



JACEK CHRÓŚCIELEWSKI<sup>1)</sup>

MARIAN KLASZTORNY<sup>2)</sup>

DANIEL NY CZ<sup>3)</sup>

BARTOSZ SOBCZYK<sup>4)</sup>

## LOAD CAPACITY AND SERVICEABILITY CONDITIONS FOR FOOTBRIDGES MADE OF FIBRE-REINFORCED POLYMER LAMINATES

### WARUNKI NOŚNOŚCI I UŻYTKOWALNOŚCI W ODNIESIENIU DO KŁADEK Z LAMINATÓW POLIMEROWYCH

**STRESZCZENIE.** W pracy sformułowano warunki nośności i użytkowalności do zastosowania w projektowaniu kładek wykonanych z laminatów polimerowych wzmocnionych włóknami (FRP). Warunek nośności bazuje na normie projektowania kompozytowych zbiorników ciśnieniowych naziemnych oraz na kryterium Tsai-Wu inicjacji niszczenia laminatów polimerowych wzmocnionych włóknem. Warunki użytkowalności sformułowano ze względu na ugięcia pionowe oraz ze względu na częstotliwości drgań swobodnych kładki kompozytowej. Sformułowano procedurę projektowania kładek kompozytowych, obejmującą projektowanie wstępne oraz projektowanie techniczne. Procedurę tę zilustrowano w odniesieniu do kładki z laminatu winyloestrowo-szklanego, o temperaturze ugięcia cieplnego 90°C i trwałości 50 lat. Warunek użytkowalności ze względu na ugięcia zaproponowano analogiczny, jak w projektowaniu kładek stalowych. W celu zapewnienia komfortu pieszych, zaproponowano drugi warunek użytkowalności nałożony na podstawową częstotliwość drgań swobodnych kładki nieobciążonej oraz kładki z dodatkową masą rozłożoną z intensywnością 70 kg/m<sup>2</sup>, odwzorowującą umiarkowane obciążenie tłumem pieszych.

**SŁOWA KLUCZOWE:** kładki kompozytowe, laminaty polimerowe wzmocnione włóknami (FRP), metoda rozdzielonych współczynników bezpieczeństwa, warunek nośności, warunki użytkowalności.

**ABSTRACT.** The contribution is focused on derivation of the Ultimate Limit State (ULS) and Serviceability Limit State (SLS) design criteria for footbridges built of fibre-reinforced polymer matrix (FRP) laminates. The ULS design criterion is based on the design guidelines for above-ground, pressure, FRP composite tanks and the Tsai-Wu failure criterion, which is used to predict the onset of FRP laminates damage. The SLS criterion is based on vertical deflections and natural frequencies limitations of the analysed FRP footbridge. As a part of the research, a special design procedure is established for FRP footbridges design process, covering both the preliminary and detailed engineering calculations. As an illustrative example, the procedure is applied to glass-fibre reinforced vinylester laminate with 90°C heat deflection temperature and 50-year service life. A deflection-based serviceability limit state criterion is established using the same approach as that currently used in the design of steel footbridges. Moreover, the second serviceability limit state criterion is proposed. It limits the range of possible fundamental natural frequency of footbridge without any load and loaded with an additional mass 70 kg/m<sup>2</sup> applied to simulate load created by moderate pedestrian traffic.

**KEYWORDS:** fibre reinforced plastics (FRP), FRP composite footbridges, partial safety factor method, serviceability limit state criterion, ultimate limit state criterion.

DOI: 10.7409/rabdim.014.013

<sup>1)</sup> Politechnika Gdańska, Wydział Inżynierii Lądowej i Środowiska ; jchrost@pg.gda.pl

<sup>2)</sup> Wojskowa Akademia Techniczna, Wydział Mechaniczny; m.klasztorny@gmail.com

<sup>3)</sup> Biuro Projektowe DES ART, Sanok; daniel.nycz@interia.pl

<sup>4)</sup> Politechnika Gdańska, Wydział Inżynierii Lądowej i Środowiska; barsobcz@pg.gda.pl (✉)

## 1. WSTĘP

Na przestrzeni ostatnich 20 lat zaobserwowano wzrastającą tendencję do budowy kładek jako konstrukcji lekkich z materiałów konwencjonalnych tj. stal, beton i drewno, jak również z materiałów innowacyjnych, np. z laminatów polimerowych wzmocnionych włóknem szklanym. Wśród nich można wyróżnić konstrukcje o nietypowej formie architektonicznej, która zapewnia obiektowi szeroko pojętą rozpoznawalność (ang. *landmark*), jak i kładki standardowe, których podstawowym celem jest sprawne przeprowadzenie ruchu pieszego lub pieszo-rowerowego. Kładki dla pieszych wykonane z innowacyjnych materiałów kompozytowych mają wiele zalet, takich jak: wysoka wytrzymałość i sztywność właściwa, dobra odporność na zmęczenie, wilgoć, korozję, czynniki atmosferyczne i promieniowanie UV, długa trwałość, jak również niskie koszty eksploatacji.

Dotychczas, nie sformułowano jednoznacznych przepisów regulujących proces projektowania kładek z materiałów FRP (ang. *fibre reinforced plastic*), który jest w fazie ciągłego rozwoju. Nie znaczy to jednak, że takowe konstrukcje nie powstają. Do ich projektowania wykorzystywano metody uproszczone, formułowane na podstawie różnych kryteriów i założeń. Wybrane, reprezentatywne rozwiązania konstrukcyjne i technologiczne, zagraniczne i krajowe, przedstawiono m.in. w [1-9].

Wytyczne do projektowania kładek z ustrojami nośnymi wykonanymi z materiałów klasycznych, w których uwzględniono kryteria komfortu pieszych, podano w [10]. W pracy [10] przedstawiono również analityczną metodologię i zalecenia dotyczące wyznaczania obciążeń związanych z ruchem pieszych (chód, bieg). Przeprowadzone badania eksperymentalne (np. [11]) definiują obciążenie pieszymi jako okresowe, o częstotliwościach wzbudzenia w zakresie od 1,5 do 2,5 Hz dla chodu oraz od 2,0 do 4,0 Hz przy bieganiu. Zalecenia [10] wprowadzają 4 zakresy częstotliwości, określające poziomy ryzyka wystąpienia zjawiska drgań rezonansowych w kierunku pionowym. Wśród nich można wyróżnić zakres 3. (niskie ryzyko rezonansu, przy standardowych sytuacjach obciążenia):  $2,6 \text{ Hz} < f < 5,0 \text{ Hz}$  oraz zakres 4. (pomijalnie małe ryzyko wystąpienia rezonansu):  $f > 5,0 \text{ Hz}$ . Na tej podstawie, położenie częstotliwości drgań swobodnych konstrukcji w odpowiednim przedziale pozwala na oszacowanie ryzyka wzbudzenia rezonansowego oraz ocenę komfortu użytkownika.

W przypadku kładek klasy III (kładka przeznaczona do normalnego ruchu, tylko okazjonalnie mogą ją przekraczać

## 1. INTRODUCTION

Over the last twenty years, there has been a growing tendency to choose lightweight construction systems for footbridges, using both conventional and innovative materials. The first including steel, concrete and wood and the latter, for example fibre-reinforced plastics (FRP). The types of bridges architecture ranges from landmark structures to the most ordinary pedestrian-only or pedestrian and cycle footbridges designed just to carry traffic flow efficiently. Footbridges made of innovative FRP composite materials offer a number of desirable features, including high specific stiffness and strength, good fatigue performance and high resistance to moisture, corrosion, weather factors and UV radiation, long service life with minimal maintenance cost.

So far, no specific design guidelines have been developed in relation to FRP footbridges and the relevant engineering design process is still under development. This, however, did not stop structures of this type from being built. Owing to the fact that, there are no specific guidelines, simplified design methods are used, based on various criteria and input assumptions. Some representative design and technological solutions applied in different countries, including Poland, are presented for example in [1-9].

The design guidelines for footbridges made of conventional materials, which take into account the pedestrian comfort criteria, are given in [10]. The guide [10] presents also some analytical methodology and recommendations for pedestrian loading determination (separately for walking and running cases). In experimental research projects (such as [11]), pedestrian loading is defined as periodic with excitation frequency ranging from 1.5 to 2.5 Hz in the case of walking and from 2.0 to 4.0 Hz in the case of running. The guide [10] proposes four frequency ranges corresponding to the risk of vertical resonant vibration excitation. Attention is drawn to frequency range No. 3,  $2.6 \text{ Hz} < f < 5.0 \text{ Hz}$  (negligible risk of resonance for standard loading situations) and frequency range No. 4,  $f > 5.0 \text{ Hz}$  (low risk of resonance). On this basis, the probability of resonance and the comfort of usage may be assessed by determining the range in which the fundamental natural frequency of the structure falls.

To assess the probability of forced resonance in class III structures (footbridge for standard use, occasionally crossed by large groups with load density of  $0.5 \text{ person/m}^2$ ), the guidelines [12] recommend determination of the natural frequencies of the considered structure. The above mentioned frequencies refer to vertical vibration and horizontal



duże grupy pieszych, obciążenie  $0,5 \text{ osoby/m}^2$ ), wytyczne [12] zalecają wyznaczenie częstotliwości drgań swobodnych konstrukcji, w celu oszacowania ryzyka rezonansu siłowego kładki. Wyżej wymienione częstotliwości dotyczą drgań w kierunkach pionowym, poprzecznie poziomym i podłużnie poziomym. Są one określone na podstawie dwóch założeń związanych z masą na konstrukcji: kładka bez pieszych oraz kładka pod obciążeniem  $700 \text{ N/m}^2$  (dodatkowa masa  $70 \text{ kg/m}^2$ ).

Do tej pory, normy projektowe dotyczące kładek nie uwzględniają obiektów wykonanych z kompozytów polimerowych wzmocnionych włóknem (ang. *FRP composites*). W opinii autorów, wytyczne projektowania podane np. w polskich normach [13, 14] powinny zostać sformułowane również w odniesieniu do konstrukcji z laminatów polimerowych, przede wszystkim ze względu na przestrzenny złożony stan naprężenia w warstwach laminatu polimerowego z różnymi orientacjami włókien oraz ortotropowe sprężysto-krucho zachowanie lamin.

Do oceny wytrzymałości warstwy laminatu w złożonym stanie naprężenia, należy zastosować odpowiednie kryterium inicjacji zniszczenia. Dotychczas, sformułowano wiele kryteriów, m.in.: maksymalnego naprężenia, maksymalnego odkształcenia, Tsai-Wu, Hashina, zmodyfikowane Hashina, Tsai-Hilla, Hoffmana, Chang-Changa, Hilla, Malmeistera, i inne (m.in. [15]). Kryterium Tsi-Wu w odniesieniu do laminatów polimerowych wzmocnionych włóknem jest powszechnie uznawane za dość dobrze przewidujące inicjację zniszczenia [16].

## 2. KRYTERIUM TSAI-WU W ODNIESIENIU DO KOMPOZYTÓW POLIMEROWYCH WZMOCNIONYCH WŁÓKNAMI

Po homogenizacji, każda warstwa laminatu wzmocnionego tkaninami jednokierunkowymi lub ortogonalnymi jest modelowana jako materiał ortotropowy liniowo sprężysto-krucho [17], zdefiniowany we współrzędnych lokalnych, tzn. 1 – kierunek włókien  $0^\circ$  (wątek), 2 – kierunek włókien  $90^\circ$  (osnowa) lub kierunek prostopadły do włókien, 3 – kierunek grubości  $h$ . Efektywne stałe materiałowe w kierunkach i płaszczyznach lokalnych są następujące:

$E_1, E_2, E_3$  – moduły Younga,

$\nu_{12}, \nu_{21}, \nu_{13}, \nu_{31}, \nu_{23}, \nu_{32}$  – stałe Poissona, ( $\nu_{ij}/E_i = \nu_{ji}/E_j$ ),

$G_{12}, G_{13}, G_{23}$  – moduły Kirchhoffa (sprężystości postaciowej),

vibration in lateral and longitudinal directions. These values are determined for two loading cases: a footbridge without load and loaded with  $700 \text{ N/m}^2$  (additional mass of  $70 \text{ kg/m}^2$ ).

To date, there are no specific guidelines for the design of footbridges made of FRP composite materials. In the authors opinion, the existing design guidelines, such as those given in the Polish Standards [13, 14], should be extended to structures built of FRP laminate materials. Primarily due to complex stress distribution in the layers of FRP composites with fibres aligned in different directions and with elastic-brittle orthotropic behaviour of the respective plies (laminas).

In order to properly predict the ultimate strength of laminate in a complex stress state, an adequate damage initiation criterion must be used. So far a number of criteria have been formulated, inter alia, the maximum stress, the maximum strain, Tsai-Wu, Hashin, modified Hashin, Tsai Hill, Hoffman, Chang-Chang, Hill and Malmeister [15]. The Tsai-Wu failure criterion is generally accepted for FRP laminates. It provides a reasonably good prediction of the onset of damage [16]

## 2. APPLICATION OF TSAI-WU CRITERION FOR FRP COMPOSITES

After homogenisation, each lamina reinforced with uniaxial or orthogonal fabrics, is modelled as an elastic-brittle orthotropic material [17]. The layer is orientated in the local coordinate system with axis 1 – aligned with the  $0^\circ$  fibre direction (warp), 2 – aligned with the  $90^\circ$  fibre direction (weft) or direction perpendicular to the warp, 3 – through-the-thickness direction  $h$ . Notation of relevant material constants in the local directions and planes is presented below:

$E_1, E_2, E_3$  – Young's moduli,

$\nu_{12}, \nu_{21}, \nu_{13}, \nu_{31}, \nu_{23}, \nu_{32}$  – Poisson's ratios, where:  
( $\nu_{ij}/E_i = \nu_{ji}/E_j$ ),

$G_{12}, G_{13}, G_{23}$  – shear moduli,

$R_{1t}, R_{2t}, R_{3t}$  – tensile strength,

$R_{1c}, R_{2c}, R_{3c}$  – compressive strength,

$R_{12}, R_{13}, R_{23}$  – shear strength,

$e_{1t}, e_{2t}, e_{3t}$  – maximum elongation (relative),

$e_{1c}, e_{2c}, e_{3c}$  – maximum compression (relative),



$R_{1t}, R_{2t}, R_{3t}$  – wytrzymałości na rozciąganie,  
 $R_{1c}, R_{2c}, R_{3c}$  – wytrzymałości na ściskanie,  
 $R_{12}, R_{13}, R_{23}$  – wytrzymałości na ścinanie,  
 $e_{1t}, e_{2t}, e_{3t}$  – wydłużenia względne graniczne,  
 $e_{1c}, e_{2c}, e_{3c}$  – skrócenia względne graniczne,  
 $g_{12}, g_{13}, g_{23}$  – odkształcenia postaciowe graniczne.

Stałe  $R_{13}, R_{23}$  są wyznaczane metodą zginania trójpunktowego krótkiej belki (wąska płyta kompozytowa), stąd uwzględniają również niszczenie przez delaminację.

Analizę numeryczną kryterium Tsai-Wu i warunku nośności (w tym i następnym punkcie) przeprowadzono w odniesieniu do kompozytu winyloestrowo-szklanego (laminy) oznaczonego kodem B/F, zastosowanego w projektowaniu kompozytowej kładki w pracy [4]. Jest to żywica winyloestrowa uniepalniona (z dodatkiem uniepalniacza), wzmocniona tkaniną dwukierunkową (złożoną z osnowy i wątku), zszywaną (rodzaj połączenia osnowy i wątku), zrównoważoną (gramatury osnowy i wątku są sobie równe), ze szkła E, o gramaturze  $800 \text{ g/m}^2$ . Stałe sprężystości i wytrzymałości ww. laminy w warunkach NS/20 (materiał nowy, wygrzewany, temperatura badań  $20^\circ\text{C}$ ), przy zastosowaniu technologii infuzji, zestawiono w Tabl. 1. Żywica ma temperaturę ugięcia cieplnego  $T_{HDT} = 90^\circ\text{C}$  (temperatura, przy której próbka belkowa z żywicy gwałtownie traci sztywność). Maksymalna temperatura projektowa wynosi  $T_D = 55^\circ\text{C}$  (jak w przypadku kładek stalowych).

Kryterium inicjacji niszczenia Tsai-Wu w wersji zaproponowanej przez Tsai i Hahna [18] jest uznanym kryterium stosowanym w odniesieniu do laminatów FRP. Jest to kryterium wielomianu tensorowego Malmaistra ograniczone do dwóch pierwszych wyrazów. Zamknięta powierzchnia niszczenia w przypadku złożonego stanu naprężenia opisanego przez składowe tensora naprężeń w osiach lokalnych warstwy (naprężenia normalne  $\sigma_i$  i styczne  $\tau_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ ) jest opisana wzorem:

$$F(\sigma_i, \tau_{ij}) = 1, \quad (1)$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
 F = & F_1 \sigma_1 + F_2 \sigma_2 + F_3 \sigma_3 + \\
 & + F_{11} \sigma_1^2 + F_{22} \sigma_2^2 + F_{33} \sigma_3^2 + F_{44} \tau_{23}^2 + F_{55} \tau_{13}^2 + F_{66} \tau_{12}^2 + \\
 & + 2F_{23} \sigma_2 \sigma_3 + 2F_{13} \sigma_1 \sigma_3 + 2F_{12} \sigma_1 \sigma_2
 \end{aligned} \quad (2)$$

jest indeksem niszczenia oraz

$$F_i = \frac{1}{R_{it}} - \frac{1}{R_{ic}}, \quad F_{ii} = \frac{1}{R_{ii} R_{ic}}, \quad F_{ij} = -\frac{1}{2} \sqrt{F_{ii} F_{jj}}, \quad (3a)$$

$i, j = 1, 2, 3,$

$g_{12}, g_{13}, g_{23}$  – ultimate shear strains.

$R_{13}, R_{23}$  are material constants determined by three point bending test of a short beam (narrow composite panel) and as such, they also include delamination failure.

Numerical analysis of the Tsai-Wu criterion and the ULS criterion (as described in this and in the following sections) is carried out for glass-fibre reinforced vinylester resin laminate, denoted with a B/F symbol, which was used in the design of composite footbridge as reported in [4]. It consists of a fire retardant resin (including addition of an appropriate fire retarding agent) reinforced with biaxial fabric (built up of warp and weft), stitched (a method of warp and weft bonding) and balanced (warp and weft have equal weight per unit area), made of  $800 \text{ g/m}^2$  E-glass. The elasticity and strength values of the above lamina in the NS/20 conditions (new material, post-cured in  $20^\circ\text{C}$  test temperature) with the use of infusion technique are compiled in Table 1. The resin has  $T_{HDT}$  heat deflection temperature of  $90^\circ\text{C}$  (temperature which causes rapid loose of stiffness of beam shaped specimen). The maximum design temperature of the footbridge is  $T_D = 55^\circ\text{C}$  (the same as for steel footbridges).

Table 1. Elastic and strength constants of B/F lamina under NS/20 conditions

Tablica 1. Stałe sprężystości i wytrzymałości laminy B/F w warunkach NS/20

Material constant Stała materiałowa	Unit Jednostka	Value Wartość
$E_1 = E_2$	MPa	23400
$E_3$	MPa	7780
$\nu_{12} = \nu_{21}$	[-]	0.153
$\nu_{31} = \nu_{32}$	[-]	0.197
$\nu_{13} = \nu_{23}$	[-]	0.593
$G_{12}$	MPa	3520
$G_{13} = G_{23}$	MPa	2300
$R_{1t} = R_{2t}$	MPa	449
$R_{3t}$	MPa	95
$R_{1c} = R_{2c}$	MPa	336
$R_{3c}$	MPa	348
$R_{12}$	MPa	45.2
$R_{13} = R_{23}$	MPa	27.2



$$F_{44} = \frac{1}{R_{23}^2}, F_{55} = \frac{1}{R_{13}^2}, F_{66} = \frac{1}{R_{12}^2}. \quad (3b)$$

W przypadku kryterium Tsai-Wu, wartości indeksu niszczenia  $F$  nie określają rzeczywistego zapasu bezpieczeństwa w naprężeniach. Zapas ten można określić na podstawie wskaźnika wyężenia (ang. strength ratio)  $S > 1$ , który jest równy dodatniemu pierwiastkowi równania kwadratowego odpowiadającego  $F(S\sigma_i, S\tau_{ij}) = 1$ , tzn.

$$AS^2 + BS + C = 0, \quad (4)$$

gdzie:

$$A = F_{11}\sigma_1^2 + F_{22}\sigma_2^2 + F_{33}\sigma_3^2 + F_{44}\tau_{23}^2 + F_{55}\tau_{13}^2 + F_{66}\tau_{12}^2 + 2F_{23}\sigma_2\sigma_3 + 2F_{13}\sigma_1\sigma_3 + 2F_{12}\sigma_1\sigma_2, \quad (5a)$$

$$B = F_1\sigma_1 + F_2\sigma_2 + F_3\sigma_3, \quad (5b)$$

$$C = -1. \quad (5c)$$

Ogólnie można powiedzieć, że wskaźnik wyężenia  $S$  jest lokalną miarą zapasu bezpieczeństwa konstrukcji. Parametr  $S > 1$ , jako mnożnik proporcjonalności naprężeń, podaje ile razy muszą wzrosnąć  $\sigma_i, \tau_{ij}$ , gdzie  $i, j = 1, 2, 3$ , aby osiągnięte zostało kryterium inicjacji niszczenia (1). Czytelniejszą interpretację, używaną np. w komercyjnych kodach MES, ma odwrotność wskaźnik wyężenia  $S$ , tzn.  $0 < 1/S < 1$  (ang. *inverse of strength ratio*). Wynika to stąd, że  $1/S$  ma dobrze uwarunkowaną granicę górną, której osiągnięcie ( $1/S = 1$ ) oznacza zniszczenie materiału w rozważanym punkcie konstrukcji.

Interpretację współczynników  $F_{ij}$  podano w odniesieniu do płaskiego stanu naprężenia w płaszczyźnie 12, w odniesieniu do którego  $\sigma_i = \tau_{ij} = F_{ij} = 0$ ;  $i, j = 3$ . Składowa  $F_{12}$ , związana z interakcją naprężeń  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$ , jest możliwa do wyznaczenia w teście dwuosowego rozciągania. Parametr ten ma duży wpływ na kształt powierzchni niszczenia. Wu i Stachurski [19] podają, że jeśli wartość parametru:

$$F_{12}^* = \frac{F_{12}}{\sqrt{F_{11}F_{22}}}, \quad (6)$$

który w ogólnym przypadku jest ujemną odwrotnością mnożnika  $F_{12}$  we wzorze (2), mieści się w granicach  $-1 < F_{12}^* < 1$ , to kryterium jest stabilne i daje zamkniętą krzywą graniczną. W odniesieniu do większości materiałów proponują przyjmować  $-1 < F_{12}^* < 0$ . Tsai i Hahn [18] rekomendują  $F_{12}^* = -1/2$ , a wzory (1-5) odpowiadają tej wartości.

Tsai-Wu failure criterion in the version developed by Tsai and Hahn is a recognised criterion considered applicable to FRP laminates. It is equivalent to the tensor-polynomial criterion proposed by Malmaister, reduced to the first two expressions. The closed failure surface in the case of complex stress state, described by the stress tensor components in the local axes of the ply (normal  $\sigma_i$  and shear  $\tau_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2, 3$  stresses), is represented by the following equation:

$$F(\sigma_i, \tau_{ij}) = 1, \quad (1)$$

where:

$$F = F_1\sigma_1 + F_2\sigma_2 + F_3\sigma_3 + F_{11}\sigma_1^2 + F_{22}\sigma_2^2 + F_{33}\sigma_3^2 + F_{44}\tau_{23}^2 + F_{55}\tau_{13}^2 + F_{66}\tau_{12}^2 + 2F_{23}\sigma_2\sigma_3 + 2F_{13}\sigma_1\sigma_3 + 2F_{12}\sigma_1\sigma_2 \quad (2)$$

is the failure index and

$$F_i = \frac{1}{R_{it}} - \frac{1}{R_{ic}}, F_{ii} = \frac{1}{R_{it}R_{ic}}, F_{ij} = -\frac{1}{2}\sqrt{F_{ii}F_{jj}}, \quad (3a)$$

$i, j = 1, 2, 3,$

$$F_{44} = \frac{1}{R_{23}^2}, F_{55} = \frac{1}{R_{13}^2}, F_{66} = \frac{1}{R_{12}^2}. \quad (3b)$$

In the case of Tsai-Wu criterion, the values of failure index  $F$  do not represent the actual Margin of Safety (MoS) with respect to stresses. For this purpose, the strength ratio  $S > 1$  may be used, which is equal to the positive root of quadratic equation corresponding to  $F(S\sigma_i, S\tau_{ij}) = 1$ :

$$AS^2 + BS + C = 0, \quad (4)$$

where:

$$A = F_{11}\sigma_1^2 + F_{22}\sigma_2^2 + F_{33}\sigma_3^2 + F_{44}\tau_{23}^2 + F_{55}\tau_{13}^2 + F_{66}\tau_{12}^2 + 2F_{23}\sigma_2\sigma_3 + 2F_{13}\sigma_1\sigma_3 + 2F_{12}\sigma_1\sigma_2, \quad (5a)$$

$$B = F_1\sigma_1 + F_2\sigma_2 + F_3\sigma_3, \quad (5b)$$

$$C = -1. \quad (5c)$$

Generally, we can say that the strength ratio  $S$  is a local margin of safety measure of the structure. The value of  $S > 1$ , as a stress proportionality multiplier represents how many times the values of  $\sigma_i, \tau_{ij}$ , where  $i, j = 1, 2, 3$ , must increase to reach the damage initiation criterion (1). A simpler interpretation can be obtained introducing the inverse of the strength ratio i.e.  $0 < 1/S < 1$ , as used in commercial FEM codes. This implies that  $1/S$  has a clear-cut upper limit of  $1/S = 1$  which represents local failure of the analysed material.



Na Rys. 1 porównano krzywe graniczne w przestrzeni  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ , odpowiadające kryteriom Max Stress i Tsai-Wu, przy założeniu  $R_{1t} = R_{2t} = 449$  MPa,  $R_{1c} = R_{2c} = 336$  MPa,  $F_{12}^* = -1/2$ .

W przypadku stałych wytrzymałości zestawionych w Tabl. 1 oraz  $F_{12}^* = -1/2$ , parametry interakcji mają wartości:  $F_{12} = -3,314 \cdot 10^{-6}$  MPa<sup>-2</sup>,  $F_{13} = F_{23} = -7,080 \cdot 10^{-6}$  MPa<sup>-2</sup>.

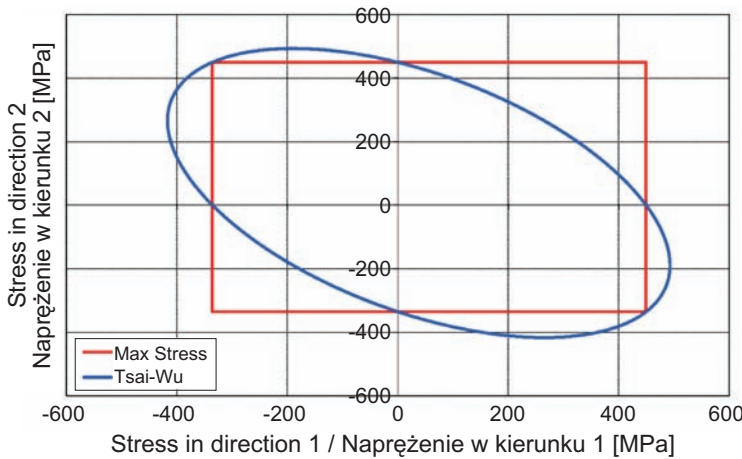


Fig. 1. Comparison of Max Stress and Tsai-Wu failure envelopes in  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  stress space ( $R_{1t} = R_{2t} = 449$  MPa,  $R_{1c} = R_{2c} = 336$  MPa,  $F_{12}^* = -1/2$ )

Rys. 1. Porównanie krzywych granicznych w przestrzeni  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ , odpowiadających kryteriom Max Stress i Tsai-Wu ( $R_{1t} = R_{2t} = 449$  MPa,  $R_{1c} = R_{2c} = 336$  MPa,  $F_{12}^* = -1/2$ )

### 3. SFORMUŁOWANIE WARUNKÓW NOŚNOŚCI I UŻYTKOWALNOŚCI

Kryteria projektowe podane w [13, 14] odnoszą się do materiałów izotropowych i operują pojęciami stanów granicznych nośności i użyteczności, w których wykorzystano metodę rozdzielonych współczynników bezpieczeństwa. W odniesieniu do kładek, obciążenie tłumem pieszych traktowane jest jako równomiernie rozłożone na wszystkich obszarach, w których wywołuje ono efekty niekorzystne, o intensywności  $q_{p,ch} = 4$  kN/m<sup>2</sup> (5 kN/m<sup>2</sup> według normy europejskiej). Wiatr traktowany jest jako obciążenie poziome równomiernie rozłożone o intensywności  $q_{w,ch,1} = 1,25$  kN/m<sup>2</sup> (w przypadku pomostów obciążonych) i  $q_{w,ch,2} = 2,5$  kN/m<sup>2</sup> (w przypadku pomostów nieobciążonych). Indeks dolny (<sub>ch</sub>) oznacza wartość charakterystyczną obciążenia.

Stan graniczny nośności w [13, 14] wykorzystuje wartości obliczeniowe obciążeń i wytrzymałości. Wartości obliczeniowe obciążeń są definiowane jako iloczyn współczynnika

Interpretation of  $F_{ij}^*$  indices is given in relation to in-plane stress state, with respect to 12 plane, where  $\sigma_i = \tau_{ij} = F_{ij}^* = 0$ ;  $i, j = 3$ . The  $F_{12}^*$  component relates to interaction of stresses  $\sigma_1$  and  $\sigma_2$ . It may be determined experimentally in the biaxial tensile test. This parameter has a major effect on the shape of the failure surface. According to Wu and Stachurski [19], if the value of  $F_{12}^*$  calculated as follows:

$$F_{12}^* = \frac{F_{12}}{\sqrt{F_{11} F_{22}}}, \quad (6)$$

which – in the general case – is the negative inverse of  $F_{12}^*$  multiplier in equation (2), falls in the range of  $-1 < F_{12}^* < 1$  the criterion is considered stable and gives a closed envelope. According to Wu and Stachurski, the range of  $-1 < F_{12}^* < 0$  is appropriate for most materials. The value recommended by Tsai and Hahn [18] is  $F_{12}^* = -1/2$  and equations (1-5) are in correspondence with it.

Fig. 1 provides a comparison of envelopes in space  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ , corresponding to the Maximum Stress and Tsai-Wu criteria, assuming  $R_{1t} = R_{2t} = 449$  MPa,  $R_{1c} = R_{2c} = 336$  MPa,  $F_{12}^* = -1/2$ .

For the strength constants given in Table 1 and  $F_{12}^* = -1/2$ , the interaction parameters take the following values:  $F_{12} = -3.314 \cdot 10^{-6}$  MPa<sup>-2</sup>,  $F_{13} = F_{23} = -7.080 \cdot 10^{-6}$  MPa<sup>-2</sup>.

### 3. DEVELOPMENT OF ULS AND SLS DESIGN CRITERIA

The design criteria in [13, 14] are related to isotropic materials and use the concepts of ultimate and serviceability limit states, using the partial safety factors method. In the case of footbridges, the action of pedestrian crowd is treated as uniformly distributed in all areas where it has negative effect on the structure, with the density of  $q_{p,ch} = 4$  kN/m<sup>2</sup> (or 5 kN/m<sup>2</sup> according to the relevant European Standard). The wind action is considered as a horizontal, uniformly distributed pressure  $q_{w,ch,1} = 1.25$  kN/m<sup>2</sup> (for loaded deck) and  $q_{w,ch,2} = 2.5$  kN/m<sup>2</sup> (for empty deck). The subscript (<sub>ch</sub>) denotes the characteristic load value.

The ultimate limit state in [13, 14] applies the design load and strength values. The design load values are defined as a result of the product of load partial factor  $\gamma_f > 1$  and the characteristic load value  $q_{ch}$ . Consequently, the design strength values are defined as a result of the multiplication of the resistance partial factor  $\gamma_R < 1$  and characteristic strength  $R_{ch}$ .

obciążenia  $\gamma_f > 1$  i wartości charakterystycznej obciążenia  $q_{ch}$ . Odpowiednio, wartości obliczeniowe wytrzymałości są określane jako iloczyn współczynnika wytrzymałości  $\gamma_R$  i wartości charakterystycznej wytrzymałości  $R_{ch}$ . Proponowany warunek nośności kładek kompozytowych dowiżemy do dobrze znanych zasad przyjmowanych w projektowaniu mostów stalowych [14]. Rozważmy warunek nośności w przypadków jednoosiowego rozciągania w kierunku 1, w formie:

$$\gamma_f \sigma_{1,ch} \leq \gamma_R R_{1t}, (\gamma_f > 1, \gamma_R < 1). \quad (7)$$

Warunek ten przepisemy w postaci:

$$S_{ch} \geq S_{u,ch}, \quad (8)$$

gdzie  $S_{ch}$  jest współczynnikiem bezpieczeństwa, a  $S_{u,ch}$  jest jego wartością graniczną (minimalną), przy czym:

$$S_{ch} = \frac{R_{1t}}{\sigma_{1,ch}}, S_{u,ch} = \frac{\gamma_f}{\gamma_R}, S_{u,ch} > 1. \quad (9)$$

Wartość graniczna współczynnika projektowego  $S_{u,ch} > 1$  jest globalnym współczynnikiem bezpieczeństwa, tzn. granicznym wskaźnikiem wyężenia odpowiadającym naprężeniom charakterystycznym.

Z powodu braku norm do projektowania kładek kompozytowych, do określenia wartości wskaźnika  $S_{u,ch}$  autorzy proponują wykorzystanie normy projektowania zbiorników ciśnieniowych naziemnych z kompozytów wzmocnionych włóknem szklanym [20]. Norma [20] definiuje dwa współczynniki projektowe:

$K$  – globalny współczynnik projektowy (występujący w warunku nośności),

$F$  – wyobczeniowy współczynnik projektowy (występujący w warunku stateczności).

Wskaźnik  $S_{u,ch}$  przyjęto równy współczynnikowi  $K$ , tzn. zgodnie z [20]:

$$S_{u,ch} = 2 \cdot A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4 \cdot A_5, \quad (10)$$

gdzie  $A_i > 1$ ,  $i = 1, 2, 3, 4, 5$  są nazywane współczynnikami cząstkowymi.

Współczynnik cząstkowy  $A_1$  zależy od rodzaju żywicy i wzmocnienia laminatu oraz dokładności opisu stałych materiałowych. Współczynnik ten przyjmuje pięć wartości  $A_1 = \{1,0; 1,1; 1,2; 1,3; 1,5; 2,0\}$  i zależy od sposobu wyznaczenia stałych materiałowych [20]. Przy założeniu, że stałe materiałowe (Tabl. 1) zostały wyznaczone na podstawie badań identyfikacyjnych próbek laminatu zastosowanego w projektowanej konstrukcji, współczynnik  $A_1 = 1,1$ .

Let us associate the proposed ULS criterion for FRP composite footbridges with the well-known rules applied in the design of steel bridges [14]. The ULS criterion for uniaxial tension in direction 1 may be expressed as:

$$\gamma_f \sigma_{1,ch} \leq \gamma_R R_{1t}, (\gamma_f > 1, \gamma_R < 1), \quad (7)$$

which can be rewritten to:

$$S_{ch} \geq S_{u,ch}, \quad (8)$$

where  $S_{ch}$  is the design safety factor and  $S_{u,ch}$  is the limit value (minimum):

$$S_{ch} = \frac{R_{1t}}{\sigma_{1,ch}}, S_{u,ch} = \frac{\gamma_f}{\gamma_R}, S_{u,ch} > 1. \quad (9)$$

The limit value of the design safety factor  $S_{u,ch} > 1$  is named as the global safety factor i.e. the ultimate strength ratio corresponding to the characteristic stress.

Because there are no FRP composite footbridges design guidelines, it is proposed to calculate the value of  $S_{u,ch}$  according to the design guidelines for above-ground pressure tanks and vessels made of glass-fibre reinforced plastics (GFRP) [20]. In [20] two design factors are proposed:

$K$  – global safety factor (used in the ULS criterion),

$F$  – buckling load factor (used in the stability criterion).

The  $S_{u,ch}$  is assumed to be calculated with respect to  $K$ , therefore [20]:

$$S_{u,ch} = 2 \cdot A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4 \cdot A_5, \quad (10)$$

where  $A_i > 1$ ,  $i = 1, 2, 3, 4, 5$  parameters are called partial safety factors.

The partial safety factor  $A_1$  depends on types of used resin and reinforcement, as well as on the precision of the material constants values. The factor may take one of the following values  $A_1 = \{1,0; 1,1; 1,2; 1,3; 1,5; 2,0\}$  depending on the method used to determine the material constants [20]. Assuming that the material constants (for example those given in Table 1) have been determined on the basis of identification tests of specimens, made of the material described in the previous chapter, the factor  $A_1$  takes the value of 1.1.

The factor  $A_2 > 1$ , varying in the range from 1.1 to 1.4, is related to the chemical resistance in environments containing aggressive chemicals. Therefore, it is not applicable in footbridges design ( $A_2 = 1$ ).

The factor  $A_3 > 1$  depends on the heat deflection temperature of resin  $T_{HDT}$  and the design temperature  $T_D$  (maximum design temperature acting on the footbridge). It is



Współczynnik  $A_2 > 1$ , zmienia się w zakresie od 1,1 do 1,4, jest związany z odpornością chemiczną w środowiskach chemicznie agresywnych, stąd nie ma on zastosowania w projektowaniu kładek ( $A_2 = 1$ ).

Współczynnik  $A_3 > 1$ , zależy od temperatury ugięcia żywicy  $T_{HDT}$  i temperatury projektowej  $T_D$  (maksymalna temperatura działająca na kładkę) i oblicza się go według wzoru [20]:

$$A_3 = 1 + 0,4 \frac{T_D - 20}{T_{HDT} - 40}. \quad (11)$$

Przy przyjętych w niniejszej pracy wartościach  $T_{HDT} = 90^\circ\text{C}$ ,  $T_D = 55^\circ\text{C}$  otrzymujemy  $A_3 = 1,28$ . Spełniony jest warunek normowy  $A_3 \leq 1,4$  [20].

Współczynnik cząstkowy  $A_4$  zależy od liczby cykli zmian ciśnienia i temperatury. W przypadku kładek kompozytowych wpływ ten nie występuje ( $A_4 = 1$ ).

Współczynnik  $A_5$  zależy od rodzaju obciążenia i czasu eksploatacji. W przypadku braku badań wytrzymałości długotrwałej laminatu, wartość współczynnika  $A_5$  można przyjąć według Tabl. 2 [20]. W przypadku kombinacji różnych wzmocnień laminatu, współczynnik  $A_5$  odnosi się do wzmocnienia dominującego. Jeśli czas eksploatacji jest między 10 a 50 lat,  $A_5$  wyznacza się, stosując interpolację liniową. Zakładając trwałość kładki kompozytowej 50 lat, przyjęto  $A_5 = 1,9$  (jak dla zginania). Dłuższa trwałość konstrukcji kompozytowych nie jest jeszcze uwzględniona w normach, ze względu na to, że konstrukcje kompozytowe są stosowane w przybliżeniu od 40 lat.

Po wstawieniu wartości cząstkowych współczynników bezpieczeństwa do wzoru (10), otrzymano graniczny wskaźnik wyczerpania  $S_{u,ch} = 2 \cdot 1,1 \cdot 1,28 \cdot 1,9 = 5,35$ . Maksymalne naprężenie normalne w przypadku jednoosiowego rozciągania w kierunku 1 od obciążeń charakterystycznych, na podstawie wzorów (8, 9), wynosi  $\sigma_{1,ch} = R_{1t} / S_{u,ch} = R_{1t} / 5,35 = 0,187 R_{1t}$ , w następujących warunkach:

- stałe materiałowe są wyznaczone na podstawie badań próbek laminatu zastosowanego w kładce,
- $T_{HDT} = 90^\circ\text{C}$ ,  $T_D = 55^\circ\text{C}$ ,
- okres eksploatacji kładki wynosi 50 lat.

Spełniony jest warunek projektowania zaawansowanego,  $S_{u,ch} \geq 5$  według normy [20].

calculated with the following equation [20]:

$$A_3 = 1 + 0,4 \frac{T_D - 20}{T_{HDT} - 40}. \quad (11)$$

The values of  $T_{HDT} = 90^\circ\text{C}$ ,  $T_D = 55^\circ\text{C}$ , which are assumed in this research, result in  $A_3 = 1,28$ . This value satisfies the standard requirement of  $A_3 \leq 1,4$  as defined in [20].

The partial factor  $A_4$  depends on the number of pressure and temperature change cycles. This effect does not apply to FRP composite footbridges, therefore  $A_4 = 1$ .

The factor  $A_5$  is related to the type of load and to the designed service life. In the case of lack of experimental data, on long-term strength of laminate, the value of  $A_5$  may be taken according to Table 2 [20]. If the laminate contains different reinforcements, the factor  $A_5$  should be established for the prevailing one. For service life between 10 and 50 years,  $A_5$  is determined by linear interpolation. Assuming 50-year service life, the value of  $A_5$  is 1.9 (as for bending). Longer service life has not yet been covered by the standards, since FRP have been used for no more than ca. 40 years.

Table 2. Factor  $A_5$  accounting for load type and design service life [20]

Tablica 2. Współczynnik  $A_5$  uwzględniający rodzaj obciążenia i czas eksploatacji [20]

Type of reinforcement Rodzaj wzmocnienia	$A_5$ tension / rozciąganie		$A_5$ bending / zginanie	
	life of tank or vessel żywołność zbiornika	life of tank or vessel żywołność zbiornika	life of tank or vessel żywołność zbiornika	life of tank or vessel żywołność zbiornika
	up to 10 years do 10 lat	up to 50 years do 50 lat	up to 10 years do 10 lat	up to 50 years do 50 lat
WR (roving fabric) WR (tkanina rowingowa)	1.25	1.30	1.50	1.90
CSM (glass mats) CSM (maty szklane)	2.00	2.40	2.00	2.40
FW (roving) circumferential FW (rowing) obwodowe	1.20	1.30	1.30	1.40
FW (roving) axial FW (rowing) osiowe	1.50	1.60	1.60	1.70

Equation (10) is used to calculate the design strength ratio  $S_{u,ch} = 2 \cdot 1,1 \cdot 1,28 \cdot 1,9 = 5,35$  by substitution of aforementioned partial safety factors. Subsequently, it is possible to calculate the maximum normal stress for uniaxial tension in direction 1 from characteristic actions, by means of equations (8, 9), which result in  $\sigma_{1,ch} = R_{1t} / S_{u,ch} = R_{1t} / 5,35 = 0,187 R_{1t}$ , under following conditions:





Zgodnie z normami [13, 14], kładki wykonane z laminatów polimerowych powinny być projektowane metodą rozdzielonych współczynników bezpieczeństwa. Biorąc pod uwagę wzór  $\sigma_1 = \gamma_f \sigma_{1, ch}$ , równania (7-9) można zapisać w postaci:

$$\sigma_1 \leq \gamma_R R_{1t}, \quad (12)$$

$$S \geq S_u, \quad (13)$$

$$S = \frac{R_{1t}}{\sigma_1}, \quad S_u = \frac{1}{\gamma_R}, \quad (14)$$

gdzie  $S$  jest wskaźnikiem wyężenia w stanie granicznym nośności, a  $S_u$  jego wartością graniczną (kresem dolnym). Podstawowa wartość współczynnika obciążenia w stanie granicznym nośności, przy której wyznaczamy stan naprężenia w konstrukcji, jest równa  $\gamma_f = 1,2$ . Porównując wzory (9)<sub>2</sub>, (14)<sub>2</sub>, otrzymujemy  $S_u = S_{u, ch} / \gamma_f = 5,35 / 1,2 = 4,46$ , co oznacza, że maksymalne naprężenie normalne od obciążeń obliczeniowych wynosi  $\sigma_1 = R_{1t} / S_u = R_{1t} / 4,46 = 0,224 R_{1t}$  w ww. warunkach projektowych. Współczynnik wytrzymałości wynosi zatem  $\gamma_R = 1 / S_u = 0,224$ .

Aby zweryfikować przypadek jednoosiowego rozciągania w ramach hipotezy Tsai-Wu, opisanej wzorami (1-5), w przypadku materiału konstrukcyjnego (Tabl. 1) i założeń projektowych przyjętych w niniejszej pracy, należy wykonać obliczenia według wzorów (3-5) przy  $\sigma_1 = 0,224 R_{1t}$ , przyjmując pozostałe składowe stanu naprężenia równe zero, tzn.:

$$F_1 = \frac{1}{R_{1t}} - \frac{1}{R_{1c}} = -7,4902 \times 10^{-4} \text{ MPa}^{-1},$$

$$F_{11} = \frac{1}{R_{1t} R_{1c}} = 6,6285 \times 10^{-6} \text{ MPa}^{-2},$$

$$A = F_{11} \sigma_1^2 = F_{11} (0,224 R_{1t})^2 = 0,067051,$$

$$B = F_1 \sigma_1 = F_1 (0,224 R_{1t}) = -0,075333,$$

$$\Delta = B^2 - 4AC = 0,27388, \quad \sqrt{\Delta} = 0,52334,$$

$$S_u = \frac{-B + \sqrt{\Delta}}{2A} = 4,46.$$

Powyżej, z przyjętego założenia  $S > 1$  wynika, że istotny jest tylko pierwiastek dodatni. Wyniki potwierdzają poprawność zaproponowanej interpretacji.

Na podstawie map wskaźnika wyężenia  $S > 1$ , obliczonego z wykorzystaniem wzorów (4) i (5), szacujemy zapas nośności w każdej warstwie laminatu tworzącego konstrukcję kładki. Minimalna wartość tego wskaźnika w całym

• the material constants have been determined for the FRP laminate, used to design the footbridge, on the basis of experimental tests,

•  $T_{HDT} = 90^\circ\text{C}$ ,  $T_D = 55^\circ\text{C}$ ,

• the footbridge is designed for 50-year service life.

This meets the advanced design criterion of  $S_{u, ch} \geq 5$ , as per [20].

Design of footbridges made of FRP laminates should be based on partial safety factors method, according to [13, 14] standards. Taking into consideration the equation  $\sigma_1 = \gamma_f \sigma_{1, ch}$ , the equations (7-9) can be rewritten as follows:

$$\sigma_1 \leq \gamma_R R_{1t}, \quad (12)$$

$$S \geq S_u, \quad (13)$$

$$S = \frac{R_{1t}}{\sigma_1}, \quad S_u = \frac{1}{\gamma_R}, \quad (14)$$

where  $S$  is the strength ratio at the ultimate limit state and  $S_u$  is its minimum value. The fundamental value of the load partial factor of the ultimate limit state, at which the stress state in the structure is determined, is  $\gamma_f = 1.2$ . After comparison of equations (9)<sub>2</sub> and (14)<sub>2</sub> we will get following result  $S_u = S_{u, ch} / \gamma_f = 5.35 / 1.2 = 4.46$ . This means that the maximum normal stress from the design load, under the above-specified design conditions, is  $\sigma_1 = R_{1t} / S_u = R_{1t} / 4.46 = 0.224 R_{1t}$ . Now we can calculate the resistance partial factor  $\gamma_R = 1 / S_u = 0.224$ .

In order to check the case of uniaxial tension using the Tsai-Wu criterion (equations (1-5)), for the analysed structural material (Table 1) and under design assumptions, we need to carry out calculations according to equations (3-5), with  $\sigma_1 = 0.224 R_{1t}$ , and assuming that the other components of the stress state equal zero, i.e.:

$$F_1 = \frac{1}{R_{1t}} - \frac{1}{R_{1c}} = -7.4902 \times 10^{-4} \text{ MPa}^{-1},$$

$$F_{11} = \frac{1}{R_{1t} R_{1c}} = 6.6285 \times 10^{-6} \text{ MPa}^{-2},$$

$$A = F_{11} \sigma_1^2 = F_{11} (0.224 R_{1t})^2 = 0.067051,$$

$$B = F_1 \sigma_1 = F_1 (0.224 R_{1t}) = -0.075333,$$

$$\Delta = B^2 - 4AC = 0.27388, \quad \sqrt{\Delta} = 0.52334,$$

$$S_u = \frac{-B + \sqrt{\Delta}}{2A} = 4.46.$$



ustroju nośnym określa zapas nośności w odniesieniu do stanu naprężenia, to znaczy:  $S_{\min} = \min S(k, l)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ,  $l = 1, 2, \dots$ , gdzie:  $S(k, l)$  – mapa wskaźnika wyężenia,  $k$  – numer kombinacji obciążenia,  $l$  – numer warstwy laminatu. Warunek nośności konstrukcji nośnej kładki wykonanej z laminatów polimerowych proponujemy w postaci:

$$S_{\min} \geq S_u, \quad (15)$$

gdzie:  $S_u$  – graniczna wartość wskaźnika wyężenia. Dla materiału konstrukcyjnego i założeń przyjętych w pracy należy przyjąć  $S_u = 4,46$ , czyli  $1/S_u = 0,224$ .

W projektowaniu wstępnym smukłych dźwigarów typu belkowego kładek z materiałów kompozytowych można stosować metody klasycznej wytrzymałości materiałów (analogicznie, jak stosujemy w odniesieniu do konstrukcji stalowych), bazując na zginaniu prostym belek i równaniach (13, 14). Ugięcia projektowanej kładki w odniesieniu do norm [13, 14] obliczamy jedynie w przypadku charakterystycznego obciążenia tłumem, to znaczy z pominięciem ciężaru własnego, oddziaływania wiatru, współczynników obliczeniowych, czy osłabienia konstrukcji poprzez otwory na śruby/nity. Maksymalna wartość ugięcia pionowego kładek stalowych wynosi  $f_u = 1,3L/300$ , gdzie:  $L$  – teoretyczna rozpiętość przęsła. Warunek użyteczności ze względu na ugięcia kładek wykonanych z laminatów polimerowych proponujemy w tej samej formie, jak w odniesieniu do kładek stalowych, tzn.:

$$f_{\max} \leq f_u, \quad f_u = 1,3L/300, \quad (16)$$

gdzie:  $f_{\max}$  – maksymalne pionowe ugięcie kładki kompozytowej.

W odniesieniu do większości kładek podstawowa częstotliwość drgań swobodnych kładki odpowiada pionowej formie giętej. Biorąc pod uwagę zalecenia podane w [10], proponujemy następujący warunek użyteczności kładki kompozytowej ze względu na częstotliwości drgań swobodnych:

$$f_v \geq 5,0 \text{ Hz}, \quad f_{v,70} \geq 2,6 \text{ Hz}, \quad (17)$$

gdzie:  $f_v, f_{v,70}$  – podstawowe częstotliwości drgań swobodnych odpowiadające pionowej formie giętej, odpowiednio w przypadku kładki nieobciążonej tłumem oraz obciążonej tłumem o intensywności  $70 \text{ kg/m}^2$ . W przypadku, w którym podstawowa częstotliwość drgań swobodnych projektowanej kładki odpowiada formie giętej poziomej poprzecznej lub formie podłużnej, wzory (17) należy odpowiednio zinterpretować (tzn. zmienić indeks  $v$  na odpowiadający podstawowej formie własnej).

Finally, only the positive root is taken into account, because of  $S > 1$  assumption. The result of calculations confirms that the previous interpretations are correct.

On the basis of the of strength ratio contours  $S > 1$ , calculated with equations (4) and (5), we can estimate the load capacity margin of each laminate ply used for footbridge construction. The minimum value of this ratio for the whole structure defines the margin of load capacity in relation to the stress state:  $S_{\min} = \min S(k, l)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ,  $l = 1, 2, \dots$ , where:  $S(k, l)$  – contour of strength ratio,  $k$  – number of combination of actions,  $l$  – ply number. Therefore, following ULS criterion for the design of footbridges made of FRP laminates is proposed:

$$S_{\min} \geq S_u, \quad (15)$$

where:  $S_u$  – limit value of the strength ratio. For the considered material and under assumptions made in this study we propose  $S_u = 4.46$  and thus  $1/S_u = 0.224$ .

In the preliminary design of slender beam-type girders of FRP composite footbridges, classical strength of materials methods may be used (similarly to steel structures), that base on simple bending theory of beams and equations (13, 14). Deflections of the designed footbridge in relation to the standards [13, 14] are calculated only for the characteristic crowd loading, i.e. omitting the dead load, wind action, safety factors or reduction of strength by holes for bolts/ rivets. The maximum value of vertical deflection of steel footbridges is  $f_u = 1.3L/300$ , where:  $L$  – theoretical span length. We propose to use for the analysed FRP laminate footbridges the same deflection limit criterion in SLS state as applied for steel footbridges, namely:

$$f_{\max} \leq f_u, \quad f_u = 1.3L/300, \quad (16)$$

where:  $f_{\max}$  – maximum vertical deflection of FRP composite footbridge.

For a majority of footbridges, the fundamental natural frequency is associated with the vertical bending mode. Considering the recommendations of [10] we propose, for design of FRP composite footbridges, the following serviceability criterion based on the fundamental natural frequency:

$$f_v \geq 5.0 \text{ Hz}, \quad f_{v,70} \geq 2.6 \text{ Hz}, \quad (17)$$

where:  $f_v, f_{v,70}$  – are the fundamental natural frequencies associated with the vertical bending mode, respectively for bridge without load and loaded with crowd with a density of  $70 \text{ kg/m}^2$ . When the fundamental natural frequency of the designed footbridge is associated with the lateral horizontal bending or longitudinal mode, the equations (17) must be appropriately interpreted, i.e.



W przypadku schematu statycznego odpowiadającego swobodnie podpartej belce Eulera, wyżej wymienione częstotliwości drgań swobodnych mogą zostać oszacowane za pomocą przybliżonych wzorów:

$$f_v = \frac{\pi}{2L^2} \sqrt{\frac{S_v}{m}}, \quad f_{v,70} = \frac{\pi}{2L^2} \sqrt{\frac{S_v}{m+m_p}}, \quad (18)$$

gdzie:

$S_v$  – sztywność giętna w płaszczyźnie pionowej przechodzącej przez oś kładki,

$m$  – intensywność masy kładki na jednostkę długości kładki,

$m_p$  – intensywność masy pieszych na jednostkę długości kładki.

Dokładna wartość częstotliwości  $f_v$  jest wyznaczana na podstawie obliczeń MES częstości własnych i postaci własnych kładki. Po wyznaczeniu sztywności  $S_v$  z równania (18)<sub>1</sub>, podstawową częstotliwość drgań swobodnych kładki obciążonej  $f_{v,70}$  obliczamy ze wzoru (18)<sub>2</sub>.

#### 4. PROCEDURA PROJEKTOWANIA DŹWIGARA NOŚNEGO KŁADEK KOMPOZYTOWYCH

Proponowana procedura projektowania kładek dla pieszych z laminatów FRP jest następująca:

- 1) wybór komponentów laminatu i technologii wytwarzania,
- 2) określenie temperatury projektowej  $T_D = 55^\circ\text{C}$  i temperatury ugięcia cieplnego żywicy  $T_{HDT} > T_D + 20^\circ\text{C}$ ,
- 3) wytworzenie płyt laminatowych i próbek do badań identyfikacyjnych,
- 4) identyfikacja eksperymentalna stałych sprężystości i wytrzymałości warstwy laminatu konstrukcyjnego, modelowanej jako materiał ortotropowy liniowo sprężysto-kruchy,
- 5) obliczenie wskaźnika wyężenia  $S_{u,ch}$  według wzoru (10), przy czym  $A_1 = 1,1, A_2 = A_4 = 1, A_3$  – według wzoru (11),  $A_5$  – według Tabl. 2,
- 5) obliczenie wskaźnika wyężenia  $S_u = S_{u,ch} / \gamma_f$ , gdzie  $\gamma_f = 1,2$ ,
- 7) projektowanie wstępne kładki, bazujące na zginaniu pionowym i wzorach (13, 14),
- 8) obliczenie współczynnika wytrzymałości  $\gamma_R = 1/S_u$ ,

$v$  subscript must be changed to that corresponding to the fundamental natural mode one.

In case of simply supported Euler beams, above mentioned frequencies can be calculated in the following way:

$$f_v = \frac{\pi}{2L^2} \sqrt{\frac{S_v}{m}}, \quad f_{v,70} = \frac{\pi}{2L^2} \sqrt{\frac{S_v}{m+m_p}}, \quad (18)$$

where:

$S_v$  – bending stiffness in the vertical plane passing through the footbridge centreline,

$m$  – footbridge mass per unit length of the structure,

$m_p$  – mass of pedestrians per unit length of the structure.

The precise value of frequency  $f_v$  is obtained by means of the finite element method calculations. If the stiffness  $S_v$  is calculated using equation (18)<sub>1</sub>, then equation (18)<sub>2</sub> may be applied to determine the fundamental natural frequency of loaded footbridge  $f_{v,70}$ .

#### 4. FRP COMPOSITE FOOTBRIDGE MAIN GIRDER DESIGN PROCEDURE

The following procedure for FRP laminates footbridges design is proposed:

- 1) choose the laminate components and method of fabrication,
- 2) determine the design temperature  $T_D = 55^\circ\text{C}$  and resin heat deflection temperature  $T_{HDT} > T_D + 20^\circ\text{C}$ ,
- 3) fabricate laminate panels and specimens for identification tests,
- 4) identify experimentally elastic and strength constants of the structural laminate, modelled as orthotropic material with linear elastic-brittle behaviour,
- 5) calculate the strength ratio  $S_{u,ch}$  using equation (10) and taking the values of  $A_1 = 1.1, A_2 = A_4 = 1, A_3$  – according to equation (11) and  $A_5$  – according to Table 2,
- 6) calculate the strength ratio  $S_u = S_{u,ch} / \gamma_f$ , where  $\gamma_f = 1.2$ ,
- 7) perform preliminary design of the footbridge, based on vertical bending and equations (13, 14),
- 8) calculate the partial strength factor  $\gamma_R = 1/S_u$ .
- 9) carry out static and dynamic calculations of the designed composite footbridge using the finite element method and applying appropriate ULS and SLS load combinations according to [13, 14], including design criteria verification (15 - 17).



9) obliczenia statyczne i dynamiczne (MES) kładki kompozytowej przy odpowiednich kombinacjach obciążeń w stanach SGN i SGU, według norm [13, 14], w tym sprawdzenie warunków projektowych (15 - 17).

Powyższa procedura nie obejmuje pozostałych elementów projektowania, m.in.:

- wytyczne konstrukcyjne układu nośnego (przekroje przekładkowe, skrzynekowe i in.),
- podpory, filary, dojścia, dojazdy,
- warstwy ochronne laminatów przed wpływami atmosferycznymi, w tym przed promieniowaniem UV,
- wyposażenie kładki,
- technologie wytwarzania i wygrzewania kładki,
- transport, montaż, eksploatacja i utrzymanie kładki,
- monitoring techniczny kładki.

## 5. WNIOSKI

W pracy sformułowano warunek nośności (15) oraz warunki użyteczności ze względu na ugięcia pionowe (16) i ze względu na podstawową częstotliwość drgań swobodnych (17) w odniesieniu do kładek wykonanych z laminatów polimerowych wzmocnionych włóknami (FRP). Warunek nośności bazuje na normie projektowania kompozytowych zbiorników ciśnieniowych naziemnych oraz na kryterium Tsai-Wu inicjacji niszczenia laminatów polimerowych wzmocnionych włóknem. Warunek ten musi być spełniony we wszystkich warstwach laminatu, w odniesieniu do wymaganych kombinacji obciążeń według norm mostowych.

Zaproponowano procedurę projektowania kładek kompozytowych, obejmującą projektowanie wstępne oraz projektowanie techniczne. Procedurę tę zilustrowano dla kładki z laminatu winyloestrowo-szklanego B/F, o temperaturze  $T_{HDT} = 90^{\circ}\text{C}$  i trwałości 50 lat. Współczynnik wytrzymałości przykładowej kładki, obliczony na podstawie normy projektowania zbiorników kompozytowych, wynosi  $\gamma_R = 0,224$ , co odpowiada dojściu wyężenia laminatu od obciążeń normowych obliczeniowych do strefy tzw. „kolana” materiału nowego. Efekt „kolana” jest interpretowany jako samoregulacja laminatu (mikropęknięcia żywicy oraz zerwania niektórych włókien) w próbie rozciągania przy naprężeniach równych w przybliżeniu 20% wytrzymałości na rozciąganie [21]. Mikrouszkodzenia te eliminują koncentracje naprężeń w materiale mikroniejednorodnym z imperfekcjami. Po przekroczeniu strefy „kolana”, laminat nadal jest pełnowartościowym materiałem konstrukcyjnym, ale stałe sprężystości ulegają nieznacznym zmianom.

The above procedure does not cover the remaining steps of the design process including, among others:

- structural guidelines for the deck design (sandwich, box and other sections),
- supports, piers, pedestrian and vehicle access,
- FRP laminate protective layers against weathering factors, including UV radiation,
- secondary non-structural footbridge elements,
- laminate fabrication and post-curing technologies,
- transportation guidelines, montage and maintenance of the footbridge.
- health monitoring.

## 5. CONCLUSIONS

The presented research is focused on the ULS and SLS criteria derivation with regard to FRP composite footbridges. The ULS criterion (15) is based on the design guidelines for above-ground GFRP composite pressure tanks and Tsai-Wu failure criterion, that allows for predicting the onset of fibre-reinforced, polymer-matrix composites damage. This criterion must be satisfied in all of the plies for all load cases prescribed by the bridge engineering standards. The SLS criteria are based on vertical deflection (16) and fundamental natural frequency range (17) limitations.

As a part of the research, a design procedure for FRP composite footbridges is established, which covers basic and detailed engineering stages. As an illustrative example, the procedure is applied to B/F E-glass fibre-reinforced vinylester composite with  $T_{HDT}$  heat deflection temperature of  $90^{\circ}\text{C}$  and 50-year service life. For this structure, a partial strength safety factor is determined with the value of  $\gamma_R = 0.224$  according to the design guidelines for GFRP tanks/vessels for over-ground use. This corresponds to the point at which a so-called knee effect occurs in new laminate under standard design loads. The knee-effect is interpreted as a self-regulating property of laminate (micro-cracking of resin and breakage of some fibres), which appears in the tensile strength tests at ca. 20% of the ultimate tensile strength [21]. These microcracks eliminate local stress concentrations in non-homogenous material with some imperfections. After the occurrence of knee effect, the laminate is still a high performance structural material, however its elastic constants may slightly change.



W ramach stanu granicznego użyteczności zaproponowano przyjęcie warunku nałożonego na ugięcia pionowe analogicznego, jak w przypadku kładek stalowych. W celu zapewnienia komfortu pieszych, zaproponowano warunek użyteczności nałożony na podstawową częstotliwość drgań swobodnych konstrukcji nieobciążonej oraz konstrukcji z dodatkową masą  $70 \text{ kg/m}^2$  odwzorowującą umiarkowane obciążenie tłumem pieszych.

Oprócz podanych warunków nośności i użyteczności, należy sprawdzić stateczność lokalną i globalną powłok laminatowych, a także stateczność na przesuw i obrót kładki. W przypadku dopuszczenia wjazdu na kładkę pojazdu specjalnego, konieczne jest sprawdzenie wpływu lokalnego oddziaływania koła na warstwy laminatu pomostu [22].

## INFORMACJE DODATKOWE

Praca została wykonana w ramach projektu Nr PBS1/B2/6/2013 (akronim FOBRIDGE), finansowanego przez Narodowe Centrum Badań i Rozwoju w latach 2013-2015. *Bartosz Sobczyk* jest objęty programem rozwoju młodej kadry Wydziału Inżynierii Lądowej i Środowiska Politechniki Gdańskiej.

## BIBLIOGRAFIA / REFERENCES

- [1] *Khalifa M.A., Hodhod O.A., Zaki M.A.*: Analysis and design methodology for an FRP cable-stayed pedestrian bridge. *Composites: Part B-Engineering*, **27**, 3-4, 1996, 307-317
- [2] *Aref A.J., Kitane Y., Lee G.C.*: Analysis of hybrid FRP-concrete multi-cell bridge superstructure. *Composite Structures*, **69**, 3, 2005, 346-359
- [3] *Tromp L.*: Composite footbridges and vacuum infusion. A 44 m footbridge for Delft. *Proceedings of 3rd International Conference FOOTBRIDGE 2008*, 1-7
- [4] *Chróścielewski J., Kreja I., Sabik A., Sobczyk B., Witkowski W.*: Failure analysis of footbridge made of composite materials. *Proceedings of 10th SSTA Conference*, Gdańsk, Poland, 16-18 Oct. 2013, CRC Press, Taylor & Francis Group, Balkema, 2013, 389-392
- [5] *Santos F.M., Mohan M.*: Train Buffeting Measurements on a Fibre-Reinforced Plastic Composite Footbridge. *Structural Engineering International*, **21**, 3, 2011, 285-289
- [6] *Flaga A.*: *Mosty dla pieszych*. WKŁ, Warszawa, 2011
- [7] *Poneta P., Kulpa M., Wlasak L., Siwowski T.*: Koncepcja i badania innowacyjnego dźwigara mostowego z kompozytów FRP. *Inżynieria i Budownictwo*, **70**, 3, 2014, 147-151

In the field of SLS criterion, it is proposed to use the condition imposed on vertical deflection, similarly to the approach used for steel bridges. A second serviceability criterion is proposed to limit the fundamental natural frequency range of footbridge without any load and loaded by additional mass  $70 \text{ kg/m}^2$ , applied to simulate moderate pedestrian traffic load.

Apart from ULS and SLS criteria verification, it is also necessary to check local and global stability of the laminate shells, as well as the structure's translation and rotation resistance. If emergency vehicles are allowed to use the bridge, it is necessary to check the local effect of wheel pressure on the deck laminated plies [22].

## ACKNOWLEDGEMENT

This research has been done, as a part of the project No. PBS1/B2/6/2013 (acronym: FOBRIDGE) financed by the National Centre for Research and Development, Poland. This support is gratefully acknowledged. *B. Sobczyk* is supported under Gdansk University of Technology (Poland), Faculty of Civil and Environmental Engineering, Young Scientist Support Programme.

- [8] *Radomski W.*: Nowoczesne rozwiązania materiałowe i konstrukcyjne w mostownictwie, w: *Kładki dla pieszych – Architektura, projektowanie, realizacja, badania*. Dolnośląskie Wydawnictwo Edukacyjne, Wrocław, 2007, 89-100
- [9] *Zobel H., Karwowski W., Żółtowski K., Kozakiewicz A.*: Badania kratownicowej kładki z kompozytu polimerowego zbrojonego włóknem szklanym. *Inżynieria i Budownictwo*, **61**, 4, 2005, 202-206
- [10] *Technical guide. Footbridges. Assessment of vibrational behaviour of footbridges under pedestrian loading*. Setra/AFGC, Paris, France, 2006
- [11] *Madaj A., Sturzbecher K., Wołowicki W.*: Badania dynamiczne kładki dla pieszych o pomoście kompozytowym. *Inżynieria i Budownictwo*, **65**, 1-2, 2009, 85-88
- [12] *Design of Footbridges. Guideline. RFS2-CT-2007-00033*, 2008
- [13] PN-85/S-10030. *Bridge objects. Loads* [in Polish]
- [14] PN-82/S-10052. *Bridge objects. Steel structures. Design* [in Polish]
- [15] *Camanho P.P.*: Failure criteria for fibre-reinforced polymer composites. *Secção de Mecânica Aplicada, Departamento de Engenharia Mecânica e Gestão Industrial, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto*, 2002



- [16] *Soden P.D., Kaddour A.S., Hinton M.J.*: Recommendations for designers and researchers resulting from the world-wide failure exercise. *Composites Science and Technology*, **64**, 3-4, 2004, 589-604
- [17] *Jones R.M.*: *Mechanics of composite materials*. 2nd Edn., Taylor & Francis, USA, 1999
- [18] *Hahn H.T., Tsai S.W.*: *Introduction to composite materials*. Technomic Publishing Co., Lancaster, USA, 1980
- [19] *Wu R.Y., Stachurski Z.*: Evaluation of the normal stress interaction parameter in the tensor polynomial strength theory for anisotropic material. *Journal of Composite Materials*, **18**, 1984, 456-463
- [20] PN-EN 13121-3+A1:2010E. Ground containers made of plastics reinforced with glass fibre. Part 3. Design and production control [in Polish], 2010
- [21] *Królikowski W.*: *Polimerowe kompozyty konstrukcyjne*. PWN, Warszawa, 2012
- [22] *Chrościelewski J., Klasztorny M., Miśkiewicz M., Romanowski R., Wilde K.*: Innovative design of GFRP sandwich footbridge. Proceedings of Int. Conf. Footbridges: Past, Present & Future FOOTBRIDGE-2014, 16-18 July 2014, London, England

