następujący wniosek z lematu 1.6:

Lemat 1.10. *Niech $\Omega_0 \subset\subset \Omega$, $|h| < d(\Omega_0, \partial\Omega)$ i $\mu(\Omega) < \infty$. Dla każdego $v \in W^{1,\infty}(\Omega)$ mamy*

$$\|\Delta_h^s v\|_{L^\infty(\Omega_0)} \leq \|D_s v\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Dowód: Z lematu 1.6 wynika, że

$$\|\Delta_h v\|_{p,\Omega_0} \leq \|D_s v\|_{p,\Omega} \leq \mu(\Omega)^{1/p} \|D_s v\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c \operatorname{ess\,sup}_{\Omega} |D_s v|$$

dla każdego $1 \leq p < \infty$, a zatem $\Delta_h v \in L^\infty(\Omega_0)$, na mocy lematu 1.9. Teraz wystarczy tylko przyjąć $p \rightarrow \infty$ w nierówności $\|\Delta_h v\|_{p,\Omega_0} \leq \|D_s v\|_{p,\Omega}$. \square

Ostatni z lematów o ilorazach różnicowych pochodzi z [27]. Jest on pewnym uogólnieniem lematu 1.6 polegającym na zamianie funkcji $|\cdot|^p$ na funkcję wypukłą. Nie będzie on wykorzystywany w tej pracy, jednak warto go podać, gdyż jest mało znany, a może być przydatnym narzędziem w badaniu słabych pochodnych w przestrzeniach Orlicza-Sobolewa.

Lemat 1.11. Zdefiniujmy wektor ilorazów różnicowych: $\Theta_h u = (\Delta_{h_1}^1 u, \dots, \Delta_{h_n}^n u)$, gdzie $h = (h_1, \dots, h_n)$. Niech $\Omega_0 \subset\subset \Omega$, $|h| < d(\Omega_0, \partial\Omega)$, funkcja $G : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ jest wypukła. Dla każdego $v \in W^{1,1}(\Omega)$ takiego, że $\int_{\Omega} G(Dv) dx < \infty$ mamy

$$\int_{\Omega_0} G(\Theta_h v) dx \leq \int_{\Omega} G(Dv) dx.$$

Dowód: Podobnie jak wcześniej $\Theta_h v = \int_0^1 Dv(x + th) dt$ i z nierówności Jensena

$$\int_{\Omega_0} G(\Theta_h v) dx \leq \int_0^1 \int_{\Omega_0} G(Dv(x + th)) dx dt = \int_0^1 \int_{\Omega_0 + th} G(Dv) dx dt \leq \int_{\Omega} G(Dv) dx.$$

□

Twierdzenie o regularności słabych rozwiązań

Założenia na funkcję G podane w poprzednim rozdziale są zbyt ogólne, aby możliwe było udowodnienie twierdzenia o regularności słabych rozwiązań. W szczególności, dopuszczają one sytuację, gdy funkcja G rośnie zbyt szybko w nieskończoności (np. jak funkcja wykładnicza) lub maleje zbyt szybko w otoczeniu zera.

Podane niżej założenia, z których wynikają te podane w rozdziale 1, nakładają ograniczenia na wzrost G . W otoczeniu zera G musi się znajdować pomiędzy funkcją liniową a kwadratową (warunki (G_2) i (G_3)). W nieskończoności G musi być ograniczone przez dwa wielomiany stopnia wyższego niż 2 (warunki (G_5) i (G_6)). Należy również założyć, że G spełnia dość silny warunek eliptyczności (G_7) .

W tym rozdziale zakładamy, że $G \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ jest funkcją wypukłą spełniającą następujące warunki:

$$(G_1) \quad G(-\xi) = G(\xi) \text{ dla wszystkich } \xi \in \mathbb{R}^n,$$

$$(G_2) \quad \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{G(\xi)}{|\xi|} = 0,$$

$$(G_3) \quad \text{istnieje } c_0 > 0 \text{ takie, że } G(\xi) \geq c_0 |\xi|^2 \text{ dla wszystkich } \xi \in \mathbb{R}^n,$$

$$(G_4) \quad \text{istnieje } p \geq 2 \text{ takie, że } \langle DG(\xi), \lambda \rangle \leq p \frac{G(\xi)}{|\xi|} |\lambda| \text{ dla wszystkich } \xi, \lambda \in \mathbb{R}^n \text{ } (\xi \neq 0),$$

$$(G_5) \quad \text{istnieją } \alpha \geq 2 \text{ i } c_\alpha > 0 \text{ takie, że } c_\alpha |\xi|^\alpha \leq G(\xi) \text{ dla wszystkich } |\xi| \geq 1,$$

$$(G_6) \quad G(\xi) \leq \sum_{s=1}^n |\xi_s|^{2^* (\frac{\alpha}{2} - 1) + 2} \text{ dla wszystkich } |\xi| \geq 1, \text{ gdzie } 2^* \text{ oznacza krytyczny wykładnik Sobolewa,}$$

$$(G_7) \quad \text{istnieje } \nu > 0 \text{ takie, że } \langle D^2 G(\xi) \lambda, \lambda \rangle \geq 2\nu \frac{G(\xi)}{|\xi|^2} |\lambda|^2 \text{ dla wszystkich } \xi, \lambda \in \mathbb{R}^n \text{ } (\xi \neq 0),$$

Łatwo sprawdzić, że funkcja G spełniająca powyższe założenia jest G -funkcją w sensie Trudingera. Z założenia (G_4) wynika warunek Δ_2 w postaci: $G(2\xi) \leq 2^p G(\xi)$ (zob. twierdzenie 3.2 w [28]). Stąd zaś wynika, że $G(\xi) \leq M |\xi|^p$, dla $M = \sup_{|\xi|=1} G(\xi)$ oraz $|\xi| \geq 1$.



Okazuje się, że do badania regularności słabych rozwiązań będzie wykorzystywana jedynie liniowość przestrzeni $W^{1,G}$ oraz warunek $u \in W^{1,G} \iff \int_{\Omega} G(Du) dx < \infty$, gwarantowany przez Δ_2 . Inne własności $W^{1,G}$ (np. refleksywność) nie będą wykorzystywane w tym rozdziale. Warto też zwrócić uwagę, że dzięki warunkowi (G_3) przestrzeń $W^{1,G}$ zawiera się w $W^{1,2}$ na ograniczonych dziedzinach.

Przyjęte założenia umożliwiają rozpatrywanie dość szerokiej klasy G-funkcji o wzroście typu wielomianowego. Taki zestaw warunków jest podobny do założeń wzrostu typu p - q rozważanych przez Marcellini w artykule [19]. Warunki (G_1) – (G_7) są inspirowane w dużej mierze przez założenia podane w [20], ale zostały sformułowane w sposób odpowiedni dla anizotropowych funkcji G . Dopuszczają one sytuację, w której zachowanie G może być w różny sposób zależne od współrzędnych ξ_i , a nie tylko od modułu $|\xi|$.

Uzyskanie odpowiedniej regularności rozwiązań wymaga między innymi silnego warunku eliptyczności dla operatora $\operatorname{div}(\nabla G(\nabla u(x)))$, co przekłada się na silną wypukłość G , czyli założenie (G_7) . W szczególności, wzrost funkcji G w otoczeniu zera musi być kwadratowy. Dla dowodu twierdzenia 2.1 potrzebne są także ograniczenia wzrostu funkcji G w nieskończoności. Mówią o tym założenia (G_5) i (G_6) , z których wynika, że funkcja G jest z dwóch stron ograniczona potęgami o wykładnikach odpowiednio bliskich sobie, przy czym, im większe n tym są one bliższe. Można zauważyć, że założenia (G_1) – (G_7) są silniejsze niż podane w [19] czy [20] jednak także uzyskana tu teza jest nieco silniejsza.

Oczywistym przykładem funkcji G spełniającej założenia (G_1) – (G_7) jest $|\cdot|^2$. Niestety ze względu na (G_3) nie można za G wziąć $|\cdot|^\alpha$ dla $\alpha > 2$. Można jednak rozważać funkcje łączące wzrost kwadratowy dla małych argumentów i wyższe potęgi dla dużych argumentów, czyli np. $G(\xi) = c_0|\xi|^2 + \sum c_i|\xi_i|^{\alpha_i}$, gdzie wykładniki α_i należy wybrać uwzględniając przede wszystkim (G_5) i (G_6) (a więc ich wzajemne różnice są ograniczone w zależności od wymiaru przestrzeni, tj. $\max \alpha_1 \leq 2^*(\frac{\min \alpha_i}{2} - 1) + 2$).

2.1. Sformułowanie twierdzenia

Poniżej sformułujemy twierdzenie o regularności słabych rozwiązań równania (2.1). Zostanie udowodnione przy założeniach ogólniejszych, niż te wymagane do rozważania równania typu Allena-Cahna, przez co możliwe do zastosowania także w innych problemach z ogólnym operatorem eliptycznym.

Przypomnijmy, że rozważane równanie na dziedzinie Ω ma postać

$$-\operatorname{div}(\nabla G(\nabla u(x))) + F_u(x, u(x)) = 0, \quad \text{gdzie } x \in \Omega. \quad (2.1)$$

Zakładamy, że $F : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełnia:

(A₁) F jest różniczkowalna w sposób ciągły i jej pochodna cząstkowa F_u może być zapisana jako suma $F_u = \bar{F} + \hat{F}$, gdzie:

(A₂) \bar{F} jest ciągła i $|\bar{F}(x, u)| \leq Q$ dla wszystkich $x \in \Omega$, $u \in \mathbb{R}$,

(A₃) \hat{F} ma ciągłe i ograniczone pochodne cząstkowe: $|\hat{F}_{x_s}(x, u)| \leq Q$, $|\hat{F}_u(x, u)| \leq Q$ dla wszystkich $x \in \Omega$, $u \in \mathbb{R}$.

Twierdzenie 2.1. Niech funkcja G spełnia założenia (G₁)-(G₇), zaś F spełnia (A₁)-(A₃). Dla każdej kuli $B_R \subset\subset \Omega$ i dla każdego słabego rozwiązania $v \in W_{loc}^{1,G}(\Omega)$ problemu (2.1), istnieją stałe dodatnie \bar{C} i \tilde{C} , dla których

$$\int_{B_{\frac{R}{2}}} |D^2v|^2 dx \leq \bar{C} \int_{B_R} 1 + G(Dv) dx, \quad (2.2)$$

$$\text{ess sup}_{B_{\frac{R}{2}}} |Dv|^2 \leq \tilde{C} \int_{B_R} 1 + G(Dv) dx. \quad (2.3)$$

Powyższe nierówności oznaczają, że słabe rozwiązania są klasy odpowiednio $W_{loc}^{2,2}(\Omega)$ i $W_{loc}^{1,\infty}(\Omega)$, przy czym jako słabe rozwiązania będziemy rozumieli funkcje $v \in W_{loc}^{1,G}(\Omega)$ spełniające równanie

$$\int_{B_r} \sum_{i=1}^n (G_{\xi_i}(Dv)) D_i \varphi(x) + F_u(x, v) \varphi(x) dx = 0 \quad (2.4)$$

dla każdej kuli $B_r \subset\subset \Omega$ i każdego $\varphi \in W_0^{1,G}(B_r)$.

Warto zwrócić uwagę na fakt, że cała teza twierdzenia jest sformułowana lokalnie na kulach a więc dziedzina Ω nie odgrywa tu większej roli. Dodatkowo rozważamy tylko słabe rozwiązania więc problem (2.1) nie wymaga uzupełnienia o warunki brzegowe.

Dowód powyższego twierdzenia będzie treścią kolejnych podrozdziałów. Jest on podzielony na następujące etapy:

- przekształcenie równania (2.4) przy użyciu specjalnie zdefiniowanej funkcji φ co pozwala na wprowadzenie tam ilorazów różnicowych,
- szacowanie odpowiednich ilorazów różnicowych w celu wykazania istnienia drugiej pochodnej i jednocześnie dowód pierwszej nierówności z tezy twierdzenia,
- skorzystanie z uzyskanej nierówności oraz odpowiednich nierówności Sobolewa w celu stworzenia nierówności łączących różne normy Lebesgue'a $|Dv|$,
- uzyskanie wspólnego szacowania dla całego ciągu norm Lebesgue'a i dzięki temu wykazanie istnienia $\text{ess sup } |Dv|$ wraz z drugą nierównością z tezy twierdzenia.

W dowodzie obowiązywać będą następujące konwencje i oznaczenia:



- literą c będzie oznaczana stała dodatnia, dla której dane równanie bądź nierówność jest prawdziwa, zależna od innych wielkości występujących we wcześniejszych rachunkach lub założeniach. W szczególności, wartości c mogą być różne w różnych miejscach dowodu, a nawet w poszczególnych miejscach ciągów równań lub nierówności. Dla przejrzystości zależność c od innych wielkości nie będzie każdorazowo wyjaśniana.
- B_r będzie oznaczać kulę otwartą o promieniu r . Od tego momentu, wszystkie kule będą współśrodkowe, zmieniać się będzie jedynie ich promień.
- $2h_0 \leq \text{dist}(B_R, \partial\Omega)$, $|h| \leq h_0$,
- $\lambda_h^t = Dv(x + the_s)$,
- $\xi_h^t = tDv(x + he_s) + (1-t)Dv(x)$,
- $\eta \in C_0^2(\Omega)$ będzie oznaczać funkcję o wartościach w $[0, 1]$, dla której $\text{supp } \eta \subset B_R$ i η ma stałą wartość 1 na B_ρ oraz $|D\eta| \leq \frac{1}{R-\rho}$, $|D^2\eta| \leq \frac{1}{(R-\rho)^2}$, $0 < \rho < R$,
- $\psi \in C^1(\mathbb{R})$ będzie oznaczać dowolnie ustaloną funkcję nieparzystą i wypukłą w przedziale $[0, \infty)$, dla której $0 \leq \psi'(t) \leq c_{\psi'}$. Łatwo zauważyć, że

$$|\psi(t)| \leq \psi'(t)|t|. \quad (2.5)$$

2.2. Przekształcenie równania Eulera

W równaniu (2.4) podstawimy $\varphi = \Delta_{-h}(\eta^2\psi(\Delta_h v))$. Weźmy $\beta = 2^*(\frac{\alpha}{2} - 1) + 2$. Łatwo sprawdzić, że dla $\alpha < n$ mamy $\beta \leq \alpha^*$. Można więc skorzystać z lematów 1.3 i 1.5. Na mocy własności (A), (B), (C) z lematu 1.5 tak wybrane φ należy do $W_0^{1,G}(B_R)$.

Używając własności (D), (E), (F) z lematu 1.5 i uwzględniając, że $\text{supp } \eta \subset B_R$ można przepisać pierwszy składnik równania (2.4) jako

$$\begin{aligned} & \int_{\dot{B}_R} \sum_{i=1}^n (G_{\xi_i}(Dv)) D_i \varphi(x) dx = \int_{\dot{B}_R} \sum_{i=1}^n G_{\xi_i}(Dv) \Delta_{-h}(D_i(\eta^2\psi(\Delta_h v))) dx = \\ & = - \int_{\dot{B}_R} \sum_{i=1}^n \Delta_h(G_{\xi_i}(Dv)) \left(D_i(\eta^2)\psi(\Delta_h v) + \eta^2\psi'(\Delta_h v) D_i(\Delta_h v) \right) dx = \\ & = - \int_{\dot{B}_R} \sum_{i=1}^n \Delta_h G_{\xi_i}(Dv) D_i(\eta^2)\psi(\Delta_h v) dx - \int_{\dot{B}_R} \sum_{i=1}^n \Delta_h(G_{\xi_i}(Dv)) \Delta_h(D_i v) \eta^2\psi'(\Delta_h v) dx. \end{aligned}$$

Równanie (2.4) można więc przepisać w postaci

$$\begin{aligned} & \int_{\dot{B}_R} \sum_{i=1}^n \Delta_h(G_{\xi_i}(Dv)) \Delta_h(D_i v) \eta^2\psi'(\Delta_h v) dx = \\ & = - \int_{\dot{B}_R} \sum_{i=1}^n \Delta_h G_{\xi_i}(Dv) D_i(\eta^2)\psi(\Delta_h v) dx + \int_{B_R} F_u(x, v) \Delta_{-h}(\eta^2\psi(\Delta_h v)) dx. \quad (2.6) \end{aligned}$$

Trzy całki występujące w równaniu (2.6) oznaczmy kolejno przez J_1 , J_2 i J_3 . Podamy teraz oszacowania na każdą z tych całek. Iloraz różnicowy wewnątrz J_1 może być zapisany za pomocą całki

$$\begin{aligned}\Delta_h(G_{\xi_i}(Dv)) &= \frac{1}{h}(G_{\xi_i}(Dv(x + he_s)) - G_{\xi_i}(Dv(x))) = \\ &= \frac{1}{h} \int_0^1 \frac{d}{dt} G_{\xi_i}(tDv(x + he_s) + (1-t)Dv(x)) dt = \int_0^1 \sum_{j=1}^n G_{\xi_i \xi_j}(\xi_h^t) \Delta_h(D_j v) dt.\end{aligned}$$

To równanie pozwala przekształcić J_1 do postaci

$$J_1 = \int_{B_R} \int_0^1 \left(\sum_{i,j=1}^n G_{\xi_i \xi_j}(\xi_h^t) \Delta_h(D_i v) \Delta_h(D_j v) \right) \eta^2 \psi'(\Delta_h v) dt dx.$$

Na mocy założenia (G_7)

$$|J_1| \geq 2\nu \int_{B_R} \int_0^1 \frac{G(\xi_h^t)}{|\xi_h^t|^2} |\Delta_h(Dv)|^2 \eta^2 \psi'(\Delta_h v) dt dx.$$

W całce J_2 wyrażenie $\Delta_h(G_{\xi_i}(Dv))$ także zostanie przekształcone, ale tym razem przy użyciu λ_h^t zamiast ξ_h^t

$$\Delta_h(G_{\xi_i}(Dv)) = \frac{1}{h} \int_0^1 \frac{d}{dt} G_{\xi_i}(\lambda_h^t) dt = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_s} G_{\xi_i}(\lambda_h^t) dt,$$

gdzie $\frac{\partial}{\partial x_s}$ oznacza różniczkowanie po s -tej zmiennej argumentu λ_h^t . Podstawiając do J_2 i całkując przez części

$$\begin{aligned}J_2 &= - \int_{B_R} \int_0^1 \sum_{i=1}^n G_{\xi_i}(\lambda_h^t) D_s \left(D_i(\eta^2) \psi(\Delta_h v) \right) dt dx = \\ &= - 2 \int_{B_R} \int_0^1 \langle DG(\lambda_h^t), D_s D_i(\eta^2) \rangle \psi(\Delta_h v) dt dx - \\ &\quad - \int_{B_R} \int_0^1 \langle DG(\lambda_h^t), D_i(\eta^2) \rangle \psi'(\Delta_h v) \Delta_h(D_s v) dt dx.\end{aligned}$$

Te dwie całki będą dalej oznaczone jako $J_{2,1}$ i $J_{2,2}$. Z definicji η wynika, że $|D_i(\eta^2)| \leq \frac{2}{R-\rho}$ oraz $|D_i D_j(\eta^2)| \leq \frac{4}{(R-\rho)^2}$. Z założenia (G_4) i nierówności (2.5) wynika, że

$$|J_{2,1}| \leq \int_{B_R} \int_0^1 p \frac{G(\lambda_h^t)}{|\lambda_h^t|} \frac{4}{(R-\rho)^2} \psi'(\Delta_h v) |\Delta_h v| dt dx.$$

Ponownie korzystając z założenia (G_4) , własności η i nierówności $|2ab| \leq \nu a^2 + \frac{b^2}{\nu}$

$$\begin{aligned} |J_{2,2}| &\leq \int_{\bar{B}_R} \int_0^1 p \frac{G(\lambda_h^t)}{|\lambda_h^t|} 2\eta |D_i \eta| \psi'(\Delta_h v) |\Delta_h(D_s v)| dt dx \leq \\ &\leq \int_{\bar{B}_R} \int_0^1 2 \left(\frac{G(\lambda_h^t)}{|\lambda_h^t|^2} \eta^2 \psi'(\Delta_h v) |\Delta_h(D_s v)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{p^2}{(R-\rho)^2} G(\lambda_h^t) \psi'(\Delta_h v) \right)^{\frac{1}{2}} dt dx \leq \\ &\leq \nu \int_{\bar{B}_R} \int_0^1 \frac{G(\lambda_h^t)}{|\lambda_h^t|^2} \eta^2 \psi'(\Delta_h v) |\Delta_h(D_s v)|^2 dt dx + \frac{p^2}{\nu(R-\rho)^2} \int_{\bar{B}_R} \int_0^1 G(\lambda_h^t) \psi'(\Delta_h v) dt dx. \end{aligned}$$

Teraz oszacujemy J_3 . Stosując (A_1) i lemat 1.5 (E) otrzymujemy

$$\begin{aligned} |J_3| &= \left| \int_{\bar{B}_R} \bar{F}(x, v) \Delta_{-h}(\eta^2 \psi(\Delta_h v)) dx - \int_{\bar{B}_R} \Delta_h \hat{F}(x, v) \eta^2 \psi(\Delta_h v) dx \right| \leq \\ &\leq \int_{\bar{B}_R} |\bar{F}(x, v)| |\Delta_{-h}(\eta^2 \psi(\Delta_h v))| dx + \int_{\bar{B}_R} |\Delta_h \hat{F}(x, v)| \eta^2 |\psi(\Delta_h v)| dx = J_{3,1} + J_{3,2}. \end{aligned}$$

Z (A_2) i lematu 1.6

$$J_{3,1} \leq Q \int_{\bar{B}_R} |\Delta_{-h}(\eta^2 \psi(\Delta_h v))| dx \leq Q \int_{B_{R+|h|}} \left| \frac{d}{dx_s} (\eta^2 \psi(\Delta_h v)) \right| dx.$$

Jako że $\text{supp } \eta \subset B_R$, więc kulę $B_{R+|h|}$ można zastąpić kulą B_R . Po zastosowaniu lematu 1.5 (D) mamy

$$J_{3,1} \leq Q \int_{\bar{B}_R} 2\eta |D_s \eta| |\psi(\Delta_h v)| + \eta^2 \psi'(\Delta_h v) |\Delta_h(D_s v)| dx.$$

Do oszacowania drugiego składnika zastosowana będzie nierówność $ab \leq \tau a^2 + \frac{1}{\tau} b^2$

$$J_{3,1} \leq Q \int_{\bar{B}_R} 2\eta |D_s \eta| |\psi(\Delta_h v)| dx + \tau \int_{\bar{B}_R} \eta^2 \psi'(\Delta_h v) |\Delta_h(D_s v)|^2 dx + \frac{1}{4\tau} \int_{\bar{B}_R} \eta^2 \psi'(\Delta_h v) dx.$$

Szacując $J_{3,2}$ skorzystamy z (A_3)

$$\begin{aligned} J_{3,2} &= \int_{\bar{B}_R} \left| \eta^2 \psi(\Delta_h v) \frac{1}{h} \int_0^1 \frac{d}{dt} \hat{F}(x + t h e_s, v + t h \Delta_h v) dt \right| dx \leq \\ &\leq \int_{\bar{B}_R} \int_0^1 |\eta^2 \psi(\Delta_h v)| \left(|\hat{F}_{x_s}| + |\hat{F}_u| |\Delta_h v| \right) dt dx \leq \\ &\leq Q \int_{\bar{B}_R} \eta^2 \psi'(\Delta_h v) |\Delta_h v| (1 + |\Delta_h v|) dx. \end{aligned}$$

Podsumowując:

$$\begin{aligned} |J_3| &\leq Q \int_{\bar{B}_R} 2\eta |D_s \eta| |\psi(\Delta_h v)| dx + \tau \int_{\bar{B}_R} \eta^2 \psi'(\Delta_h v) |\Delta_h(D_s v)|^2 dx + \\ &\quad + \frac{1}{4\tau} \int_{\bar{B}_R} \eta^2 \psi'(\Delta_h v) dx + Q \int_{\bar{B}_R} \eta^2 \psi'(\Delta_h v) |\Delta_h v| (1 + |\Delta_h v|) dx. \end{aligned}$$

Z równania (2.6) wynika, że $J_1 = J_2 + J_3$. Porządkując odpowiednio powyższe szacowania otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 & 2\nu \int_{B_R} \int_0^1 \frac{G(\xi_h^t)}{|\xi_h^t|^2} \eta^2 \psi'(\Delta_h v) |\Delta_h(Dv)|^2 dt dx - \nu \int_{B_R} \int_0^1 \frac{G(\lambda_h^t)}{|\lambda_h^t|^2} \eta^2 \psi'(\Delta_h v) |\Delta_h(D_s v)|^2 dt dx - \\
 & - \tau \int_{B_R} \eta^2 \psi'(\Delta_h v) |\Delta_h(Dv)|^2 dx \leq \\
 & \leq Q \int_{B_R} 2\eta |D_s \eta| |\psi(\Delta_h v)| dx + Q \int_{B_R} \eta^2 \psi'(\Delta_h v) |\Delta_h v| (1 + |\Delta_h v|) dx + \\
 & + \frac{1}{4\tau} \int_{B_R} \eta^2 \psi'(\Delta_h v) dx + \frac{p^2}{\nu(R-\rho)^2} \int_{B_R} \int_0^1 G(\lambda_h^t) \psi'(\Delta_h v) dt dx + \\
 & + \frac{4p}{(R-\rho)^2} \int_{B_R} \int_0^1 \frac{G(\lambda_h^t)}{|\lambda_h^t|} |\Delta_h v| \psi'(\Delta_h v) dt dx. \tag{2.7}
 \end{aligned}$$

Oczywiście $|\Delta_h(D_s v)|^2 \leq |\Delta_h(Dv)|^2$, więc lewa strona nierówności (2.7) jest ograniczona z dołu przez

$$\int_{B_R} \int_0^1 \left(2\nu \frac{G(\xi_h^t)}{|\xi_h^t|^2} - \nu \frac{G(\lambda_h^t)}{|\lambda_h^t|^2} - \tau \right) \eta^2 \psi'(\Delta_h v) |\Delta_h(Dv)|^2 dt dx.$$

2.3. Wspólne ograniczenie ilorazów różnicowych

Kolejnym krokiem dowodu będzie wykazanie, że prawa strona (2.7) jest ograniczona przez wielkości niezależne od h . Łatwo uzyskać takie szacowania dla pierwszych czterech składników. Istotnie, stosując lemat 1.6 oraz własności ψ i η , otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
 & Q \int_{B_R} 2\eta |D_s \eta| |\psi(\Delta_h v)| dx \leq \frac{2c_{\psi'} Q}{R-\rho} \int_{B_{R+h_0}} |D_s v| dx, \\
 & Q \int_{B_R} \eta^2 \psi'(\Delta_h v) |\Delta_h v| (1 + |\Delta_h v|) dx \leq c_{\psi'} Q \int_{B_{R+h_0}} |D_s v| + |D_s v|^2 dx, \\
 & \frac{1}{4\tau} \int_{B_R} \eta^2 \psi'(\Delta_h v) dx \leq \frac{c_{\psi'}}{4\tau} |B_R|, \\
 & \frac{p^2}{\nu(R-\rho)^2} \int_{B_R} \int_0^1 G(\lambda_h^t) \psi'(\Delta_h v) dt dx \leq \frac{p^2 c_{\psi'}}{\nu(R-\rho)^2} \int_{B_{R+h_0}} G(Dv) dx,
 \end{aligned}$$

gdyż jak łatwo widać z definicji λ_h^t wynika, że $\int_{B_R} \int_0^1 G(\lambda_h^t) dt dx \leq \int_{B_{R+h_0}} G(Dv) dx$.



Uzyskanie ograniczenia górnego ostatniego składnika prawej strony (2.7) wymaga więcej pracy. Niech G_k oznacza ciąg funkcji takich, że $G_k(x) = G(x)$ dla $|x| \leq k$ i $G_k(x) = c_0|x|^2$ dla $|x| > k$. Ciąg ten jest niemalejący i punktowo ograniczony z góry przez G . Dodatkowo niech χ_A oznacza funkcję charakterystyczną zbioru A . Wówczas

$$\begin{aligned} \int_{B_R} \int_0^1 \frac{G_k(\lambda_h^t)}{|\lambda_h^t|} |\Delta_h v| dt dx &= \int_{B_R} \int_0^1 \chi_{\{|\lambda_h^t| \leq 1\}} \frac{G(\lambda_h^t)}{|\lambda_h^t|} |\Delta_h v| dt dx + \\ &+ \sum_{i=1}^{k-1} \int_{B_R} \int_0^1 \chi_{\{|\lambda_h^t| \in [i, i+1]\}} \frac{G(\lambda_h^t)}{|\lambda_h^t|} |\Delta_h v| dt dx + \int_{B_R} \int_0^1 \chi_{\{|\lambda_h^t| \geq k\}} \frac{c_0 |\lambda_h^t|^2}{|\lambda_h^t|} |\Delta_h v| dt dx. \end{aligned}$$

Dla $|\lambda_h^t| \leq 1$ zachodzi nierówność $\frac{G(\lambda_h^t)}{|\lambda_h^t|} \leq M$ (dla $M = \sup_{|\xi|=1} G(\xi)$) i z lematu 1.10 $|\Delta_h v| \leq 1$. Wobec tego

$$\int_{B_R} \int_0^1 \chi_{\{|\lambda_h^t| \leq 1\}} \frac{G(\lambda_h^t)}{|\lambda_h^t|} |\Delta_h v| dt dx \leq M |B_{R+h_0}|.$$

Analogicznie dla $|\lambda_h^t| \in [i, i+1]$ korzystając z Lematu 1.10

$$\begin{aligned} \int_{B_R} \int_0^1 \chi_{\{|\lambda_h^t| \in [i, i+1]\}} \frac{G(\lambda_h^t)}{|\lambda_h^t|} |\Delta_h v| dt dx &\leq \int_{B_{R+i|h|}} \int_0^1 \chi_{\{|\lambda_h^t| \in [i, i+1]\}} \frac{G(\lambda_h^t)}{i} (i+1) dt dx \leq \\ &\leq 2 \int_{B_{R+h_0}} \int_0^1 \chi_{\{|\lambda_h^t| \in [i, i+1]\}} G(\lambda_h^t) dt dx. \end{aligned}$$

Sumując powyższe nierówności po i mamy

$$\sum_{i=1}^{k-1} \int_{B_R} \int_0^1 \chi_{\{|\lambda_h^t| \in [i, i+1]\}} \frac{G(\lambda_h^t)}{|\lambda_h^t|} |\Delta_h v| dt dx \leq 2 \int_{B_{R+2h_0}} G(Dv) dx.$$

Korzystając z lematu 1.6 oraz nierówności $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$

$$\begin{aligned} \int_{B_R} \int_0^1 \chi_{\{|\lambda_h^t| \geq k\}} |\lambda_h^t| |\Delta_h v| dt dx &\leq \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{B_R} \int_0^1 \chi_{\{|\lambda_h^t| \geq k\}} |\lambda_h^t|^2 dt dx + \frac{1}{2} \int_{B_R} \int_0^1 \chi_{\{|\lambda_h^t| \geq k\}} |\Delta_h v|^2 dt dx \leq \int_{B_{R+h_0}} |Dv|^2 dx. \end{aligned}$$

Rezultatem powyższych przekształceń jest

$$\int_{B_R} \int_0^1 \frac{G_k(\lambda_h^t)}{|\lambda_h^t|} |\Delta_h v| dt dx \leq M |B_{R+h_0}| + 2 \int_{B_{R+2h_0}} G(Dv) dx + \int_{B_{R+h_0}} |Dv|^2 dx.$$

Z twierdzenia o zbieżności monotonicznej, powyższej nierówności i definicji G_k mamy

$$\begin{aligned} \int_{B_R} \int_0^1 \frac{G(\lambda_h^t)}{|\lambda_h^t|} |\Delta_h v| \psi'(\Delta_h v) dt dx &\leq c_{\psi'} \int_{B_R} \int_0^1 \frac{G(\lambda_h^t)}{|\lambda_h^t|} |\Delta_h v| dt dx = \\ &= c_{\psi'} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{B_R} \int_0^1 \frac{G_k(\lambda_h^t)}{|\lambda_h^t|} |\Delta_h v| dt dx \leq \\ &\leq c_{\psi'} \left(M |B_{R+h_0}| + 2 \int_{B_{R+2h_0}} G(Dv) dx + \int_{B_{R+h_0}} |Dv|^2 dx \right). \end{aligned}$$

Ostatecznie mamy szacowanie prawej strony (2.7) przez wielkości niezależne od h :

$$\begin{aligned} \int_{B_R} \int_0^1 \eta^2 \psi'(\Delta_h v) \left(2\nu \frac{G(\xi_h^t)}{|\xi_h^t|^2} - \nu \frac{G(\lambda_h^t)}{|\lambda_h^t|^2} - \tau \right) |\Delta_h(Dv)|^2 dt dx &\leq \\ &\leq \frac{c_{\psi'} Q}{R - \rho} \int_{B_{R+h_0}} |D_s v| dx + c_{\psi'} Q \int_{B_{R+h_0}} |D_s v| + |D_s v|^2 dx + \\ &+ \frac{c_{\psi'}}{4\tau} |B_R| + \frac{p^2 c_{\psi'}}{\nu(R - \rho)^2} \int_{B_{R+h_0}} G(Dv) dx + \\ &+ c_{\psi'} \left(M |B_{R+h_0}| + 2 \int_{B_{R+2h_0}} G(Dv) dx + \int_{B_{R+h_0}} |Dv|^2 dx \right). \quad (2.8) \end{aligned}$$

2.4. Dowód nierówności (2.2)

Teraz należy wykazać, że jeśli τ jest dostatecznie małe, to z dowolnego ciągu $h \rightarrow 0$ można wybrać podciąg taki, że

$$2\nu \frac{G(\xi_h^t)}{|\xi_h^t|^2} - \nu \frac{G(\lambda_h^t)}{|\lambda_h^t|^2} - \tau > \nu c_0 - \tau > 0 \quad \text{p.w.}$$

Ponieważ $\xi_h^t \rightarrow Dv$ i $\lambda_h^t \rightarrow Dv$ w L^2 przy $h \rightarrow 0$, więc (po przejściu do podciągu) ξ_h^t i λ_h^t są również zbieżne punktowo p.w. Wobec tego

$$2\nu \frac{G(\xi_h^t)}{|\xi_h^t|^2} - \nu \frac{G(\lambda_h^t)}{|\lambda_h^t|^2} - \tau \rightarrow \nu \frac{G(Dv)}{|Dv|^2} - \tau \geq \nu c_0 - \tau > 0.$$

W tym kroku dowolne ψ będzie wybrane konkretnie jako $\psi(t) = t$. Dodatkowo lewą stronę nierówności (2.8) oszacujemy zstępując kulę B_R mniejszą kulą B_ρ . W tej mniejszej kuli η jest stałe równa 1. Uwzględniając powyższe:

$$\begin{aligned} \int_{B_R} \int_0^1 \eta^2 \psi'(\Delta_h v) \left(2\nu \frac{G(\xi_h^t)}{|\xi_h^t|^2} - \nu \frac{G(\lambda_h^t)}{|\lambda_h^t|^2} - \tau \right) |\Delta_h(Dv)|^2 dt dx &\geq \\ &\geq \int_{B_\rho} \int_0^1 \left(2\nu \frac{G(\xi_h^t)}{|\xi_h^t|^2} - \nu \frac{G(\lambda_h^t)}{|\lambda_h^t|^2} - \tau \right) |\Delta_h(Dv)|^2 dt dx \geq (\nu c_0 - \tau) \int_{B_\rho} |\Delta_h(Dv)|^2 dx. \end{aligned}$$

Mamy zatem $\int_{B_\rho} |\Delta_h(Dv)|^2 dx \leq c$, gdzie stała ta pochodzi z nierówności (2.8), więc nie zależy od h . Na mocy lematu 1.8 dla $p = 2$ istnieje słaba pochodna cząstkowa drugiego rzędu i $\int_{B_\rho} |D_s(Dv)|^2 dx \leq c$ dla tej samej wartości c .

Ponieważ h_0 było wybrane dowolnie małe, więc kule B_{R+h_0} i B_{R+2h_0} można zastąpić w górnych ograniczeniach z prawej strony nierówności (2.8) kulą B_R . Dodatkowo z założenia (G_3) , mamy $|D_s v| \leq 1 + G(Dv)/c_0$ i $|D_s v|^2 \leq G(Dv)/c_0$, więc można całą prawą stronę (2.8) oszacować z góry przez

$$\begin{aligned} & \frac{c_{\psi'} Q}{R - \rho} \int_{B_{R+h_0}} |D_s v| dx + c_{\psi'} Q \int_{B_{R+h_0}} |D_s v| + |D_s v|^2 dx + \frac{c_{\psi'}}{4\tau} |B_R| + \\ & \quad + \frac{p^2 c_{\psi'}}{\nu(R - \rho)^2} \int_{B_{R+h_0}} G(Dv) dx + \\ & \quad + c_{\psi'} \left(M |B_{R+h_0}| + 2 \int_{B_{R+2h_0}} G(Dv) dx + \int_{B_{R+h_0}} |Dv|^2 dx \right) \leq c \int_{B_R} 1 + G(Dv) dx. \end{aligned}$$

Ostatecznie otrzymujemy

$$\int_{B_\rho} |D_s(Dv)|^2 dx \leq c \int_{B_R} 1 + G(Dv) dx,$$

co kończy dowód nierówności (2.2).

2.5. Dowód nierówności (2.3)

Jako punkt wyjścia do dowodu nierówności (2.3) posłuży dolne oszacowanie nierówności (2.7). Stosując do niej ograniczenia na η , $D\eta$ i ψ' oraz nierówność (2.5) otrzymujemy

$$\begin{aligned} & \int_{B_R} \int_0^1 \left(2\nu \frac{G(\xi_h^t)}{|\xi_h^t|^2} - \nu \frac{G(\lambda_h^t)}{|\lambda_h^t|^2} - \tau \right) \eta^2 \psi'(\Delta_h v) |\Delta_h(Dv)|^2 dt dx \leq \\ & \leq c \int_{B_R} \int_0^1 \left(1 + 2|\Delta_h v| + |\Delta_h v|^2 + G(\lambda_h^t) + \frac{G(\lambda_h^t)}{|\lambda_h^t|} |\Delta_h v| \right) \psi'(\Delta_h v) dt dx \leq \\ & \leq c \int_{B_R} \int_0^1 1 + \left(|\Delta_h v| + |\Delta_h v|^2 + G(\lambda_h^t) + \frac{G(\lambda_h^t)}{|\lambda_h^t|} |\Delta_h v| \right) \psi'(\Delta_h v) dt dx. \end{aligned}$$

Z lematu 1.7 wiadomo, że $\Delta_h v$ zbiega do $D_s v$ oraz $\Delta_h(Dv)$ do $D_s(Dv)$ w L^2 . Dodatkowo zauważmy, że na mocy definicji λ_h^t i ξ_h^t są równe Dv z przesuniętym argumentem. Wobec tego wszelkie funkcje zależne od λ_h^t i ξ_h^t (jako translacje w argumentie x) zbiegają w L^1 do odpowiednich funkcji zależnych od Dv (np. $\frac{G(\xi_h^t)}{|\xi_h^t|^2} \rightarrow \frac{G(Dv)}{|Dv|^2}$ w L^1). Stąd wynika, że w powyższej nierówności można przejść do granicy z $h \rightarrow 0$.

Dodatkowo korzystając z założenia (G_3) , podobnie jak w dowodzie nierówności (2.2), otrzymujemy

$$\int_{B_R} \eta^2 \psi'(D_s v) \left(\nu \frac{G(|Dv|)}{|Dv|^2} - \tau \right) |D_s(Dv)|^2 dx \leq c \int_{B_R} 1 + G(Dv) \psi'(D_s v) dx. \quad (2.9)$$

Również z (G_3) otrzymujemy natychmiast

$$\nu \frac{G(Dv)}{|Dv|^2} - \tau \geq \frac{G(Dv)}{|Dv|^2} \left(\nu - \frac{\tau}{c_0} \right).$$

Wobec tego, jeśli τ jest dostatecznie małe, to po zmianie stałej c , nierówność (2.9) można przepisać jako

$$\int_{B_R} \eta^2 \psi'(D_s v) \frac{G(|Dv|)}{|Dv|^2} |D_s(Dv)|^2 dx \leq c \int_{B_R} 1 + G(Dv) \psi'(D_s v) dx. \quad (2.10)$$

Następnym krokiem będzie udowodnienie, że powyższa nierówność pozostaje prawdziwa po opuszczeniu założenia o ograniczoności ψ' . Niech $\tilde{\psi}$ spełnia wszystkie założenia wcześniej ustalone dla ψ , ale niech jego pochodna $\tilde{\psi}'$ jest nieograniczona. Dla takiego $\tilde{\psi}$ definiujemy ciąg $\tilde{\psi}_k$ następująco: $\tilde{\psi}_k(t) = \tilde{\psi}(t)$ dla $|t| < k$ i $\tilde{\psi}_k(t) = \tilde{\psi}'(k)$ dla $|t| \geq k$. Każde $\tilde{\psi}_k$ ma ograniczoną pochodną, więc nierówność (2.10) zachodzi dla $\tilde{\psi}_k$. Z twierdzenia o zbieżności monotonicznej, nierówność (2.10) jest prawdziwa także dla $\tilde{\psi}$.

Wobec powyższego w dalszych rozważaniach ψ' może być nieograniczone. Korzystając z faktu, że ψ' jest parzysta nierówność (2.10) można przepisać jako

$$\int_{\tilde{B}_R} \eta^2 \psi'(|D_s v|) \frac{G(Dv)}{|Dv|^2} |D_s(Dv)|^2 dx \leq c \int_{\tilde{B}_R} 1 + G(Dv) \psi'(|D_s v|) dx. \quad (2.11)$$

Zdefiniujmy funkcję $\Phi: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ wzorem

$$\Phi(t) = 1 + c_\Phi \int_0^t \sqrt{\psi'(\tau)} \cdot \tau^{\frac{\alpha}{2}-1} d\tau, \quad (2.12)$$

gdzie $c_\Phi > 0$. Wprost z definicji i nierówności $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$ wynika, że

$$|D(\eta \Phi(|D_s v|))|^2 \leq 2|D\eta|^2 (\Phi(|D_s v|))^2 + 2\eta^2 c_\Phi^2 \psi'(|D_s v|) |D_s v|^{\alpha-2} |D(D_s v)|^2. \quad (2.13)$$

Łatwo zauważyć, że z (G_5) mamy $|D_s v|^{\alpha-2} \leq c \frac{G(Dv)}{|Dv|^2}$. Znow wychodząc od nierówności $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$ dostajemy także

$$\begin{aligned} (\Phi(|D_s v|))^2 &\leq \left(1 + c_\Phi \sqrt{\psi'(|D_s v|)} \cdot |D_s v|^{\frac{\alpha}{2}-1} \cdot |D_s v| \right)^2 \leq \\ &\leq 2 + 2c_\Phi^2 \psi'(|D_s v|) |D_s v|^\alpha \leq 2 + 2c \psi'(|D_s v|) G(Dv). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Stosując łącznie nierówności (2.11), (2.13) i (2.14) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
& \int_{B_R} |D(\eta\Phi(|D_s v|))|^2 dx \leq \\
& \leq 2 \int_{B_R} |D\eta|^2 (\Phi(|D_s v|))^2 dx + 2 \int_{B_R} \eta^2 c_\Phi^2 \psi'(|D_s v|) \frac{G(Dv)}{|Dv|^2} |D(D_s v)|^2 dx \leq \\
& \leq 2 \int_{B_R} 2 + 2c \psi'(|D_s v|) G(Dv) dx + c \int_{B_R} 1 + G(Dv) \psi'(|D_s v|) dx = \\
& = c \int_{B_R} 1 + G(Dv) \psi'(|D_s v|) dx.
\end{aligned}$$

Z nierówności Sobolewa i definicji η wynika, że:

$$\left(\int_{B_\rho} (\Phi(|D_s v|))^{2^*} dx \right)^{\frac{2}{2^*}} \leq C \int_{B_R} |D(\eta\Phi(|D_s v|))|^2 dx,$$

co razem z wcześniejszą nierównością daje

$$\begin{aligned}
\left(\int_{B_\rho} (\Phi(|D_s v|))^{2^*} dx \right)^{\frac{2}{2^*}} & \leq C \int_{B_R} |D(\eta\Phi(|D_s v|))|^2 dx \leq \\
& \leq c \int_{B_R} (1 + G(Dv) \psi'(|D_s v|)) dx. \tag{2.15}
\end{aligned}$$

Niech $\gamma \geq 0$, $c_\Phi = \gamma + \frac{\alpha}{2}$ i niech $\psi(t) = \frac{1}{2\gamma+1} t^{2\gamma+1}$ dla $t \geq 0$. Stąd $\psi'(t) = t^{2\gamma}$. Wówczas

$$\Phi(t) = 1 + \left(\gamma + \frac{\alpha}{2} \right) \int_0^t \tau^{\gamma+\frac{\alpha}{2}-1} d\tau = 1 + t^{\gamma+\frac{\alpha}{2}}.$$

Stąd wynika, że

$$(\Phi(|D_s v|))^{2^*} \geq 1 + \left(\gamma + \frac{\alpha}{2} \right) \int_0^{|D_s v|} \tau^{\gamma+\frac{\alpha}{2}-1} d\tau = 1 + |D_s v|^{2^*(\gamma+\frac{\alpha}{2})}.$$

Stosując definicję ψ oraz powyższą nierówność do (2.15) otrzymujemy

$$\left(\int_{B_\rho} 1 + |D_s v|^{2^*(\gamma+\frac{\alpha}{2})} dx \right)^{\frac{2}{2^*}} \leq c \int_{B_R} 1 + G(Dv) |D_s v|^{2\gamma} dx.$$

Wobec tego

$$\int_{B_\rho} 1 + |D_s v|^{2^*(\gamma+\frac{\alpha}{2})} dx \leq c \left(\int_{B_R} 1 + G(Dv) |D_s v|^{2\gamma} dx \right)^{\frac{2}{2^*}}.$$

Biorąc powyższą nierówność dla wszystkich $s = 1, 2, \dots, n$, sumując stronami a następnie korzystając z nierówności $\sum_{i=1}^n a_i^\beta \leq (\sum_{i=1}^n a_i)^\beta$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_{B_\rho} n + \sum_{s=1}^n |D_s v|^{2^*(\gamma + \frac{\alpha}{2})} dx &\leq c \sum_{s=1}^n \left(\int_{B_R} 1 + G(Dv) |D_s v|^{2\gamma} dx \right)^{\frac{2^*}{2}} \leq \\ &\leq c \left(\int_{B_R} n + G(Dv) \sum_{s=1}^n |D_s v|^{2\gamma} dx \right)^{\frac{2^*}{2}}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Zauważmy, że dla wszystkich nieujemnych i niemalejących funkcji h_1 i h_2 zachodzi nierówność

$$n \sum_{i=1}^n h_1(a_i) \cdot h_2(a_i) \geq \sum_{i=1}^n h_1(a_i) \cdot \sum_{i=1}^n h_2(a_i).$$

Będzie ona zastosowana do lewej strony (2.16) razem z założeniem (G_6) . Niech A_1 oznacza zbiór $\{x : |Dv(x)| \geq 1\}$. Szacowanie lewej strony (2.16) wykonamy osobno dla całki po $B_\rho \cap A_1$ oraz $B_\rho \setminus A_1$. Dla pierwszego z tych zbiorów mamy

$$\begin{aligned} \int_{B_\rho \cap A_1} n + \sum_{s=1}^n |D_s v|^{2^*(\gamma + \frac{\alpha}{2})} dx &= \int_{B_\rho \cap A_1} n + \sum_{s=1}^n |D_s v|^{2^*(\frac{\alpha}{2}-1)+2} \cdot |D_s v|^{2^*(\gamma+1)-2} dx \geq \\ &\geq \int_{B_\rho \cap A_1} n + \frac{1}{n} \left(\sum_{s=1}^n |D_s v|^{2^*(\frac{\alpha}{2}-1)+2} \right) \left(\sum_{s=1}^n |D_s v|^{2^*(\gamma+1)-2} \right) dx \geq \\ &\geq c \int_{B_\rho \cap A_1} 1 + G(Dv) \left(\sum_{s=0}^n |D_s v|^{2^*(\gamma+1)-2} \right) dx. \end{aligned}$$

Pamiętając, że $M = \sup_{|\xi|=1} G(\xi)$, $\gamma \geq 0$ i $2^* \geq 2$ łatwo widać, że dla $|\xi| \leq 1$ zachodzą nierówności

$$\sum_{s=1}^n |\xi_s|^{2^*(\gamma+1)-2} \leq |\xi|^2 \quad \text{i} \quad G(\xi) \sum_{s=1}^n |\xi_s|^{2^*(\gamma+1)-2} \leq M.$$

Wobec tego

$$\begin{aligned} \int_{B_\rho \setminus A_1} n + \sum_{s=1}^n |D_s v|^{2^*(\gamma + \frac{\alpha}{2})} dx &\geq \int_{B_\rho \setminus A_1} n dx \geq \frac{1}{2} \int_{B_\rho \setminus A_1} n + \frac{n}{M} M dx \geq \\ &\geq \frac{1}{2} \int_{B_\rho \setminus A_1} n + \frac{n}{M} G(Dv) \left(\sum_{s=0}^n |D_s v|^{2^*(\gamma+1)-2} \right) dx. \end{aligned}$$

W rezultacie prawdziwa jest także nierówność

$$\int_{B_\rho} n + \sum_{s=1}^n |D_s v|^{2^*(\gamma + \frac{\alpha}{2})} dx \geq c \int_{B_\rho} 1 + G(Dv) \left(\sum_{s=0}^n |D_s v|^{2^*(\gamma+1)-2} \right) dx.$$

Nierówność (2.16) przyjmuje teraz postać

$$\left(\int_{B_\rho} 1 + G(Dv) \left(\sum_{s=0}^n |D_s v|^{2^*(\gamma+1)-2} \right) dx \right)^{\frac{2}{2^*}} \leq c \int_{B_R} 1 + G(Dv) \left(\sum_{s=1}^n |D_s v|^{2\gamma} \right) dx. \quad (2.17)$$

Aby wykazać, że $|Dv| \in L^\infty$ stworzymy ciąg całek z rosnących potęg $|D_s v|$. Ciąg ten powstanie w oparciu o nierówność (2.17). Wprowadźmy oznaczenia: $\gamma_0 = 0$, $\gamma_{i+1} = \frac{2^*}{2}(\gamma_i + 1) - 1$ oraz $R_i = \frac{R}{2} + \frac{R}{2^{i+1}}$. Wprost z tej definicji wynika, że $\gamma_i = \left(\frac{2^*}{2}\right)^i - 1$, $\gamma_i \rightarrow \infty$ oraz $R_i \rightarrow \frac{R}{2}$. Podstawiając w (2.17) γ_i zamiast γ , R_i zamiast R oraz R_{i+1} zamiast ρ mamy

$$\left(\int_{B_{R_{i+1}}} 1 + G(Dv) \left(\sum_{s=0}^n |D_s v|^{2\gamma_{i+1}} \right) dx \right)^{\frac{2}{2^*}} \leq c \int_{B_{R_i}} 1 + G(Dv) \left(\sum_{s=1}^n |D_s v|^{2\gamma_i} \right) dx. \quad (2.18)$$

Zauważmy, że w (2.18) całki wyższych potęg $|D_s v|$ są szacowane z góry przez całki mniejszych potęg. Niech teraz

$$E_i = \left(\int_{B_{R_i}} 1 + G(Dv) \left(\sum_{s=1}^n |D_s v|^{2\gamma_i} \right) dx \right)^{\frac{1}{\gamma_{i+1}}}.$$

Zauważmy w szczególności, że $E_0 = \int_{B_R} 1 + G(Dv) dx$. Wprost z definicji γ_i wynika, że $\frac{\gamma_{i+1}+1}{\gamma_{i+1}} = \frac{2^*}{2}$. Na mocy (2.18) prawdziwe jest szacowanie

$$E_{i+1} \leq c^{\frac{1}{\gamma_{i+1}}} E_i \leq \left(\prod_{j=0}^i c^{\frac{1}{\gamma_{j+1}}} \right) E_0.$$

Bezpośredni rachunek pokazuje, że

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \prod_{j=0}^i c^{\frac{1}{\gamma_{j+1}}} = \exp \left(\ln c \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{2}{2^*} \right)^j \right) = c^{\frac{1}{1-\frac{2}{2^*}}}.$$

Wobec tego

$$\infty > c^{\frac{1}{1-\frac{2}{2^*}}} E_0 = c^{\frac{1}{1-\frac{2}{2^*}}} \int_{B_R} 1 + G(Dv) dx \geq \lim_{i \rightarrow \infty} E_{i+1}.$$

Pamiętając, że $B_{\frac{R}{2}} \subset B_{R_{i+1}}$ oraz korzystając z (G_3) i lematu 1.9

$$\begin{aligned} \lim_{i \rightarrow \infty} E_{i+1} &= \lim_{i \rightarrow \infty} \left(\int_{B_{R_{i+1}}} 1 + G(Dv) \left(\sum_{s=1}^n |D_s v|^{2\gamma_{i+1}} \right) dx \right)^{\frac{1}{\gamma_{i+1}+1}} \geq \\ &\geq \lim_{i \rightarrow \infty} \left(c_0 \int_{B_{\frac{R}{2}}} \left(|Dv|^2 \sum_{s=1}^n |D_s v|^{2\gamma_{i+1}} \right) dx \right)^{\frac{1}{\gamma_{i+1}+1}} \geq \\ &\geq \lim_{i \rightarrow \infty} \left(c_0 \int_{B_{\frac{R}{2}}} \left(\sum_{s=1}^n |D_s v|^{2\gamma_{i+1}+2} \right) dx \right)^{\frac{1}{\gamma_{i+1}+1}} = \operatorname{ess\,sup}_{B_{\frac{R}{2}}} |Dv|^2. \end{aligned}$$

Podsumowując te szacowania mamy

$$\infty > c \int_{B_R} 1 + G(Dv) dx = cE_0 \geq \lim_{i \rightarrow \infty} E_{i+1} = \operatorname{ess\,sup}_{B_{\frac{R}{2}}} |Dv|^2,$$

co dowodzi, że $|Dv| \in L^\infty$ i jednocześnie kończy dowód nierówności (2.3).

Rozwiązania heterokliniczne problemu Allena-Cahna

W tym rozdziale sformułowane i udowodnione zostanie twierdzenie o istnieniu rozwiązań heteroklinicznych problemu typu Allena-Cahna. Ze względu na charakter tych rozwiązań warto wyszczególnić jedną ze zmiennych, względem której te rozwiązania będą heterokliniczne. Będziemy więc używali zapisu $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$, zamiast $x \in \mathbb{R}^n$, przy czym oczywiście nie jest konieczne, aby x był pierwszą ze zmiennych. W pozostałych współrzędnych y poszukiwane rozwiązania mają być 1-okresowe. Po takim podstawieniu równanie będzie postaci

$$-\operatorname{div}(\nabla G(\nabla u(x, y))) + F_u(x, y, u(x, y)) = 0, \quad (\text{AC})$$

gdzie $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$. Niech $F \in C^2(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R})$ spełnia założenia standardowe dla problemów typu Allena Cahna:

(F₁) F jest 1-okresowa w x i wszystkich współrzędnych y ,

(F₂) $F(x, y, 0) = F(x, y, 1) = 0$ dla $(x, y) \in \mathbb{R}^n$,

(F₃) $F(x, y, s) > 0$ dla $(x, y) \in \mathbb{R}^n$ i $s \in (0, 1)$,

(F₄) $F(x, y, s) \geq 0$ dla $(x, y, s) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Najprostszym przykładem jest funkcja F niezależna od x i y jak na przykład $F(x, y, s) = s^2(1-s)^2$ lub $\sin^2(\pi s)$. Oczywiście F może też zależeć od x i y , np. $F(x, y, s) = u^2(u-1)^2(u^2 + \sin 2\pi x + \sin 2\pi y + 3)$.

W tym rozdziale pozostaną w mocy wszystkie wcześniejsze założenia na funkcję G , czyli (G₁)-(G₇). Dodatkowo będziemy zakładać warunek ∇_2 . Dzięki temu przestrzeń $W^{1,G}$ będzie refleksywna.

Z założeń (F₁) - (F₄) bezpośrednio wynika, że równanie (AC) posiada dwa trywialne rozwiązania stałe równe 0 lub 1. Celem będzie wykazanie istnienia rozwiązań heteroklinicz-

nych w zmiennej x (tzn. zbieżnych do 0 przy $x \rightarrow -\infty$ i do 1 przy $x \rightarrow \infty$) i okresowych w zmiennych y . Istotnym utrudnieniem w rozwiązywaniu tego problemu metodami wariacyjnymi jest fakt, że naturalną dziedziną takich rozwiązań jest \mathbb{R}^n . Wobec czego nie są to funkcje całkowalne na swojej dziedzinie. Aby użyć metod wariacyjnych będziemy korzystać z odpowiednio skonstruowanej przestrzeni. Nie będzie to opisana wcześniej przestrzeń Orlicza-Sobolewa, ale jej podprzestrzeń.

Niech E_1 oznacza podprzestrzeń $W_{loc}^{1,G}(\mathbb{R}^n)$ zawierającą funkcje u , które są 1-okresowe we wszystkich współrzędnych y i spełniające warunek $\|\nabla u\|_{L^G(\mathbb{R} \times [0,1]^{n-1})} < \infty$. W przestrzeni E_1 można wprowadzić normę daną wzorem

$$\|u\|_{E_1} = \|u\|_{L^2([0,1]^n)} + \|\nabla u\|_{L^G(\mathbb{R} \times [0,1]^{n-1})}. \quad (3.1)$$

Metryka indukowana przez normę $\|\cdot\|_{E_1}$ jest równoważna w E_1 metryce przestrzeni $W_{loc}^{1,G}(\mathbb{R}^n)$, ponadto E_1 jest domkniętą podprzestrzenią przestrzeni $W_{loc}^{1,G}(\mathbb{R}^n)$. Z tego powodu E_1 jest refleksywną przestrzenią Banacha. Wprowadźmy następujące oznaczenia:

- dla każdego całkowitego k i dla każdej funkcji $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ definiujemy

$$\tau_k u(x, y) = u(x - k, y), \quad (3.2)$$

- rozwiązań heteroklinicznych będziemy szukać w zbiorze

$$\Gamma = \{u \in E_1 : \tau_{-1}u \geq u \text{ p.w.} \wedge \lim_{k \rightarrow -\infty} \tau_{-k}u = 0 \wedge \lim_{k \rightarrow +\infty} \tau_{-k}u = 1 \text{ w } L_{loc}^2\}. \quad (3.3)$$

Zauważmy, że jeśli $u \in \Gamma$, to $0 \leq u \leq 1$ p.w. Warunki definiujące zbiór Γ zawierają granice w L_{loc}^2 zamiast klasycznych granic definiujących heterokliniczność, gdyż w tym momencie nie możemy jeszcze stwierdzić, że elementy Γ w ogóle posiadają granice w klasycznym sensie.

- Operator L jest dany wzorem $L(u) = G(\nabla u) + F(x, y, u)$ zaś funkcjonał $I : E_1 \rightarrow [0, \infty]$ jest zdefiniowany wzorem:

$$I(u) = \int_{[0,1]^{n-1}} dy \int_{\mathbb{R}} L(u) dx. \quad (3.4)$$

- Infimum funkcjonału I na zbiorze Γ będzie oznaczone jako

$$c_\Gamma = \inf_{u \in \Gamma} I(u).$$

Wykażemy, że funkcjonał I osiąga na zbiorze Γ minimum, które jest klasycznym rozwiązaniem problemu (AC).

Twierdzenie 3.1. *Istnieje funkcja $v \in \Gamma$ będąca klasycznym heteroklinicznym rozwiązaniem (AC), dla której $I(v) = c_\Gamma$, $\tau_{-1}u < u$ oraz $0 < v < 1$.*

Należy zwrócić uwagę, że z założeń (F_1) - (F_4) bezpośrednio nie wynikają założenia (A_1) - (A_3) . Jednak poszukując rozwiązań heteroklinicznych, czyli zawartych w Γ ograniczamy ich zbiór wartości do przedziału $[0, 1]$. Założenia (F_1) - (F_4) sprawiają, że funkcja F obciążona do zbioru $\mathbb{R}^n \times [0, 1]$ jest ograniczona i ma ograniczone pochodne. Wobec tego spełnione są także (A_1) - (A_3) i twierdzenie 2.1 będzie mogło być zastosowane.

3.1. Rozwiązanie problemu wariacyjnego

Zauważmy, że zarówno zbiór Γ jak i funkcjonal I są niezmiennicze ze względu na τ_k w następującym sensie: $u \in \Gamma \Leftrightarrow \tau_k u \in \Gamma$ oraz $I(u) = I(\tau_k u)$. Oznacza to więc, że jeśli u jest nietrywialnym minimum I , to nie jest ono jedyne, gdyż każde $\tau_k u$ także minimalizuje I .

Oczywiście $I(v) \geq 0$ dla wszystkich $v \in \Gamma$ więc $c_\Gamma \geq 0$. Niech $\{u_j\} \subset \Gamma$ oznacza ciąg minimalizujący I . Ciąg wartości $I(u_j)$ jest zbieżny do c_Γ , a więc jest ograniczony, tzn. $I(u_j) < M$ dla wszystkich j . Stąd wynika, że ciąg $\{u_j\}$ jest ograniczony w normie $\|\cdot\|_{E_1}$, gdyż

$$\int_{[0,1]^{n-1}} dy \int_{\mathbb{R}} G(\nabla u_j) dx \leq \int_{[0,1]^{n-1}} dy \int_{\mathbb{R}} G(\nabla u_j) + F(x, y, u_j) dx = I(u_j) < M$$

oraz $\int_{[0,1]^n} |u_j| dx dy$ jest ograniczony przez 1, jako że $u_j \in \Gamma$.

Powyżej widać dlaczego ważne jest powiązanie przestrzeni $W^{1,G}$ z postacią funkcjonału. W tym szacowaniu nie byłoby możliwe zastosowanie wspomnianych we wstępie wyników z artykułu [20].

Ponieważ I jest niezmiennicze ze względu na τ_k , więc bez straty ogólności można założyć, że ciąg u_j został tak wybrany, aby

$$\int_{[0,1]^{n-1}} \int_{[0,1]} u_j dx dy > \frac{1}{2}, \quad \text{oraz} \quad \int_{[0,1]^{n-1}} dy \int_{[k-1,k]} u_j dx \leq \frac{1}{2} \quad \text{dla } k \leq 0. \quad (3.5)$$

Rzeczywiście, u_j można zastąpić przez $\tau_{-k_j} u_j$ gdzie k_j jest najmniejszym takim k , że

$$\int_{[0,1]^{n-1}} dy \int_{[k-1,k]} u_j dx > \frac{1}{2}.$$

Takie k_j istnieje gdyż wprost z definicji Γ wynika, że

$$\int_{[0,1]^{n-1}} dy \int_{[k-1,k]} u_j dx \rightarrow 0 \quad \text{dla } k_j \rightarrow -\infty \quad \text{oraz} \quad \int_{[0,1]^{n-1}} dy \int_{[k-1,k]} u_j dx \rightarrow 1 \quad \text{dla } k_j \rightarrow +\infty.$$



Taka modyfikacja ciągu minimalizującego będzie potrzebna w Lemacie 3.2.

Przestrzeń E_1 jest refleksywna, więc istnieje $v \in E_1$ oraz podciąg $\{u_j\}$ (oznaczany wciąż jako $\{u_j\}$) słabo zbieżny do v w E_1 . Z tego podciągu można również wybrać podciąg silnie zbieżny L_{loc}^2 i punktowo prawie wszędzie.

Wykażemy teraz, że $I(v) \leq M$. Istotnie, dla każdego j, n : $\int_{[0,1]^{n-1}} dy \int_{-n}^n L(u_j) dx \leq M$. Zbiór po którym całkujemy jest teraz ograniczony, więc ze słabej półciągłości z dołu tego funkcjonału mamy $\int_{[0,1]^{n-1}} dy \int_{-n}^n L(v) dx \leq M$ dla wszystkich n . Biorąc $n \rightarrow \infty$ można stwierdzić, że $\int_{[0,1]^{n-1}} dy \int_{\mathbb{R}} L(v) dx \leq M$.

W poniższym lemacie będzie potrzebna równoważna postać funkcjonału I . Niech:

$$a_k(u) = \int_{[0,1]^{n-1}} dy \int_{[k,k+1]} L(u) dx \quad \text{i} \quad I(u) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k(u).$$

Lemat 3.2. *Powyżej zdefiniowana funkcja v należy do Γ .*

Dowód: Dla wszystkich j , $\tau_{-1}u_j \geq u_j$ p.w. oraz $u_j \rightarrow v$ p.w. więc $\tau_{-1}v \geq v$ p.w. Należy wykazać, że $\tau_{-k}v \rightarrow 1$ w L^2 przy $k \rightarrow +\infty$. Ciąg $\tau_{-k}v$ jest ograniczony w $W_{loc}^{1,G}(\mathbb{R} \times [0,1]^{n-1})$, ponieważ $I(\tau_{-k}v) = I(v) \leq M$. Istnieje v^* takie, że $\tau_{-k}v \rightarrow v^*$ słabo w $W_{loc}^{1,G}(\mathbb{R} \times [0,1]^{n-1})$, silnie w L_{loc}^2 oraz $v^* \in W^{1,G}([0,1]^n)$. Mamy również $a_k(v) = a_0(\tau_{-k}v) \rightarrow a_0(v^*)$, gdyż $I(v)$ jest skończone. Wobec tego $a_k(v) \rightarrow 0$. Z definicji a_0 otrzymujemy $v^* = const$ oraz $\int_{[0,1]^n} F(x, y, v^*) dx dy = 0$. To oznacza, że $v^* \equiv 0$ lub $v^* \equiv 1$. Z równania (3.5) wynika, że $v^* \equiv 1$.

Analogicznie dowodzi się, że $\tau_{-k}v \rightarrow 0$ w L^2 przy $k \rightarrow -\infty$. □

Teraz można pokazać, że $I(v) = c_\Gamma$. Oczywiście $I(v) \geq c_\Gamma$. Dla ustalonego $\epsilon > 0$ oraz dostatecznie dużych j

$$\sum_{-n}^n a_k(u_j) \leq I(u_j) \leq c_\Gamma + \epsilon \quad \text{dla wszystkich } n.$$

Jeśli $j \rightarrow \infty$, to

$$\sum_{-n}^n a_k(v) \leq c_\Gamma + \epsilon \quad \text{dla wszystkich } n.$$

Jeśli $n \rightarrow \infty$, to $I(v) \leq c_\Gamma + \epsilon$ dla wszystkich $\epsilon > 0$ więc $I(v) = c_\Gamma$.

Pozostaje wykazać, że v jest słabym rozwiązaniem równania (AC), a w konsekwencji na mocy odpowiednich twierdzeń o regularności, będzie wykazane, że v jest również klasycznym rozwiązaniem. Dodatkowo wykażemy, że $0 < v < 1$.

Aby to osiągnąć, problem będzie analizowany lokalnie. Poniżej oraz w całym kolejnym podrozdziale 3.2 rozróżnienie x i y nie będzie konieczne, więc dla skrócenia zapisu będzie

stosowane skrócone oznaczenie $z = (x, y)$. Kulę o środku $z \in \mathbb{R}^n$ i promieniu r oznaczmy jako $B_r(z)$.

Definicja 3.3. Dla każdego $r \leq \frac{1}{2}$ i $z \in [0, 1] \times \mathbb{R}^{n-1}$ zdefiniujemy

$$Z(B_r(z), v) = \left\{ u \in E_1 : u = v \text{ na } B_{\frac{1}{2}}(z) - B_r(z) \right\}$$

oraz funkcjonal $\Phi_{B_r(z), v} : Z(B_r(z), v) \rightarrow \mathbb{R}$

$$\Phi_{B_r(z), v}(u) = \int_{B_r(z)} L(u) dx dy.$$

Łatwo sprawdzić, że $Z(B_r(z), v)$ jest domkniętym i wypukłym podzbiorem E_1 . Infimum $\Phi_{B_r(z), v}$ na $Z(B_r(z), v)$ będzie oznaczane symbolem $c(B_r(z), v)$. Zbiór minimów funkcjonalu Φ będzie oznaczony jako

$$M(B_r(z), v) = \{ w \in Z(B_r(z), v) : \Phi_{B_r(z), v}(w) = c(B_r(z), v) \}.$$

Poniżej zostanie wykazane, że v nie tylko minimalizuje globalny funkcjonal I , ale także lokalne funkcjonały Φ czyli, że $v \in M(B_r(z), v)$.

Twierdzenie 3.4. Dla każdego $z \in \mathbb{R} \times [0, 1]^{n-1}$ i $\epsilon \in (0, \frac{1}{2})$ funkcja v jest jednoznacznie wyznaczonym minimum $\Phi_{B_\epsilon(z), v}$ na $Z(B_\epsilon(z), v)$.

Z twierdzenia 3.4 wynika, że v jest słabym rozwiązaniem (AC) na każdej kuli o odpowiednio małym promieniu. Stąd, v jest słabym rozwiązaniem globalnie.

Zakładając prawdziwość twierdzenia 3.4 można zastosować twierdzenie 2.1, aby wykazać, że słabe rozwiązanie v spełnia lokalnie warunek Lipschitza. W celu uzyskania wyższej regularności poniżej zostaną zacytowane (w uproszczonej formie) twierdzenia 6.2 i 6.3 z rozdziału 4 z klasycznej monografii [16]. Są to odpowiednio:

Twierdzenie 3.5. Niech $u \in W^{1, \infty}(\Omega)$ jest słabym rozwiązaniem równania

$$\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} a_i(x, u, u_x) + a(x, u, u_x) = 0$$

gdzie a oraz a_i są różniczkowalne oraz ograniczone (wraz z pochodnymi) na zbiorze wartości u i u_x . Niech także a_i spełniają warunek eliptyczności. Wówczas u jest klasy $C^{1, \alpha}(\Omega') \cap W^{2, 2}(\Omega')$ przy dowolnie ustalonym $\Omega' \subset \Omega$.

Twierdzenie 3.6. Niech $u \in W^{2, 2}(\Omega) \cap C^{0, 1}(\bar{\Omega})$ jest słabym rozwiązaniem problemu z poprzedniego twierdzenia. Niech również funkcje a_i spełniają warunek eliptyczności oraz $a_i \in C^{l-1, \beta}$, $a \in C^{l-2, \beta}$ ($l \geq 2$). Wówczas $u \in C^{l, \beta}$.

Twierdzenia te gwarantują więc, że elementy $M(B_r(z), v)$ będące dzięki twierdzeniu 2.1 klasy $W^{1,\infty}$, są tak naprawdę rozwiązaniami klasy C^2 . Twierdzenia mogą być tu stosowane przy $a_i = G_{\xi_i}$ oraz $a = F_u$ ponieważ warunek eliptyczności wynika z (G_7) .

Dowód twierdzenia 3.4 będzie podzielony na szereg lematów i zostanie przeprowadzony w następnym podrozdziale.

3.2. Własności funkcjonału Φ - dowód Twierdzenia 3.4

W tym podrozdziale szukane będą minima $\Phi_{B_r(z)}$ na zbiorze $Z(B_r(z), v)$, oznacza to w konsekwencji rozwiązywanie równania (AC) jako problemu brzegowego na kuli $B_r(z)$. Badane będą także własności tych minimów. Sformułowania i dowody lematów 3.7, 3.10, 3.11 są zbliżone do zaprezentowanych w [24]. Ze względu na bardziej ogólną postać równania (w szczególności użycie funkcji G i postawienie problemu w przestrzeni Orlicza-Sobolewa) dowody nie mogą być jednak powtórzone dosłownie. Lemat 3.8 także jest inspirowany [24], ale w tym przypadku dowód jest istotnie inny.

Lemat 3.7. *Dla każdego $r < \frac{1}{2}$ istnieje $w \in Z(B_r(z), v)$ takie, że $\Phi_{B_r(z)}(w) = c(B_r(z), v)$.*

Dowód: Postępowanie będzie podobne do znajdowania minimum funkcjonału I . Niech $\{u_j\} \subset Z(B_r(z), v)$ jest ciągiem minimalizującym dla funkcjonału $\Phi_{B_r(z)}$. Jest to ciąg ograniczony w przestrzeni refleksywnej $W^{1,G}(B_{\frac{1}{2}}(z))$, więc posiada podciąg słabo zbieżny do pewnego $w \in W^{1,G}(B_{\frac{1}{2}}(z))$. Zbiór $Z(B_r(z), v)$ jest domknięty i wypukły w $W^{1,G}(B_{\frac{1}{2}}(z))$, więc $w \in Z(B_r(z), v)$. $\Phi_{B_r(z)}$ jest już całką po zbiorze ograniczonym, więc $\Phi_{B_r(z)}$ jest słabo półciągły z dołu i $\Phi_{B_r(z)}(w) = c(B_r(z), v)$. \square

Dzięki twierdzeniu 2.1 funkcja w oraz każde inne minimum $\Phi_{B_r(z)}$ w zbiorze $M(B_r(z), v)$ należy do $W_{loc}^{1,\infty}$ tzn. spełnia lokalnie warunek Lipschitza.

Lemat 3.8. *Zbiór $M(B_r(z), v)$ jest uporządkowany w następującym sensie: jeśli $\varphi, \psi \in M(B_r(z), v)$ oraz $\varphi \not\equiv \psi$, to $\varphi < \psi$ albo $\varphi > \psi$ w $B_r(z)$.*

Powyższy lemat jest zbliżony w treści do Lematu 4.2 z [21], którym inspirowali się również autorzy [24]. Dowód lematu będzie istotnie inny niż podobnych lematów z [21] czy [24], gdyż zamiast tradycyjnej zasady maksimum wykorzystane będzie ogólniejsze twierdzenie będące konsekwencją twierdzenia 2.5.3 z [23]:

Twierdzenie 3.9. *Rozważmy równanie $\operatorname{div} A(x, u, Du) + B(x, u, Du) = 0$ na zbiorze otwartym, spójnym i ograniczonym. Niech $A(x, z, \xi)$ jest klasy C^1 , zaś B jest ciągła i spełnia*



lokalnie warunek Lipschitza. Niech macierz $D_\xi A$ jest dodatnio określona zaś u i v oznaczają dwa rozwiązania tego równania klasy $C^0 \cap W_{loc}^{1,2}$, dla których $u \leq v$. Wówczas albo $u \equiv v$ albo $u < v$ w całej dziedzinie.

Teraz przejdziemy do dowodu lematu 3.8.

Dowód: Niech $\chi = \max\{\varphi, \psi\}$ i $\xi = \min\{\varphi, \psi\}$. Łatwo widać, że

$$\Phi_{B_r(z)}(\chi) + \Phi_{B_r(z)}(\xi) = \Phi_{B_r(z)}(\varphi) + \Phi_{B_r(z)}(\psi) = 2c(B_r(z), v),$$

więc χ i ξ należą do $M(B_r(z), v)$. Oczywiście jest również, że $\chi \geq \xi$. Jeśli więc $\varphi \neq \psi$, to $\chi \neq \xi$. Oczywiście χ i ξ , jako słabe rozwiązania, na mocy twierdzenia 2.1 spełniają warunek Lipschitza. Z twierdzenia 3.9 wynika, że albo $\chi > \xi$ albo $\chi \equiv \xi$ w $B_r(z)$. Jeśli $\chi > \xi$, to nie istnieje takie $z_0 \in B_r(z)$, żeby $\varphi(z_0) = \psi(z_0)$. Zatem z ciągłości $\varphi < \psi$ lub $\varphi > \psi$ w $B_r(z)$. Jeśli zaś $\chi \equiv \xi$, to łatwo zauważyć, że $\varphi \equiv \psi$. \square

Konsekwencją powyższego lematu jest fakt, że $M(B_r(z), v)$ zawiera element najmniejszy w sensie porządku zdefiniowanego w lemacie. Istotnie, gdyby taki element nie istniał, to można by wybrać malejący ciąg $w_n \in M(B_r(z), v)$. Ciąg taki jest ograniczony więc można w nim wybrać podciąg słabo zbieżny do pewnego $w^* \in Z(B_r(z), v)$. Z własności ciągu w_n i funkcjonału Φ wynika, że $\Phi(w^*) = c(B_r(z), v)$, a więc $w^* \in M(B_r(z), v)$ oraz $w^* < w_n$, czyli w^* jednak jest elementem najmniejszym w $M(B_r(z), v)$. Najmniejszy element zbioru $M(B_r(z), v)$ oznaczmy dalej jako w_z .

Będziemy chcieli pokazać, że w_z jest w istocie równe v w kuli $B_r(z)$, a nie tylko na pierścieniu $B_{\frac{1}{2}}(z) - B_r(z)$. Zdefiniujemy ciąg punktów $z_j = z + (j, 0)$ dla $j \in \mathbb{Z}$ oraz nową funkcję \tilde{v} taką, że dla wszystkich $j \in \mathbb{Z}$ zachodzą równości

$$\tilde{v} = w_{z_j} \quad \text{w} \quad B_{\frac{1}{2}}(z_j) \quad \text{oraz} \quad \tilde{v} = v \quad \text{w} \quad \mathbb{R} \times [0, 1] \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} B_r(z_n).$$

Istotnym problemem dla dalszego dowodu jest fakt, że taka lokalna zamiana funkcji v na w_z może spowodować, że otrzymana funkcja nie jest już elementem Γ .

Lemat 3.10. *Powyżej zdefiniowana funkcja \tilde{v} należy do Γ .*

Dowód: Należy wykazać nierówność $\tilde{v} \leq \tau_{-1}\tilde{v}$. Jeśli nie byłaby ona prawdziwa, to dla pewnego j istniałby punkt $(x_0, y_0) \in B_r(z_j)$ taki, że $w_{z_j}(x_0, y_0) > \tau_{-1}w_{z_j}(x_0, y_0) = w_{z_{j+1}}(x_0 + 1, y_0)$. Wówczas niech $\psi(x, y) = w_{z_{j+1}}(x + 1, y)$, $\phi(x, y) = w_{z_j}(x, y)$ dla każdego $(x, y) \in B_{\frac{1}{2}}(z_j)$ oraz niech $\chi = \max\{\psi, \phi\}$, $\xi = \min\{\psi, \phi\}$. Nierówności $\xi = \phi = v \leq \tau_{-1}v = \psi = \chi$ zachodzą w $B_{\frac{1}{2}}(z_j) - B_r(z_j)$. Ponadto $\xi \in Z(B_r(z_j), v)$ i $\xi \in Z(B_r(z_{j+1}), v)$, więc $\Phi_{B_r(z_j)}(\xi) + \Phi_{B_r(z_j)}(\chi) = \Phi_{B_r(z_j)}(\phi) + \Phi_{B_r(z_j)}(\psi) = 2c(B_r(z_j), v)$ oraz $\Phi_{B_r(z_j)}(\chi) =$

$\Phi_{B_r(z_{j+1})}(\tau_1\chi)$. Wobec tego $\chi \in M(B_r(z_j), v)$ i $\tau_1\chi \in M(B_r(z_{j+1}), v)$. Zastosowanie definicji \tilde{v} i lematu 3.8 daje $\chi \geq w_{z_j} = \phi$, a więc $w_{z_j}(x_0, y_0) \leq \chi(x_0, y_0) \leq \psi(x_0, y_0) = w_{z_{j+1}}(x_0 + 1, y_0)$ co jest sprzeczne z definicją punktu (x_0, y_0) . \square

Jako wniosek z powyższego lematu mamy $I(v) \leq I(\tilde{v})$. W szczególności dla wszystkich $j \in \mathbb{Z}$ zachodzi

$$\iint_{B_r(z_j)} L(v) \, dx \, dy \leq \iint_{B_r(z_j)} L(\tilde{v}) \, dx \, dy = \iint_{B_r(z_j)} L(w_{z_j}) \, dx \, dy = c(B_r(z_j)).$$

Jeśli $j = 0$, to $\iint_{B_r(z)} L(v) \, dx \, dy = c(B_r(z))$, czyli $\Phi_{B_r(z)}(v) = c(B_r(z))$.

Ostatni lemat w tym podrozdziale kończy dowód Twierdzenia 3.4.

Lemat 3.11. *Funkcja v jest jedynym elementem w zbiorze $Z(B_r(z), v)$ minimalizującym $\Phi_{B_r(z)}$.*

Dowód: Dla każdej dziedziny $D \subset B_r(z)$ można wybrać minimum ψ funkcjonału $\Phi_D = \Phi_{B_r(z)}|_D$ takie, że $\psi = v$ w $B_r(z) \setminus D$. Należy pokazać, że ψ jest wyznaczone jednoznacznie i że $\psi = v$. Z oczywistej nierówności $\Phi_D(\psi) \leq \Phi_D(v)$ wynika także $\Phi_{B_r(z)}(\psi) \leq \Phi_{B_r(z)}(v)$. Ponieważ $\psi \in Z(B_r(z), v)$, więc $\Phi_{B_r(z)}(\psi) \geq \Phi_{B_r(z)}(v)$, a stąd $\psi \in M(B_r(z), v)$. Jako, że $\psi = v$ w $B_r(z) \setminus D$ to z Lematu 3.8 wynika, że $\psi = v$ w $B_r(z)$. \square

3.3. Zakończenie dowodu Twierdzenia 3.1

Ponieważ $v \in \Gamma$, więc $\tau_{-k}v \rightarrow 0$ (lub 1) w L^2 przy $k \rightarrow -\infty$ (lub $+\infty$). Funkcja v jest klasy C^2 , zatem ta zbieżność zachodzi również punktowo

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} v(x, y) = 0 \quad \text{oraz} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} v(x, y) = 1.$$

Zakończenie dowodu Twierdzenia 3.1 wymaga jedynie wykazania nierówności ostrych

$$0 < v < 1 \quad \text{oraz} \quad v < \tau_{-1}v.$$

Odpowiednie nierówności nieostre wynikają wprost z definicji Γ .

Rozpocznijmy od dowodu nierówności $v < \tau_{-1}v$. Przypomnijmy, że funkcje v oraz $\tau_{-1}v$ są rozwiązaniami (AC). Wobec tego, gdyby w jakimś punkcie $z \in \mathbb{R} \times [0, 1]^{n-1}$ zachodziła równość $v(z) = \tau_{-1}v(z)$, to na mocy twierdzenia 3.9 taka równość zachodziła by również w $B_{\frac{1}{2}}(z)$. Biorąc odpowiedni ciąg punktów, można kulami o promieniu $\frac{1}{2}$ pokryć całe $\mathbb{R} \times$

$[0, 1]^{n-1}$, a przez to wykazać, że równość $v(z) = \tau_{-1}v(z)$ zachodziłaby wszędzie. Powyższe znaczyłoby, że v jest funkcją 1-okresową w zmiennej x , co jest oczywiście niemożliwe ze względu na heterokliniczność.

Gdy w powyższym dowodzie zastąpimy τ i $\tau_{-1}v$ odpowiednio przez funkcję stałą 0 i funkcję v to, prowadząc analogiczne rozumowanie, tym razem doprowadzimy do równości $0 = v$ wszędzie, co również prowadzi do sprzeczności z faktem, że $v \in \Gamma$ i dowodzi, że $0 < v$. Analogicznie dostajemy $v < 1$.

Uwagi końcowe

Problem regularności

Założenia twierdzenia 2.1, a w szczególności (G_6) oraz (G_7) są dość skomplikowane. Naturalne jest więc pytanie o możliwość ich uproszczenia. Oczywiście nie można oczekiwać otrzymania twierdzenia o regularności bez odpowiednio silnych założeń. Wśród nich powinny się znaleźć nie tylko Δ_2 oraz ∇_2 , ale także silna eliptyczność. Brak silnej eliptyczności w problemie anizotropowym może skutkować istnieniem nieograniczonych słabych rozwiązań. Przykład takiego równania i rozwiązania zaprezentował Marcellini w [18].

Założenia eliptyczności (G_7) oraz powiązanie ze sobą górnych i dolnych oszacowań wzrostu – (G_5) wraz z (G_6) – wydają się więc konieczne do uzyskania odpowiedniej klasy regularności słabych rozwiązań. Można jednak próbować je nieco uprościć. Rozważam hipotezę, że (G_7) można zastąpić następującym warunkiem:

- Istnieje niemalejąca funkcja $g_1 : [0, +\infty) \rightarrow [1, +\infty)$ taka, że

$$\langle D^2 G(\xi)\lambda, \lambda \rangle \geq 2\nu g_1(|\xi|)|\lambda|^2$$

Taka zmiana musiałaby być połączona ze zmianą założeń (G_5) i (G_6) , które zastąpione byłyby przez:

- $c_0 g_1(|\xi|)|\xi|^2 \leq G(\xi) \leq \bar{c} \sum_{i=1}^n g_1(|\xi_i|)^{\frac{2^*}{2}} |\xi_i|^2$ dla $|\xi| \geq 1$

Takie założenia są ogólniejsze i co jest równie ważne, mogą być łatwiejsze do sprawdzenia.

Problem typu Allena-Cahna

Kolejnym ciekawym problemem jest pytanie o istnienie innych niż heterokliniczne rodzaje rozwiązań problemu (AC) z uogólnionym operatorem. Rozwiązania heterokliniczne należą do najczęściej rozważanych rodzajów rozwiązań problemu typu Allena-Cahna (zaraz po trywialnych stałych rozwiązaniach), ale w literaturze wielu autorów dowodzi istnienia

także innych rodzajów rozwiązań. Na przykład w [24] autorzy dowodzą szereg twierdzeń o istnieniu nie tylko rozwiązań heteroklinicznych, ale także na przykład rozwiązań typu "multibump". Dowód twierdzenia 3.1 pokazuje jakie założenia i metody stosować można, gdy problem z laplasjanem zostanie zamieniony na problem z operatorem o szybszym wzroście. Naturalne jest więc oczekiwanie, że można udowodnić więcej twierdzeń o istnieniu pewnych rozwiązań analogicznych do tych z [24] stosując podobne metody do przedstawionych w tej rozprawie.

Bibliografia

- [1] R.A. Adams and J.J.F. Fournier. *Sobolev Spaces*. Elsevier Science, 2003.
- [2] F. Alessio, L. Jeanjean, and P. Montecchiari. Stationary layered solutions in \mathbb{R}^2 for a class of non autonomous Allen-Cahn equations. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 11(2):177–202, 2000.
- [3] F. Alessio, L. Jeanjean, and P. Montecchiari. Existence of infinitely many stationary layered solutions in \mathbb{R}^2 for a class of periodic Allen-Cahn equations. *Communications in Partial Differential Equations*, 27(7-8):1537–1574, 2002.
- [4] S. M. Allen and J. W Cahn. Coherent and incoherent equilibria in iron-rich iron-aluminum alloys. *Acta Metallurgica*, 23(9):1017 – 1026, 1975.
- [5] V. Bangert. On minimal laminations of the torus. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 6(2):95–138, 1989.
- [6] G. Barletta and A. Cianchi. Dirichlet problems for fully anisotropic elliptic equations. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics*, 147(1):25–60, 2017.
- [7] M. Beneš, V. Chalupecký, and K. Mikula. Geometrical image segmentation by the Allen–Cahn equation. *Applied Numerical Mathematics*, 51(2):187 – 205, 2004.
- [8] I. Chlebicka. A pocket guide to nonlinear differential equations in Musielak–Orlicz spaces. *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications*, 175:1–27, 2018.
- [9] J. Crank and E.P.J. Crank. *The Mathematics of Diffusion*. Clarendon Press, 1979.
- [10] R. de la Llave and E. Valdinoci. Multiplicity results for interfaces of Ginzburg - Landau - Allen - Cahn equations in periodic media. *Advances in Mathematics*, 215(1):379–426, 2007.
- [11] W. Desch and R. Grimmer. On the wellposedness of constitutive laws involving dissipation potentials. *Transactions of the American Mathematical Society*, 353, 01 2001.
- [12] P. C. Fife. *Mathematical Aspects of Reacting and Diffusing Systems*. Springer-Verlag, 1979.
- [13] E. Giusti. *Direct Methods in the Calculus of Variations*. World Scientific, 2003.
- [14] C. Gui and M. Zhao. Traveling wave solutions of Allen–Cahn equation with a fractional laplacian. *Annales de l’Institut Henri Poincaré (C) Non Linear Analysis*, 32(4):785 – 812, 2015.
- [15] G Hardy and H. B. Thompson. An imbedding theorem for anisotropic Orlicz-Sobolev spaces. *Bull. Austral. Math. Soc.*, 51:463–467, 1995.
- [16] O. Ladyzhenskaya and N. Ural’tseva. *Linear and quasilinear elliptic equations*, 1968.



- [17] T. Ma and S. Wang. *Phase transition dynamics*. Springer, New York, 2013.
- [18] P. Marcellini. Un exemple de solution discontinue d'un probleme variationnel dans le cas scalaire. *preprint Istituto Matematico "U. Dini"*, 11:1–6, 1987.
- [19] P. Marcellini. Regularity and existence of solutions of elliptic equations with p,q-growth conditions. *Journal of Differential Equations*, 90(1):1 – 30, 1991.
- [20] P. Marcellini. Regularity for elliptic equations with general growth conditions. *Journal of differential equations*, 105(2):296–333, 1993.
- [21] J. Moser. Minimal solutions of variational problems on a torus. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 3(3):229–272, 1986.
- [22] L. Pick, A. Kufner, O. John, and S. Fucík. *Function Spaces, 1*. De Gruyter, 2013.
- [23] P. Pucci and J.B. Serrin. *The Maximum Principle*. Birkhäuser Basel, 2007.
- [24] P. H. Rabinowitz and E. Stredulinsky. Mixed states for an Allen-Cahn type equation. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 56(8):1078–1134, 2003.
- [25] M. Sabir, A. Shah, W. Muhammad, I. Ali, and P. Bastian. A mathematical model of tumor hypoxia targeting in cancer treatment and its numerical simulation. *Computers and Mathematics with Applications*, 74(12):3250 – 3259, 2017.
- [26] G. Schappacher. A notion of Orlicz spaces for vector valued functions. *Applications of Mathematics*, 50(4):355–386, 2005.
- [27] F. Siepe. On the Lipschitz regularity of minimizers of anisotropic functionals. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 263:69–94, 2001.
- [28] M. S. Skaff. Vector valued Orlicz spaces generalized N -functions, I. *Pacific J. Math.*, 28(1):193–206, 1969.
- [29] N. S. Trudinger. An imbedding theorem for $H^0(G, \Omega)$ spaces. *Studia Math.*, 50:17–30, 1974.
- [30] V.A. Volpert, Y. Nec, and A.A. Nepomnyashchy. Exact solutions in front propagation problems with superdiffusion. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 239(3):134 – 144, 2010.
- [31] A. A. Wheeler, W. J. Boettinger, and G. B. McFadden. Phase-field model for isothermal phase transitions in binary alloys. *Phys. Rev. A*, 45:7424–7439, 1992.
- [32] K. Wroński. Heteroclinic solutions of Allen-Cahn type equations with a general elliptic operator. *Topological Methods in Nonlinear Analysis*, 51(2):1–10, 06 2018.