POLITECHNIKA GDAŃSKA

Imię i nazwisko autora rozprawy: **Robert Lewoń**

Dyscyplina naukowa: **informatyka**

ROZPRAWA DOKTORSKA

Tytuł rozprawy w języku polskim: Modele i algorytmy dla grafowych struktur defensywnych

Tytuł rozprawy w języku angielskim: Models and algorithms for graph defensive structures

Promotor *podpis*	Drugi promotor *podpis*
dr hab. inż. Michał Małafiejski, prof. PG	-
Promotor pomocniczy *podpis*	Kopromotor *podpis*
-	-

Gdańsk, rok 2023

GDAŃSK UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

The author of the doctoral dissertation: **Robert Lewoń**

Scientific discipline: **computer and information sciences**

DOCTORAL DISSERTATION

Title of doctoral dissertation: Models and algorithms for graph defensive structures

Title of doctoral dissertation (Polish): Modele i algorytmy dla grafowych struktur defensywnych

Supervisor *signature*	Second supervisor *signature*
dr hab. inż. Michał Małafiejski, prof. PG	-
Auxiliary supervisor *signature*	Cosupervisor *signature*
-	-

Gdańsk, rok 2023

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

POLITECHNIKA GDAŃSKA

OŚWIADCZENIE

Autor rozprawy doktorskiej: **Robert Lewoń**

Ja, niżej podpisany, oświadczam, iż jestem świadomy, że zgodnie z przepisem art. 27 ust. 1 i 2 ustawy z dnia 4 lutego 1994 r. o prawie autorskim i prawach pokrewnych (t.j. Dz.U. z 2021 poz. 1062), uczelnia może korzystać z mojej rozprawy doktorskiej zatytułowanej:

Modele i algorytmy dla grafowych struktur defensywnych

do prowadzenia badań naukowych lub w celach dydaktycznych.[1]
Świadomy odpowiedzialności karnej z tytułu naruszenia przepisów ustawy z dnia 4 lutego 1994 r. o prawie autorskim i prawach pokrewnych i konsekwencji dyscyplinarnych określonych w ustawie Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce (Dz.U.2021.478 t.j.), a także odpowiedzialności cywilnoprawnej oświadczam, że przedkładana rozprawa doktorska została napisana przeze mnie samodzielnie.

Oświadczam, że treść rozprawy opracowana została na podstawie wyników badań prowadzonych pod kierunkiem i w ścisłej współpracy z promotorem **drem hab. inż. Michałem Małafiejskim, prof. PG**.

Niniejsza rozprawa doktorska nie była wcześniej podstawą żadnej innej urzędowej procedury związanej z nadaniem stopnia doktora. Wszystkie informacje umieszczone w ww. rozprawie uzyskane ze źródeł pisanych i elektronicznych, zostały udokumentowane w wykazie literatury odpowiednimi odnośnikami, zgodnie z przepisem art. 34 ustawy o prawie autorskim i prawach pokrewnych.
Potwierdzam zgodność niniejszej wersji pracy doktorskiej z załączoną wersją elektroniczną.

Gdańsk, dnia ....

podpis doktoranta

Ja, niżej podpisany, wyrażam zgodę na umieszczenie ww. rozprawy doktorskiej w wersji elektronicznej w otwartym, cyfrowym repozytorium instytucjonalnym Politechniki Gdańskiej.

Gdańsk, dnia ....

podpis doktoranta

[1] Art. 27. 1. Instytucje oświatowe oraz podmioty, o których mowa w art. 7 ust. 1 pkt 1, 2 i 4–8 ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. – Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce, mogą na potrzeby zilustrowania treści przekazywanych w celach dydaktycznych lub w celu prowadzenia działalności naukowej korzystać z rozpowszechnionych utworów w oryginale i w tłumaczeniu oraz zwielokrotniać w tym celu rozpowszechnione drobne utwory lub fragmenty większych utworów.
2. W przypadku publicznego udostępniania utworów w taki sposób, aby każdy mógł mieć do nich dostęp w miejscu i czasie przez siebie wybranym korzystanie, o którym mowa w ust. 1, jest dozwolone wyłącznie dla ograniczonego kręgu osób uczących się, nauczających lub prowadzących badania naukowe, zidentyfikowanych przez podmioty wymienione w ust. 1.

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

GDAŃSK UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

STATEMENT

The author of the doctoral dissertation: **Robert Lewoń**

I, the undersigned, declare that I am aware that in accordance with the provisions of Art. 27 (1) and (2) of the Act of 4th February 1994 on Copyright and Related Rights (Journal of Laws of 2021, item 1062), the university may use my doctoral dissertation entitled:

Models and algorithms for graph defensive structures

for scientific or didactic purposes.[1]
Aware of criminal liability for violations of the Act of 4th February 1994 on Copyright and Related Rights and disciplinary actions set out in the Law on Higher Education and Science (Journal of Laws 2021, item 478), as well as civil liability, I declare, that the submitted doctoral dissertation is my own work.

I declare, that the submitted doctoral dissertation is my own work performed under and in cooperation with the supervision of **dr hab. inż. Michał Małafiejski, prof. PG**.

This submitted doctoral dissertation has never before been the basis of an official procedure associated with the awarding of a PhD degree.
All the information contained in the above thesis which is derived from written and electronic sources is documented in a list of relevant literature in accordance with Art. 34 of the Copyright and Related Rights Act.
I confirm that this doctoral dissertation is identical to the attached electronic version

Gdańsk, dnia ....

signature of the PhD student

I, the undersigned, agree to include an electronic version of the above doctoral dissertation in the open, institutional, digital repository of Gdańsk University of Technology.

Gdańsk, dnia ....

signature of the PhD student

[1] Art 27. 1. Educational institutions and entities referred to in art. 7 sec. 1 points 1, 2 and 4–8 of the Act of 20 July 2018 – Law on Higher Education and Science, may use the disseminated works in the original and in translation for the purposes of illustrating the content provided for didactic purposes or in order to conduct research activities, and to reproduce for this purpose disseminated minor works or fragments of larger works.
2. If the works are made available to the public in such a way that everyone can have access to them at the place and time selected by them, as referred to in para. 1, is allowed only for a limited group of people learning, teaching or conducting research, identified by the entities listed in paragraph 1.

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

POLITECHNIKA GDAŃSKA

OPIS ROZPRAWY DOKTORSKIEJ

Autor rozprawy doktorskiej: Robert Lewoń

Tytuł rozprawy doktorskiej w języku polskim: Modele i algorytmy dla grafowych struktur defensywnych

Tytuł rozprawy w języku angielskim: Models and algorithms for graph defensive structures

Język rozprawy doktorskiej: polski

Promotor rozprawy doktorskiej: dr hab. inż. Michał Małafiejski, prof. PG

Data obrony:

Słowa kluczowe rozprawy doktorskiej w języku polskim: teoria grafów, zbiór dominujący, struktura defensywna, koalicja defensywna, zbiór defensywny, koalicja krawędziowa, równowaga strategiczna, równowaga strategiczna koalicji defensywnych, równowaga strategiczna zbiorów defensywnych, równowaga strategiczna koalicji krawędziowych

Słowa kluczowe rozprawy doktorskiej w języku angielskim: graph theory, dominating set, defensive structure, defensive alliance, defensive set, edge alliance, strategic balance, strategic balance of defensive alliances, strategic balance of defensive sets, strategic balance of edge alliances

Streszczenie rozprawy w języku polskim: W niniejszej pracy przeprowadzono analizę złożoności istnienia struktur defensywnych oraz równowag strategicznych w grafach. W przypadku struktur defensywnych badano modele koalicji defensywnych, zbiorów defensywnych i koalicji krawędziowych – każdy z nich w wersji globalnej, tj. z wymogiem dominacji całego grafu. W przypadku modeli równowagi strategicznej badano równowagę strategiczną koalicji defensywnych, równowagę strategiczną zbiorów defensywnych i równowagę strategiczną koalicji krawędziowych. Przedstawiono wielomianowe algorytmy konstruujące najmniejsze struktury defensywne oraz weryfikujące ich istnienie i konstruujące równowagi strategiczne w przypadku drzew. Dodatkowo zweryfikowano trudność obliczeniową badanych problemów poprzez wykazanie ich $\mathcal{NP}$–zupełności dla możliwie wąskich klas grafów. W ten sposób określono zakres stosowalności modeli w przypadku dużych grafów, a dalsze badania skierowano w kierunku podejść aproksymacyjnych, które poszerzą zakres zastosowań dyskutowanych modeli w praktyce. Przebadano również własności teoretyczne modeli, takie jak oszacowania rozmiaru badanych struktur i związki między nimi. Zaproponowano także ogólną koncepcję stanowiącą wspólny trzon dla dyskutowanych modeli, otwierając tym samym kierunki badań w obrębie tego zagadnienia.

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

Streszczenie rozprawy w języku angielskim: In this work, we analyzed the computational complexity of problems related to defensive structures and strategic balance models in graphs. For defensive structures, our research focused on models of defensive alliances, defensive sets, and edge alliances – in each case, in the global version (i.e., with the requirement for the defensive structure to be a dominating set). For strategic balance models, we studied the strategic balance of defensive alliances, strategic balance of defensive sets, and strategic balance of edge alliances. We presented polynomial algorithms that construct the smallest defensive structures and verify the existence and construction of strategic balance in trees. We also verified the computational complexity for studied problems, showing their $\mathcal{NP}$–completeness for possibly narrow graph classes. This determined the practical scope of using the models for big graphs and directed further research toward approximation approaches that have the potential to extend the applicability of the discussed models in practice. We also carried out a theoretical analysis of the properties of the discussed models, such as lower and upper bounds for the size of the structure and relationships between the models. We also proposed a general model that provides a common core for the discussed models and opens up research directions within the topic.

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

GDAŃSK UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

DESCRIPTION OF DOCTORAL DISSERTATION

The Author of the doctoral dissertation: Robert Lewoń

Title of doctoral dissertation: Models and algorithms for graph defensive structures

Title of doctoral dissertation in Polish: Modele i algorytmy dla grafowych struktur defensywnych

Language of doctoral dissertation: polish

Supervisor: dr hab. inż. Michał Małafiejski, prof. PG

Date of doctoral defense:

Keywords of doctoral dissertation in Polish: teoria grafów, zbiór dominujący, struktura defensywna, koalicja defensywna, zbiór defensywny, koalicja krawędziowa, równowaga strategiczna, równowaga strategiczna koalicji defensywnych, równowaga strategiczna zbiorów defensywnych, równowaga strategiczna koalicji krawędziowych

Keywords of doctoral dissertation in English: graph theory, dominating set, defensive structure, defensive alliance, defensive set, edge alliance, strategic balance, strategic balance of defensive alliances, strategic balance of defensive sets, strategic balance of edge alliances

Summary of doctoral dissertation in Polish: W niniejszej pracy przeprowadzono analizę złożoności istnienia struktur defensywnych oraz równowag strategicznych w grafach. W przypadku struktur defensywnych badano modele koalicji defensywnych, zbiorów defensywnych i koalicji krawędziowych – każdy z nich w wersji globalnej, tj. z wymogiem dominacji całego grafu. W przypadku modeli równowagi strategicznej badano równowagę strategiczną koalicji defensywnych, równowagę strategiczną zbiorów defensywnych i równowagę strategiczną koalicji krawędziowych. Przedstawiono wielomianowe algorytmy konstruujące najmniejsze struktury defensywne oraz weryfikujące ich istnienie i konstruujące równowagi strategiczne w przypadku drzew. Dodatkowo zweryfikowano trudność obliczeniową badanych problemów poprzez wykazanie ich $\mathcal{NP}$–zupełności dla możliwie wąskich klas grafów. W ten sposób określono zakres stosowalności modeli w przypadku dużych grafów, a dalsze badania skierowano w kierunku podejść aproksymacyjnych, które poszerzą zakres zastosowań dyskutowanych modeli w praktyce. Przebadano również własności teoretyczne modeli, takie jak oszacowania rozmiaru badanych struktur i związki między nimi. Zaproponowano także ogólną koncepcję stanowiącą wspólny trzon dla dyskutowanych modeli, otwierając tym samym kierunki badań w obrębie tego zagadnienia.

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

Summary of doctoral dissertation in English: In this work, we analyzed the computational complexity of problems related to defensive structures and strategic balance models in graphs. For defensive structures, our research focused on models of defensive alliances, defensive sets, and edge alliances – in each case, in the global version (i.e., with the requirement for the defensive structure to be a dominating set). For strategic balance models, we studied the strategic balance of defensive alliances, strategic balance of defensive sets, and strategic balance of edge alliances. We presented polynomial algorithms that construct the smallest defensive structures and verify the existence and construction of strategic balance in trees. We also verified the computational complexity for studied problems, showing their $\mathcal{NP}$–completeness for possibly narrow graph classes. This determined the practical scope of using the models for big graphs and directed further research toward approximation approaches that have the potential to extend the applicability of the discussed models in practice. We also carried out a theoretical analysis of the properties of the discussed models, such as lower and upper bounds for the size of the structure and relationships between the models. We also proposed a general model that provides a common core for the discussed models and opens up research directions within the topic.

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

Mojej żonie Alicji,

której wsparcie jest nieustannym źródłem inspiracji.

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

Spis treści

Wstęp **iii**

1 Wprowadzenie **1**

1.1 Podstawowe definicje i oznaczenia 1

1.2 Parametry i własności grafu 4

1.3 Elementarne klasy grafów 8

1.4 Złożoność obliczeniowa 11

2 Struktury defensywne w grafach **13**

2.1 Koalicje defensywne w grafach 13

2.2 Zbiory bezpieczne w grafach 18

2.3 Modele struktur defensywnych 19

2.3.1 Ogólna definicja struktury defensywnej 21

2.4 Modele równowagi strategicznej 26

2.5 Podsumowanie 28

3 Zbiory defensywne w grafach **29**

3.1 Zbiory defensywne jako struktury defensywne 29

3.2 Ograniczenia na rozmiar najmniejszego globalnego zbioru defensywnego 31

3.2.1 Ograniczenie dolne w przypadku ogólnym 32

3.2.2 Ograniczenia dolne w drzewach 34

3.3 Globalne zbiory defensywne w różnych klasach grafów 36

3.4 Wielomianowy algorytm konstruujący najmniejszy globalny zbiór defensywny w drzewach 37

3.5 $\mathcal{NP}$–zupełność problemu istnienia globalnego zbioru defensywnego dla podkubicznych, planarnych grafów dwudzielnych 42

3.6 Podsumowanie 44

4 Koalicje krawędziowe w grafach **45**

4.1 Koalicje krawędziowe jako struktury defensywne 46

4.2 Ograniczenia na rozmiar najmniejszej globalnej koalicji krawędziowej 48

4.2.1 Ograniczenie dolne w przypadku ogólnym 51

4.2.2 Ograniczenie górne w drzewach 52

4.3 Globalne koalicje krawędziowe w różnych klasach grafów 73

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

4.4 Wielomianowy algorytm konstruujący najmniejszą globalną koalicję krawędziową w drzewach 79
4.5 $\mathcal{NP}$–zupełność problemu istnienia globalnej koalicji krawędziowej dla grafów podkubicznych 84
4.6 Podsumowanie i problemy otwarte 89

5 Równowaga strategiczna koalicji defensywnych 90
5.1 Doskonała równowaga strategiczna koalicji defensywnych 91
5.2 Równowaga strategiczna koalicji defensywnych w różnych klasach grafów 94
5.3 Oszacowania na stosunek liczności koalicji defensywnych w równowadze strategicznej 99
5.4 Wielomianowy algorytm konstruujący równowagę strategiczną koalicji defensywnych 100
5.5 $\mathcal{NP}$–zupełność problemu istnienia równowagi strategicznej koalicji defensywnych dla grafów z $\Delta \leq 4$ 105
5.6 Podsumowanie i problemy otwarte 110

6 Równowaga strategiczna innych struktur defensywnych 112
6.1 Równowaga strategiczna zbiorów defensywnych 112
6.2 Doskonała równowaga strategiczna zbiorów defensywnych 113
6.3 Wielomianowy algorytm konstruujący równowagę strategiczną zbiorów defensywnych 117
6.4 $\mathcal{NP}$–zupełność problemu istnienia równowagi strategicznej zbiorów defensywnych dla grafów z $\Delta \leq 4$ 123
6.5 Równowaga strategiczna koalicji krawędziowych 124
6.6 Doskonała równowaga strategiczna koalicji krawędziowych 125
6.7 Podsumowanie 128

7 Zastosowanie modeli struktur defensywnych 130
7.1 Struktury defensywne w problemie współdzielenia zasobów w sieci komputerowej . 131

Zakończenie 136

Bibliografia 138

Wykaz oznaczeń 143

Skorowidz 145

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

Wstęp

W dowolnym środowisku, w którym istniejące obiekty wzajemnie na siebie wpływają, możemy rozważać sytuacje konfliktowe. Zjawiska pojawiające się w ramach interakcji mogą mieć zarówno charakter negatywny, jak i pozytywny. Obiekty mogą wykazywać wzajemną wrogość, neutralność, a także potrzebę kooperacji. W ramach tematyki niniejszej pracy szczególny nacisk położymy na aspekt kooperacji w sytuacji potencjalnego zagrożenia. Potencjał obronny grupy ma szanse przewyższać indywidualny potencjał obronny jednostek, a uzyskana dzięki współpracy stabilność zmniejsza ryzyko konfliktu o charakterze globalnym. W ten sposób wspólna organizacja w zakresie wzajemnego wsparcia ogranicza potencjalne koszty związane z konfliktem.

W takim rozumieniu *strukturą defensywną* będzie każdy zbiór obiektów niewchodzących ze sobą w konflikt i niosący – w razie potrzeby – wzajemną pomoc, który dzięki współpracy staje się bezpieczny względem pozostałych obiektów środowiska.

Modelowanie struktur obronnych za pomocą teorii grafów jest stosunkowo młodym zagadnieniem [28]. Wśród zalet takiego sposobu reprezentowania należy wymienić prostotę i klarowność definicji, które w sposób intuicyjny odzwierciedlają modelowane zagadnienie. Dodatkowym atutem jest wysoki potencjał na tworzenie nowych, pokrewnych modeli zgodnych z ogólną koncepcją. W niniejszej pracy zaproponujemy ogólny schemat dla modeli struktur defensywnych i poddamy analizie dwa zgodne z nim modele. Dzięki takiemu podejściu możemy precyzyjniej dopasować się do specyfiki modelowanego zagadnienia ograniczając kompromisy i uproszczenia. Jednocześnie wspólny trzon pozwala wyciągać ogólne wnioski, powtarzać podobne rozumowania, konstruować zbliżone algorytmy oraz szacować trudność zagadnień.

Podstawowymi parametrami modeli struktur defensywnych jest sposób w jaki obiekty narażone są na ataki, w jaki sposób mogą nieść sobie wzajemną pomoc, a także jak określić potencjał obronny struktury lub jej części. Dodatkowo modele mogą uwzględniać wymagania związane z innymi koncepcjami powszechnymi w teorii grafów. W niniejszej pracy analizie poddamy struktury o charakterze globalnym. To znaczy wymagamy, żeby struktura była zbiorem dominującym w grafie (tzn. każdy wierzchołek grafu albo należy do struktury defensywnej, albo ma w niej sąsiada). W ten sposób wszystkie wierzchołki grafu uznajemy za zaangażowane w sytuację konfliktową.

Motywacją autora niniejszej pracy do podjęcia badań w omawianym zakresie była niewielka liczba wyników w zakresie algorytmiki, która pomniejszała możliwość praktycznych zastosowań dyskutowanych modeli. Zdaniem autora, potencjał badawczy zagadnienia nie został wyczerpany, a perspektywy wynikające z poczynionych w niniejszej pracy obserwacji wyznaczają nowe, nieeksploatowane do tej pory kierunki. Większość istniejących prac skupia się na czysto matematycznych własnościach takich jak oszacowania i gwarancje istnienia obiektów, często bez wskazania metod konstrukcji. Wskazywane w literaturze zastosowania (np. militarne, związane z wyszukiwaniem

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

społeczności sieciowych (ang. *web communities*), dotyczące niezawodności systemów obliczeniowych (ang. *fault-tolerant computing*)) stanowią dla autora dodatkową motywację i orientują badania w kierunku zagadnień praktycznych.

Cele pracy

Głównym celem niniejszej pracy było przeprowadzenie analizy złożoności problemów istnienia globalnych (dominujących) struktur defensywnych w grafach oraz problemów dotyczących współistnienia dwóch osobnych globalnych struktur defensywnych w grafach, które nazywamy problemami równowagi strategicznej. Pierwsza część badań dotyczyła modeli koalicji defensywnych (ang. *defensive alliance*), zbiorów defensywnych (ang. *defensive sets*), oraz koalicji krawędziowych (ang. *edge alliance*). Druga część badań dotyczyła modeli równowagi strategicznej (ang. *strategic balance*) wymienionych modeli, to znaczy równowagi strategicznej koalicji defensywnych (ang. *strategic balance of defensive alliances*), równowagi strategicznej zbiorów defensywnych (ang. *strategic balance of defensive sets*) oraz równowagi strategicznej koalicji krawędziowych (ang. *strategic balance of edge alliances*).

W szczególności celem pracy było opracowanie wydajnych algorytmów konstruujących w klasie drzew najmniejsze struktury defensywne oraz weryfikujących istnienie i konstruujących w klasie drzew równowagi strategiczne. Drugim ważnym elementem była weryfikacja trudności problemu (złożoności obliczeniowej) w możliwie wąskiej klasie grafów. Takie podejście miało na celu wskazanie ograniczeń stosowalności modelu w przypadku dużych grafów oraz skierowanie dalszej uwagi na potencjalne podejścia aproksymacyjne lub heurystyczne, które powiększą możliwości zastosowań modeli w praktyce.

Kolejnym celem pracy były badania teoretyczne własności modeli struktur defensywnych oraz równowag strategicznych. Dociekania dotyczyły podstawowych własności modeli, dolnych i górnych oszacowań na rozmiar poszukiwanych struktur, a także związków między modelami. Ponadto, jednym z celów pracy było opracowanie ogólnego modelu struktur defensywnych obejmującego prezentowane w pracy modele.

Teza pracy

Rozważane w niniejszej pracy zagadnienia znajdują zastosowania praktyczne w przypadku identyfikacji społeczności sieciowych (ang. *web communities*). Z uwagi na rozległość sieci połączeń w grafach reprezentujących społeczności sieciowe pojawia się fundamentalne pytanie o istnienie wydajnych rozwiązań algorytmicznych, a także istnienie barier na możliwość ich konstrukcji (tzn. $\mathcal{NP}$–zupełność i $\mathcal{NP}$–trudność problemów obliczeniowych). Praktyczny charakter mają również dolne i górne oszacowania rozmiaru struktur defensywnych.

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

Zatem według ogólnie przyjętej metodologii badań naukowych w tej dziedzinie postawiona została następująca teza pracy:

Konstrukcja wielomianowych algorytmów dokładnych jest możliwa dla: problemu konstrukcji najmniejszych globalnych zbiorów bezpiecznych w drzewach oraz problemu konstrukcji najmniejszych globalnych koalicji krawędziowych w drzewach.

Konstrukcja wielomianowych algorytmów dokładnych weryfikujących istnienie i konstruujących równowagę strategiczną (jeżeli istnieje) jest możliwa dla: problemu równowagi strategicznej koalicji defensywnych w drzewach oraz problemu równowagi strategicznej zbiorów defensywnych w drzewach.

Problemy istnienia globalnej koalicji defensywnej oraz globalnego zbioru defensywnego są $\mathcal{NP}$–zupełne w klasie podkubicznych planarnych grafów dwudzielnych. Problem istnienia globalnej koalicji krawędziowej jest $\mathcal{NP}$–zupełny w klasie grafów podkubicznych.

Problemy istnienia równowagi strategicznej koalicji defensywnych oraz równowagi strategicznej zbiorów bezpiecznych są $\mathcal{NP}$–zupełne w klasie grafów o stopniu nieprzekraczającym 4.

Modele koalicji defensywnych, zbiorów bezpiecznych oraz koalicji krawędziowych są przypadkami szczególnymi ogólnego modelu struktur defensywnych w grafach.

Schemat pracy

Rozdział pierwszy został poświęcony wprowadzeniu pojęć, definicji, oznaczeń i podstawowych własności z dziedziny teorii grafów i złożoności obliczeniowej. W rozdziale drugim przedstawione zostały pojęcia i podstawowe własności dotyczące modelu koalicji defensywnych i zbiorów bezpiecznych w grafach, a także zaprezentowana została ogólna definicja struktury defensywnej, która według autora stanowi wartościowy wkład w dyskutowaną dziedzinę. W oparciu o definicję struktury defensywnej wprowadzamy również definicję równowagi strategicznej.

W rozdziale trzecim dyskutowany jest model zbiorów defensywnych, przede wszystkim w wersji globalnej. Najważniejsze wyniki obejmują oszacowania na rozmiar najmniejszego globalnego zbioru defensywnego, wielomianowy algorytm znajdujący najmniejszy zbiór defensywny w drzewach oraz dowód $\mathcal{NP}$–zupełności problemu istnienia globalnego zbioru defensywnego w podkubicznych, planarnych grafach dwudzielnych.

W rozdziale czwartym omawiamy model koalicji krawędziowych, również w wersji globalnej. Wyniki obejmują oszacowania na rozmiar najmniejszej globalnej koalicji krawędziowej, dokładną

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

formułę na rozmiar najmniejszej globalnej koalicji krawędziowej w grafach pełnych k–arnych wraz z wykonywalną w wielomianowym czasie konstrukcją takiej koalicji, algorytm wielomianowy znajdujący najmniejszą globalną koalicję krawędziową w drzewach oraz dowód $\mathcal{NP}$–zupełności problemu istnienia globalnej koalicji krawędziowej w grafach podkubicznych.

W rozdziale piątym omawiamy model model równowagi strategicznej koalicji defensywnych. Wykazujemy równoważność pomiędzy problemami istnienia równowagi strategicznej oraz doskonałej równowagi strategicznej. Prezentujemy warunki istnienia równowagi strategicznej koalicji defensywnych dla popularnych klas grafów, w tym pełnych grafów k–dzielnych. W dalszej części prezentujemy wielomianowy algorytm weryfikujący istnienie i konstruujący równowagę strategiczną koalicji defensywnych w drzewach. Na koniec dostarczamy dowód $\mathcal{NP}$–zupełności problemu istnienia równowagi strategicznej w grafach o stopniu nieprzekraczającym 4.

W rozdziale szóstym dyskutujemy modele równowagi strategicznej zbiorów defensywnych oraz równowagi strategicznej koalicji krawędziowych. Dla modelu opartego o zbiory defensywne prezentujemy równoważność problemów istnienia równowagi strategicznej oraz doskonałej równowagi strategicznej. Następnie przedstawiamy algorytm weryfikujący istnienie i konstruujący równowagę strategiczną zbiorów defensywnych w drzewach. Wykazujemy też, że problem istnienia równowagi strategicznej zbiorów defensywnych jest $\mathcal{NP}$–zupełny w grafach o stopniu nieprzekraczającym 4. Dla modelu opartego o koalicje krawędziowe weryfikujemy, że problemy istnienia równowagi strategicznej oraz doskonałej równowagi strategicznej są istotnie różne. Zwracamy też uwagę, że w przypadku drzew nie istnieje równowaga strategiczna koalicji krawędziowych. W ten sposób określamy przyszły front badań w tym temacie.

W rozdziale siódmym omawiamy kontekst zastosowań praktycznych struktur defensywnych szczegółowo omawiając przykładowe zastosowanie dla dystrybucji zasobów w sieci komputerowej.

Dorobek publikacyjny

Wyniki badań składające się na dorobek autora zostały opublikowane w artykułach [24, 33, 42, 46, 47, 48, 65]. Wszystkie prace dotyczą tematyki omawianej w niniejszej rozprawie stanowią kontynuację badań rozpoczętych w ramach pracy dyplomowej magisterskiej autora [45]. W ramach pracy magisterskiej autor rozpoczął badania modelu równowagi strategicznej koalicji defensywnych, które zostały podsumowane artykułem [46]. W niniejszej pracy rozważany model został przedstawiony oraz osadzony w ramach ogólniejszej definicji w rozdziale czwartym. Prace [47] oraz [48] dotyczą odpowiednio zbiorów defensywnych i koalicji krawędziowych i zostały omówione i rozszerzone odpowiednio w rozdziałach drugim i trzecim. Rozdział piąty zawiera materiały dotyczące równowagi strategicznej zbiorów defensywnych oraz równowagi strategicznej koalicji krawędziowych, częściowo prezentowanych w artykule [42]. Niektóre z wyników zostały zaprezentowane w ramach referatu konferencyjnego [65].

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

ROZDZIAŁ 1

Wprowadzenie

W rozdziale zostaną wprowadzone wybrane definicje, oznaczenia i podstawowe własności z dziedziny matematyki, teorii grafów oraz teorii złożoności obliczeniowej. Niezdefiniowane jednoznaczne pojęcia stanowią ugruntowaną terminologię matematyczną lub teoriografową lub pochodzą z [10, 14, 22, 43, 44, 66]. Terminologia w języku polskim została zaczerpnięta z [38].

1.1 Podstawowe definicje i oznaczenia

Zbiór liczb naturalnych oznaczamy symbolem $\mathbb{N}$ i przyjmujemy konwencję według której liczba 0 należy do zbioru liczb naturalnych. Przez $\mathbb{N}_+$ oznaczamy zbiór dodatnich liczb naturalnych. Podzbiór zbioru liczb naturalnych nazywamy *przedziałem*, jeśli składa się on z pewnej skończonej liczby kolejnych liczb naturalnych. Przykładowo zbiór $\{42, 43, 44, 45\}$ jest w tym sensie przedziałem. Przez $\mathbb{R}$ oznaczamy zbiór liczb rzeczywistych.

W wybranych miejscach pracy odnosząc się do podzbiorów zbioru liczb naturalnych bądź rzeczywistych, dla zwiększenia czytelności, zastosujemy uproszczoną konwencję. W przypadku wskazywania liczby naturalnej należącej do przedziału liczb naturalnych będziemy stosować notację $i = 3, 4, \ldots, k$ lub $3 \leq i \leq k$, lub $i \in \{3, 4, \ldots, k\}$, którą we wszystkich przypadkach należy interpretować jako $i \in \{l \in \mathbb{N} \colon l \geq 3 \wedge l \leq k\}$. W analogiczny sposób możemy wskazywać liczby naturalne bez podawania górnego bądź dolnego ograniczenia. Przykładowo zapisy $i = 3, 4, \ldots$ a także $i \geq 3$ należy interpretować jako $i \in \{l \in \mathbb{N} \colon l \geq 3\}$. Podobnie zapisy typu $i \leq 10$ należy rozumieć jako $i \in \{l \in \mathbb{N} \colon l \leq 10\}$. W przypadku stosowania takiej notacji parametry będą opisywane jako liczby naturalne lub będzie to wynikało z kontekstu (np. dla liczb, które występują jako indeksy innych oznaczeń).

W niniejszej pracy pisząc graf będziemy mieli na myśli graf prosty – chyba że zostanie powiedziane inaczej. Przyjmiemy następującą definicję grafu prostego [14]:

Definicja 1.1. *Grafem prostym* nazywamy uporządkowaną parę zbiorów (V, E) spełniających następujące własności:

1. zbiór V jest skończony oraz niepusty,
2. $E \subseteq \{\{u, v\} \colon u \in V, v \in V, u \neq v\}$,
3. $V \cap E = \emptyset$.

Zbiór V nazywamy *zbiorem wierzchołków grafu* a elementy tego zbioru nazywamy *wierzchołkami*

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

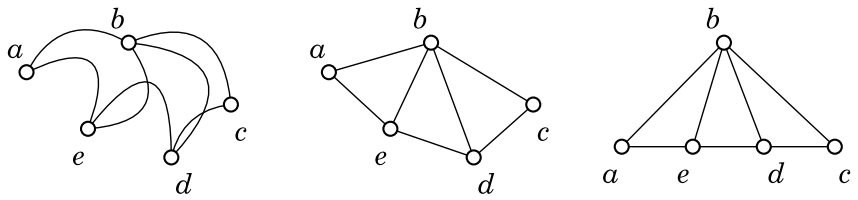
grafu lub po prostu *wierzchołkami*. Zbiór E nazywamy *zbiorem krawędzi grafu* a elementy tego zbioru nazywamy *krawędziami w grafie*, *krawędziami grafu* lub po prostu *krawędziami*.

Warunek 3 definicji grafu prostego wprowadzony został dla zapewnienia jednoznaczności stosowanych oznaczeń [14]. Niech G będzie grafem. Przyjmiemy następujące oznaczenia:

- Zbiór wierzchołków grafu G oznaczamy przez $\mathrm{V}(G)$.
- Zbiór krawędzi grafu G oznaczamy przez $\mathrm{E}(G)$.
- Krawędź $\{u, v\}$ grafu G oznaczać będziemy skrótowo przez uv lub równoważnie przez vu. Będziemy wtedy mówili, że wierzchołek u *sąsiaduje*, *jest incydentny*, *jest sąsiadem*, lub *jest sąsiadujący* z wierzchołkiem v w grafie G lub równoważnie, że wierzchołek v *sąsiaduje*, *jest incydentny*, *jest sąsiadem*, lub *jest sąsiadujący* z wierzchołkiem u w grafie G.
- Każdy wierzchołek krawędzi grafu nazywamy *końcem* lub *wierzchołkiem końcowym* krawędzi. Wierzchołki krawędzi nazywamy *sąsiadami* w grafie G.
- Mówimy, że wierzchołek grafu *sąsiaduje*, *jest incydentny*, *jest sąsiadem*, lub *jest sąsiadujący* z krawędzią tego grafu, jeżeli sąsiaduje on z co najmniej jednym z końców tej krawędzi oraz nie jest końcem tej krawędzi.
- Dwie różne krawędzie $g, h \in \mathrm{E}(G)$ nazywamy *incydentnymi*, *sąsiadującymi* lub mówimy, że krawędź g *sąsiaduje* z krawędzią h lub równoważnie krawędź h *sąsiaduje* z krawędzią g, jeżeli $g \cap h \neq \emptyset$. Mówimy też wtedy, że krawędzie g i h są *sąsiadami* w grafie G.

Typową metodą przedstawiania grafu jest reprezentacja graficzna, na przykład na płaszczyźnie, w przestrzeni trójwymiarowej, na powierzchni sfery, na powierzchni torusa lub w innej przestrzeni. Wierzchołki grafu reprezentowane są przez koła, a także przez okręgi, trójkąty lub inne figury geometryczne lub symbole. Każda z krawędzi grafu reprezentowana jest przez połączenie wierzchołków tej krawędzi linią w przestrzeni (na przykład odcinkiem na płaszczyźnie). Nie każda z przestrzeni umożliwia przedstawienie dowolnego grafu bez przecięć linii reprezentujących krawędzie tego grafu – ewentualne przecięcia linii reprezentujących krawędzie pozostaną w niniejszej pracy bez znaczenia.

Przykładowo rozważmy graf G, dla którego $\mathrm{V}(G) = \{a, b, c, d, e\}$ oraz $\mathrm{E}(G) = \{ab, ae, bc, bd, be, cd, de\}$. Rysunek 1.1 przedstawia trzy różne reprezentacje grafu G wraz z oznaczeniami wierzchołków literami. Zauważmy, że graf można reprezentować na dowolnie wiele sposobów.

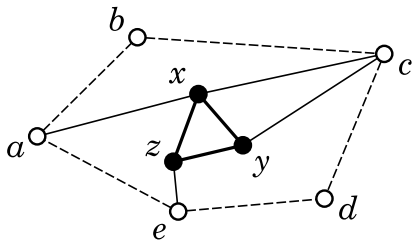


Rys. 1.1: Trzy różne reprezentacje grafu.

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

W ramach pojedynczej reprezentacji grafu dopuszczamy stosowanie różnych oznaczeń zarówno dla wierzchołków jak i dla krawędzi. Przykładowo reprezentując wierzchołki grafu możemy dla części z nich zastosować oznaczanie za pomocą kół, a dla pozostałych za pomocą okręgów. Często w ten sposób będziemy odróżniać od siebie rozłączne podzbiory zbioru wierzchołków. Podobnie w przypadku krawędzi użyteczne może okazać się wykorzystanie różnych oznaczeń dla krawędzi – przykładowo niektóre z krawędzi możemy reprezentować za pomocą ciągłych linii, inne przy pomocy linii przerywanych, a pozostałe przy pomocy grubych linii ciągłych.

Przykładowo rozważmy graf H, dla którego $\mathrm{V}(H) = \{a, b, c, d, e, x, y, z\}$ oraz $\mathrm{E}(H) = \{ab, ae, ax, bc, cd, cx, cy, de, ez, xz, xy, yz\}$. Wprowadźmy dodatkowo podział zbioru wierzchołków na dwa podzbiory A i B. Niech zbiór $A = \{a, b, c, d, e\}$ oraz zbiór $B = \{x, y, z\}$. Rysunek 1.2 przedstawia graf H. Wierzchołki zbioru A reprezentowane są przez okręgi, a wierzchołki zbioru B reprezentowane są przez koła. Krawędzie pomiędzy wierzchołkami zbioru A oznaczone są linią przerywaną, krawędzie pomiędzy wierzchołkami zbioru B oznaczone są grubą linią ciągłą. Pozostałe krawędzie oznaczone są liniami ciągłymi normalnej grubości.



Rys. 1.2: Reprezentacja grafu korzystająca z różnych oznaczeń wierzchołków i krawędzi.

Definicja 1.2. Niech G będzie grafem. *Podgrafem* grafu G nazywamy dowolny graf H, dla którego $\mathrm{V}(H) \subseteq \mathrm{V}(G)$ i $\mathrm{E}(H) \subseteq \mathrm{E}(G)$ a także dla każdej krawędzi $uv \in \mathrm{E}(H)$ mamy $u \in \mathrm{V}(H)$ oraz $v \in \mathrm{V}(H)$. Dodatkowo każdy podgraf grafu G, który jest od niego różny, nazywamy *właściwym*.

Definicja 1.3. Niech H będzie grafem. *Nadgrafem* grafu H nazywamy dowolny graf G, dla którego $\mathrm{V}(H) \subseteq \mathrm{V}(G)$ i $\mathrm{E}(H) \subseteq \mathrm{E}(G)$. Dodatkowo każdy nadgraf grafu G, który jest od niego różny, nazywamy *właściwym*.

Niech G i H będą grafami. Przyjmiemy następujące oznaczenia:

- Jeżeli graf H jest podgrafem grafu G lub graf G jest nadgrafem grafu H, to stosujemy oznaczenie $H \subseteq G$ lub $G \supseteq H$.
- Jeżeli graf H jest podgrafem właściwym grafu G lub graf G jest nadgrafem właściwym grafu H, to stosujemy oznaczenie $H \subset G$ lub $G \supset H$.

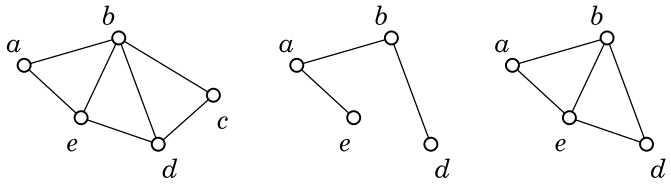
Stwierdzenie 1.1. *Graf H jest podgrafem grafu G wtedy i tylko wtedy, gdy graf G jest nadgrafem grafu H.* □

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

Definicja 1.4. Niech H i G będą grafami. Graf H nazywamy *podgrafem indukowanym* grafu G, jeżeli $H \subseteq G$ oraz dla dowolnych wierzchołków $u \in \mathrm{V}(H)$, $v \in \mathrm{V}(H)$ jeżeli $uv \in \mathrm{E}(G)$, to $uv \in \mathrm{E}(H)$.

Niech G będzie grafem oraz niech A będzie niepustym podzbiorem zbioru wierzchołków grafu G. Mówimy, że zbiór A *indukuje podgraf* grafu G zdefiniowany jako para (A, E), gdzie $E = \mathrm{E}(G) \cap \{\{a, b\} : a \in A, b \in A\}$. Taki podgraf nazywamy też *podgrafem indukowanym przez zbiór* A i oznaczamy $G[A]$.

Przykładowo rozważmy ponownie graf G, dla którego $\mathrm{V}(G) = \{a, b, c, d, e\}$ oraz $\mathrm{E}(G) = \{ab, ae, bc, bd, be, cd, de\}$. Rysunek 1.3 przedstawia trzy grafy. Graf G reprezentowany jest po lewej stronie rysunku. Środkowa reprezentacja przedstawia podgraf H grafu G, dla którego $\mathrm{V}(H) = \{a, b, d, e\}$ oraz $\mathrm{E}(H) = \{ab, ae, bd\}$. Graf ten nie jest podgrafem indukowanym grafu G. Ostatnia reprezentacja z rysunku 1.3 przedstawia podgraf indukowany K grafu G, dla którego $\mathrm{V}(K) = \{a, b, d, e\}$ oraz $\mathrm{E}(K) = \{ab, ae, bd, be, de\}$.



Rys. 1.3: Od lewej: graf G, podgraf H grafu G nie będący podgrafem indukowanym oraz podgraf indukowany K grafu G.

1.2 Parametry i własności grafu

Niech G będzie grafem.

- Liczbę wierzchołków grafu G nazywamy *rzędem grafu* G i oznaczamy przez $\mathrm{n}(G)$.
- Liczbę krawędzi grafu G oznaczamy przez $\mathrm{m}(G)$.
- *Stopniem wierzchołka* w grafie nazywamy liczbę wierzchołków z nim sąsiadujących.
- Stopień wierzchołka v w grafie G oznaczamy przez $\deg_G(v)$. Mówimy też, że wierzchołek v *jest wierzchołkiem stopnia* $\deg_G(v)$ lub że *ma stopień równy* $\deg_G(v)$.
- Wierzchołek v grafu G nazywamy *wierzchołkiem izolowanym* (ang. *isolated vertex*), jeżeli $\deg_G(v) = 0$; *wierzchołkiem wiszącym* (ang. *pendant vertex*), jeżeli $\deg_G(v) = 1$; *wierzchołkiem wspierającym* (ang. *support vertex*), jeżeli wśród jego sąsiadów znajduje się wierzchołek wiszący.
- Liczbę będącą stopniem wierzchołka o najniższym stopniu nazywamy *najniższym stopniem wierzchołka w grafie* G i oznaczamy przez $\delta(G)$.

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

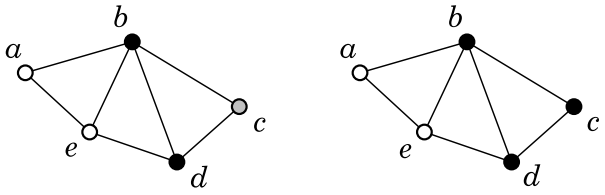
- Podobnie liczbę będącą stopniem wierzchołka o najwyższym stopniu nazywamy *najwyższym stopniem wierzchołka w grafie* G i oznaczamy przez $\Delta(G)$. Liczbę $\Delta(G)$ nazywamy również *stopniem grafu* G.

Lemat 1.2 (o uściskach dłoni)**.** *Niech G będzie n wierzchołkowym grafem dla którego* $\mathrm{V}(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$*. Wtedy zachodzi równość* $\sum_{i=1}^{n} \deg_G(v_i) = 2\,\mathrm{m}(G)$. □

Definicja 1.5. Niech G będzie grafem.

- *Sąsiedztwem otwartym* lub *otwartym sąsiedztwem* wierzchołka $v \in \mathrm{V}(G)$ w grafie G nazywamy zbiór wszystkich jego sąsiadów w grafie G. Oznaczamy ten zbiór przez $\mathrm{N}_G(v)$.
- *Sąsiedztwem domkniętym* lub *domkniętym sąsiedztwem* wierzchołka $v \in \mathrm{V}(G)$ w grafie G nazywamy zbiór złożony z wierzchołka v oraz wszystkich jego sąsiadów w grafie G. Oznaczamy ten zbiór przez $\mathrm{N}_G[v]$.
- Dla dowolnego zbioru $A \subseteq \mathrm{V}(G)$ zbiór $\bigcup_{v \in A} \mathrm{N}_G(v)$ nazywamy *otwartym sąsiedztwem zbioru* A lub *sąsiedztwem otwartym zbioru* A i oznaczamy $\mathrm{N}_G(A)$.
- Zbiór $\mathrm{N}_G(A) \cup A$ nazywamy *domkniętym sąsiedztwem zbioru* A lub *sąsiedztwem domkniętym zbioru* A i oznaczamy $\mathrm{N}_G[A]$.

Rysuneki 1.4 oraz 1.5 prezentują odpowiednio definicje otwartego i domkniętego sąsiedztwa wierzchołka oraz otwartego i domkniętego sąsiedztwa zbioru w grafie. Zauważmy, że dla danego wierzchołka v jego otwarte i domknięte sąsiedztwo to zawsze zbiory różniące się jednym elementem – wierzchołkiem v, który nigdy nie należy do swojego otwartego sąsiedztwa, za to zawsze należy do sąsiedztwa domkniętego. W przypadku otwartego i domkniętego sąsiedztwa zbioru nie jest to regułą, co pokazuje rysunek 1.5.



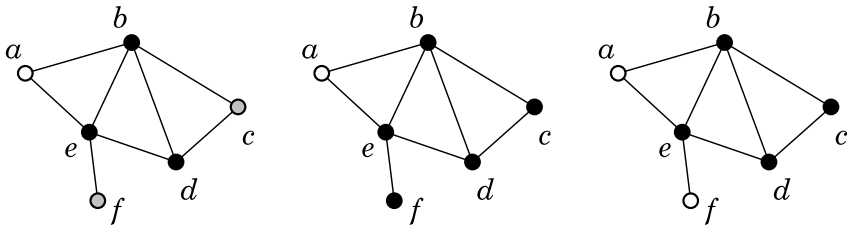
Rys. 1.4: Po lewej przedstawiono sąsiedztwo otwarte (czarne wierzchołki) wierzchołka c. Po prawej sąsiedztwo domknięte (czarne wierzchołki) wierzchołka c w tym samym grafie.

Stwierdzenie 1.3. *Niech G będzie grafem oraz niech $A, B \subseteq \mathrm{V}(G)$. Zachodzą następujące równości:*

- $\mathrm{N}_G(A \cup B) = \mathrm{N}_G(A) \cup \mathrm{N}_G(B)$,
- $\mathrm{N}_G[A \cup B] = \mathrm{N}_G[A] \cup \mathrm{N}_G[B]$.

Jeżeli ponadto $A \subseteq B$, to:

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl



Rys. 1.5: Po lewej przedstawiono sąsiedztwo otwarte (czarne wierzchołki) zbioru $\{c, f\}$. Na rysunku środkowej sąsiedztwo domknięte (czarne wierzchołki) zbioru $\{c, f\}$. Po prawej otwarte sąsiedztwo (czarne wierzchołki) zbioru $\{c, d\}$, które jest identyczne z domkniętym sąsiedztwem tego zbioru.

- $\mathrm{N}_G(A) \subseteq \mathrm{N}_G(B)$ *oraz* $|\mathrm{N}_G(A)| \leq |\mathrm{N}_G(B)|$,
- $\mathrm{N}_G[A] \subseteq \mathrm{N}_G[B]$ *oraz* $|\mathrm{N}_G[A]| \leq |\mathrm{N}_G[B]|$. □

Poniższy lemat okaże się wielokrotnie przydatny w wielu dalszych rozumowaniach.

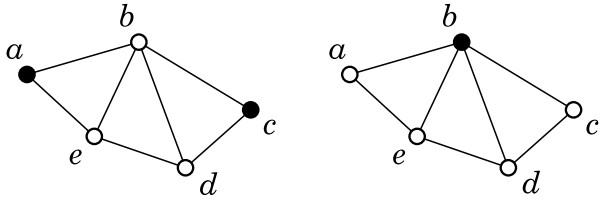
Lemat 1.4. *Niech G będzie grafem oraz niech $A, B \subseteq \mathrm{V}(G)$, gdzie $A \subseteq B$. Wtedy dla każdego zbioru $D \subseteq \mathrm{V}(G)$ zachodzi $|\mathrm{N}_G[D \cap A]| \leq |\mathrm{N}_G[D \cap B]|$.* □

Definicja 1.6. Niech G będzie grafem oraz $D \subseteq \mathrm{V}(G)$. Zbiór D nazywamy *zbiorem dominującym w grafie G* lub *zbiorem dominującym grafu G*, jeżeli $\mathrm{N}_G[D] = \mathrm{V}(G)$. Mówimy również, że zbiór D *dominuje graf G*, oraz że graf G *jest zdominowany przez* zbiór D.

Stwierdzenie 1.5. *Zbiór wszystkich wierzchołków grafu jest zbiorem dominującym w tym grafie.* □

Stwierdzenie 1.5 pokazuje, że dla każdego grafu istnieje podzbiór zbioru jego wierzchołków będący zbiorem dominującym w tym grafie. Bazując na tej obserwacji definiujemy liczbę będącą mocą najmniej licznego zbioru dominującego w grafie [30].

Definicja 1.7. Niech G będzie grafem. Moc najmniej licznego zbioru dominującego w grafie G nazywamy *liczbą dominowania* (ang. *domination number*). Liczbę dominowania grafu G oznaczamy przez $\gamma(G)$.



Rys. 1.6: Zbiory dominujące oznaczone kolorem czarnym w grafie. Z lewej strony przedstawiony został dwuelementowy zbiór dominujący, z prawej jednoelementowy zbiór dominujący.

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

Definicja 1.8. Niech G będzie grafem. Liczbę równą liczności najliczniejszego podziału zbioru wierzchołków $\mathrm{V}(G)$ na rozłączne, niepuste podzbiory takie, że każdy zbiór tego podziału jest zbiorem dominującym graf G nazywamy *liczbą podziału na zbiory dominujące* (ang. *domatic number*).

Na mocy stwierdzenia 1.5 wnioskujemy, że dla dowolnego niepustego grafu liczba podziału na zbiory dominujące jest określona. Zdefiniujemy jeszcze pojęcie totalnego dominowania [31, 32], związane z pojęciem zbioru dominującego w grafie.

Definicja 1.9. Niech G będzie grafem oraz $TD \subseteq \mathrm{V}(G)$. Zbiór TD nazywamy *zbiorem totalnie dominującym w grafie* G (ang. *total dominating*) lub *zbiorem totalnie dominującym grafu* G, jeżeli $\mathrm{N}_G(TD) = \mathrm{V}(G)$. Mówimy również, że zbiór TD *totalnie dominuje graf* G oraz że graf G *jest totalnie zdominowany przez* zbiór TD.

Definicja 1.10. Niech G będzie grafem. Moc najmniej licznego zbioru totalnie dominującego w grafie G nazywamy *liczbą totalnego dominowania* (ang. *total domination number*). Liczbę totalnego dominowania grafu G oznaczamy przez $\gamma_t(G)$.

Definicja 1.11. Niech G będzie grafem. Liczbę równą liczności najliczniejszego podziału zbioru wierzchołków $\mathrm{V}(G)$ na rozłączne, niepuste podzbiory takie, że każdy zbiór tego podziału jest zbiorem totalnie dominującym graf G nazywamy *liczbą podziału na zbiory totalnie dominujące* (ang. *total domatic number*).

Definicja 1.12. Niech G będzie grafem oraz niech $n \in \mathbb{N}_+$. *Marszrutą* w grafie nazywamy każdy ciąg jego wierzchołków $(v_1, \ldots, v_n)$, taki że $\{v_k, v_{k+1}\} \in \mathrm{E}(G)$ dla każdego $k \in \{1, \ldots, n-1\}$. Jeżeli $v_1 = v_n$, to marszrutę nazywamy *zamkniętą*, a w przeciwnym razie *otwartą*. Pierwszy wierzchołek ciągu nazywamy *wierzchołkiem początkowym* lub *początkiem* marszruty. Ostatni wierzchołek ciągu nazywamy *wierzchołkiem końcowym* lub *końcem* marszruty. *Długością* marszruty nazywamy liczbę krawędzi między jej wierzchołkami.

Definicja 1.13. Niech G będzie grafem oraz niech $n \in \mathrm{N}_+$.*Ścieżką w grafie* nazywamy każdą marszrutę $(v_1, \ldots, v_n)$, dla której ciąg krawędzi $(\{v_1, v_2\}, \ldots, \{v_{n-1}, v_n\})$ nie zawiera powtarzających się krawędzi. Jeżeli $v_1 = v_n$, to ścieżkę nazywamy *zamkniętą*, a w przeciwnym razie *otwartą*. Pierwszy wierzchołek ciągu nazywamy *wierzchołkiem początkowym* lub *początkiem* ścieżki. Ostatni wierzchołek ciągu nazywamy *wierzchołkiem końcowym* lub *końcem* ścieżki. *Długością* ścieżki w grafie nazywamy liczbę krawędzi między jej wierzchołkami. Mówimy, że wierzchołki v, u grafu G są *połączone ścieżką w grafie* G jeżeli w grafie G istnieje ścieżka zawierająca wierzchołki v i u.

Definicja 1.14. Niech G będzie grafem. *Cyklem w grafie* nazywamy każdą niepustą zamkniętą ścieżkę. *Długością* cyklu nazywamy liczbę krawędzi między jego wierzchołkami.

Niech G będzie grafem, $n \geq 2$ oraz niech u, w będą różnymi wierzchołkami grafu G. Jeżeli istnieje marszruta $M = (u = v_1, \ldots, v_n = w)$, to mówimy, że M jest *marszrutą z* u *do* w oraz że wierzchołki

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

u i w są *połączone marszrutą*. Jeżeli marszruta M jest ścieżką, to analogicznie mówimy, że M jest *ścieżką z u do w* oraz że wierzchołki u i w są *połączone ścieżką*. Długość ścieżki o najmniejszej długości (*najkrótszej ścieżki*) pomiędzy wierzchołkami u i w (o ile istnieje) nazywamy *odległością* między nimi i oznaczmy jako $\mathrm{d}_G(u, v)$. Największą odległość spośród wszystkich odległości między parami wierzchołków grafu spójnego nazywamy *średnicą* tego grafu i oznaczamy jako $\mathrm{diam}(G)$.

Definicja 1.15. Graf G nazywamy *grafem spójnym*, jeżeli każde dwa różne wierzchołki grafu G są połączone ścieżką w grafie G. Graf, który nie jest grafem spójnym nazywamy *grafem niespójnym* lub mówimy, że jest *niespójny*.

W niniejszej pracy będziemy zakładać, że graf jest grafem spójnym, o ile nie zostanie wyraźnie zaznaczone, że może być grafem niespójnym.

Definicja 1.16. Niech G będzie grafem oraz zbiór $A \subseteq \mathrm{V}(G)$. Zbiór A nazywamy *zbiorem niezależnym* (ang. *independent set*), jeżeli dla dowolnych wierzchołków $u \in A$, $v \in A$ mamy $uv \notin \mathrm{E}(G)$.

Definicja 1.17. Niech G będzie grafem oraz zbiór $M \subseteq \mathrm{E}(G)$. Zbiór M nazywamy *skojarzeniem* (ang. *matching*) lub *zbiorem krawędzi niezależnych* (ang. *independent edge set*) w grafie G, jeżeli żadne dwie różne krawędzie ze zbioru M nie mają wspólnego końca. Każde najliczniejsze skojarzenie w grafie G nazywamy *największym skojarzeniem* grafu G, a liczbę jego elementów nazywamy *liczbą niezależności* (ang. *matching number*) grafu G i oznaczamy przez $\nu(G)$.

1.3 Elementarne klasy grafów

Zaprezentujemy teraz popularne w literaturze [4] klasy grafów. Niektóre z nich posłużą nam jedynie jako przykłady lub kontrprzykłady. Inne zostaną zbadane szerzej w kontekście pojęć dyskutowanych w niniejszej pracy.

Definicja 1.18. Graf o pustym zbiorze krawędzi nazywamy *grafem pustym*. Graf pusty o $n \in \mathbb{N}_+$ wierzchołkach oznaczamy przez N_n.

Definicja 1.19. Graf G, dla którego $\mathrm{E}(G) = \{uv : u \in \mathrm{V}(G), v \in \mathrm{V}(G), u \neq v\}$, nazywamy *grafem pełnym* (ang. *complete graph*) i oznaczamy przez K_n, gdzie $n = \mathrm{n}(G)$.

Definicja 1.20. Niech $\{v_1, \ldots, v_n\}$ będzie zbiorem wierzchołków grafu G, gdzie $n \in \mathbb{N}_+$. Graf G rzędu n nazywamy *ścieżką* (ang. *path*) długości $n-1$, jeżeli istnieje permutacja n–elementowa σ o tej własności, że zbiór $\{v_{\sigma(i)}v_{\sigma(i+1)} \colon i \in \{1, \ldots, n-1\}\}$ jest tożsamy zbiorowi krawędzi grafu G. Dodatkowo wierzchołki $v_{\sigma(1)}$ oraz $v_{\sigma(n)}$ nazywamy *wierzchołkami końcowymi*, *wierzchołkami skrajnymi* lub *końcami* ścieżki. Długość ścieżki jest równa liczbie jej krawędzi. Ścieżkę długości $n-1$ oznaczamy przez P_n.

Definicja 1.21. *Cyklem* (ang. *cycle*) rzędu $n \geq 3$ nazywamy graf, o takiej własności, że każdy podgraf tego grafu powstały poprzez usunięcie jednej krawędzi jest ścieżką P_n. Cykl rzędu n oznaczamy przez C_n.

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

Definicja 1.22. Niech G będzie grafem oraz niech k będzie liczbą naturalną taką, że $k \geq 2$. Graf G nazywamy grafem *k–dzielnym* (ang. *k–partite*), jeżeli istnieje podział jego zbioru wierzchołków na k rozłącznych, niepustych zbiorów niezależnych.

Niech G będzie grafem k–dzielnym dla pewnego $k \geq 2$. Niech rodzina $\{V_1, \ldots, V_k\}$ będzie rodziną niepustych, rozłącznych, niezależnych podzbiorów zbioru $\mathrm{V}(G)$, taką że $\mathrm{V}(G) = V_1 \cup \ldots \cup V_k$. Dla podkreślenia struktury podziału zbioru wierzchołków na zbioru niezależne, będziemy stosować notację $G = (V_1 \cup \ldots \cup V_k, \mathrm{E}(G))$.

Definicja 1.23. Niech $G = (V_1 \cup \ldots \cup V_k, E)$ będzie grafem k–dzielnym dla pewnego $k \geq 2$. Jeżeli dla dowolnych $i, j \in \{1, \ldots k\}$, $i \neq j$, oraz dla dowolnych wierzchołków $u \in V_i$ oraz $v \in V_j$ zachodzi $uv \in E$, to graf nazywamy grafem *pełnym k–dzielnym* (ang. *complete k–partite*) i oznaczamy $K_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$, gdzie $n_i = |V_i|$ dla $i \in \{1, \ldots k\}$.

Graf 2–dzielny nazywamy grafem *dwudzielnym* (ang. *bipartite*), natomiast pełny graf 2–dzielny nazywamy grafem *pełnym dwudzielnym* (ang. *complete bipartite*).

Definicja 1.24. Graf $K_{1,k}$ nazywamy *gwiazdą* i oznaczamy przez S_k.

Definicja 1.25. *Kołem* (ang. *wheel*) rzędu $k \geq 3$ nazywamy graf, który może zostać skonstruowany z cyklu C_k poprzez dodanie dodatkowego wierzchołka (zwanego *osią* koła) i połączenia tego wierzchołka z każdym wierzchołkiem cyklu C_k. Graf będący kołem rzędu k oznaczamy przez W_k.

Warto zwrócić uwagę, że $\mathrm{n}(P_k) = k$ oraz $\mathrm{n}(C_k) = k$, ale $\mathrm{n}(S_k) = k + 1$ oraz $\mathrm{n}(W_k) = k + 1$.
Kolejnymi często rozważanymi klasami grafów są tak zwane grafy *regularne*.

Definicja 1.26. Dla liczby naturalnej $r > 0$ graf nazywamy grafem *r–regularnym*, jeżeli każdy wierzchołek tego grafu ma stopień równy r. Graf nazywamy *grafem regularnym*, jeżeli jest on grafem r–regularnym dla pewnej liczby naturalnej $r > 0$. Grafy 3–regularne nazywamy grafami *kubicznymi* (ang. *cubic*).

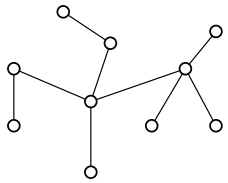
Definicja 1.27. Graf nazywamy grafem *podkubicznym* (ang. *subcubic*), jeżeli każdy wierzchołek tego grafu ma stopień nie większy niż 3.

Za autorem książki [14] przywołamy następującą definicję lasu i drzewa:

Definicja 1.28. Graf (niekoniecznie spójny), który nie posiada podgrafów indukowanych będących cyklami, nazywamy *lasem*. Jeżeli dodatkowo graf ten jest spójny, to nazywamy go *drzewem*. Wierzchołki wiszące w lesie lub w drzewie nazywamy *liśćmi*. Zbiór liści lasu lub drzewa T oznaczamy jako $L(T)$. Zbiór wszystkich wierzchołków, które nie są liśćmi w lesie lub drzewie T (tzn. zbiór $\mathrm{V}(T) \setminus L(T)$) oznaczamy jako $C(T)$.

Przykład grafu będącego drzewem przedstawiony został na rysunku 1.7. Prawdziwa jest poniższa charakteryzacja:

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl



Rys. 1.7: Przykładowy graf będący drzewem.

Twierdzenie 1.6. *[14] Spójny, n–wierzchołkowy graf, gdzie $n \geq 1$, jest drzewem wtedy i tylko wtedy, gdy ma dokładnie $n-1$ krawędzi.* □

Lemat 1.7. *Niech graf T będzie drzewem i niech* $\mathrm{n}(T) \geq 2$. *Wtedy w drzewie T istnieją co najmniej dwa liście.*

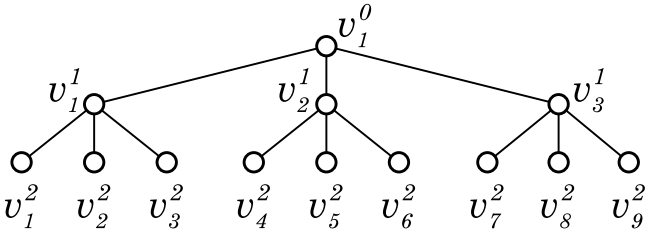
Dowód. Niech graf T będzie drzewem. Zgodnie z twierdzeniem 1.6 liczba krawędzi drzewa jest równa $m = n-1$. Załóżmy nie wprost, że w tym drzewie istnieje nie więcej niż jeden liść. Korzystając z lematu o uściskach dłoni (1.2), mamy zatem $2m = \sum_{v \in \mathrm{V}(G)} \deg_G(v) \geq 2n-1$, skąd $m - n \geq -\frac{1}{2}$. Sprzeczność z $m - n = -1$. □

Definicja 1.29. Drzewem *pełnym k–arnym wysokości h*, gdzie liczby naturalne h i k spełniają $k \geq 2$ i $h \geq 1$ i oznaczanym jako T_k^h, nazywamy drzewo zdefiniowane następująco:

$$\mathrm{V}(T_k^h) = \{v_1^0, v_1^1, \ldots, v_k^1, v_1^2, \ldots, v_{k^2}^2, \ldots, v_1^{h-1}, \ldots, v_{k^{h-1}}^{h-1}, v_1^h, \ldots, v_{k^h}^h\},$$

$$\mathrm{E}(T_k^h) = \bigcup_{l=0}^{h-1} \bigcup_{i=1}^{k^l} \bigcup_{j=(i-1)k+1}^{i \cdot k} \{\{v_i^l, v_j^{l+1}\}\}.$$

Przykładowe drzewo T_3^2 zostało przedstawione na rysunku 1.8. Intuicyjnie drzewa k–arne mają strukturę pozwalającą wybrać jeden z wierzchołków (tzw. *korzeń*) w taki sposób, że ma on dokładnie k wierzchołków sąsiadujących. Pozostałe wierzchołki są albo liśćmi albo ich stopień jest równy $k+1$. Dodatkowo odległość między korzeniem a każdym z liści jest równa dokładnie h.



Rys. 1.8: Drzewo k–arne T_3^2

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

1.4 Złożoność obliczeniowa

Pojęcia związane z teorią złożoności obliczeniowej, do których będziemy odnosić się w niniejszej pracy, pochodzą z [22, 23, 43, 44, 52]. Centralnymi pojęciami teorii są pojęcia algorytmów deterministycznych oraz algorytmów niedeterministycznych, oraz związane z nimi klasy problemów obliczeniowych. Klasę problemów decyzyjnych, które można rozwiązać w czasie wielomianowym (względem rozmiaru danych wejściowych) przy pomocy algorytmów deterministycznych, oznaczamy jako $\mathcal{P}$. Klasę problemów decyzyjnych rozwiązywalnych w czasie wielomianowym przy pomocy algorytmów niedeterministycznych oznaczamy jako $\mathcal{NP}$. W obrębie klasy $\mathcal{NP}$ wyróżniamy podklasę problemów najtrudniejszych, w sensie obliczeniowym, w tej klasie, którą nazywamy problemami $\mathcal{NP}$–zupełnymi. Instancję wejściową dowolnego problemu $\mathcal{A}$ z klasy $\mathcal{NP}$ można w wielomianowym czasie przekształcić (procedura nazywana α–redukcją [43]) w instancję wejściową dowolnego problemu $\mathcal{NP}$–zupełnego $\mathcal{B}$ w taki sposób, że dla każdej instancji I problemu $\mathcal{A}$ odpowiedź jest twierdząca wtedy i tylko wtedy, gdy przetransformowana za pomocą α–redukcji instancja I' problemu $\mathcal{B}$ jest twierdząca.

Dowody $\mathcal{NP}$–zupełności problemów decyzyjnych dyskutowanych w niniejszej pracy będą oparte o redukcję z przedstawionych w dalszej części problemów. Przez $\overline{3SAT}$ oznaczymy modyfikację klasycznego problemu *3SAT*.

Problem	$\overline{3SAT}$
Instancja	Formuła logiczna ϕ w znormalizowanej postaci koniunkcyjnej (ang. *CNF*) o 2 lub 3 literałach w każdej klauzuli. Dodatkowo w formule ϕ każda zmienna x występuje w postaci literału x lub $\neg x$ w nie więcej niż 3 klauzulach. Ponadto zakładamy, że dla każdej zmiennej x w formule ϕ występuje zarówno literał x jak i $\neg x$.
Pytanie	Czy istnieje takie wartościowanie zmiennych formuły ϕ, dla którego po podstawieniu tego wartościowania formuła jest prawdziwa?

Twierdzenie 1.8. *[22] Problem $\overline{3SAT}$ jest problemem $\mathcal{NP}$–zupełnym.* □

Kolejnym problemem decyzyjnym, który wykorzystamy podczas rozumowań, będzie problem istnienia zbioru totalnie dominującego *TDOM*.

Problem	*TDOM*
Instancja	Graf G i liczba naturalna k.
Pytanie	Czy w grafie G istnieje zbiór totalnie dominujący o mocy co najwyżej k?

Twierdzenie 1.9. *[41] Problem TDOM jest $\mathcal{NP}$–zupełny w klasie dwudzielnych planarnych grafów podkubicznych.* □

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

Ostatnim problemem decyzyjnym, który wykorzystamy w dalszej części, jest problem *3DM*.

Problem	*3DM*
Instancja	Podkubiczny graf dwudzielny $G = (V \cup Q, E)$ bez wierzchołków wiszących, gdzie V i Q są partycjami dwudzielności grafu G, $V = X \cup Y \cup Z$, $\|X\| = \|Y\| = \|Z\| = m$, $\|V\| = 3m$. Dla każdego wierzchołka $q \in Q$, $\deg_G(q) = 3$ i q jest połączony z dokładnie jednym wierzchołkiem w każdym ze zbiorów X, Y i Z, a dla każdego wierzchołka $v \in V$ mamy $\deg_G(v) \in \{2, 3\}$.
Pytanie	Czy istnieje podzbiór $Q' \subseteq Q$ mocy $\|Q'\| = m$, który dominuje wszystkie wierzchołki partycji V, to znaczy: $\mathrm{N}_G(Q') = V$?

Twierdzenie 1.10. *[22] Problem 3DM jest $\mathcal{NP}$–zupełny.* □

Podsumowanie

W niniejszym rozdziale przytoczyliśmy podstawowe definicje, oznaczenia i własności z dziedziny matematyki, teorii grafów oraz teorii złożoności obliczeniowej.

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

ROZDZIAŁ 2

Struktury defensywne w grafach

W niniejszym rozdziale wprowadzimy pojęcia związane z zagadnieniami koalicji i bezpieczeństwa w grafach, a także zaprezentujemy ogólny model struktury defensywnej. Rozpoczniemy od omówienia ugruntowanych w literaturze pojęć koalicji defensywnej [25, 28] oraz zbioru bezpiecznego [5]. Następnie wprowadzimy uniwersalny model struktury defensywnej oparty o jeden zbiór wierzchołków grafu, a na koniec model dla dwóch współistniejących zbiorów tego typu, czyli koncepcję równowagi strategicznej.

2.1 Koalicje defensywne w grafach

W niniejszej części przyjrzymy się definicji oraz podstawowym własnościom modelu koalicji defensywnych w grafach. Pojęcie koalicji defensywnej w teorii grafów zostało wprowadzone w dwóch artykułach konferencyjnych [28] i [25], w których autorzy zdefiniowali i badali własności odpowiednio koalicji defensywnych oraz globalnych koalicji defensywnych w grafach. Zagadnienie przyciągnęło uwagę badaczy m.in. ze względu na możliwości zastosowania w dziedzinie społeczności sieciowych (ang. *web communities*) [20, 36], obliczeń odpornych na błędy (ang. *fault tolerant computing*) [53, 62], a także w zastosowaniach związanych z analizą skupień (ang. *data clustering*) [60].

Więcej wyników pojawiło się w artykule [29] a niedługo później pojawiło się wiele pokrewnych pojęć inspirowanych tą definicją. Wspomniane pojęcia to między innymi: *koalicja ofensywna* (ang. *offensive alliance*) [11, 56], *koalicja silna* (ang. *strong alliance*) [56] oraz *koalicja potężna* (ang. *powerful alliance*) [6]. Dodatkowo wszystkie wymienione pojęcia pojawiają się w badaniach w wersjach ważonych (z wagami na wierzchołkach) [37]. Oprócz tego wprowadzone zostały kolejne pokrewne pojęcia parametryzowane pojedynczą liczbą naturalną, przykładowo *k–ofensywna koalicja* (ang. *k–offensive alliance*) [11, 58, 59, 62, 64].

Podstawowe oraz ogólne własności koalicji defensywnych badane były w [21, 25, 26, 57]. W kolejnych pracach autorzy badali własności różnych modeli koalicji dla różnych klas grafów takich jak grafy gwieździste (ang. *star graphs*) [35], drzewa [2, 3, 9, 11, 12, 17, 27], grafy szeregowo–równoległe (ang. *series–parallel*) [16], grafy planarne [15, 55], grafy krawędziowe (ang. *line graphs*) [61], produkty kartezjańskie ścieżek i cykli [9]. Zagadnienia algorytmiczne poruszano w [1, 37, 63]. W [1] wykazano, że problemy poszukiwania najmniej licznej globalnej koalicji defensywnej, ofensywnej oraz potężnej są $\mathcal{NP}$–trudne. W [37] zaprezentowano algorytmy liniowe wyznaczające rozmiar najmniej licznych globalnych koalicji różnych typów w klasie drzew i grafach szeregowo–równoległych, a także algorytmy liniowe dla analogicznych problemów ważonych w ścieżkach. Badane były rów-

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

nież podziały zbioru wierzchołków grafu na rozłączne koalicje [17, 18, 60]. Artykuł [64] stanowi obszerne podsumowanie wyników uzyskanych przez różnych autorów.

W dalszej części pracy wprowadzone zostaną odmienne warianty oraz uogólnienia pojęcia koalicji defensywnej. Jednak charakter zmian i uogólnień będzie odmienny od tych, które wprowadzone zostały przy wprowadzaniu wymienionych istniejących pojęć pokrewnych. Jako, że to pojęcie koalicji defensywnej było inspiracją dla powstania niniejszej pracy, nie wprowadzimy pozostałych wymienionych wcześniej wariantów. Ograniczymy się do omówienia koalicji defensywnej wraz z jej podstawowymi własnościami.

Niech G będzie grafem oraz niech $S \subseteq \mathrm{V}(G)$. Jeżeli dla wierzchołka $v \in S$ zachodzi warunek $|\mathrm{N}_G[v] \cap S| \geq |\mathrm{N}_G[v] \setminus S|$, to mówimy, że dla wierzchołka v spełniony jest *warunek koalicyjności względem zbioru* S lub – jeśli nie prowadzi to do niejednoznaczności – mówimy, że spełnia *warunek koalicyjności*.

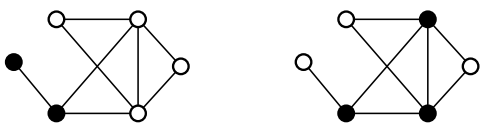
Definicja 2.1. Niech G będzie grafem. Niepusty zbiór $S \subseteq \mathrm{V}(G)$ nazywamy *koalicją defensywną* (ang. *defensive alliance*), jeżeli dla każdego wierzchołka $v \in S$ zachodzi:

$$|\mathrm{N}_G[v] \cap S| \geq |\mathrm{N}_G[v] \setminus S| \,.$$

Jeżeli dodatkowo zbiór S jest zbiorem dominującym w grafie G, to koalicję defensywną nazywamy *globalną*.

Wierzchołki należące do koalicji defensywnej nazywamy *wierzchołkami koalicyjnymi* koalicji defensywnej S lub po prostu *wierzchołkami koalicyjnymi*, jeśli pominięcie oznaczenia koalicji defensywnej nie prowadzi do niejednoznaczności. Wierzchołki należące do koalicji defensywnej możemy interpretować jako wierzchołki *broniące ataków* ze strony wierzchołków leżących poza koalicją defensywną, tzn. wierzchołków należących do zbioru $\mathrm{V}(G) \setminus S$.

Warto zwrócić uwagę, że spełnienie warunku koalicyjności przez wierzchołek zależy wyłącznie od jego bezpośredniego sąsiedztwa. W szczególności spełnienie warunku koalicyjności przez wierzchołek jednej składowej grafu jest niezależne od struktury grafu w pozostałych składowych spójności. Z racji tego zagadnienia i problemy dotyczące pojęcia koalicji defensywnej w grafach niespójnych można rozważać w sposób niezależny dla każdej składowej spójności. Analogiczna obserwacja dotyczyć będzie również modeli rozważanych w dalszej części pracy. Z tego względu skupimy się na wynikach dotyczących grafów spójnych.



Rys. 2.1: Przykład koalicji defensywnej (po lewej) oraz globalnej koalicji defensywnej (po prawej) w grafie. Wierzchołki koalicyjne zostały oznaczone kolorem czarnym.

Rysunek 2.1 przedstawia przykłady koalicji defensywnych. Po lewej stronie przedstawiona została koalicja defensywna w grafie. Wierzchołki koalicyjne zostały oznaczone kolorem czarnym. Każdy

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

czarny wierzchołek ma przynajmniej tylu sąsiadów, wliczając siebie samego, czarnych co białych. Po stronie prawej przedstawiliśmy globalną koalicję defensywną w grafie. Ponownie wierzchołki koalicyjne zostały oznaczone kolorem czarnym. Każdy czarny wierzchołek spełnia warunek koalicyjności. Dodatkowo zbiór czarnych wierzchołków jest zbiorem dominującym w przedstawionym grafie.

Definicja 2.2. Liczbę elementów najmniej licznej globalnej koalicji defensywnej w grafie G nazywamy *globalną liczbą koalicji defensywnej* i oznaczamy przez $\gamma_{\mathrm{a}}(G)$.

Niech G będzie grafem. Zauważmy, że jeżeli $S = \mathrm{V}(G)$, to zbiór S jest globalną koalicją defensywną a zatem wartość $\gamma_{\mathrm{a}}(G)$ jest dobrze określoną liczbą naturalną dla każdego grafu.

Twierdzenie 2.1. *Niech G będzie grafem oraz zbiory $S_1, S_2 \subseteq \mathrm{V}(G)$ będą koalicjami defensywnymi w grafie G. Wtedy zbiór $S = S_1 \cup S_2$ jest koalicją defensywną w grafie G. Dodatkowo, jeżeli przynajmniej jedna z koalicji defensywnych S_1, S_2 jest globalna, to zbiór S również jest koalicją defensywną globalną.*

Dowód. Weźmy dowolny wierzchołek $v \in S$. Wierzchołek v należy do przynajmniej jednej z koalicji defensywnych S_1, S_2. Załóżmy, że $v \in S_1$. Jako, że $S_1 \subseteq S$, to $|\mathrm{N}_G[v] \cap S| \geq |\mathrm{N}_G[v] \cap S_1|$ oraz $|\mathrm{N}_G[v] \setminus S_1| \geq |\mathrm{N}_G[v] \setminus S|$. Ponieważ zbiór S_1 jest koalicją defensywną, to $|\mathrm{N}_G[v] \cap S_1| \geq |\mathrm{N}_G[v] \setminus S_1|$. A zatem mamy: $|\mathrm{N}_G[v] \cap S| \geq |\mathrm{N}_G[v] \cap S_1| \geq |\mathrm{N}_G[v] \setminus S_1| \geq |\mathrm{N}_G[v] \setminus S|$. Dla wierzchołków należących do koalicji defensywnej S_2 rozumowanie jest analogiczne. Zatem z dowolności wyboru wierzchołka v mamy, że S jest koalicją defensywną.

Załóżmy bez straty ogólności, że zbiór S_1 jest globalną koalicją, czyli zbiór S_1 jest zbiorem dominującym. Z tego, że $S_1 \subseteq S$ mamy $\mathrm{V}(G) = \mathrm{N}_G[S_1] \subseteq \mathrm{N}_G[S]$, czyli $\mathrm{V}(G) = \mathrm{N}_G[S]$. Zatem zbiór S również jest zbiorem dominującym, czyli w konsekwencji globalną koalicją defensywną. □

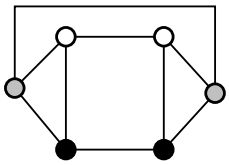
Proste rozumowanie indukcyjne prowadzi do następującego wniosku:

Wniosek 2.2. *Niech G będzie grafem i niech zbiory $S_1, \ldots, S_n \subseteq \mathrm{V}(G)$ będą koalicjami defensywnymi w grafie G, przy czym $n \geq 2$. Wtedy zbiór $S = \bigcup_{i=1}^{n} S_i$ jest koalicją defensywną. Dodatkowo, jeżeli przynajmniej jedna z koalicji defensywnych $S_1, S_2, \ldots, S_n$ jest globalna, to zbiór S również jest globalną koalicją defensywną.* □

W literaturze (np. [17]) rozważano podział zbioru wierzchołków grafu w taki sposób, by każdy zbiór podziału był globalną koalicją defensywną. O ile istnienie przynajmniej jednej globalnej koalicji defensywnej w grafie jest na podstawie powyższych rozumowań pewne, to współistnienie w grafie wielu rozłącznych globalnych koalicji defensywnych nie jest oczywiste. Dla przykładu dla każdej liczby naturalnej $k \geq 2$ w gwieździe S_k nie istnieją dwie rozłączne, globalne koalicje defensywne.

Definicja 2.3. Liczność najliczniejszego podziału zbioru wierzchołków grafu na rozłączne, niepuste zbiory takie, że każdy zbiór tego podziału jest globalną koalicją defensywną nazywamy *liczbą podziału na globalne koalicje defensywne.*

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl



Rys. 2.2: Podział grafu na trzy globalne koalicje defensywne

Na rysunku 2.2 przedstawiony został graf, którego zbiór wierzchołków został podzielony na trzy partycje oznaczone odpowiednio kolorami: białym, szarym oraz czarnym. Zauważmy, że graf jest kubiczny, czyli każdy wierzchołek ma trzech sąsiadów. Dla każdego wierzchołka jeden z jego sąsiadów ma taki sam kolor, co zapewnia warunek koalicyjności. Łatwo sprawdzić, że każda z partycji jest też zbiorem dominującym. Zatem każda partycja jest globalną koalicją defensywną. Wiemy już, że liczba podziału na globalne koalicje defensywne jest nie mniejsza niż trzy. Zauważmy, że żaden jednowierzchołkowy zbiór nie może być koalicją defensywną, ponieważ każdy wierzchołek ma trzech sąsiadów. Zatem każda koalicja defensywna musi mieć przynajmniej dwa wierzchołki. Rysunek wskazuje podział zbioru wierzchołków na dwuwierzchołkowe partycje, czyli jest to podział na największą możliwą liczbę partycji będących globalnymi koalicjami defensywnymi. Zatem liczba podziału na globalne koalicje defensywne tego grafu jest równa trzy.

Lemat 2.3. *Niech G będzie grafem i niech zbiór $S \subseteq \mathrm{V}(G)$. Jeżeli wierzchołek $v \in S$ jest wierzchołkiem stopnia 1, to spełniony jest dla niego warunek koalicyjności, czyli $|\mathrm{N}_G[v] \cap S| \geq |\mathrm{N}_G[v] \setminus S|$.*

Dowód. Niech v będzie wierzchołkiem stopnia 1. Wtedy $\mathrm{N}_G[v] = \{v, u\}$ dla pewnego wierzchołka $u \in \mathrm{V}(G)$. Jeżeli $u \in S$ to $|\mathrm{N}_G[v] \cap S| = 2 \geq 0 = |\mathrm{N}_G[v] \setminus S|$. Jeżeli natomiast $u \notin S$ to $|\mathrm{N}_G[v] \cap S| = 1 = |\mathrm{N}_G[v] \setminus S|$. □

Lemat 2.4. *Niech G będzie grafem i $S \subseteq \mathrm{V}(G)$ będzie koalicją defensywną. Wtedy dla każdego wierzchołka $v \in S$ zachodzi $|\mathrm{N}_G[v] \cap S| \geq \lceil \frac{\deg_G(v)+1}{2} \rceil$ oraz $|\mathrm{N}_G[v] \setminus S| \leq \lfloor \frac{\deg_G(v)+1}{2} \rfloor$.*

Dowód. Załóżmy przeciwnie, że $|\mathrm{N}_G[v] \cap S| < \lceil \frac{\deg_G(v)+1}{2} \rceil$. Ponieważ $|\mathrm{N}_G[v] \cap S| + |\mathrm{N}_G[v] \setminus S| = \deg_G(v) + 1$, zatem $|\mathrm{N}_G[v] \setminus S| > \deg_G(v) + 1 - \lceil \frac{\deg_G(v)+1}{2} \rceil = \lfloor \frac{\deg_G(v)+1}{2} \rfloor$. Czyli $|\mathrm{N}_G[v] \setminus S| \geq \lfloor \frac{\deg_G(v)+1}{2} \rfloor + 1 \geq \lceil \frac{\deg_G(v)+1}{2} \rceil$. Stąd $|\mathrm{N}_G[v] \setminus S| > |\mathrm{N}_G[v] \cap S|$. Czyli wierzchołek v nie spełnia warunku koalicyjności co stoi w sprzeczności z tym, że $v \in S$, gdzie zbiór S jest koalicją defensywną. Oczywiście $|\mathrm{N}_G[v] \setminus S| = |\mathrm{N}_G[v]| - |\mathrm{N}_G[v] \cap S| \leq \lfloor \frac{\deg_G(v)+1}{2} \rfloor$ □

W artykule [19] jako obserwację podano fakt dotyczący podziału na zbiory dominujące:

Stwierdzenie 2.5. *[19] Niech G będzie grafem. Zbiór wierzchołków grafu G można podzielić na co najwyżej $\delta(G) + 1$ rozłącznych zbiorów dominujących.*

Dowód. Wierzchołek $u \in \mathrm{V}(G)$ stopnia $\delta(G)$ musi być zdominowany przez wszystkie zbiory dominujące podziału, zatem wśród swoich sąsiadów musi mieć wierzchołki każdego z nich. W takim

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

razie jest ich co najwyżej $\delta(G)$. Wierzchołek u może być w innym zbiorze dominującym niż każdy z jego sąsiadów, co w efekcie daje razem ograniczenie górne równe $\delta(G)+1$. □

Zauważmy, że ograniczenie górne zaproponowane w stwierdzeniu 2.5 jest realizowane w klasie grafów pełnych. Dla dowolnej liczby naturalnej $n \geq 1$ mamy $\delta(K_n) = n-1$. Dowolny wierzchołek grafu pełnego dominuje cały graf, zatem każdy z n wierzchołków definiuje jednoelementowy zbiór dominujący. Dla globalnych koalicji defensywnych warunek ze stwierdzenia 2.5 można wzmocnić:

Stwierdzenie 2.6. *Niech G będzie grafem. Liczba podziału na globalne koalicje defensywne jest nie większa niż $\lfloor \frac{\delta(G)+1}{2} \rfloor + 1$.*

Dowód. Niech $v \in \mathrm{V}(G)$ będzie wierzchołkiem stopnia $\delta(G)$ i należy do globalnej koalicji defensywnej S. Zgodnie z lematem 2.4 zachodzi $|\mathrm{N}_G[v] \cap S| \geq \lceil \frac{\deg_G(v)+1}{2} \rceil$, a stąd $|\mathrm{N}_G[v] \setminus S| \leq \lfloor \frac{\deg_G(v)+1}{2} \rfloor$. Wierzchołek v musi być zdominowany przez wierzchołki z pozostałych koalicji defensywnych, których może być w jego sąsiedztwie co najwyżej $\lfloor \frac{\deg_G(v)+1}{2} \rfloor = \lfloor \frac{\delta(G)+1}{2} \rfloor$. Wliczając koalicję defensywną do której należy wierzchołek v może być ich co najwyżej $\lfloor \frac{\delta(G)+1}{2} \rfloor + 1$. □

Wniosek 2.7. *Jeżeli w grafie istnieje wierzchołek stopnia* 1*, to liczba podziału na globalne koalicje defensywne jest równa* 1 *lub* 2*.*

Dowód. Wynika to bezpośrednio z zastosowania stwierdzenia 2.6 dla grafów o najniższym stopniu wierzchołka równym 1. □

Wniosek 2.8. *Jeżeli T jest drzewem, to liczba podziału na globalne koalicje jest równa* 1 *lub* 2*.*

Dowód. Jeżeli drzewo T jest pojedynczym wierzchołkiem, to teza jest oczywista. Jeżeli stopień drzewa $\mathrm{n}(T) \geq 2$, to na mocy lematu 1.7 wiemy, że istnieje w tym drzewie wierzchołek będący liściem (tzn. wierzchołek stopnia 1). Korzystając z wniosku 2.7 uzyskujemy tezę. □

Dolne ograniczenie na rozmiar globalnej koalicji defensywnej w grafie zostało zbadane w [25].

Twierdzenie 2.9. *[25] Dla dowolnego grafu G zachodzi $\gamma_{\mathrm{a}}(G) \geq \frac{\sqrt{4\,\mathrm{n}(G)+1}-1}{2}$.* □

Kolejne oszacowania dolne oraz oszacowania górne na rozmiar najmniejszej globalnej koalicji defensywnej również pojawiły się w [25].

Twierdzenie 2.10. *[25] Niech G będzie grafem. Wtedy $\gamma_{\mathrm{a}}(G) \geq \frac{2\,\mathrm{n}(G)}{\Delta(G)+3}$.* □

Twierdzenie 2.11. *[25] Niech graf T będzie drzewem. Wtedy $\gamma_{\mathrm{a}}(T) \geq \frac{\mathrm{n}(T)+2}{4}$.* □

Twierdzenie 2.12. *[25] Niech G będzie grafem kubicznym lub 4–regularnym. Wtedy $\gamma_{\mathrm{a}}(G) \geq \mathrm{n}(G)/3$.* □

Twierdzenie 2.13. *[25] Niech G będzie grafem bez izolowanych wierzchołków. Wtedy $\gamma_{\mathrm{a}}(G) \leq \mathrm{n}(G) - \lceil \delta(G)/2 \rceil$.* □

Twierdzenie 2.14. *[25] Niech graf T będzie drzewem rzędu $\mathrm{n}(T) \geq 4$. Wtedy $\gamma_{\mathrm{a}}(T) \leq 3\,\mathrm{n}(G)/5$.* □

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

2.2 Zbiory bezpieczne w grafach

Zbiory bezpieczne w teorii grafów zostały zapoczątkowane w artykule [5]. Dalsze badania prowadzone były w [34, 39, 40]. Koncepcja zbioru bezpiecznego jest podobna do koncepcji koalicji defensywnej, jednak konieczny do spełnienia warunek jest bardziej restrykcyjny. W przypadku koalicji defensywnych mówimy o spełnianiu warunku koalicyjności przez jej wierzchołki. Taki warunek możemy interpretować jako zdolność do *obrony* danego wierzchołka wystawionego na *atak* ze strony jego sąsiadów spoza koalicji defensywnej. Pojęcie zbioru bezpiecznego w naturalny sposób modyfikuje pojęcie koalicji defensywnej rozszerzając wymaganie obrony z pojedynczych wierzchołków do dowolnych podzbiorów.

Wprowadzimy teraz definicję zbioru bezpiecznego a następnie przytoczymy warunki równoważne spotykane w literaturze, które ukażą pokrewieństwo pojęcia zbioru bezpiecznego do koalicji defensywnej. Autorzy [5] proponują następującą definicję zbioru bezpiecznego poprzez pojęcia odpowiednio zdefiniowanych ataku i obrony.

Definicja 2.4 (Zbiór bezpieczny)**.** Niech G będzie grafem oraz niech zbiór $S \subseteq \mathrm{V}(G)$ będzie zbiorem k–elementowym. Przyjmiemy też następujące oznaczenie wierzchołków zbioru S jako $\{s_1, s_2, \ldots, s_k\}$.

1. *Atakiem* na zbiór S nazywamy dowolną k–elementową rodziną zbiorów $\mathcal{A}$, której elementami są parami rozłączne zbiory $A_1, A_2, \ldots, A_k$, dla których zachodzi $A_i \subseteq \mathrm{N}_G[s_i] \setminus S$, każdego $i \in \{1 \ldots k\}$.
2. *Obroną* zbioru S nazywamy k–elementową rodzinę zbiorów $\mathcal{D}$, której elementami są parami rozłączne zbiory $D_1, D_2, \ldots, D_k$, dla których zachodzi $D_i \subseteq \mathrm{N}_G[s_i] \cap S$, dla każdego $i \in \{1 \ldots k\}$.
3. Atak $\mathcal{A}$ na zbiór S można *odeprzeć* (powiemy też *obronić*), jeżeli istnieje obrona $\mathcal{D}$ zbioru S taka, że dla każdego $i \in \{1, \ldots, k\}$ zachodzi $|D_i| \geq |A_i|$.
4. Zbiór S nazywamy *zbiorem bezpiecznym*, jeżeli każdy atak na zbiór S da się odeprzeć.
5. Zbiór $X \subseteq S$ nazywamy *zbiorem S–bezpiecznym*, jeżeli każdy atak na zbiór S, taki że $A_i = \emptyset$ dla każdego $s_i \notin X$, można obronić.
6. Jeżeli zbiór S jest jednocześnie zbiorem bezpiecznym i dominującym to nazywamy go *globalnym zbiorem bezpiecznym.*

W artykule [5] analizowane są podstawowe własności zbiorów bezpiecznych. Zostało tam przedstawione, między innymi, twierdzenie charakteryzujące pojęcie zbioru bezpiecznego, które umożliwia pominięcie pomocniczych pojęć ataku i obrony. Twierdzenie to dostarcza alternatywnego warunku pozwalającego weryfikować bezpieczeństwo zbioru.

Twierdzenie 2.15. *[5] Niech G będzie grafem. Zbiór $S \subseteq \mathrm{V}(G)$ jest bezpieczny wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego zbioru $X \subseteq S$ zachodzi $|\mathrm{N}_G[X] \cap S| \geq |\mathrm{N}_G[X] \setminus S|$.* □

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

Niech G będzie grafem oraz niech zbiór $S \subseteq \mathrm{V}(G)$. Mówimy, że zbiór $X \subseteq S$ spełnia *warunek bezpieczeństwa (względem zbioru S)*, jeżeli zachodzi warunek $|\mathrm{N}_G[X] \cap S| \geq |\mathrm{N}_G[X] \setminus S|$.

Warto zwrócić uwagę na podobieństwo charakteryzacji w twierdzeniu 2.15 do definicji koalicji defensywnej. Przypomnijmy, że w przypadku koalicji defensywnej warunek koalicyjności dotyczył pojedynczych wierzchołków. W przypadku pojęcia zbioru bezpiecznego warunek bezpieczeństwa dotyczy każdego podzbioru. Łatwo zatem o następujący wniosek.

Wniosek 2.16. *Niech G będzie grafem oraz niech zbiór $S \subseteq \mathrm{V}(G)$ będzie zbiorem bezpiecznym. Wtedy zbiór S jest koalicją defensywną w grafie G. Dodatkowo jeżeli S jest globalnym zbiorem bezpiecznym to jest również globalną koalicją defensywną.* □

Twierdzenie 2.17. *Niech G będzie grafem i niech zbiór $S \subseteq \mathrm{V}(G)$ będzie globalnym zbiorem bezpiecznym w grafie G. Wtedy $|S| \geq \mathrm{n}(G)/2$.*

Dowód. Zgodnie z twierdzeniem charakteryzującym zbiory bezpieczne 2.15 zachodzi, między innymi, $|\mathrm{N}_G[S] \cap S| \geq |\mathrm{N}_G[S] \setminus S|$. Zbiór S jest zbiorem dominującym, zatem $\mathrm{N}_G[S] = \mathrm{V}(G)$. Otrzymujemy $|\mathrm{V}(G) \cap S| \geq |\mathrm{V}(G) \setminus S|$. Czyli $|S| \geq \mathrm{n}(G) - |S|$. Po przekształceniu $|S| \geq \mathrm{n}(G)/2$. □

2.3 Modele struktur defensywnych

Do tej pory przywołaliśmy dwie pokrewne definicje, które swoim nazewnictwem sugerują kontekst bezpieczeństwa – mianowicie koalicje defensywne oraz zbiory bezpieczne. Omówimy teraz zagadnienie modelowania sytuacji konfliktowych przy użyciu grafów. Najpierw uzasadnimy dlaczego teoria grafów stanowi wygodne narzędzie pozwalające reprezentować konflikty. Określimy między innymi uniwersalny predykat pozwalający ocenić zdolność podstruktury grafu do obrony. Następnie pokażemy ogólną definicję struktury defensywnej opartą o uniwersalny predykat. Pokażemy również w jaki sposób dyskutowane wcześniej pojęcia są zgodne z nowym punktem widzenia.

Modelowanie sytuacji konfliktowych przy użyciu grafów

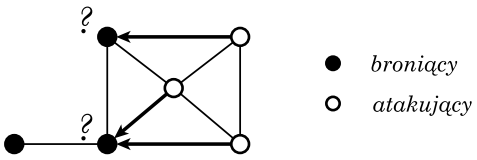
W rozważanym przez nas kontekście wykorzystujemy graf jako model reprezentujący środowisko składające się z jednorodnych elementów oraz zachodzących między nimi powiązań. Przykładowo za pomocą grafu możemy modelować zależności pojawiające się na mapie świata. Wierzchołkami grafu mogą być państwa, natomiast zależności między państwami zależą od specyfiki modelu. Połączenia w grafie mogą wtedy reprezentować istnienie wspólnej granicy, paktu o nieagresji, umowy handlowej itp.

Przechodząc do ogólnego zagadnienia konfliktu, skupimy się na istnieniu pewnej grupy broniącej pewnego interesu. Pozostałe elementy traktujemy jako neutralne lub negatywnie nastawione do wspomnianego interesu. Skupiając się na wariancie pesymistycznym, rozważymy elementy neutralne jako potencjalnie negatywnie nastawione. Bezpośrednie powiązania dają możliwość wzajemnego wsparcia (w przypadku powiązania w obrębie grupy) lub stanowią ryzyko ataku (w przypadku

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

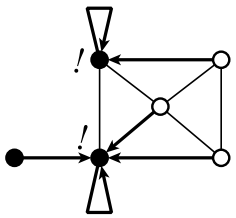
powiązania pomiędzy elementem grupy a elementem spoza grupy). To znaczy, że elementy grupy broniącej mogą zostać zaatakowane przez elementy spoza grupy, ale jednocześnie mogą liczyć na pomoc w obrębie elementów należących do grupy.

Reprezentując omawianą sytuację przy pomocy grafu przyjmiemy tymczasową konwencję, zgodnie z którą grupa broniąca interesu zostanie oznaczona wierzchołkami czarnymi. Pozostałe wierzchołki zostaną oznaczone kolorem białym. Rysunek 2.3 prezentuje przykładowy układ ataku. Każdy atakujący (biały) wierzchołek wybrał swój cel, który zobrazowany jest odpowiednio skierowaną strzałką. Znaki zapytania zostały umieszczone przy zaatakowanych czarnych wierzchołkach. Dla takich wierzchołków potrzebujemy sposobu obrony. Zauważmy, że jedyną informacją jaką mamy do dyspozycji w przypadku grafu, jest struktura połączeń. Jeżeli wierzchołek grafu miałby mieć możliwość obrony, która nie byłaby samodzielna, to może skorzystać z pomocy innych wierzchołków, na przykład sąsiadujących, lub znajdujących się w pewnej zadanej odległości.



Rys. 2.3: Przykładowa sytuacja konfliktowa modelowana przez graf, w którym strzałki prowadzone wzdłuż krawędzi oznaczają kierunek ataku.

Naturalnym jest przyjęcie, że czarny wierzchołek z rysunku 2.3, który jest atakowany przez dwa białe wierzchołki, nie jest w stanie odeprzeć ataku samodzielnie. Rysunek 2.4 przedstawia potencjalne rozwiązanie tego problemu. Strzałki pomiędzy czarnymi wierzchołkami określają kierunek niesionej pomocy, to znaczy każdy czarny wierzchołek pomaga w obronie wierzchołkowi znajdującemu się na końcu wychodzącej z niego strzałki. W tym przypadku pętle oznaczają, że wierzchołek niesie pomoc sam sobie.



Rys. 2.4: Pomoc może pochodzić z sąsiedztwa.

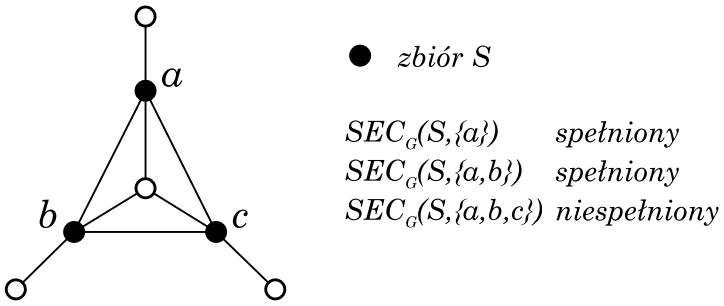
Bazując na poczynionej obserwacji dotyczącej potencjalnej pomocy pochodzącej z sąsiedztwa zdefiniujemy teraz uniwersalny predykat określający czy pewien podzbiór grupy wierzchołków broniących jest *zabezpieczony*.

Definicja 2.5. Niech G będzie grafem oraz $S \subseteq \mathrm{V}(G)$. Definiujemy dla każdego $X \subseteq S$:

$$\mathrm{SEC}_G(S, X) \iff |\mathrm{N}_G[X] \cap S| \geq |\mathrm{N}_G[X] \setminus S| \,.$$

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

Zobrazowaliśmy powyższą definicję na rysunku 2.5. Wierzchołki czarne stanowią zbiór S. Ze względu na symetrię tego grafu rozpatrzone zostały wszystkie podzbiory zbioru S i określona została dla nich wartość logiczna predykatu SEC. W istocie zachodzi również nie opisane na rysunku $\mathrm{SEC}_G(S, \{b\})$, $\mathrm{SEC}_G(S, \{c\})$, $\mathrm{SEC}_G(S, \{a, c\})$ oraz $\mathrm{SEC}_G(S, \{b, c\})$.



Rys. 2.5: Przykład dla predykatu SEC.

W dalszej części pracy na rysunkach dopuścimy notację uproszczoną postaci $\mathrm{SEC}(A)$, czyli z pominięciem wskazania grafu G i zbioru S. W przypadku rysunku przyjmiemy, że grafem G jest graf na rysunku a zbiorem S jest pewien wyróżniony (np. wierzchołkami czarnymi) zbiór wierzchołków. Dodatkowo jeżeli zbiór A jest jednoelementowym zbiorem postaci $\{v\}$, to zamiast $\mathrm{SEC}_G(S, \{v\})$ będziemy korzystać z notacji $\mathrm{SEC}_G(S, v)$. Będziemy również mówili, że dla grafu G i zbioru S zbiór $A \subseteq S$ *spełnia warunek bezpieczeństwa w sensie predykatu* SEC mając na myśli, że zachodzi $\mathrm{SEC}_G(S, A)$.

Zauważmy, że kiedy grupa broniąca stanowi wszystkie wierzchołki grafu (tzn. nie ma atakujących), to predykat jest spełniony niezależnie od zbioru, którego bezpieczeństwo badamy.

Stwierdzenie 2.18. *Niech G będzie grafem. Dla każdego $X \subseteq \mathrm{V}(G)$ zachodzi* $\mathrm{SEC}_G(\mathrm{V}(G), X)$.

Dowód. Wystarczy zauważyć, że $|\mathrm{N}_G[X] \setminus \mathrm{V}(G)| = 0$. Zatem nierówność definiująca predykat SEC jest zawsze spełniona. □

2.3.1 Ogólna definicja struktury defensywnej

Korzystając z predykatu SEC możemy w ogólny sposób zdefiniować *strukturę defensywną*. W ten sposób modelować będziemy bezpieczeństwo tej struktury. Podążymy za intuicją, zgodnie z którą struktura jest bezpieczna, jeśli bezpieczne są jej wybrane kluczowe podstruktury. Przykładowo bezpieczeństwo militarne kraju można oprzeć na bezpieczeństwie krytycznych jednostek wojskowych znajdujących się na jego terenie.

Definicja 2.6. Niech G będzie grafem, $S \subseteq \mathrm{V}(G)$ oraz $\mathcal{A}$ taką rodziną rodzin zbiorów, że dla każdej rodziny $A \in \mathcal{A}$ mamy $A \neq \emptyset$ oraz $A \subseteq 2^S$. Mówimy, że zbiór S jest $\mathcal{A}$–bezpieczny, jeżeli dla każdej rodziny $A \in \mathcal{A}$ istnieje zbiór $X \in A$, że zachodzi $\mathrm{SEC}_G(S, X)$. Dodatkowo mówimy, że zbiór S jest *globalny*, jeżeli jest zbiorem dominującym.

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

Intuicyjnie $\mathcal{A}$–bezpieczeństwo zbioru S oznacza, że wyróżniamy pewne jego grupy podstruktur i żądamy, aby w każdej z grup istniał choć jeden zabezpieczony zbiór (tzn. taki, dla którego prawdziwy jest predykat SEC).

Definicja 2.7. Niech G będzie grafem. Przekształcenie $\mathcal{S}_G \colon 2^{\mathrm{V}(G)} \setminus \{\emptyset\} \mapsto 2^{2^{\mathrm{V}(G)}}$ takie, że dla każdego niepustego $S \subseteq \mathrm{V}(G)$ mamy $\mathcal{S}_G(S) \neq \emptyset$ oraz $\mathcal{S}_G(S) \subseteq 2^S$, nazywamy *generatorem struktur krytycznych*. Wartości przekształcenia $\mathcal{S}_G$ nazywamy *zbiorami wymagań* lub po prostu *wymaganiami*.

Każdy generator struktur krytycznych definiuje pewien *model struktury defensywnej* w sensie następującej definicji:

Definicja 2.8. Niech G będzie grafem oraz $\mathcal{S}_G$ będzie generatorem struktur krytycznych. Model, w którym badamy $\mathcal{A}$–bezpieczeństwo niepustych zbiorów $S \subseteq \mathrm{V}(G)$, gdzie $\mathcal{A} = \mathcal{S}_G(S)$ nazywamy modelem *struktur defensywnych zadanych przez generator* $\mathcal{S}_G$ lub modelem *struktur defensywnych typu* $\mathcal{S}_G$. Jeżeli dodatkowo wymagamy, żeby zbiór S był zbiorem dominującym (tzn. w modelu badamy globalne $\mathcal{A}$–bezpieczeństwo), to model struktury defensywnej nazywamy modelem *globalnych struktur defensywnych zadanych przez generator* $\mathcal{S}_G$ lub modelem *globalnych struktur defensywnych typu* $\mathcal{S}_G$.

Modele struktur defensywnych generowanych przez generatory struktur krytycznych nazywamy zbiorczo modelami *(globalnych) struktur defensywnych*. Niech G będzie grafem, $\mathcal{S}_G$ generatorem struktur krytycznych oraz $S \subseteq \mathrm{V}(G)$. Jeżeli zbiór S jest $\mathcal{S}_G(S)$–bezpieczny, to mówimy, że jest *strukturą defensywną typu* $\mathcal{S}_G$ lub *strukturą defensywną*. Dodatkowo jeżeli zbiór S jest zbiorem dominującym, to mówimy, że jest *globalną strukturą defensywną typu* $\mathcal{S}_G$ lub *globalną strukturą defensywną*.

Niech G będzie grafem. Zdefiniujemy teraz przykładowe generatory struktur krytycznych $\mathcal{S}^0_G$, $\mathcal{S}^a_G$, $\mathcal{S}^s_G$. Dla każdego $S \subseteq \mathrm{V}(G)$ definiujemy:

- $\mathcal{S}^0_G(S) = \emptyset$ (nie wymagamy zabezpieczenia żadnej struktury zbioru S),
- $\mathcal{S}^a_G(S) = \{\{\{v\}\} \colon v \in S\}$ (wymagamy bezpieczeństwa wszystkich wierzchołków zbioru S),
- $\mathcal{S}^s_G(S) = \{\{X\} \colon X \subseteq S, X \neq \emptyset\}$ (wymagamy bezpieczeństwa wszystkich podzbiorów zbioru S).

Stwierdzenie 2.19. *Niech G będzie grafem oraz niech $D \subseteq \mathrm{V}(G)$ będzie zbiorem dominującym. Wtedy D jest globalną strukturą defensywną typu $\mathcal{S}^0_G$.* □

Stwierdzenie 2.20. *Niech G będzie grafem i niech $\mathcal{S}_G$ będzie generatorem struktur krytycznych. Wtedy zbiór $\mathrm{V}(G)$ jest globalną strukturą defensywną typu $\mathcal{S}_G$.* □

Stwierdzenie 2.21. *Niech G będzie grafem oraz niech $S \subseteq \mathrm{V}(G)$ będzie (globalną) koalicją defensywną. Wtedy zbiór S jest (globalną) strukturą defensywną typu $\mathcal{S}^a_G(S)$.*

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

Dowód. Definicja generatora struktur krytycznych $\mathcal{S}_G^a$ jest alternatywnym zapisem klasycznej definicji koalicji defensywnej w grafie. To znaczy dla każdego zbioru S badamy $\mathcal{A}$–bezpieczeństwo dla rodziny $\mathcal{A}$, która wymaga zabezpieczenia (w sensie predykatu SEC) każdego wierzchołka zbioru S. □

Stwierdzenie 2.22. *Niech G będzie grafem oraz niech $S \subseteq \mathrm{V}(G)$ będzie (globalnym) zbiorem bezpiecznym. Wtedy zbiór S jest (globalną) strukturą defensywną typu $\mathcal{S}_G^s(S)$.*

Dowód. Podobnie jak w przypadku koalicji defensywnych, definicja generatora struktur krytycznych $\mathcal{S}_G^s$ jest alternatywnym zapisem warunku przedstawionego w twierdzeniu 2.15 charakteryzującym zbiory bezpieczne. To znaczy dla każdego zbioru S badamy $\mathcal{A}$–bezpieczeństwo dla rodziny $\mathcal{A}$, która wymaga zabezpieczenia (w sensie predykatu SEC) każdego niepustego podzbioru zbioru wierzchołków S. □

Widzimy, że wprowadzona ogólna definicja struktury defensywnej w uniwersalny sposób obejmuje rozważane dotychczas w niniejszej pracy modele. W takim ujęciu narzuca się spostrzeżenie, że zbiory dominujące (stwierdzenie 2.19) są najmniej restrykcyjnymi strukturami defensywnymi (generator struktur krytycznych $\mathcal{S}_G^0$ dla każdego argumentu generuje pusty zbiór wymagań). Koalicja defensywna jest bardziej restrykcyjna (stwierdzenie 2.21). Dla każdego argumentu generator struktur krytycznych $\mathcal{S}_G^a$ definiuje zbiór wymagań wymuszający zabezpieczenie wszystkich wierzchołków. Nie jest to jednak bardzo restrykcyjne wymaganie, ponieważ nie jest wymagana zdolność do obrony przed atakami na wiele wierzchołków na raz. Zbiory bezpieczne stawiają najbardziej rygorystyczne wymaganie (stwierdzenie 2.22). Generator struktur krytycznych $\mathcal{S}_G^s$ generuje, dla każdego argumentu, zbiór wymagań wymuszający zabezpieczenie (w sensie predykatu SEC) wszystkich podzbiorów.

Relacje między modelami struktur defensywnych

Sformalizujemy teraz poczynione obserwacje dotyczące restrykcyjności modeli struktur defensywnych poprzez wprowadzenie relacji między modelami struktur defensywnych.

Definicja 2.9. Niech G będzie grafem oraz $\mathcal{S}_G$, $\mathcal{R}_G$ będą generatorami struktur krytycznych. Powiemy, że model struktur defensywnych typu $\mathcal{R}_G$ jest *nie mniej restrykcyjny* od modelu struktur defensywnych $\mathcal{S}_G$, wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego zbioru $S \subseteq \mathrm{V}(G)$, jeżeli zbiór S jest strukturą bezpieczną typu $\mathcal{R}_G$, to jest też strukturą bezpieczną typu $\mathcal{S}_G$. Tak zdefiniowaną relację oznaczamy $\mathcal{S}_G \preccurlyeq \mathcal{R}_G$ i nazywamy *relacją restrykcyjności modeli struktur defensywnych.*

Pokażemy, że tak zdefiniowana relacja jest praporządkiem (czyli relacją zwrotną i przechodnią).

Stwierdzenie 2.23. *Niech G będzie grafem i niech Ω będzie rodziną wszystkich generatorów struktur krytycznych dla grafu G. Relacja restrykcyjności modeli struktur defensywnych $\preccurlyeq$ jest praporządkiem w rodzinie modeli Ω', gdzie Ω' jest rodziną modeli określonych przez generatory struktur krytycznych rodziny Ω.*

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

Dowód. Relacja $\preccurlyeq$ jest oczywiście zwrotna. Niech teraz $\mathcal{S}_G, \mathcal{R}_G, \mathcal{P}_G \in \Omega$ takie, że $\mathcal{S}_G \preccurlyeq \mathcal{R}_G$ oraz $\mathcal{R}_G \preccurlyeq \mathcal{P}_G$. Weźmy dowolny $S \subseteq G$, taki że S jest strukturą bezpieczną typu $\mathcal{P}_G$. Wtedy na mocy $\mathcal{R}_G \preccurlyeq \mathcal{P}_G$ zbiór S jest strukturą bezpieczną typu $\mathcal{R}_G$. Zatem na mocy $\mathcal{S}_G \preccurlyeq \mathcal{R}_G$ zbiór S jest strukturą bezpieczną $\mathcal{S}_G$. Czyli $\mathcal{S}_G \preccurlyeq \mathcal{P}_G$, zatem relacja $\preccurlyeq$ jest przechodnia. □

Lemat 2.24. *Niech G będzie grafem, $S \subseteq \mathrm{V}(G)$ oraz rodziny zbiorów $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ będą takie, że dla każdego $A \in \mathcal{A}$ mamy $A \neq \emptyset$ oraz $A \subseteq 2^S$, a także dla każdego $B \in \mathcal{B}$ mamy $B \neq \emptyset$ oraz $B \subseteq 2^S$. Niech dodatkowo $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$. Wtedy jeżeli zbiór S jest (globalnym) zbiorem $\mathcal{B}$–bezpiecznym, to jest również (globalnym) zbiorem $\mathcal{A}$–bezpiecznym.*

Dowód. Niech $A \in \mathcal{A}$. Wtedy $A \in \mathcal{B}$, skąd wobec założenia, że zbiór S jest (globalnym) zbiorem $\mathcal{B}$–bezpiecznym spełniony jest predykat $\mathrm{SEC}_G(S, X)$ dla pewnego $X \in A$. Zatem zbiór S jest (globalnym) zbiorem $\mathcal{A}$–bezpiecznym. □

Wniosek 2.25. *Niech G będzie grafem i niech $\mathcal{S}_G, \mathcal{R}_G$ będą generatorami struktur krytycznych. Jeżeli dla każdego $S \subseteq \mathrm{V}(G)$ zachodzi $\mathcal{S}_G(S) \subseteq \mathcal{R}_G(S)$, to $\mathcal{S}_G \preccurlyeq \mathcal{R}_G$.* □

Uogólnimy teraz lemat 2.24.

Twierdzenie 2.26. *Niech G będzie grafem, $S \subseteq \mathrm{V}(G)$ oraz rodziny zbiorów $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ będą takie, że dla każdego $A \in \mathcal{A}$ mamy $A \neq \emptyset$ oraz $A \subseteq 2^S$ a także dla każdego $B \in \mathcal{B}$ mamy $B \neq \emptyset$ oraz $B \subseteq 2^S$. Niech dodatkowo dla każdego zbioru $A \in \mathcal{A}$ istnieje taki zbiór $B \in \mathcal{B}$, że $B \subseteq A$. Wtedy jeżeli zbiór S jest (globalnym) zbiorem $\mathcal{B}$–bezpiecznym, to jest również (globalnym) zbiorem $\mathcal{A}$–bezpiecznym.*

Dowód. Dla dowolnego zbioru $A \in \mathcal{A}$ istnieje zbiór $B \in \mathcal{B}$, taki że $B \subseteq A$. Ponieważ zbiór S jest (globalnym) zbiorem $\mathcal{B}$–bezpiecznym, to istnieje zbiór $X \in B$, dla którego zachodzi $\mathrm{SEC}_G(S, X)$. Jako, że $B \subseteq A$, to $X \in A$. Zatem zbiór S jest (globalnym) zbiorem $\mathcal{A}$–bezpiecznym. □

Wniosek 2.27. *Niech G będzie grafem i niech $\mathcal{S}_G, \mathcal{R}_G$ będą generatorami struktur krytycznych. Jeżeli dla każdego $S \subseteq \mathrm{V}(G)$ i dla każdej rodziny $A \in \mathcal{S}_G(S)$ istnieje rodzina $B \in \mathcal{R}_G(S)$, taka że $B \subseteq A$, to $\mathcal{S}_G \preccurlyeq \mathcal{R}_G$.* □

Korzystając z porządku (def. 2.9) między modelami struktur defensywnych możemy rozważać ich hierarchię i wzajemne relacje. Wnioski 2.25 oraz 2.27 pomogą wskazać niektóre zależności. Dla zobrazowania dyskutowanej hierarchii wprowadzimy dodatkowe modele.

Niech G będzie grafem. Definiujemy generatory struktur krytycznych $\mathcal{S}^1_G$, $\mathcal{S}^{ds}_G$, $\mathcal{S}^{ea}_G$, $\mathcal{S}^{c}_G$. Dla każdego $S \subseteq \mathrm{V}(G)$:

- $\mathcal{S}^1_G(S) = \{\{X \colon X \subseteq S, X \neq \emptyset\}\}$ (wymagamy bezpieczeństwa dowolnego podzbioru zbioru S),
- $\mathcal{S}^v_G(S) = \{\{\{v\} \colon v \in S\}\}$ (wymagamy bezpieczeństwa dowolnego wierzchołka zbioru S),
- $\mathcal{S}^{ds}_G(S) = \{A_v \colon v \in S\}$, gdzie $A_v = \{\{v\}\} \cup \{\{v, u\} \colon u \in S, \{v, u\} \in \mathrm{E}(G)\}$ dla $v \in S$ (wymagamy bezpieczeństwa dla każdego wierzchołka zbioru S lub co najmniej jednej krawędzi w zbiorze S krawędzi do której należy ten wierzchołek),

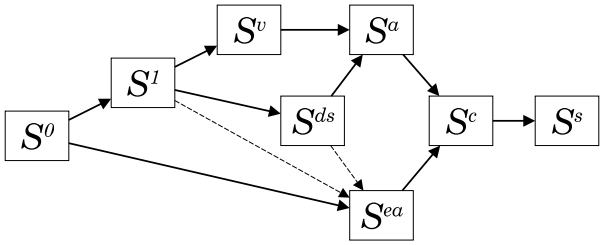
MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

- $\mathcal{S}^{ea}_G(S) = \{\{e\} \colon e \in \mathrm{E}(G[S])\}$ (wymagamy bezpieczeństwa wszystkich krawędzi w zbiorze S),
- $\mathcal{S}^{c}_G(S) = \mathcal{S}^{a}_G(S) \cup \mathcal{S}^{ea}_G(S)$ (wymagamy bezpieczeństwa wszystkich wierzchołków oraz wszystkich krawędzi w zbiorze S).

Stwierdzenie 2.28. *Niech G będzie grafem. Wtedy zachodzą następujące relacje: $\mathcal{S}^0_G \preccurlyeq \mathcal{S}^1_G$, $\mathcal{S}^1_G \preccurlyeq \mathcal{S}^v_G$, $\mathcal{S}^1_G \preccurlyeq \mathcal{S}^{ds}_G$, $\mathcal{S}^v_G \preccurlyeq \mathcal{S}^a_G$, $\mathcal{S}^{ds}_G \preccurlyeq \mathcal{S}^a_G$, $\mathcal{S}^a_G \preccurlyeq \mathcal{S}^c_G$, $\mathcal{S}^{ea}_G \preccurlyeq \mathcal{S}^c_G$, $\mathcal{S}^c_G \preccurlyeq \mathcal{S}^s_G$, oraz wszystkie relacje wynikające z przechodniości relacji $\preccurlyeq$.*

Dowód. Relacje wynikają bezpośrednio z wniosków 2.25 i 2.27. □

Rysunek 2.6 przedstawia relacje zachodzące między zdefiniowanymi modelami struktur defensywnych. Dla czytelności, relacje wynikające z przechodniości zostały dla rysunku pominięte.



Rys. 2.6: Relacja porządku między modelami struktur defensywnych. Dla czytelności w oznaczeniu pominięty zostało oznaczenie G.

Zwróćmy uwagę, że dla grafu G o co najmniej dwóch wierzchołkach ograniczając dziedzinę generatorów do wszystkich podzbiorów $U \subseteq \mathrm{V}(G)$, takich że $G[U]$ nie zawiera wierzchołków izolowanych zachodzą również relacje oznaczone strzałkami przerywanymi (rys. 2.6), czyli $\mathcal{S}^1_G \preccurlyeq \mathcal{S}^{ea}_G$ oraz $\mathcal{S}^{ds}_G \preccurlyeq \mathcal{S}^{ea}_G$.

Stwierdzenie 2.29. *Niech G będzie grafem oraz niech $\mathcal{S}_G$ będzie generatorem struktur krytycznych. Wtedy $\mathcal{S}^0_G \preccurlyeq \mathcal{S}_G$ oraz $\mathcal{S}_G \preccurlyeq \mathcal{S}^s_G$.*

Dowód. Relacja $\mathcal{S}^0_G \preccurlyeq \mathcal{S}_G$ wynika z lematu 2.25 a relacja $\mathcal{S}_G \preccurlyeq \mathcal{S}^s_G$ wynika z lematu 2.27. □

Ze stwierdzenia 2.29 widzimy, że modele struktur defensywnych typów $\mathcal{S}^0_G$ i $\mathcal{S}^s_G$ są odpowiednio elementami minimalnym i maksymalnym dla porządku $\preccurlyeq$ w grafie G. Ze stwierdzenia 2.22 wiemy, że model struktur defensywnych typu $\mathcal{S}^s_G$ jest alternatywnym sformułowaniem modelu zbiorów bezpiecznych. Przy takiej interpretacji widzimy zatem, że model zbiorów bezpiecznych jest modelem najbardziej restrykcyjnym. Rozważając modele struktur defensywnych w wersji globalnej widać, że najmniej restrykcyjny jest model globalnych struktur defensywnych typu $\mathcal{S}^0_G$ (czyli ze stwierdzenia 2.19 model zbiorów dominujących) cechujący się brakiem restrykcji. Modelem pośrednim jest wtedy model globalnych koalicji defensywnych (czyli ze stwierdzenia 2.21 model globalnych struktur defensywnych typu $\mathcal{S}^a_G$).

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

Ogólna definicja struktury defensywnej pozwala w naturalny sposób definiować pokrewne modele. Każdy taki model będzie cechował się pewnym poziomem restrykcyjności znajdującym się gdzieś pomiędzy dwiema skrajnościami: całkowitym brakiem restrykcji oraz maksymalną restrykcyjnością zbioru bezpiecznego (czyli wymaganiem obronności wszystkich podstruktur). W kolejnych rozdziałach zdefiniujemy i zbadamy własności modeli, które autor niniejszej rozprawy wraz z współautorami wprowadził do literatury pracami [47] oraz [48]. Są to odpowiednio model struktur defensywnych typu $\mathcal{S}_G^{ds}$, które w dalszej części zdefiniujemy jako *zbiory defensywne* oraz model struktur defensywnych typu $\mathcal{S}_G^{ea}$ z pewnymi dodatkowymi założeniami, które w dalszej części zdefiniujemy jako *koalicje krawędziowe*.

2.4 Modele równowagi strategicznej

Do tej pory wprowadziliśmy struktury defensywne w postaci pojedynczych zbiorów, dla których stawiane są wymogi związane z bezpieczeństwem (w sensie predykatu SEC) pewnych ich podzbiorów. W poprzedniej części wprowadziliśmy ogólną definicję struktury bezpiecznej, którą w niniejszej części wykorzystamy do zdefiniowania pojęcia równowagi strategicznej (ang. *strategic balance*). Koncepcja równowagi strategicznej koncentruje się na współistnieniu dwóch rozłącznych globalnych struktur defensywnych w grafie.

Definicja 2.10. Niech $\mathcal{DS}$ będzie pewnym modelem struktury defensywnej. Niech G będzie grafem. Rozważmy dwa rozłączne podzbiory zbioru $\mathrm{V}(G)$ i oznaczmy je odpowiednio jako N oraz S. Jeżeli zbiory N oraz S są globalnymi strukturami defensywnymi typu $\mathcal{DS}$, to parę nieuporządkowaną $\{N, S\}$ nazywamy *równowagą strategiczną zbiorów typu* $\mathcal{DS}$ (ang. *strategic balance of* $\mathcal{DS}$*–type sets*). Dodatkowo jeżeli rodzina $\{N, S\}$ jest podziałem zbioru $\mathrm{V}(G)$, to *równowagę strategiczną zbiorów typu* $\mathcal{DS}$ nazywamy *doskonałą* (ang. *perfect*).

Teraz, dla określonych rodzajów struktur defensywnych, zdefiniujemy odpowiadające im pojęcia równowagi strategicznej.

Definicja 2.11. Niech G będzie grafem. Rozważmy dwa rozłączne podzbiory zbioru $\mathrm{V}(G)$, które oznaczymy odpowiednio jako N oraz S. Jeżeli zbiory N oraz S są zbiorami dominującymi, to parę nieuporządkowaną $\{N, S\}$ nazywamy *równowagą strategiczną zbiorów dominujących* (ang. *strategic balance of dominating sets*). Dodatkowo jeżeli rodzina $\{N, S\}$ jest podziałem zbioru $\mathrm{V}(G)$, to *równowagę strategiczną zbiorów dominujących* nazywamy *doskonałą* (ang. *perfect*).

Warto zwrócić uwagę, że pojęcie równowagi strategicznej zbiorów dominujących jest powiązane z pojęciem podziałów domatycznych (ang. *domatic partition*) oraz liczby domatycznej (ang. *domatic number*). Istnienie równowagi strategicznej zbiorów dominujących w grafie jest równoważne jego liczbie domatycznej równej co najmniej 2. Wyraża to poniższe stwierdzenie.

Stwierdzenie 2.30. *Niech G będzie grafem. W grafie G istnieje równowaga strategiczna zbiorów dominujących wtedy i tylko wtedy, gdy liczba domatyczna grafu G jest większa lub równa* 2.

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

Dowód. Jeśli w grafie G istnieje równowaga strategiczna zbiorów dominujących $\{N, S\}$, to zbiory $\mathrm{V}(G) \setminus S$ oraz S są dominujące i rozłączne w grafie G, zatem liczba domatyczne jest równa co najmniej 2. Jeżeli liczba domatyczna jest równa co najmniej k, gdzie $k \geq 2$, to jeżeli zbiory $D_1, \ldots, D_k$ są rozłącznymi zbiorami dominującymi w grafie G, to $\{D_1 \cup \cdots \cup D_{k-1}, D_k\}$ jest równowagą strategiczną zbiorów dominujących. □

Kolejna obserwacja pokazuje równoważność pomiędzy pytaniami o istnienie równowagi strategicznej zbiorów dominujących oraz doskonałej równowagi strategicznej zbiorów dominujących.

Stwierdzenie 2.31. *Niech G będzie grafem. W grafie G istnieje doskonała równowaga strategiczna zbiorów dominujących wtedy i tylko wtedy, gdy w grafie G istnieje równowaga strategiczna zbiorów dominujących.*

Dowód. Każda doskonała równowaga strategiczna jest z definicji równowagą strategiczną.

W drugą stronę, załóżmy że $\{N, S\}$ jest równowagą strategiczną zbiorów dominujących. To znaczy zbiory $N \subseteq \mathrm{V}(G)$ oraz $S \subseteq \mathrm{V}(G)$ są rozłącznymi zbiorami dominującymi w grafie G. Niech $I = \mathrm{V}(G) \setminus (N \cup S)$. Para $\{N \cup I, S\}$ jest doskonałą równowagą strategiczną zbiorów dominujących w grafie G. □

Ze stwierdzeń 2.30 oraz 2.31 otrzymujemy następujący wniosek.

Wniosek 2.32. *Niech G będzie grafem. W grafie G istnieje doskonała równowaga strategiczna zbiorów dominujących wtedy i tylko wtedy, gdy liczba domatyczna grafu G jest większa lub równa* 2. □

Powyższy wniosek pokazuje silny związek między pojęciami liczby domatycznej oraz równowagi strategicznej zbiorów dominujących. Tematyka liczby domatycznej została wprowadzona w [8] i była później badana wielokrotnie (np. [54]). Z tego względu nie będziemy kontynuowali analizy tego pojęcia w dalszej części pracy.

Kwestia istnienia doskonałej równowagi strategicznej w przypadku kiedy istnieje równowaga strategiczna nie jest, jak zobaczymy w kolejnych rozdziałach, uniwersalną własnością wszystkich modeli równowagi strategicznej. Prawdziwa jest natomiast zależność odwrotna.

Stwierdzenie 2.33. *Niech $\mathcal{DS}$ będzie pewnym modelem struktury defensywnej. Niech G będzie grafem. Jeżeli w grafie G istnieje doskonała równowaga strategiczna struktur typu $\mathcal{DS}$, to w grafie G istnieje równowaga strategiczna struktur typu $\mathcal{DS}$.*

Dowód. Z definicji każda doskonała równowaga strategiczna struktur typu $\mathcal{DS}$ w grafie G jest również równowagą strategiczną struktur typu $\mathcal{DS}$ w grafie G. □

W rozdziale 5 zdefiniujemy i zbadamy własności modelu równowagi strategicznej opartej o model koalicji defensywnych (czyli strukturę defensywną typu $\mathcal{S}_G^a$), który autor niniejszej pracy wprowadził do literatury polskojęzycznej w ramach pracy dyplomowej magisterskiej [45], a później wraz z

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

współautorami w ramach artykułu [48]. Natomiast w rozdziale 6 zdefiniujemy i zbadamy własności kolejnych dwóch modeli równowagi strategicznej, mianowicie równowagi strategicznej zbiorów typu $\mathcal{S}_G^{ds}$ (która zostania nazwana *równowagą strategiczną zbiorów defensywnych*) oraz równowagi strategicznej zbiorów typu $\mathcal{S}_G^{ea}$ (która zostania nazwana *równowagą strategiczną koalicji krawędziowych*). Oba modele zostaną poddane analizie po raz pierwszy w ramach niniejszej pracy.

2.5 Podsumowanie

W niniejszym rozdziale wprowadziliśmy pojęcia koalicji defensywnej oraz zbioru bezpiecznego w grafach. Analiza tych modeli doprowadziła do opracowania ogólnej definicji modelu struktury defensywnej, która umożliwia tworzenie nowych modeli i porównywania ich z istniejącymi w ramach hierarchii zadanej porządkiem między modelami. W ostatniej części zdefiniowaliśmy również ogólne pojęcie równowagi strategicznej. Jest to pokrewny model, w którym koncentrujemy się na współistnieniu dwóch globalnych struktur defensywnych określonego typu.

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

ROZDZIAŁ 3

Zbiory defensywne w grafach

W niniejszym rozdziale przyjrzymy się definicji, własnościom, algorytmom i zagadnieniom złożoności obliczeniowej w obrębie pierwszego z modeli struktur defensywnych, który wprowadziłem i rozważam w [47], mianowicie modelowi zbiorów defensywnych (ang. *defensive sets*).

Definicja 3.1. Niech G będzie grafem. Niepusty zbiór $S \subseteq \mathrm{V}(G)$ nazywamy *zbiorem defensywnym* (ang. *defensive set*) wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego wierzchołka $v \in S$ zachodzi $\mathrm{SEC}_G(S, \{v\})$ lub istnieje sąsiad $u \in S$ wierzchołka v, taki że $\mathrm{SEC}_G(S, \{v, u\})$. Jeżeli S jest jednocześnie zbiorem dominującym graf G, to mówimy, że S jest *globalnym zbiorem defensywnym*.

Definicja 3.2. Niech G będzie grafem. Liczbę elementów najmniej licznego zbioru defensywnego w grafie G nazywamy *liczbą zbioru defensywnego* i oznaczamy przez $ds(G)$. Liczbę elementów najmniej licznego globalnego zbioru defensywnego w grafie G nazywamy *globalną liczbą zbioru defensywnego* w grafie G i oznaczamy przez $\gamma_{ds}(G)$.

Definicja 3.3. Liczność najliczniejszego podziału zbioru wierzchołków grafu na rozłączne, niepuste zbiory takie, że każdy zbiór tego podziału jest globalnym zbiorem defensywnym, nazywamy *liczbą podziału na globalne zbiory defensywne*.

3.1 Zbiory defensywne jako struktury defensywne

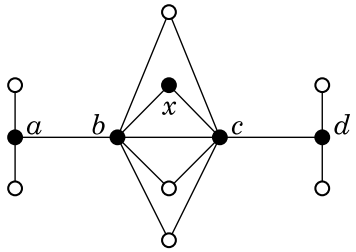
Przyjrzyjmy się najpierw wprowadzonej definicji w ujęciu uogólnionej struktury defensywnej (tzn. zgodnie z definicją 2.8). Niech G będzie grafem oraz $S \subseteq \mathrm{V}(G)$ będzie (globalnym) zbiorem defensywnym. Zbiór S jest (globalną) strukturą defensywną typu $\mathcal{S}_G^{ds}$. W ten sposób model zbiorów defensywnych wpisuje się w ogólną koncepcję zaproponowaną w rozdziale 2.

Przypomnijmy, że zbiór S jest koalicją defensywną w grafie G wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego wierzchołka $v \in S$ mamy $\mathrm{SEC}_G(S, v)$. Jeżeli S jest jednocześnie zbiorem dominującym mówimy, że koalicja jest globalna. Poprzez $\gamma_a(G)$ oznaczamy rozmiar najmniejszej globalnej koalicji w grafie G.

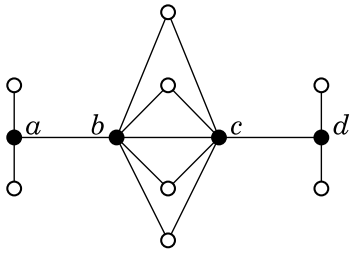
Koncepcja zbioru defensywnego pochodzi od koncepcji koalicji defensywnej i jest relaksacją tego modelu. Wprost z definicji wynika następujące stwierdzenie:

Stwierdzenie 3.1. *Niech G będzie grafem oraz $S \subseteq \mathrm{V}(G)$ będzie (globalną) koalicją defensywną. Wtedy S jest (globalnym) zbiorem defensywnym.* □

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl



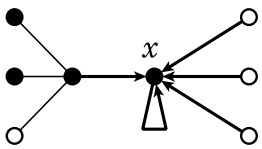
Rys. 3.1: Zbiór dominujący $\{a, b, c, d, x\}$ jest globalną koalicją defensywną.



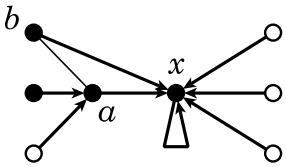
Rys. 3.2: Zbiór dominujący $\{a, b, c, d\}$ jest globalnym zbiorem defensywnym (najmniej licznym), ale nie jest koalicją defensywną. Warto zauważyć, że $\neg\,\mathrm{SEC}(b), \neg\,\mathrm{SEC}(c)$, ale $\mathrm{SEC}(\{b, c\})$.

Przeciwne stwierdzenie nie jest prawdziwe co pokazują rysunki 3.1 i 3.2.

W modelu koalicji defensywnych co najwyżej jednej wierzchołek może zostać zaatakowany w tym samym momencie. W modelu zbiorów defensywnych atakowany wierzchołek (nazwijmy go x) może być broniony przez siebie i swoich sąsiadów lub jeden z jego sąsiadów (nazwijmy go a) dołącza do 'potyczki', tzn. po dołączeniu do potyczki atak jest prowadzony jednocześnie na dwa wierzchołki (x oraz a) i w ten sposób atak zostaje odparty. Ta sytuacja jest zobrazowana na rysunkach 3.3 oraz 3.4, gdzie białe wierzchołki rozważane są jako atakujący a czarne wierzchołki tworzą zbiór defensywny.



Rys. 3.3: Istnieje atak na wierzchołek x, który nie może zostać odparty przez x i jego czarnych sąsiadów, czyli $\neg\,\mathrm{SEC}(\{x\})$



Rys. 3.4: Dołączenie wierzchołka a do 'potyczki' umożliwia odparcie ataku, ponieważ $\mathrm{SEC}(\{x, a\})$.

Ze stwierdzenia 3.1 otrzymujemy również wniosek na relację między rozmiarami najmniejszej globalnej koalicji defensywnej oraz najmniejszego globalnego zbioru defensywnego.

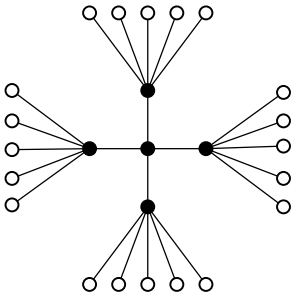
Wniosek 3.2. *Niech G będzie grafem. Zachodzi $\gamma_{ds}(G) \leq \gamma_a(G)$.* □

Stwierdzenie 3.3. *Dla drzewa T na rysunku 3.5 zachodzi $\gamma_{ds}(T) < \gamma_a(T)$.* □

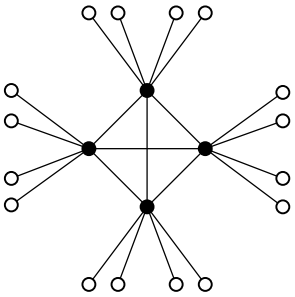
Dowód. Zacznijmy od zauważenia, że $\gamma_{ds}(T) = 5$. Korzystając z ograniczenia dolnego dla drzew sformułowanego w twierdzeniu 2.11 mamy $\gamma_{\mathrm{a}}(T) \geq \frac{\mathrm{n}(T)+2}{4} = \frac{27}{4} > 6$. Zatem $\gamma_{ds}(T) < \gamma_a(T)$. □

Stwierdzenie 3.4. *Dla grafu G na rysunku 3.6 zachodzi $\gamma_{ds}(T) = \gamma_a(T)$.* □

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl



Rys. 3.5: $\gamma_{ds}(T) = 5$, $n = 25$



Rys. 3.6: $\gamma_{ds} = \gamma_a = 4$, $n = 20$

Twierdzenie 3.5. *Niech G będzie grafem oraz zbiory $S_1, S_2 \subseteq \mathrm{V}(G)$ będą zbiorami defensywnymi w grafie G. Wtedy zbiór $S = S_1 \cup S_2$ jest zbiorem defensywnym w grafie G. Dodatkowo, jeżeli przynajmniej jeden ze zbiorów defensywnych S_1, S_2 jest globalny, to zbiór S również jest globalnym zbiorem defensywnym.*

Dowód. Weźmy dowolny wierzchołek $v \in S$ i niech $v \in S_1$. Wtedy albo $\mathrm{SEC}_G(S_1, v)$ albo istnieje wierzchołek $u \in S_1$, taki że $\{u, v\} \in \mathrm{E}(G)$ oraz $\mathrm{SEC}_G(S_1, \{u, v\})$. Wtedy na mocy lematu 1.4 zachodzi albo $\mathrm{SEC}_G(S, v)$, albo $\mathrm{SEC}_G(S, \{u, v\})$. Zatem zbiór S jest zbiorem defensywnym w grafie G. Załóżmy, że zbiór S_1 jest zbiorem dominującym. Wtedy ponieważ $\mathrm{V}(G) = \mathrm{N}_G[S_1] \subseteq \mathrm{N}_G[S]$, to zbiór S jest globalnym zbiorem defensywnym. □

Na podstawie prostego rozumowania indukcyjnego otrzymujemy:

Wniosek 3.6. *Niech G będzie grafem i niech zbiory $S_1, \ldots, S_n \subseteq \mathrm{V}(G)$ będą zbiorami defensywnymi w grafie G. Wtedy zbiór $S = \bigcup_{i=1}^{n} S_i$ jest zbiorem defensywnym. Ponadto, jeżeli przynajmniej jeden ze zbiorów defensywnych $S_1, S_2, \ldots, S_n$ jest globalny, to zbiór S również jest globalnym zbiorem defensywnym.* □

3.2 Ograniczenia na rozmiar najmniejszego globalnego zbioru defensywnego

Dla zwiększenia czytelności w niniejszej części wprowadzimy dodatkowe oznaczenia. Niech G będzie grafem. Dla dowolnego zbioru $S \subseteq \mathrm{V}(G)$ oraz $U \subseteq S$ zdefiniujmy $\mathrm{N}^{+}{}_{G,S}[U] = \mathrm{N}_G[U] \cap S$ oraz $\mathrm{N}^{-}{}_{G,S}[U] = \mathrm{N}_G[U] \cap (V \setminus S)$. Dla zbioru defensywnego S w grafie G definiujemy podział zbioru S na dwa zbiory: $S^0 = \{v \in S \colon \neg\,\mathrm{SEC}_G(S, v)\}$ i $S^1 = \{v \in S \colon \mathrm{SEC}_G(S, v)\}$.

Stwierdzenie 3.7. *Niech G będzie grafem oraz $S \subseteq \mathrm{V}(G)$ będzie (globalnym) zbiorem defensywnym. Zbiór S jest (globalną) koalicją defensywną wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór S^0 jest pusty.*

Dowód. Jeżeli zbiór S^0 jest pusty, to $S = S^1$, czyli zbiór S jest koalicją defensywną. Załóżmy zatem, że zbiór S jest koalicją defensywną. Wtedy $S^1 = S$, skąd $S^0 = \emptyset$. □

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

Stwierdzenie 3.8. *Niech G będzie grafem. Niech S będzie zbiorem defensywnym w grafie G i $X_1, X_2 \subseteq S$. Wtedy $|\mathrm{N}^-_{G,S}[X_1]| + |\mathrm{N}^-_{G,S}[X_2]| \geq |\mathrm{N}^-_{G,S}[X_1 \cup X_2]|$.*

Dowód. Zachodzi następujący ciąg nierówności: $|\mathrm{N}^-_{G,S}[X_1]|+|\mathrm{N}^-_{G,S}[X_2]| \geq |\mathrm{N}^-_{G,S}[X_1]\cup\mathrm{N}^-_{G,S}[X_2]|$ $\geq |(\mathrm{N}_G[X_1] \cup \mathrm{N}_G[X_2]) \cap (V \setminus S)| = |\mathrm{N}^-_{G,S}[X_1 \cup X_2]|$. □

Stwierdzenie 3.9. *Niech G będzie grafem oraz $S \subseteq \mathrm{V}(G)$ będzie zbiorem defensywnym w grafie G. Wtedy dla każdego $v \in S$ mamy $|\mathrm{N}^-_{G,S}[v]| \leq |S|$.*

Dowód. Jeżeli $v \in S^1$, to $|\mathrm{N}^-_{G,S}[v]| \leq |\mathrm{N}^+_{G,S}[v]| \leq |S|$. Natomiast jeżeli $v \in S^0$, to istnieje sąsiad $u \in \mathrm{N}_G[v] \cap S$, taki że $|\mathrm{N}^-_{G,S}[\{w,u\}]| \leq |\mathrm{N}^+_{G,S}[\{w,u\}]| \leq |S|$. Zatem, $|\mathrm{N}^-_{G,S}[w]| \leq |\mathrm{N}^-_{G,S}[\{w,u\}]| \leq |S|$. □

3.2.1 Ograniczenie dolne w przypadku ogólnym

W tej części wskażemy dolne ograniczenie na rozmiar najmniejszego globalnego zbioru defensywnego w grafie. Niech G będzie grafem. Dla poprawienia czytelności rozumowań w niniejszej części wprowadzimy pomocnicze oznaczenie. Dla zbioru defensywnego S w grafie G zdefiniujmy $E^1_S = \{\{v,u\} \in \mathrm{E}(G)\colon v \in S \wedge u \in S \wedge \mathrm{SEC}_G(S,\{v,u\})\}$. Dodatkowo niech $r(S)$ będzie maksymalną licznością podzbioru E^1_S krawędzi niezależnych.

Lemat 3.10. *Niech G będzie grafem. Dla dowolnego globalnego zbioru defensywnego S w grafie G zachodzi:*

$$|S| \geq \frac{\sqrt{4\,\mathrm{n}(G) + (r(S)-1)^2} + r(S) - 1}{2}.$$

Dowód. Niech S będzie dowolnym zbiorem defensywnym grafu G i niech $n = \mathrm{n}(G)$, $s = |S|$ oraz $r = r(S)$. Jeżeli $r = 0$, to S jest koalicją i na mocy twierdzenia 2.9 mamy $|S| \geq \frac{\sqrt{4n+1}-1}{2}$.

Załóżmy teraz, że $r > 0$. Teza jest równoważna $s^2-(r-1)s-n \geq 0$. Załóżmy, że $s^2-(r-1)s < n$. Zatem $|\mathrm{N}^-_{G,S}[S]| = |\mathrm{V}(G) \setminus S| = n - s > s^2 - rs$. Niech $M^1 = \{\{v_1,u_1\},\ldots,\{v_r,u_r\}\}$ będzie najliczniejszym zbiorem krawędzi niezależnych, takim że $M^1 \subseteq E^1(S)$. Dla dowolnej krawędzi $\{v_i,u_i\} \in M^1$ (gdzie $i \in \{1,\ldots,r\}$) zachodzi $\mathrm{SEC}_G(S,\{v_i,u_i\})$. Zatem $|\mathrm{N}^-_{G,S}[\{v_i,u_i\}]| \leq |\mathrm{N}^+_{G,S}[\{v_i,u_i\}]| \leq s$.

Ze stwierdzenia 3.8 mamy $|\mathrm{N}^-_{G,S}[S\setminus U]|+|\mathrm{N}^-_{G,S}[U]| \geq |\mathrm{N}^-_{G,S}[S]|$, gdzie $U = \bigcup_{i=1}^r \{v_i,u_i\}$. Stąd otrzymujemy $|\mathrm{N}^-_{G,S}[S \setminus U]| > s(s-2r)$. Ze stwierdzenia 3.9 dla każdego wierzchołka $w \in S \setminus U$ mamy $|\mathrm{N}^-_{G,S}[w]| \leq s$. Zatem $|\mathrm{N}^-_{G,S}[S \setminus U]| \leq \sum_{w\in S\setminus U} |\mathrm{N}^-_{G,S}[w]| \leq s(s-2r)$, sprzeczność. □

Wniosek 3.11. *Niech G będzie grafem. Wtedy*

$$\gamma_{ds}(G) \geq \max\{L(S)\colon S \textit{ jest zbiorem defensywnym i } \gamma_{ds}(G) = |S|\},$$

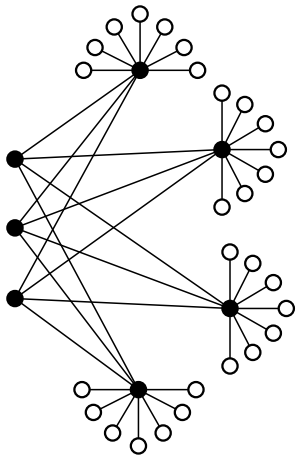
gdzie

$$L(S) = \frac{\sqrt{4n(G) + (r(S)-1)^2} + r(S) - 1}{2}.$$

To ograniczenie jest osiągane dla każdego $r(S) \geq 1$.

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

Dowód. Ograniczenie to jest osiągane w grafach uzyskanych przez dodanie $l(l+r)$ wierzchołków wiszących do pełnego grafu dwudzielnego $K_{r,l}$, $l \geq r$. Precyzyjniej, dodajemy $l+r$ nowych wierzchołków wiszących do każdego wierzchołka l wierzchołkowej partycji (w przypadku $l = r$ dodajemy do jednej z partycji). Zatem $n(K^*_{r,l}) = l + r + l(l+r)$ i $\gamma_{ds}(K^*_{r,l}) = l + r$, gdzie $S = \mathrm{V}(K_{r,l})$ jest globalnym zbiorem defensywnym o $l+r$ wierzchołkach i można pokazać, że jest to najmniejszy taki zbiór. Oczywiście $r(S) = r$. Zauważmy również (bez dowodu), że $\gamma_a(K^*_{r,l}) = l+r+l\lfloor \frac{l}{2} \rfloor > \gamma_{ds}(K^*_{r,l})$, dla $r = 1$ i $l \geq 2$ lub $2 \leq r \leq l$. Przykład drzewa $K^*_{3,4}$ wraz z najmniejszym globalnym zbiorem defensywnym prezentujemy na rysunku 3.7. □



Rys. 3.7: Graf $G = K^*_{3,4}$. Mamy $\mathrm{n}(G) = 35$, $\gamma_{ds}(G) = 7$ oraz $r(S) = 3$, gdzie S jest zbiorem wierzchołków oznaczonych kolorem czarnym.

Twierdzenie 3.12. *Niech G będzie grafem rzędu $n = k^2 + i$, gdzie $k \geq 1$ oraz $1 \leq i \leq 2k+1$. Wtedy następujące oszacowania zachodzą i są osiągane:*

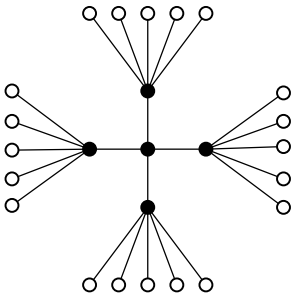
1. *jeżeli $\gamma_{ds}(G) < \gamma_a(G)$, to $\gamma_{ds}(G) \geq \sqrt{n}$,*
2. *jeżeli $\gamma_{ds}(G) = \gamma_a(G)$ oraz $i \in \{k+1, \ldots, 2k+1\}$, to $\gamma_{ds}(G) \geq \sqrt{n}$,*
3. *jeżeli $\gamma_{ds}(G) = \gamma_a(G)$ oraz $i \in \{1, \ldots, k\}$, to $\gamma_{ds}(G) \geq \sqrt{n-i} = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$.*

Dowód. (1). Jeżeli $\gamma_{ds}(G) < \gamma_a(G)$, to $r(S) \geq 1$ dla każdego zbioru defensywnego S takiego, że $\gamma_{ds}(G) = |S|$. Na mocy wniosku 3.11 mamy $\gamma_{ds}(G) \geq \sqrt{n}$. Ograniczenie jest osiągane dla drzew T_k ($k \geq 2$) takich, że $T_k = K^*_{1,k}$, dla których $\gamma_{ds}(T_k) = \sqrt{n(T_k)} = k+1$. Przykładowy graf T_4 prezentujemy na rysunku 3.8, mamy tam $\mathrm{n}(T_4) = 25$, $\gamma_{ds}(T_4) = 5$ i $\gamma_a(T_4) = 13$. Z twierdzenia 2.11 ([25]) mamy $\gamma_a(T_k) \geq \frac{n(T_k)+2}{4} = \frac{(k+1)^2+2}{4}$. Zatem, $\gamma_a(T_k) > \gamma_{ds}(T_k)$ dla każdego $k \geq 2$.

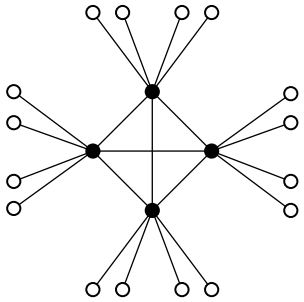
(2). Ponieważ $i \in \{k+1, \ldots, 2k+1\}$, to mamy $\lceil \frac{\sqrt{4k^2+4i+1}-1}{2} \rceil = k+1 = \lceil \sqrt{n} \rceil$. Zatem, z twierdzenia 2.9 otrzymujemy $\gamma_{ds}(G) \geq \sqrt{n}$. To ograniczenie jest osiągane dla grafów otrzymanych z grafów pełnych $k+1$ wierzchołkowych z dołączonymi $k(k+1)$ wierzchołkami wiszącymi G^*_k. Precyzyjniej dołączamy k wierzchołków wiszących do każdego wierzchołka grafu pełnego. Wtedy $\mathrm{n}(G^*_k) = (k+1)^2$ i $\gamma_a(G^*_k) = \gamma_{ds}(G^*_k) = k+1 = \sqrt{n}$.

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

(3). Ponieważ $i \in \{1, \ldots, k\}$ mamy $\lceil \frac{\sqrt{4k^2+4i+1}-1}{2} \rceil = k = \sqrt{n-i} = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$. Zatem z twierdzenia 2.9 otrzymujemy $\gamma_{ds}(G) \geq \sqrt{n-i}$. To ograniczenie jest osiągane dla grafów otrzymanych z grafów pełnych rozmiaru k z dołączonymi k^2 wierzchołkami wiszącymi G_k. Precyzyjniej k wierzchołków wiszących dołączamy do każdego wierzchołka grafu pełnego. Zatem $\mathrm{n}(G_k) = k^2 + k$ i $\gamma_a(G_k) = \gamma_{ds}(G_k) = k$. Przykład takiego grafu dla $k = 4$ prezentujemy na rysunku 3.9. □



Rys. 3.8: $\mathrm{n}(T_4) = 25$, $\gamma_{ds}(T_4) = 5$, $\gamma_a(T_4) = 13$



Rys. 3.9: $\mathrm{n}(G_4) = 20$, $\gamma_{ds}(G_4) = 4$, $\gamma_a(G_4) = 4$

3.2.2 Ograniczenia dolne w drzewach

Na mocy twierdzenia 3.12 wiemy, że rozmiar najmniejszego globalnego zbioru defensywnego w grafie G jest równy przynajmniej $\lceil \sqrt{\mathrm{n}(G)} \rceil$ lub $\lfloor \sqrt{\mathrm{n}(G)} \rfloor$, w zależności od topologii grafu. Dla globalnych koalicji defensywnych w drzewach ograniczenie dolne, przyjmujące wartość $\frac{\mathrm{n}(G)+2}{4}$ (twierdzenie 2.11 z [25]), może zostać obniżone w przypadku globalnych zbiorów defensywnych (patrz rys. 3.5).

Wniosek 3.13. *Niech T będzie drzewem i niech* $\mathrm{n}(T) \geq 11$. *Wtedy $\gamma_{ds}(T) \geq \sqrt{\mathrm{n}(T)}$ i to ograniczenie jest osiągane.*

Dowód. Na mocy twierdzenia 3.12 wiemy, że $\gamma_{ds}(T) \geq \lfloor \sqrt{\mathrm{n}(T)} \rfloor$. Załóżmy nie wprost, że $\gamma_{ds}(T) = \lfloor \sqrt{\mathrm{n}(T)} \rfloor < \sqrt{\mathrm{n}(T)}$. Na mocy twierdzenia 2.11 mamy $\gamma_{\mathrm{a}}(T) \geq \frac{\mathrm{n}(G)+2}{4}$. Zauważmy też, że dla każdego $r \geq 11$ zachodzi $\frac{r+2}{4} > \lfloor \sqrt{r} \rfloor$. Stąd mamy $\gamma_{\mathrm{a}}(T) \geq \frac{\mathrm{n}(G)+2}{4} > \lfloor \sqrt{\mathrm{n}(T)} \rfloor = \gamma_{ds}(T)$ Ale z twierdzenia 3.12 (punkt 1) wynika wtedy, że $\gamma_{ds}(T) \geq \sqrt{\mathrm{n}(T)}$. Jest to sprzeczne z przyjętym założeniem.

Ograniczenie jest osiągane w klasie grafów T_k ($k \geq 2$) przedstawionych w dowodzie punktu 1 twierdzenia 3.12. Przykładowe drzewo T_4 z tej rodziny przedstawione jest na rysunku 3.8. □

Przypomnijmy, że dla dowolnego drzewa T w części 1.3 przyjęliśmy oznaczenia $L(T)$ oraz $C(T)$ oznaczające odpowiednio zbiór wszystkich liści drzewa oraz zbiór wszystkich wierzchołków nie będących liśćmi.

Stwierdzenie 3.14. *Niech T będzie drzewem i niech zbiór S będzie globalnym zbiorem defensywnym w drzewie T. Wtedy podgraf indukowany $T[S]$ jest drzewem wtedy i tylko wtedy, gdy $C(T) \subseteq S$ lub równoważnie* $\mathrm{V}(T) \setminus S \subseteq L(T)$.

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

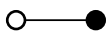
Dowód. ($\Rightarrow$) Niech $x \in C(T) \setminus S$ i $T_1 = T \setminus \{x\}$. Graf T_1 jest niespójny. Jako, że zbiór S jest zbiorem dominującym i $T[S]$ jest podgrafem grafu T_1, to również $T[S]$ jest niespójny.
($\Leftarrow$)Niech teraz $C(T) \subseteq S$. Zatem $\mathrm{V}(T)\setminus S \subseteq \mathrm{V}(T)\setminus C(T) = L(T)$. Zatem graf $T[S]$ jest spójny. □

Dokonamy teraz charakteryzacji wszystkich drzew T, dla których zachodzi nierówność: $\gamma_{ds}(T) = \lfloor\sqrt{\mathrm{n}(T)}\rfloor < \sqrt{\mathrm{n}(T)}$, gdzie $\mathrm{n}(T) \leq 10$.

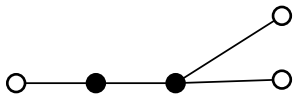
Lemat 3.15. *Niech T będzie drzewem oraz niech $\mathrm{n}(T) \leq 10$. Jeżeli $\gamma_{ds}(T) = \lfloor\sqrt{\mathrm{n}(T)}\rfloor < \sqrt{\mathrm{n}(T)}$, to drzewo T jest izomorficzne z jednym z drzew przedstawionym na rysunkach 3.10, 3.11, 3.12 oraz 3.13.*

Dowód. Na mocy twierdzenia 3.12 (punkt 3) wiemy, że każde takie drzewo musi mieć 2, 5, 6 lub 10 wierzchołków. Jeżeli $\gamma_{ds}(T) \geq 4$ i $\mathrm{n}(T) \leq 10$, to oczywiście $\gamma_{ds}(T) \geq \sqrt{n}$. Zauważmy, że jeżeli $\gamma_{ds}(T) = 1$, to $\mathrm{n}(T) \leq 2$, i jeżeli $\gamma_{ds}(T) \leq 2$, to $\mathrm{n}(T) \leq 6$. Łatwo zauważyć, że jedynie drzewa z rysunku 3.10, 3.11, 3.12 spełniają $\gamma_{ds}(T) \leq 2$ i $\gamma_{ds}(T) = \lfloor\sqrt{\mathrm{n}(T)}\rfloor < \sqrt{\mathrm{n}(T)}$.

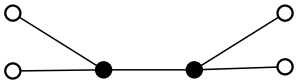
Niech $\gamma_{ds}(T) = 3$. Wtedy z $\gamma_{ds}(T) = \lfloor\sqrt{\mathrm{n}(T)}\rfloor < \sqrt{\mathrm{n}(T)}$ mamy, że $n = 10$. Jeżeli S jest globalnym zbiorem defensywnym w drzewie T rzędu 10 i $|S| = 3$, to $T[S]$ jest spójne, w przeciwnym razie $\mathrm{n}(T) \leq 8$. Zatem ze stwierdzenia 3.14 mamy $\mathrm{V}(T) \setminus S \subseteq L(T)$. Stąd przynajmniej jeden wierzchołek z S musi mieć trzy liście jako sąsiadów w zbiorze $\mathrm{V}(T) \setminus S$ (ponieważ w przeciwnym przypadku byłoby $\mathrm{n}(T) < 10$). To prowadzi wprost do grafu zobrazowanego na rysunku 3.13. □



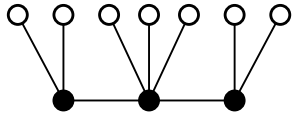
Rys. 3.10: $\gamma_{ds} = \lfloor\sqrt{2}\rfloor = 1$



Rys. 3.11: $\gamma_{ds} = \lfloor\sqrt{5}\rfloor = 2$



Rys. 3.12: $\gamma_{ds} = \lfloor\sqrt{6}\rfloor = 2$



Rys. 3.13: $\gamma_{ds} = \lfloor\sqrt{10}\rfloor = 3$

Z wniosku 3.13 i lematu 3.15 mamy:

Twierdzenie 3.16. *Dla każdego drzewa T, które nie jest izomorficzne z jednym z drzew z rysunków 3.10, 3.11, 3.12, 3.13 mamy $\gamma_{ds}(T) \geq \sqrt{\mathrm{n}(T)}$ i to ograniczenie jest osiągalne. Dla dowolnego drzewa T z rysunków 3.10, 3.11, 3.12, 3.13 zachodzi $\gamma_{ds}(T) = \lfloor\sqrt{\mathrm{n}(T)}\rfloor < \sqrt{\mathrm{n}(T)}$.* □

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

3.3 Globalne zbiory defensywne w różnych klasach grafów

W tej części pokażemy formuły na dokładny rozmiar najmniejszego, w sensie liczby wierzchołków, globalnego zbioru defensywnego w grafach następujących klas: ścieżek, cykli, grafów pełnych, gwiazd oraz grafów pełnych dwudzielnych.

Trzy kolejne stwierdzenia pokazują związki modelu zbiorów defensywnych z innymi modelami dla klasy grafów podkubicznych.

Stwierdzenie 3.17. *Niech G będzie grafem podkubicznym. Jeśli zbiór S jest zbiorem totalnie dominującym w grafie G, to zbiór S jest również globalną koalicją defensywną w grafie G.*

Dowód. Niech S będzie zbiorem totalnie dominującym w grafie G. Weźmy dowolny wierzchołek $v \in S$. Z własności totalnego dominowania mamy $|\mathrm{N}_G[v] \cap S| \geq 2$. Graf G jest grafem podkubicznym, zatem $\deg_G(v) \leq 3$. Stąd mamy $|\mathrm{N}_G[v] \cap S| \geq |\mathrm{N}_G[v] \setminus S|$, czyli zachodzi $\mathrm{SEC}_G(S, v)$. Zatem zbiór S jest globalną koalicją defensywną. □

Stwierdzenie 3.18. *Niech G będzie grafem podkubicznym. Zbiór S jest koalicją defensywną w grafie G wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór S jest zbiorem defensywnym w grafie G.*

Dowód. Ze stwierdzenia 3.1 wiemy, że jeśli S jest koalicją defensywną, to jest również zbiorem defensywnym. Załóżmy teraz, że zbiór S jest zbiorem defensywnym. Weźmy dowolny wierzchołek $v \in S$. Jeśli $\deg_G(v) = 1$, to oczywiście zachodzi $\mathrm{SEC}_G(S, v)$. Natomiast jeśli $\deg_G(v) \geq 2$, to $|\mathrm{N}_G[v] \cap S| \geq 2$, zatem również zachodzi $\mathrm{SEC}_G(S, v)$. Zatem zbiór S jest koalicją defensywną. □

Stąd otrzymujemy natychmiast:

Wniosek 3.19. *Niech G będzie grafem podkubicznym. Wtedy $\gamma_a(G) = \gamma_{ds}(G)$.* □

Zauważmy, że zarówno ścieżki jak i cykle są grafami podkubicznymi. Dla takich grafów możemy skorzystać z wyników uzyskanych w ramach badań nad tematem globalnych koalicji defensywnych. Dokładne wartości w przypadku ścieżek oraz cykli zostały zbadane w [26] a później przywołane ponownie w obszernym podsumowaniu [64]. Mamy stąd zatem:

Stwierdzenie 3.20. *Niech P_n będzie ścieżką, gdzie $n \geq 2$. Wtedy $\gamma_{ds}(P_n) = \gamma_a(P_n) = \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$.* □

Stwierdzenie 3.21. *Niech C_n będzie cyklem, gdzie $n \geq 3$. Wtedy*

$$\gamma_{ds}(C_n) = \gamma_a(K_n) = \begin{cases} \frac{n-1}{2} + 1 & \text{jeżeli } 4 \mid n, \\ 2\lceil \frac{n}{4} \rceil & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

□

Stwierdzenie 3.22. *Niech K_n będzie grafem pełnym, gdzie $n \geq 1$. Wtedy $\gamma_{ds}(K_n) = \gamma_a(K_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$.*

Dowód. Zauważmy, że dla każdego wierzchołka $v \in \mathrm{V}(G)$ i dla każdej krawędzi $e \in \mathrm{E}(G)$ zachodzi $\mathrm{N}_G(v) = \mathrm{V}(G)$ oraz $\mathrm{N}_G(e) = \mathrm{V}(G)$. Zatem dla dowolnego zbioru $S \subseteq \mathrm{V}(G)$, jeżeli S jest koalicją defensywną lub zbiorem defensywnym, to $|S| \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil$. Dowolny zbiór S, dla którego $|S| = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ jest globalną koalicją defensywną oraz globalnym zbiorem defensywnym. □

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

Stwierdzenie 3.23. *Niech S_n będzie gwiazdą, gdzie $n \geq 1$. Wtedy $\gamma_{ds}(S_n) = \gamma_a(S_n) = \lceil \frac{n+1}{2} \rceil$.*

Dowód. Przez o oznaczmy wierzchołek centralny gwiazdy (tzn. jedyny wierzchołek stopnia większego niż 1, gdy $n > 1$ lub dowolny wierzchołek, gdy $n = 1$). Niech zbiór $S \subseteq \mathrm{V}(G)$ będzie globalną koalicją lub globalnym zbiorem defensywnym. Wtedy jeżeli wierzchołek $o \notin S$, to $|S| = n$, ponieważ zbiór S jest zbiorem dominującym. Jeżeli natomiast wierzchołek $o \in S$, to $|\mathrm{N}_{S_n}(o) \cap S| = |S|$ i $|\mathrm{N}_{S_n}(o) \setminus S| = n + 1 - |S|$. Podobnie dla każdej krawędzi $e \subseteq S$ mamy $|\mathrm{N}_{S_n}(e) \cap S| = |S|$ i $|\mathrm{N}_{S_n}(e) \setminus S| = n+1-|S|$. Zatem $|S| \geq \lceil \frac{n+1}{2} \rceil$. Dowolny zbiór S, dla którego $o \in S$ oraz $|S| \geq \lceil \frac{n+1}{2} \rceil$ jest globalną koalicją i globalnym zbiorem defensywnym. □

Stwierdzenie 3.24. *Niech $K_{n,m}$ będzie grafem pełnym dwudzielnym, gdzie $n, m \geq 1$. Wtedy $\gamma_{ds}(K_{n,m}) = \gamma_a(K_{n,m}) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$.*

Dowód. Jeśli n lub m jest równe 1, to graf $K_{n,m}$ jest gwiazdą i teza zachodzi na mocy stwierdzenia 3.23. Przyjmijmy zatem, że $n \geq 2$ i $m \geq 2$. Niech $\mathrm{V}(K_{n,m}) = V_1 \cup V_2$, gdzie V_1 i V_2 są parą niezależnych rozłącznych podzbiorów zbioru wierzchołków grafu $K_{n,m}$. Oznaczmy $r_1 = |V_1|$ oraz $r_1 = |V_1|$. Niech S_{ds} będzie globalnym zbiorem defensywnym w grafie $K_{n,m}$. Wtedy jeżeli istnieje krawędź $\{u, v\} \in \mathrm{E}(K_{n,m})$, gdzie $u, v \in S_{ds}$, taka że $\mathrm{SEC}_{K_{n,m}}(S_{ds}, \{u, v\})$ to $|S_{ds}| = \left|\mathrm{N}_{K_{n,m}}(\{u, v\}) \cap S_{ds}\right| \geq \left|\mathrm{N}_{K_{n,m}}(\{u, v\}) \setminus S_{ds}\right| = |\mathrm{V}(K_{n,m}) \setminus S_{ds}|$. Zatem dla każdego globalnego zbioru defensywnego w grafie $K_{n,m}$, który nie jest globalną koalicją defensywną wymagana jest co najmniej połowa wierzchołków tego grafu. Załóżmy teraz, że S_a jest globalną koalicją defensywną w grafie $K_{n,m}$. Wtedy dla każdego wierzchołka $v \in S_a \cap V_1$ mamy $|V_2 \cap S_a|+1 = \left|N_{K_{n,m}}[v] \cap S_a\right| \geq \left|N_{K_{n,m}}[v] \setminus S_a\right| = |V_2 \setminus S_a|$. Analogicznie dla każdego wierzchołka $v \in S_a \cap V_2$ otrzymujemy $|V_1 \cap S_a| + 1 \geq |V_1 \setminus S_a|$. Zatem dostajemy $|V_1 \cap S_a| \geq |V_1 \setminus S_a| = n - |V_1 \cap S_a| - 1$, czyli $|V_1 \cap S_a| \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ oraz analogicznie $|V_2 \cap S_a| \geq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$. Dowolny zbiór S zawierający $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ wierzchołków zawartych w zbiorze V_1 oraz $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ wierzchołków zawartych w zbiorze V_2 jest globalną koalicją defensywną oraz globalnym zbiorem defensywnym. □

3.4 Wielomianowy algorytm konstruujący najmniejszy globalny zbiór defensywny w drzewach

W [9] autorzy przedstawili konstrukcję algorytmu wielomianowego znajdującego najmniejszą – w sensie liczby wierzchołków – globalną koalicję defensywną w drzewach. Zaprezentowany algorytm cechował się (czasową) złożonością obliczeniową $O(n \log \Delta)$, gdzie n to liczba wierzchołków drzewa, a Δ to największy stopień wierzchołka w tym drzewie. W niniejszej sekcji zaprezentujemy wielomianowy algorytm dla problemu poszukiwania najmniejszego (w sensie liczby wierzchołków) globalnego zbioru defensywnego o złożoności czasowej $O(n\Delta^2 \log \Delta)$.

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

Ogólny szkic zastosowanej techniki algorytmicznej

Zastosujemy dynamiczną technikę wstępującą (ang. *bottom-up*) względem ustalonego ukorzenienia drzewa. Za korzeń drzewa przyjmujemy dowolny wierzchołek będący liściem, tzn. wierzchołek stopnia 1. Następnie zorientujemy wszystkie krawędzie drzewa w kierunku korzenia. W ten sposób doprowadzimy do sytuacji, w której dla każdego wierzchołka w drzewie nie będącego korzeniem istnieje dokładnie jedna krawędź wychodząca w kierunku korzenia.

Przyjmijmy oznaczenie T dla drzewa oraz r dla arbitralnie wybranego korzenia (z zachowaniem $\deg_T(r) = 1$). Dla każdego wierzchołka $v \in \mathrm{V}(T) \setminus \{r\}$ przez e_v oznaczymy (jedyną) krawędź wychodzącą z wierzchołka v w kierunku korzenia r. Drugi koniec krawędzi e_v oznaczymy jako r_v (to znaczy $e_v = \{v, r_v\}$). Dodatkowo przez T_v oznaczymy poddrzewo drzewa T ukorzenione w wierzchołku v, zawierające dodatkowo wszystkie wierzchołki, których ścieżki prowadzące do korzenia r w drzewie T prowadzą przez wierzchołek v. Przez T_v^* oznaczmy drzewo T_v rozszerzone dodatkowo o krawędź e_v i ukorzenione w wierzchołku r_v. Niech $p_v = \deg_T(v) - 1$ a także niech $N_v^b = \{v_1, \ldots v_{p_v}\}$ będzie zbiorem wszystkich wierzchołków w drzewie T sąsiadujących z wierzchołkiem v, różnych od r_v.

Kluczową ideą jest rekurencyjny schemat, w którym dla wierzchołka v budujemy pewną strukturę A_v na podstawie uzyskanych wcześniej struktur $A_{v_1}, \ldots, A_{v_{p_v}}$ powiązanych z wierzchołkami potomnymi wierzchołka v. Użyjemy pośrednich struktur (B_v) dla klarownego przedstawienia procesu uzyskiwania struktury A_v. Wspomniana technika wstępująca (ang. *bottom-up*) przedstawia się następująco:

1. Rozpoczynamy od liści, dla których bezpośrednio zdefiniujemy struktury A_v.
2. Podążamy w kierunku korzenia r.
3. Przemierzając drzewo T dla każdego wierzchołka $v \in \mathrm{V}(T)$ różnego od r:
   (i) konstruujemy pomocniczą strukturę B_v na podstawie struktur $A_{v_1} \ldots, A_{v_{p_v}}$,
   (ii) konstruujemy strukturę A_v na podstawie struktury B_v.
4. Wykorzystujemy strukturę A_s, gdzie s jest jedynym sąsiadem korzenia r, do znalezienia optymalnego rozwiązania.

Złożoność obliczeniowa algorytmu jest zdeterminowana przez złożoność obliczeniową procedur konstruujących struktury A_v oraz pomocnicze struktury B_v.

Algorytm wyznaczający rozmiar najmniejszego globalnego zbioru defensywnego w drzewie o złożoności $O(n\Delta^2 \log \Delta)$

Przedstawimy algorytm dynamiczny, którego działanie ogranicza się do określenia liczności optymalnego (tzn. najmniejszego w sensie liczby wierzchołków) globalnego zbioru defensywnego. Odpowiednie rozwinięcie struktur pomocniczych pozwala, bez wpływu na złożoność obliczeniową, na

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

rozszerzenie zakresu działania algorytmu tak, żeby wyznaczać również poszukiwany optymalny zbiór wierzchołków.

Będziemy postępować zgodnie z przedstawionym szkicem. To znaczy zdefiniujemy struktury A_v oraz B_v a także przedstawimy ich konstrukcję. Pomocniczo wykorzystamy symbol ∞ w celu oznaczenia pewnych przypadków. Przyjmijmy uproszczoną arytmetykę, w której zachodzą następujące własności: $\infty \geq a$, $\infty \pm a = \infty$ i $\min\{\infty, a\} = a$, gdzie a jest liczbą, lub $a = \infty$.

Niech $v \in \mathrm{V}(T) \setminus \{r\}$, $p = p_v = \deg_T(v) - 1$ oraz $q = \deg_T(r_v) - 1$. Niech T_v^q będzie drzewem uzyskanym z drzewa T_v^* przez dołączenie q liści $L_q = \{u_1, \ldots, u_q\}$ do wierzchołka r_v.

W dalszej części, dla uproszczenia, będziemy pisać *GZD* zamiast *globalny zbiór defensywny*. Zdefiniujemy teraz struktury A_v oraz $B_v = (B_v^0, B_v^1)$ następująco:

(A_v) Niech A_v będzie zdefiniowane jako $(a_v^{00}, a_v^{01}, a_v^{10}, a_v^{11}, A_v^{11})$, gdzie a_v^{jh} jest liczbą całkowitą lub symbolem ∞, dla $j, h \in \{0, 1\}$ a A_v^{11} ciągiem długości $(q+1)$, dla których:

(a^{00}) $a_v^{00} = \min\{|S| : S \text{ jest } GZD \text{ w } T_v \wedge v \notin S\}$,

(a^{01}) $a_v^{01} = \min\{|S \setminus \{r_v\}| : S \text{ jest } GZD \text{ w } T_v^* \wedge v \notin S \wedge r_v \in S\}$,

(a^{10}) $a_v^{10} = \min\{|S| : S \text{ jest } GZD \text{ w } T_v^* \wedge v \in S \wedge r_v \notin S\}$,

(a^{11}) $a_v^{11} = \min\{|S \setminus \{r_v\}| : S \text{ jest } GZD \text{ w } T_v^* \wedge v \in S \wedge r_v \in S\}$

(A^{11}) $A_v^{11}[k] = \min\{|S \setminus (L_q \cup \{r_v\})| : S \text{ jest } GZD \text{ w } T_v^q \wedge v \in S \wedge r_v \in S \wedge |L_q \cap S| = k\}$, gdzie $k = 0, \ldots, q$.

Zauważmy, że dla a_v^{jh} mamy $j = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $v \in S$ oraz $h = 1$ wtedy i tylko wtedy gdy $r_v \in S$.

Jeżeli operacja $\min\{\cdot\}$ nie może być poprawnie określona, za wartość przyjmujemy symbol ∞. Dla wierzchołka $v \neq r$ będącego liściem łatwo wyznaczamy wartości: $a_v^{00} = \infty$, $a_v^{01} = 0$, $a_v^{10} = 1$, $a_v^{11} = 1$ oraz $A_v^{11}[k] = 1$ dla $2k + 2 \geq q$ i $A_v^{11}[k] = \infty$ dla $2k + 2 < q$.

(B_v^0) Niech B_v^0 będzie macierzą wymiaru $p \times 3$, Dla $i = 1, \ldots, p$ definiujemy: $B_v^0[i, 0] = i$ i $B_v^0[i, 1] = 1$, jeśli $a_{v_i}^{10} > a_{v_i}^{00}$, w przeciwnym razie $B_v^0[i, 1] = 0$ i ostatecznie:

- jeżeli $B_v^0[i, 1] = 1$, to $B_v^0[i, 2] = a_{v_i}^{10} - a_{v_i}^{00}$,
- jeżeli $B_v^0[i, 1] = 0$, to $B_v^0[i, 2] = a_{v_i}^{00} - a_{v_i}^{10}$.

Zauważmy, że jeśli $a_{v_i}^{10} = \infty$ lub $a_{v_i}^{00} = \infty$, to $B_v^0[i, 2] = \infty$. Definiujemy $a_v^0 = \sum_{i=1}^{p} (1 - B_v^0[i, 1])$ oraz $b_v^0 = \sum_{i=1}^{p} \min\{a_{v_i}^{10}, a_{v_i}^{00}\}$. Zauważmy, że jeśli dla pewnego i mamy $a_{v_i}^{10} = a_{v_i}^{00} = \infty$, to $b_v^0 = \infty$. Niech c_v^0 będzie najmniejszą wartością $B_v^0[i, 2]$, dla której $B_v^0[i, 1] = 1$. Macierz B_v^0 może być skonstruowana w czasie $O(p)$.

(B_v^1) Niech B_v^1 będzie macierzą wymiaru $(p+1) \times p \times 6$, gdzie dla $k = 0, \ldots, p$ oraz $i = 1, \ldots, p$ definiujemy $B_v^1[k, i, 0] = i$, oraz

(a) jeśli $A_{v_i}^{11}[k] \leq a_{v_i}^{01}$ i $A_{v_i}^{11}[k] \leq a_{v_i}^{11}$, to $B_v^1[k, i, 1] = 0$ i $B_v^1[k, i, 2] = A_{v_i}^{11}[k]$, co więcej $B_v^1[k, i, 3] = B_v^1[k, i, 4] = B_v^1[k, i, 5] = 0$,

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

(*b*) jeśli $a^{11}_{v_i} \leq a^{01}_{v_i}$ i $a^{11}_{v_i} < A^{11}_{v_i}[k]$, to $B^1_v[k,i,1] = 0$ i $B^1_v[k,i,2] = a^{11}_{v_i}$, i $B^1_v[k,i,3] = 1$, $B^1_v[k,i,4] = A^{11}_{v_i}[k] - a^{11}_{v_i}$, $B^1_v[k,i,5] = 0$,

(*c*) jeśli $a^{01}_{v_i} < A^{11}_{v_i}[k]$ i $A^{11}_{v_i}[k] \leq a^{11}_{v_i}$, to $B^1_v[k,i,1] = 1$ i $B^1_v[k,i,2] = a^{01}_{v_i}$, i $B^1_v[k,i,3] = 0$, $B^1_v[k,i,4] = A^{11}_{v_i}[k] - a^{01}_{v_i}$, $B^1_v[k,i,5] = 0$,

(*d*) if $a^{01}_{v_i} < a^{11}_{v_i} < A^{11}_{v_i}[k]$, to $B^1_v[k,i,1] = 1$ i $B^1_v[k,i,2] = a^{01}_{v_i}$, i $B^1_v[k,i,3] = 1$, $B^1_v[k,i,4] = a^{11}_{v_i} - a^{01}_{v_i}$, $B^1_v[k,i,5] = A^{11}_{v_i}[k] - a^{11}_{v_i}$.

Macierz B^1_v może być skonstruowana w czasie $O(p^2)$.

Teraz przedstawimy metodę konstrukcji struktury A_v na podstawie B_v.

(a^{00}) W tej sytuacji musimy zapewnić, że wierzchołek v jest zdominowany przez co najmniej jeden z wierzchołków v_i, gdzie $i = 1, \ldots, p$. Jeśli $a^0_v > 0$, to $a^{00}_v = b^0_v$, w przeciwnym wypadku, $a^{00}_v = b^0_v + c^0_v$.

(a^{01}) Jako, że wierzchołek v jest zdominowany przez wierzchołek r_v, wystarczy wziąć najlepsze z dostępnych rozwiązań, to znaczy: $a^{01}_v = b^0_v$.

(a^{10}) Musimy się upewnić, że wierzchołek v jest zabezpieczony (w sensie predykatu SEC) samodzielnie lub jako koniec krawędzi. Dla każdego $k = 1, \ldots, p$ definiujemy:

$$s_k = \min\{|S \setminus \{r_v\}| : S \text{ jest } GZD \text{ w } T^*_v \wedge v \in S \wedge r_v \notin S \wedge |N^b_v \cap S| = k\},$$

lub $s_k = \infty$, jeśli nie ma takiego zbioru S. Oczywiście $a^{10} = \min\{s_1, \ldots, s_p\}$. Dla $k = 1, \ldots, p$ obliczamy wartość s_k lub uzasadniamy, że istnieje $l > k$, dla którego $s_l \leq s_k$. Niech $a = \sum_{i=1}^{p} (1 - B^1_v[k-1,i,1])$ i $b = \sum_{i=1}^{p} B^1_v[k-1,i,2]$. Musimy zagwarantować, że dokładnie k spośród wierzchołków $\{v_1, \ldots, v_p\}$ jest zabezpieczonych (w sensie predykatu SEC) albo samodzielnie albo jako krawędź. Pozostałe wierzchołki zbioru $\{v_1, \ldots, v_p\}$znajdują się poza zbiorem defensywnym. Jeżeli $a > k$, to łatwo zauważyć, że dla pewnego $l \geq a$ mamy $s_l \leq s_k$. Zatem, bez straty ogólności, możemy przyjąć, że $a \leq k$.

Jeżeli $a = k$, to mamy dwa przypadki: (1) istnieje i dla którego $B^1_v[k-1,i,1] = B^1_v[k-1,i,3] = 0$ (przypadek (*a*) definicji struktury B^1_v), zatem $s_k = b + 1$, (2) dla wszystkich wartości $i = 1, \ldots, p$ mamy $B^1_v[k-1,i,1] = 1$ lub $B^1_v[k-1,i,3] = 1$ (przypadek (*b*), (*c*) lub (*d*) definicji struktury B^1_v). Niech $U = \{1, \ldots, p\}$, $c = \min\{B^1_v[k-1,i,4] + B^1_v[k-1,i,5] : i \in U\}$ i $U_c = \{i \in U : B^1_v[k-1,i,4] + B^1_v[k-1,i,5] = c\}$. Jeżeli dla każdego $i \in U_c$ mamy $B^1_v[k-1,i,1] = 1$ (przypadki (*c*) lub (*d*) definicji struktury B^1_v), to $s_{k+1} \leq s_k$. Zatem, bez straty ogólności, możemy założyć, że dla pewnego $i \in U_c$ mamy $B^1_v[k-1,i,1] = 0$ oraz $B^1_v[k-1,i,3] = 1$ (przypadek (*b*)). Zatem $s_k = b + c + 1$.

Jeżeli $a < k$, to ponownie mamy dwa przypadki: ($1'$) istnieje i takie, że $B^1_v[k-1,i,1] = B^1_v[k-1,i,3] = 0$ (przypadek (*a*)), lub ($2'$) dla wszystkich $i = 1, \ldots, p$ mamy $B^1_v[k-1,i,1] = 1$ lub $B^1_v[k-1,i,3] = 1$ (przypadki (*b*), (*c*) lub (*d*)). Dla przypadku ($1'$) niech $\hat{B}_v$ będzie macierzą wymiaru $p \times 6$ uzyskaną z $B^1_v[k-1]$ przez posortowanie wierszy $B^1_v[k-1,i]$ (dla

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

$i = 1, \ldots, p$) w kolejności niemalejącej względem wartości $B_v^1[k-1, i, 4]$. Otrzymujemy zatem $\hat{B}[1,4] \leq \hat{B}[2,4] \leq \ldots \leq \hat{B}[p,4]$. Ta operacja może zostać wykonana w czasie $O(p \log p)$. Niech k_0 będzie najmniejszą liczbą taką, że $k - a = \sum_{i=1}^{k_0} \hat{B}_v[i,1]$, i niech $c = \sum_{i=1}^{k_0} \hat{B}_v[i,4] \cdot \hat{B}_v[i,1]$. Zatem $s_k = b+c+1$. Dla przypadku $(2')$, jeżeli $2k \geq p$ (tzn. zachodzi $\mathrm{SEC}_{T_v^*}(S, v)$), to możemy postępować analogicznie jak dla $(1')$, a wtedy $s_k = b+c+1$. Niech teraz $k < 2p$. Wtedy musimy zapewnić, że zachodzi $\mathrm{SEC}_{T_v^*}(S, \{v, v_{i_0}\})$ dla pewnego $v_{i_0} \in N_v^b$. Rozważymy dwa kolejne podprzypadki. $(2'_1)$ $B_v^1[k-1, i_0, 1] = 0$ oraz $B_v^1[k-1, i_0, 3] = 1$ (przypadek (b)), w którym minimalny koszt zapewnienia, że zachodzi $\mathrm{SEC}_{T_v^*}(S, \{v, v_{i_0}\})$ jest równy $c_1 = B_v^1[k-1, i_0, 4] + c'_1$, $(2'_2)$, $B_v^1[k-1, i_0, 1] = 1$ (przypadek (c) lub (d)), w którym minimalny koszt zapewnienia, że zachodzi $\mathrm{SEC}_{T_v^*}(S, \{v, v_{i_0}\})$ jest równy $c_2 = B_v^1[k-1, i_0, 4] + B_v^1[k-1, i_0, 5] + c'_2$. W obu przypadkach przez c'_l (for $l = 1, 2$) oznaczmy dodatkowy koszt wymagany do zapewnienia, że dokładnie k wierzchołków z N_v^b należy do zbioru defensywnego. Zatem mamy $s_k = \min\{b + c_1 + 1, b + c_2 + 1\}$. W podprzypadku $(2'_1)$ weźmy dowolne i_0 takie, że $B_v^1[k-1, i_0, 4] = \min\{B_v^1[k-1, i, 4] : i \in \{1, \ldots, p\} \wedge B_v^1[k-1, i, 1] = 0\}$. Niech $c'_1 = \sum_{i=1}^{k_0} \hat{B}_v[i,4] \cdot \hat{B}_v[i,1]$ będzie wyznaczone analogicznie jak w przypadku $(1')$. Niech $U_0 = \{i \in \{1, \ldots, p\} : B_v^1[k-1, i, 1] = 1\}$. W podprzypadku $(2'_2)$ poszukujemy zbioru $U \subseteq U_0$, $|U| = k - a$ oraz wierzchołka $i_0 \in U$ takiego, że suma $\sum_{i \in U} B_v^1[k-1, i, 4] + B_v^1[k-1, i_0, 5]$ jest możliwie najmniejsza. Dla każdego $t \in U_0$ obliczamy $c_2^t = B_v^1[k-1, t, 4] + B_v^1[k-1, t, 5] + \sum_{i=1, i \neq t}^{k_0} \hat{B}_v[i,4] \cdot \hat{B}_v[i,1]$, gdzie k_0 jest najmniejszą liczbą taką, że $k - a - 1 = \sum_{i=1, i \neq j}^{k_0} \hat{B}_v[i,1]$, oraz $\hat{B}_v$ jest konstruowane analogicznie jak w przypadku $(1')$. Ostatecznie, $c_2 = \min\{c_2^j : j = 1, \ldots, p\}$. Zatem udało nam się ustalić wartość a_v^{10} w czasie $O(p^2 \log p)$.

(a^{11}) Obliczenie wartości a_v^{11} jest analogiczne jak w przypadku (10) i wykonywane w takim samym czasie $O(p^2 \log p)$.

(A^{11}) Teraz dla każdego $l = 0, \ldots, q$ wyznaczamy wartość $A_v^{11}[l]$ w czasie $O(p^2 \log p)$.
Musimy się upewnić, że wierzchołek r_v jest zabezpieczony (tzn. zachodzi $\mathrm{SEC}_{T_v^q}(S, r_v)$ lub $\mathrm{SEC}_{T_v^q}(S, \{v, r_v\})$) i wierzchołek v spełnia jeden z warunków: $\mathrm{SEC}_{T_v^q}(S, v)$, $\mathrm{SEC}_{T_v^q}(S, \{v, r_v\})$ lub $\mathrm{SEC}_{T_v^q}(S, \{v, v_i\})$ dla pewnego $i \in \{1, \ldots, p\}$. Dowód przebiega tu analogicznie do przypadku (10): dla każdego $k = 1, \ldots, p$, definiujemy $s_k = \min\{|S \setminus \{r_v\}| : S \text{ jest GZD w } T_v^q \wedge v \in S \wedge r_v \in S \wedge |N_v^b \cap S| = k - 1 \wedge |L_q \cap S| = l\}$, lub $s_k = \infty$, jeżeli taki zbiór S nie istnieje. Analogicznie jak w przypadku (10), musimy zapewnić, że dokładnie $k-1$ wierzchołków ze zbioru $\{v_1, \ldots, v_p\}$ spełnia warunek zbioru defensywnego, a pozostałe znajdują się poza zbiorem defensywnym. Zauważmy, że $\mathrm{SEC}_{T_v^q}(S, r_v)$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $2l + 2 \geq q$ oraz $\mathrm{SEC}_{T_v^q}(S, \{v, r_v\})$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $2k + 2l \geq q + p$. Zatem mamy dwa przypadki: (1) zachodzi $\mathrm{SEC}_{T_v^q}(S, \{v, r_v\})$ i (2) zachodzi $\mathrm{SEC}_{T_v^q}(S, r_v)$ i nie zachodzi $\mathrm{SEC}_{T_v^q}(S, \{v, r_v\})$. W przypadku (1) wierzchołek v spełnia warunek zbioru defensywnego, więc wystarczy zapewnić warunek zbioru defensywnego dla $k-1$ wierzchołków ze zbioru $\{v_1, \ldots, v_p\}$, analogicznie jak w przypadku (10). W przypadku (2) musimy zapewnić, że za-

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

chodzi $\mathrm{SEC}_{T_v^q}(S, v)$ lub $\mathrm{SEC}_{T_v^q}(S, \{v, v_i\})$ dla pewnego $i \in \{1, \ldots, p\}$, oraz oczywiście warunek zbioru defensywnego dla $k-1$ wierzchołków ze zbioru $\{v_1, \ldots, v_p\}$, co ponownie może zostać wykonane analogicznie jak w przypadku (10). Konstrukcja całej macierzy A_v^{11} może zatem zostać wykonana w czasie $O(qp^2 \log p)$.

W końcu $\gamma_{ds}(T) = \min\{a_s^{10}, a_s^{01} + 1, a_s^{11} + 1\}$, gdzie wierzchołek s jest (jedynym) sąsiadem korzenia r. Jako, że konstrukcja struktury A_v może być wykonana w czasie $O(qp^2 \log p)$, to złożoność obliczeniowa algorytmu to $O(n\Delta^2 \log \Delta)$.

3.5 $\mathcal{NP}$–zupełność problemu istnienia globalnego zbioru defensywnego dla podkubicznych, planarnych grafów dwudzielnych

W niniejszej sekcji rozważymy decyzyjną wersję problemu minimalizacyjnego polegającego na znalezieniu najmniejszego, w sensie liczby wierzchołków, globalnego zbioru defensywnego w grafie.

Problem	*MINGDS*
Instancja	Graf G i liczba naturalna $k > 0$.
Pytanie	Czy w grafie G istnieje globalny zbiór defensywny o mocy co najwyżej k?

Wykażemy, że problem *MINGDS* jest $\mathcal{NP}$–zupełny w klasie dwudzielnych planarnych grafów podkubicznych. Przeprowadzimy redukcję wychodząc od $\mathcal{NP}$–zupełnego problemu dominacji totalnej *TDOM* (twierdzenie 1.9). Ze stwierdzenia 3.18 wynika, że w klasie grafów podkubicznych problemy dotyczące koalicji defensywnych oraz zbiorów defensywnych są równoważne. Dla koalicji defensywnych określimy problem analogiczny do problemu *MINGDS*.

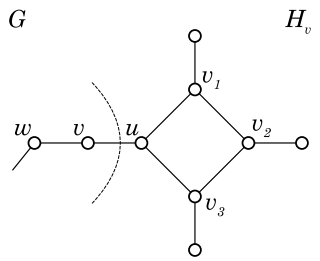
Problem	*MINGDA*
Instancja	Graf G i liczba naturalna $k > 0$.
Pytanie	Czy w grafie G istnieje globalna koalicja defensywna o mocy co najwyżej k?

Twierdzenie 3.25. *Problem MINGDA jest $\mathcal{NP}$–zupełny w klasie dwudzielnych planarnych grafów podkubicznych.*

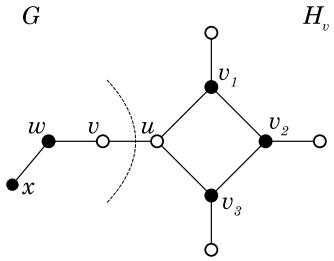
Dowód. Problem *MINGDA* należy do klasy $\mathcal{NP}$. Przedstawimy redukcję, przekształcającą instancję problemu *TDOM* w instancję problemu *MINGDA* w czasie wielomianowym. Rozważmy dwudzielny, planarny graf podkubiczny G, dla którego $\mathrm{n}(G) \geq 3$. Oznaczmy przez p liczbę liści w tym grafie (tzn. wierzchołków stopnia 1). Konstruujemy graf G' w następujący sposób: dla każdego liścia $v \in \mathrm{V}(G)$ dołączamy gadżet H, o strukturze przedstawionej na rysunku 3.14. Niech

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

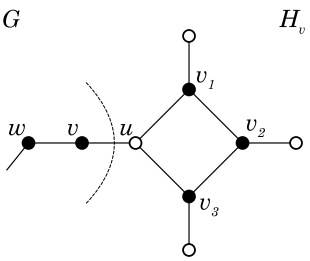
$L(G) = \{v \in \mathrm{V}(G)\colon \deg_G(v) = 1\}$. Jako, że $\mathrm{n}(G) \geq 3$, to dla dowolnych wierzchołków v, w, taki że $v \in L(G)$ i $w \in \mathrm{N}_G(v)$ mamy $|\mathrm{N}_G(w)| \geq 2$. Wykażemy, że w grafie G istnieje totalnie dominu-



Rys. 3.14: H_v dołączony do wierzchołka v



Rys. 3.15: v nie należy do koalicji defensywnej, w, x należą



Rys. 3.16: v i w należą do koalicji defensywnej

jący zbiór U o co najwyżej k wierzchołkach wtedy i tylko wtedy, gdy w grafie $G^{'}$ istnieje globalna koalicja defensywna A, taka, że $|A| \leq k + 3p$, gdzie $p = |L(G)|$.

($\Rightarrow$) Niech $U \subseteq \mathrm{V}(G)$ będzie zbiorem totalnie dominującym w grafie G takim, że $|U| \leq k$. Ze stwierdzenia 3.17 wiemy, że zbiór U jest globalną koalicją defensywną w grafie G. Niech $A = U \cup \bigcup_{v \in L(G)}\{v_1, v_2, v_3\}$ (zgodnie z rysunkiem 3.14). Zatem dla każdego wierzchołka $v \in L(G)$ możliwe są dwa przypadki przedstawione na rysunkach 3.15 i 3.16, gdzie wierzchołki zaznaczone na czarno należą do zbioru U. Zachodzi $\mathrm{SEC}_{G'}(A, v_i)$ dla $i = 1, 2, 3$ oraz wierzchołki $\{v_1, v_2, v_3\}$ dominują wierzchołki należące do zbioru H_v. Zatem zbiór A jest globalną koalicją defensywną oraz $|A| \leq k + 3p$.

($\Leftarrow$) Niech zbiór A będzie globalną koalicją defensywną w grafie $G^{'}$, taką że $|A| \leq k+3p$. Ponieważ zbiór A jest zbiorem dominującym w grafie $G^{'}$, zatem $|A \cap \mathrm{V}(H_v)| \geq 3$ dla każdego wierzchołka $v \in L(G)$. Co więcej, jeżeli dla pewnego wierzchołka $v \in L(G)$, wierzchołek $u \in A \cap \mathrm{V}(H_v)$ sąsiaduje z wierzchołkiem v w grafie $G^{'}$, to $|A \cap \mathrm{V}(H_v)| \geq 4$.

Dla każdego wierzchołka $v \in L(G)$ i jego sąsiada u, takiego że $u \in A \cap \mathrm{V}(H_v)$ możemy wykonać lokalną podmianę $A^{'} = A \cap (\mathrm{V}(G^{'}) \setminus \mathrm{V}(H_v)) \cup \{w\} \cup \{v_1, v_2, v_3\}$, gdzie wierzchołek w jest sąsiadem wierzchołka v w grafie G. Jeżeli $v \notin A$, to $x \in A$ dla pewnego wierzchołka $x \in \mathrm{N}_G(w)$, gdzie $w \in \mathrm{N}_G(v)$. Rysunek 3.15 przedstawia wycinek zbioru $A^{'}$ po wykonaniu operacji podmiany. Jeżeli natomiast $v \in A$, to odpowiedni wycinek zbioru $A^{'}$ jest zobrazowany na rysunku 3.16. Zwróćmy uwagę, że zbiór $A^{'}$ jest globalną koalicją defensywną w grafie G', a ponieważ $|A \cap \mathrm{V}(H_v)| \geq 4$, to $\left|A^{'}\right| \leq |A| \leq k + 3p$.

Zauważmy, że po skończonej liczbie iteracji przedstawionej powyżej procedury, dla każdego wierzchołka $v \in L(G)$ jego sąsiad $u \in \mathrm{V}(H_v)$ nie należy do zbioru $A^{'}$. Zdefiniujmy teraz $A^{''} = A^{'} \cap \mathrm{V}(G) \cup \bigcup_{v \in L(G)}\{v_1, v_2, v_3\}$. Zbiór $A^{''}$ jest globalną koalicją defensywną w grafie G' i $\left|A^{''}\right| \leq \left|A^{'}\right| \leq k + 3p$.

Niech teraz $U = A^{''} \cap \mathrm{V}(G)$. Jako, że zbiór $A^{''}$ dominuje graf $G^{'}$, to zbiór U dominuje graf G. Dla dowolnego wierzchołka $v \in L(G)$, jeśli $v \in U$, to $w \in U$, gdzie $w \in \mathrm{N}_G(v)$ (jak na rysunku 3.16). Niech teraz $v \in U$ i niech $\deg_G(v) \geq 2$. Mamy $\mathrm{SEC}_G(U, v)$, więc $|\mathrm{N}_G[v] \cap U| \geq |\mathrm{N}_G(v) \setminus U|$.

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

Zatem istnieje wierzchołek $x \in U$ sąsiadujący z wierzchołkiem v. Czyli zbiór U jest zbiorem totalnie dominującym w grafie G a także $|U| \leq k$. □

Ze stwierdzenia 3.18 mamy natychmiast:

Twierdzenie 3.26. *Problem MINGDS jest $\mathcal{NP}$–zupełny w klasie dwudzielnych planarnych grafów podkubicznych.* □

3.6 Podsumowanie

W niniejszym rozdziale zaprezentowaliśmy definicję zbioru defensywnego. Analizowaliśmy jego podstawowe własności oraz oszacowaliśmy (część 3.2) rozmiar najmniejszego globalnego zbioru defensywnego w grafach ogólnych oraz w drzewach.

W kolejnej części (3.4) zaprezentowaliśmy wielomianowy algorytm poszukujący najmniejszego globalnego zbioru defensywnego w drzewie. Zatem w przypadku zagadnień praktycznych, w których możliwe jest skorzystanie z modelu zbiorów defensywnych w drzewach, poszukiwanie dokładnych rozwiązań można zrealizować w sposób wydajny.

Zauważyliśmy też (wniosek 3.2), że w modelu zbiorów defensywnych możemy liczyć na rozwiązania korzystniejsze (w sensie minimalizowania liczby wierzchołków) niż w przypadku modelu koalicji defensywnych. Zatem w zagadnieniach praktycznych dyskutowany w niniejszym rozdziale model może okazać się korzystniejszym wyborem.

W ostatniej części (3.5) pokazaliśmy, że problem poszukiwania najmniejszego globalnego zbioru defensywnego jest $\mathcal{NP}$–zupełny w przypadku klasy dwudzielnych planarnych grafów podkubicznych.

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

ROZDZIAŁ 4

Koalicje krawędziowe w grafach

W niniejszym rozdziale przyjrzymy się definicji, własnościom, algorytmom i zagadnieniom złożoności obliczeniowej w obrębie drugiego z modeli struktur defensywnych, który wraz z współautorami wprowadziliśmy do literatury artykułem [48], mianowicie modelowi koalicji krawędziowych (ang. *edge alliance*).

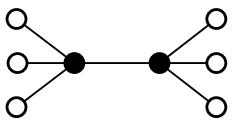
Definicja 4.1. Niech G będzie grafem. Niepusty zbiór $S \subseteq \mathrm{V}(G)$ nazywamy *koalicją krawędziową* (ang. *edge alliance*) wtedy i tylko wtedy, gdy podgraf indukowany $G[S]$ nie posiada wierzchołków izolowanych oraz dla każdej krawędzi $\{v, u\} \in \mathrm{E}(G[S])$ zachodzi $\mathrm{SEC}_G(S, \{v, u\})$. Jeżeli zbiór S jest jednocześnie zbiorem dominującym graf G, to mówimy, że S jest *globalną koalicją krawędziową*.

Zauważmy, że istnieje związek pomiędzy pojęciem globalnej koalicji krawędziowej a totalnym dominowaniem.

Stwierdzenie 4.1. *Niech G będzie grafem oraz $S \subseteq \mathrm{V}(G)$ będzie globalną koalicją krawędziową. Wtedy S jest zbiorem totalnie dominującym w grafie G.*

Dowód. Zbiór S jako globalna koalicja krawędziowa jest zbiorem dominującym, czyli $\mathrm{N}_G[S] = \mathrm{V}(G)$. Jako, że podgraf indukowany $G[S]$ nie posiada wierzchołków izolowanych, to $\mathrm{N}_{G[S]}(S) = \mathrm{V}(G[S]) = S$. A zatem $\mathrm{N}_G(S) = \mathrm{V}(G)$. □

Twierdzenie w drugą stronę oczywiście w ogólności nie zachodzi (zobacz rys. 4.1).



Rys. 4.1: Zbiór totalnie dominujący (wierzchołki czarne), który nie jest globalną koalicją krawędziową

Definicja koalicji krawędziowej wymaga, żeby każdy wierzchołek koalicji krawędziowej miał w niej sąsiada. Wynika z tego, między innymi, że w niektórych grafach nie istnieje koalicja krawędziowa. Mianowicie:

Stwierdzenie 4.2. *Niech G będzie grafem (niekoniecznie spójnym). Jeśli $\delta(G) \geq 1$, to w grafie G istnieje globalna koalicja krawędziowa. Jeżeli $\delta(G) = 0$, to w grafie G nie istnieje globalna koalicja krawędziowa.*

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

Dowód. Jeżeli $\delta(G) \geq 1$, to graf zbiór $\mathrm{V}(G)$ jest globalną koalicją krawędziową w grafie G. Faktycznie, w zbiorze $\mathrm{V}(G)$ każdy wierzchołek ma co najmniej jednego sąsiada. Oczywiście ze stwierdzenia 2.18 mamy, że dla każdej krawędzi $\{v, u\} \in \mathrm{E}(G[\mathrm{V}(G)])$ zachodzi $\mathrm{SEC}_G(\mathrm{V}(G), \{v, u\})$. Jeżeli $\delta(G) = 0$, to istnieje wierzchołek $v \in \mathrm{V}(G)$, który nie ma sąsiadów. Gdyby istniała globalna koalicja krawędziowa S w grafie G, to albo $v \in S$, albo istnieje sąsiad wierzchołka v należący do zbioru S. Oba przypadki prowadzą do sprzeczności. □

Istnieją grafy, w których nie istnieje żadna koalicja krawędziowa. Przykładowo dla dowolnej liczby naturalnej $n \geq 1$ w grafie pustym N_n nie istnieje żadna koalicja krawędziowa.

Definicja 4.2. Niech G będzie grafem, dla którego $\delta(G) \geq 1$. Liczbę elementów najmniej licznej koalicji krawędziowej w grafie G nazywamy *liczbą koalicji krawędziowej* i oznaczamy przez $ea(G)$. Liczbę elementów najmniej licznej globalnej koalicji krawędziowej w grafie G nazywamy *globalną liczą koalicji krawędziowej* w grafie G i oznaczamy jako $\gamma_{ea}(G)$.

Definicja 4.3. Liczność najliczniejszego podziału zbioru wierzchołków grafu na rozłączne, niepuste zbiory takie, że każdy zbiór tego podziału jest globalną koalicją krawędziową nazywamy *liczbą podziału na globalne koalicji krawędziowe.*

Stwierdzenie 4.3. *Niech G będzie grafem, dla którego $\delta(G) \geq 1$. Jeżeli w grafie G istnieje koalicja krawędziowa, to $ea(G) \geq 2$ oraz $\gamma_{ea}(G) \geq 2$.* □

Wniosek 4.4. *Niech G będzie grafem (niekoniecznie spójnym), dla którego $\delta(G) \geq 1$. Wtedy $ea(G) \geq 2c$ oraz $\gamma_{ea}(G) \geq 2c$, gdzie c jest liczbą składowych spójności grafu G.* □

Stwierdzenie 4.5. *Niech G będzie grafem, dla którego $\mathrm{n}(G) \geq 5$ oraz $\delta(G) \geq 1$. Wtedy $\gamma_{ea}(G) \geq 3$.*

Dowód. Na mocy lematu 4.3, $\gamma_{ea}(G) \geq 2$. Załóżmy, że rzeczywiście istnieje taka globalna koalicja krawędziowa S, że $|S| = 2$. Zatem zbiór $S = \{u, v\}$ dla pewnych wierzchołków $u, v \in \mathrm{V}(G)$. Wierzchołki te musi łączyć krawędź, a zatem zachodzi $\mathrm{SEC}_G(S, \{u, v\})$. Jednak zbiór S jest zbiorem dominującym, zatem $\mathrm{N}_G[S] = \mathrm{N}_G[\{u, v\}] = \mathrm{V}(G)$. Zatem $|\mathrm{N}_G[S] \cap S| = |S| = 2 < 3 \leq |\mathrm{V}(G) \setminus S| = |\mathrm{N}_G[S] \setminus S|$. Czyli krawędź $\{u, v\}$ nie jest zabezpieczona w sensie predykatu SEC, co jest sprzecznością. □

4.1 Koalicje krawędziowe jako struktury defensywne

Podobnie jak w przypadku zbiorów bezpiecznych dyskutowanych w poprzednim rozdziale, przyjrzyjmy się najpierw wprowadzonej definicji w ujęciu uogólnionej struktury defensywnej (tzn. zgodnie z definicją 2.8). Niech G będzie grafem oraz $S \subseteq \mathrm{V}(G)$ będzie (globalną) koalicją krawędziową. Zbiór S jest (globalną) strukturą defensywną typu $\mathcal{S}_G^{ea}$. W ten sposób model zbiorów defensywnych wpisuje się w ogólną koncepcję zaproponowaną w rozdziale 2. Zwróćmy jednak uwagę, że zależność

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

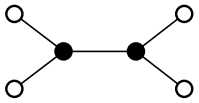
odwrotna nie zawsze jest prawdziwa. Warunek braku wierzchołków izolowanych w podgrafie indukowanym $G[S]$, występujący w definicji koalicji krawędziowej, sprawia, że nie każda struktura defensywna typu $\mathcal{S}_G^{ea}$ jest koalicją defensywną.

Zauważmy, że koncepcja koalicji krawędziowej jest restrykcją względem modelu zbioru defensywnego. Mianowicie zachodzi następujące stwierdzenie:

Stwierdzenie 4.6. *Niech G będzie grafem oraz $S \subseteq \mathrm{V}(G)$ będzie (globalną) koalicją krawędziową. Wtedy S jest (globalnym) zbiorem defensywnym.* □

Wniosek 4.7. *Niech G będzie grafem oraz $\delta(G) \geq 1$. Zachodzi $\gamma_{ds}(G) \leq \gamma_{ea}(G)$.* □

Twierdzenie odwrotne do 4.6 nie zachodzi. W grafie na rysunku 4.2 wierzchołki oznaczone kolorem czarnym tworzą globalny zbiór defensywny. Ten zbiór nie jest jednak koalicją krawędziową. W przypadku modelu koalicji defensywnych nie zachodzi podobna relacja w żadną stronę. Rysunek 4.3 prezentuje dwie odmienne sytuacje. W przypadku (a) dwuwierzchołkowa globalna koalicja defensywna (wierzchołki czarne) nie jest koalicją krawędziową. Natomiast w przypadku (b), trzywierzchołkowa globalna koalicja krawędziowa (wierzchołki czarne), nie jest koalicją defensywną.



Rys. 4.2: Zbiór defensywny (wierzchołki czarne), który jest również koalicją defensywną ale nie jest koalicją krawędziową.

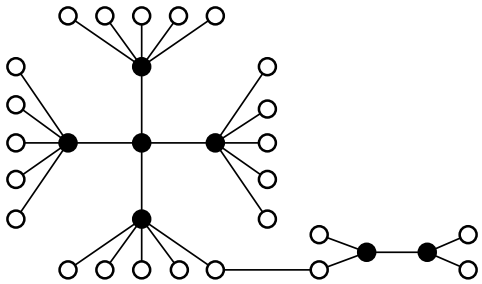
Rys. 4.3: Na rysunku (a) zaprezentowano koalicję defensywną (wierzchołki czarne) oraz koalicję krawędziową (wierzchołki czarne razem z szarymi) i zachodzi $\gamma_a = 2 < \gamma_{ea} = 3$. Na rysunku (b) mamy koalicję defensywną (wierzchołki czarne razem z szarymi) oraz koalicję krawędziową (wierzchołki czarne) i zachodzi $\gamma_{ea} = 3 < \gamma_a = 5$.

Możemy podsumować wnioski 3.2 oraz 4.7 jedną własnością 4.8. Ponadto rysunek 4.4 prezentuje, że nierówność z tego wniosku może być ostra.

Wniosek 4.8. *Niech G będzie grafem oraz $\delta(G) \geq 1$. Zachodzi $\gamma_{ds}(G) \leq \min\{\gamma_a(G), \gamma_{ea}(G)\}$.* □

W [26] autorzy pokazali, że dla grafów podkubicznych o minimalnym stopniu wierzchołka równym co najmniej dwa, liczności najmniejszej globalnej koalicji defensywnej i najmniejszego zbioru totalnie dominującego są równe.

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl



Rys. 4.4: Przykład grafu dla którego $\gamma_{ds}(G) < \min\{\gamma_a(G), \gamma_{ea}(G)\}$, $\gamma_a(G) = 15$, $\gamma_{ea}(G) = 8$, $\gamma_{ds}(G) = 7$. Wierzchołki czarne tworzą zbiór defensywny.

Stwierdzenie 4.9 ([26])**.** *Niech G będzie grafem oraz $\delta(G) \geq 2$ oraz $\Delta(G) \leq 3$. Wtedy $\gamma_t(G) = \gamma_a(G)$.* □

Zatem, ze stwierdzeń 4.9 oraz 4.1 otrzymujemy nierówność między licznościami najmniejszej globalnej koalicji krawędziowej, oraz najmniejszej globalnej koalicji defensywnej.

Wniosek 4.10. *Niech G będzie grafem oraz $\delta(G) \geq 2$ oraz $\Delta(G) \leq 3$. Wtedy $\gamma_{ea}(G) \geq \gamma_a(G)$.* □

Zarówno w przypadku koalicji defensywnych, jak i zbiorów defensywnych suma mnogościowa struktur tego typu również jest taką strukturą. To znaczy suma dwóch (stwierdzenie 2.1) lub więcej (wniosek 2.2) koalicji defensywnych również jest koalicją defensywną. Suma dwóch (stwierdzenie 3.5) lub więcej (wniosek 3.6) zbiorów defensywnych również jest zbiorem defensywnym. Podobna własność nie zawsze jest spełniona w modelu koalicji krawędziowych – nawet w przypadku dwóch rozłącznych globalnych koalicji krawędziowych.

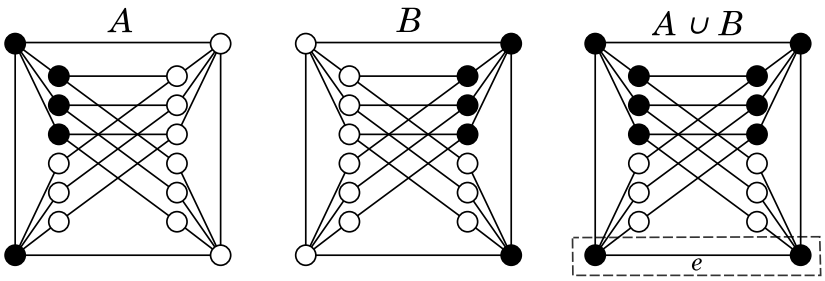
Stwierdzenie 4.11. *Istnieje nieskończona rodzina grafów, taka że w każdym grafie z tej rodziny istnieją dwie rozłączne globalne koalicji krawędziowe, których suma mnogościowa nie jest koalicją krawędziową.*

Dowód. Rysunek 4.5 prezentuje przykładowy graf o tej własności. Krawędź e (otoczona przerywaną linią) w grafie ze zbiorem oznaczonym jako $A \cup B$, nie jest zabezpieczona (w sensie predykatu SEC). W analogiczny sposób, zwiększając liczbę wierzchołków grafu, można konstruować dowolnie duże grafy o tej własności. □

4.2 Ograniczenia na rozmiar najmniejszej globalnej koalicji krawędziowej

Zacznijmy od obserwacji, która pomoże nam pokazać, że przy pewnych specyficznych topologiach grafów model koalicji krawędziowych może wymagać włączenia dużej liczby wierzchołków. Przypomnijmy, że w części 1.2 wprowadziliśmy definicję wierzchołka wspierającego (ang. *support vertex*) jako takiego, który wśród sąsiadów ma wierzchołek wiszący.

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl



Rys. 4.5: Dwie rozłączne globalne koalicje krawędziowe (A i B) oraz ich suma ($A \cup B$), która nie jest koalicją krawędziową. Dla krawędzi e nie jest spełniony warunek bezpieczeństwa w sensie predykatu SEC.

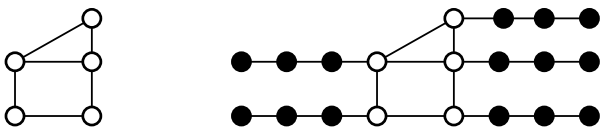
Stwierdzenie 4.12. *Niech G będzie grafem oraz $S \subseteq \mathrm{V}(G)$ będzie globalną koalicją krawędziową. Dla każdego wierzchołka wspierającego $s \in \mathrm{V}(G)$ zachodzi $s \in S$.*

Dowód. Załóżmy nie wprost, że istnieje wierzchołek wspierający $s \in \mathrm{V}(G)$, taki że $s \notin S$. Istnieje wierzchołek wiszący $l \in \mathrm{V}(G)$ będący sąsiadem wierzchołka s. Jako, że zbiór S jest zbiorem dominującym, to $l \in S$. Zatem w podgrafie indukowanym $G[S]$ wierzchołek l jest wierzchołkiem izolowanym. Stanowi to sprzeczność z definicją koalicji krawędziowej. □

Zauważmy, że konkluzja stwierdzenia 4.12 wskazuje na uniwersalny sposób generowania grafów, w których liczność najmniejszej globalnej koalicji krawędziowej jest znacząca względem liczby wszystkich wierzchołków. Wyrazimy tą obserwację formalnie, ale najpierw wprowadzimy pomocniczą definicję, która uprości sformułowanie.

Definicja 4.4. Niech G będzie grafem. *P_n–rozszerzeniem* grafu G nazywamy graf H powstały z grafu G oraz $\mathrm{n}(G)$ kopii ścieżki P_n. Każda ze ścieżek jest połączona z dokładnie jednym wierzchołkiem $v \in \mathrm{V}(G)$ krawędzią dołączoną do jednego z końców ścieżki.

Rysunek 4.6 prezentuje graf oraz jego P_3–rozszerzenie.



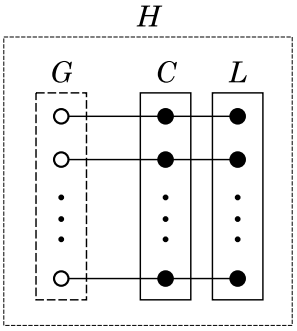
Rys. 4.6: Po lewej stronie znajduje się graf wyjściowy. Po prawej jego P_3–rozszerzenie.

Stwierdzenie 4.13. *Niech G będzie grafem oraz niech H będzie P_2–rozszerzeniem grafu G. Wtedy $\gamma_{ea}(H) = \frac{2}{3}\,\mathrm{n}(H) = 2\,\mathrm{n}(G)$.*

Dowód. Zauważmy, że $\delta(H) = 1$. Rozważmy osobno przypadek, w którym graf G jest grafem jednowierzchołkowym. Wtedy graf H jest izomorficzny ze ścieżką P_3. Łatwo sprawdzić, że $\gamma_{ea}(P_3) = 2$

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

co jest zgodne z tezą. W dalszej części dowodu zakładamy, że graf G ma co najmniej dwa wierzchołki. Niech zbiór S będzie globalną koalicją krawędziową w grafie H, dla której $|S| = \gamma_{ea}(H)$. Zauważmy, że zbiór wierzchołków wiszących w grafie H składa się z tych końców dołączanych ścieżek P_2, które nie zostały wykorzystane do dołączania do grafu G. Natomiast zbiór wierzchołków wspierających w grafie H składa się z tych końców dołączanych ścieżek P_2, które zostały bezpośrednie połączone z wierzchołkami grafu G. Oznaczmy zbiór wszystkich wierzchołków wiszących grafu H jako L oraz zbiór wszystkich wierzchołków wspierających w grafie H jako C. Rysunek 4.7 prezentuje wprowadzone oznaczenia. Zwróćmy też uwagę, że z konstrukcji grafu H mamy $|C| = |L| = \mathrm{n}(G)$. Na



Rys. 4.7: Przedstawienie oznaczeń użytych w dowodzie stwierdzenia 4.13.

mocy stwierdzenia 4.12 zachodzi $C \subseteq S$. Zauważmy, że każdy wierzchołek $c \in C$ ma dokładnie dwóch sąsiadów, jednego w zbiorze L i jednego wśród wierzchołków pochodzących z wyjściowego grafu G. Dodatkowo dla dowolnego $c' \in C$ jeżeli $c \neq c'$, to $\mathrm{N}_H(c) \cap \mathrm{N}_H(c') = \emptyset$. Czyli wierzchołek c ma dwóch unikalnych sąsiadów. Z definicji koalicji krawędziowej podgraf indukowany $H[S]$ nie posiada wierzchołków izolowanych, zatem jeden z sąsiadów wierzchołka c również należy do koalicji krawędziowej S. Stąd $|S| \geq 2\,|C| = 2\,\mathrm{n}(G)$. Na koniec zauważmy, że zbiór $S' = C \cup L$ jest globalną koalicją krawędziową oraz $|S'| = 2\,\mathrm{n}(G)$. Z minimalności (w sensie liczby elementów) zbioru S mamy $|S| \leq |S'| = 2\,\mathrm{n}(G)$. Zatem $|S| = 2\,\mathrm{n}(G)$, czyli $\gamma_{ea}(H) = 2\,\mathrm{n}(G) = \frac{2}{3}\,\mathrm{n}(H)$. □

Przejdziemy teraz do wskazania dolnego oszacowania na wartość parametru γ_{ea} w przypadku dowolnych grafów.

Najpierw wprowadzimy oznaczenie, które będzie potrzebne do sformułowania odpowiedniego twierdzenia. Niech G będzie grafem. Przypomnijmy (def. 1.17), że przez $\nu(G)$ oznaczamy rozmiar największego, w sensie liczby elementów, skojarzenia w grafie G. Dla dowolnego zbioru $S \subseteq \mathrm{V}(G)$ wprowadzimy skrótowe oznaczenie $\nu_S(G) = \nu(G[S])$ i definiujemy parametr:

$$\nu_{ea}(G) = \max\{\nu_S(G)\colon S \text{ jest globalną koalicją krawędziową } \wedge\, \gamma_{ea}(G) = |S|\}.$$

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

4.2.1 Ograniczenie dolne w przypadku ogólnym

Twierdzenie 4.14. *Niech G będzie grafem oraz $\delta(G) \geq 1$. Wtedy,*

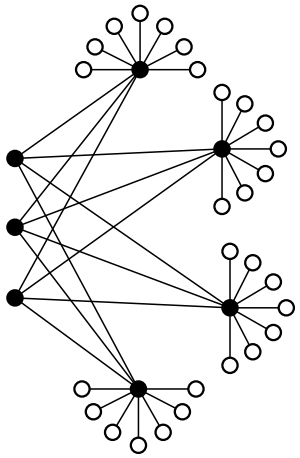
$$\gamma_{ea}(G) \geq \frac{\sqrt{4\,\mathrm{n}(G) + (\nu_{ea}(G)-1)^2} + \nu_{ea}(G) - 1}{2}.$$

Dowód. Niech S będzie dowolną globalną koalicją krawędziową, taką że $|S| = \gamma_{ea}(G)$ oraz $\nu_{ea}(G) = \nu_S(G)$. Dla zwięzłości przyjmijmy $V = \mathrm{V}(G)$, $n = \mathrm{n}(G)$, $s = |S|$ i $\nu = \nu_{ea}(G)$. Oczywiście $\nu > 0$. Zauważmy, że teza jest równoważna następującej nierówności: $s^2 - (\nu-1)s - n \geq 0$. Załóżmy nie wprost, że $s^2 - (\nu-1)s - n < 0$. Ze stwierdzenia 4.1 wiemy, że zbiór S jest zbiorem totalnie dominującym w grafie G. Zatem mamy $|\mathrm{N}_G[S] \cap (V \setminus S)| = |V \setminus S| = n - s > s^2 - \nu s$.

Z drugiej strony niech $M = \{\{v_i, u_i\} \colon i \in \{1, \ldots, \nu\}\}$ będzie największym skojarzeniem w podgrafie indukowanym $G[S]$ oraz $U = \bigcup_{i=1}^{\nu} \{v_i, u_i\}$. Jako, że $\mathrm{SEC}_G(S, \{v_i, u_i\})$, to $|\mathrm{N}_G[\{v_i, u_i\}] \cap (V \setminus S)| \leq |\mathrm{N}_G[\{v_i, u_i\}] \cap S| \leq s$. Jako, że $|\mathrm{N}_G[S \setminus U] \cap (V \setminus S)| + \sum_{i=1}^{\nu} |\mathrm{N}_G[\{v_i, u_i\}] \cap (V \setminus S)| \geq |(\mathrm{N}_G[S \setminus U] \cup \bigcup_{i=1}^{\nu} \mathrm{N}_G[\{v_i, u_i\}]) \cap (V \setminus S)| = |V \setminus S| > s^2 - \nu s$, otrzymujemy $|\mathrm{N}_G[S \setminus U] \cap (V \setminus S)| > s(s - 2\nu)$.

Dla każdego wierzchołka $w \in S$ istnieje wierzchołek $u \in S$ taki, że $\{w, u\} \in \mathrm{E}(G[S])$ oraz $\mathrm{SEC}_G(S, \{w, u\})$, zatem $|\mathrm{N}_G[w] \cap (V \setminus S)| \leq |\mathrm{N}_G[\{w, u\}] \cap (V \setminus S)| \leq |\mathrm{N}_G[\{w, u\}] \cap S| \leq s$. Czyli ostatecznie $|\mathrm{N}_G[S \setminus U] \cap (V \setminus S)| \leq \sum_{w \in S \setminus U} |\mathrm{N}_G[\{w\}] \cap (V \setminus S)| \leq s(s - 2\nu)$, co doprowadza nas do sprzeczności z założeniem nie wprost. □

Zauważmy, że dla dowolnych wartości całkowitych $r \geq 1$ i $l \geq r$ istnieje graf G o $\mathrm{n}(G) = l + r + l(l + r)$ wierzchołkach oraz $\nu_{ea}(G) = r$, taki że oszacowanie dolne 4.14 jest ścisłe. Pokażemy teraz przykładową nieskończoną rodzinę takich grafów. Niech $G = K^*_{r,l}$ będzie grafem uzyskanym z pełnego grafu dwudzielnego $K_{r,l}$ z dołączonymi $l + r$ wierzchołkami do każdego z wierzchołków partycji o l wierzchołkach (w przypadku $l = r$ wierzchołki dodajemy do jednej partycji). Wtedy $\gamma_{ea}(G) = l + r$ i $\gamma^2_{ea}(G) - \gamma_{ea}(G)(\nu_{ea}(G) - 1) = \mathrm{n}(G)$. Jeden z takich grafów został zaprezentowany na rysunku 4.8.



Rys. 4.8: Graf $G = K^*_{3,4}$. Mamy $\mathrm{n}(G) = 35$, $\gamma_{ea}(G) = 7$ i $\nu_{ea}(G) = 3$

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

W przypadku, w którym nie jesteśmy w stanie oszacować wartości $\nu_{ea}(G)$ oszacowanie przyjmuje uproszczoną, choć mniej precyzyjną, postać.

Wniosek 4.15. *Niech G będzie grafem oraz $\delta(G) \geq 1$. Wtedy $\gamma_{ea}(G) \geq \sqrt{\mathrm{n}(G)}$.*

Dowód. Ponieważ dowolna koalicja krawędziowa ma przynajmniej dwa wierzchołki oraz każdy wierzchołek posiada co najmniej jednego sąsiada w obrębie koalicji krawędziowej, to $\nu_{ea}(G) \geq 1$. Dla dowolnej wartości $A \geq 0$ funkcja $f_A \colon \mathbb{R} \to [0, \infty)$ zadana wzorem $f_A(x) = \frac{\sqrt{A+(x-1)^2}+(x-1)}{2}$ jest funkcją rosnącą. Zatem dla wartości $\nu_{ea}(G) = 1$ oszacowanie dolne w twierdzeniu 4.14 przyjmuje najmniejszą wartość równą $\sqrt{\mathrm{n}(G)}$ i jest poprawne niezależnie od wartości $\nu_{ea}(G)$. □

W kolejnym kroku przedstawimy dokładniejsze oszacowanie wartości $\nu_{ea}(G)$.

Stwierdzenie 4.16. *Niech G będzie grafem oraz $\delta(G) \geq 1$. Wtedy:*

$$\nu_{ea}(G) \geq \left\lceil \frac{\mathrm{diam}(G)+1}{5} \right\rceil.$$

Dowód. Przyjmijmy oznaczenie $d = \mathrm{diam}(G)$ i niech $v, u \in \mathrm{V}(G)$ będą wierzchołkami dla których $d_G(v,u) = d$. Niech $A_i = \{w \in \mathrm{V}(G) \colon d_G(v,w) = i\}$, dla $i \in \{0, \ldots, d\}$. Oczywiście $A_0 = \{v\}$ oraz $u \in A_d$. Zauważmy, że dla każdej krawędzi $\{x,y\} \in \mathrm{E}(G)$ jeżeli $x \in A_i$ i $y \in A_j$, to $|i-j| \leq 1$.

Niech $S \subseteq \mathrm{V}(G)$ będzie globalną koalicją krawędziową w grafie G taką, że $\gamma_{ea}(G) = |S|$. Na mocy stwierdzenia 4.1 zbiór S jest zbiorem totalnie dominującym w grafie G, zatem $S \cap A_1 \neq \emptyset$. Dodatkowo istnieje krawędź $\{v_0, u_0\} \in \mathrm{E}(G)$, taka że $\{v_0, u_0\} \subseteq S \cap (A_0 \cup A_1 \cup A_2)$. Zauważmy, że jeżeli $d \leq 4$, to teza stwierdzenia jest prawdziwa.

Przyjmijmy teraz, że $d = 5k + i$, gdzie $k \geq 1$ i $0 \leq i \leq 4$. Dla każdego $l \in \{0, \ldots, d-2\}$, mamy $S \cap (A_l \cup A_{l+1} \cup A_{l+2}) \neq \emptyset$. Zatem dla każdego $j \in \{1, \ldots, k-1\}$ istnieje krawędź $\{v_j, u_j\} \in \mathrm{E}(G)$, taka że $\{v_j, u_j\} \subseteq S \cap (A_{5j-2} \cup A_{5j-1} \cup A_{5j} \cup A_{5j+1} \cup A_{5j+2})$. Jeżeli $j = k$, to istnieje krawędź $\{v_k, u_k\} \in \mathrm{E}(G)$, taka że $\{v_k, u_k\} \subseteq S \cap (A_{5k-2} \cup A_{5k-1} \cup A_{5k} \cup \ldots \cup A_{5k+i})$.

Zbiór krawędzi $\{\{v_0, u_0\}, \ldots, \{v_k, u_k\}\}$ jest skojarzeniem w grafie $G[S]$, zatem mamy $\nu_{ea}(G) \geq \nu_S(G) \geq k + 1 = \lceil \frac{\mathrm{diam}(G)+1}{5} \rceil$. □

Stąd natychmiast otrzymujemy wniosek.

Wniosek 4.17. *Niech G będzie grafem oraz $\delta(G) \geq 1$. Wtedy,*

$$\gamma_{ea}(G) \geq \frac{\sqrt{4\,\mathrm{n}(G) + (\lceil \frac{\mathrm{diam}(G)+1}{5} \rceil - 1)^2} + \lceil \frac{\mathrm{diam}(G)+1}{5} \rceil - 1}{2}.$$ □

4.2.2 Ograniczenie górne w drzewach

Przejdziemy teraz do wykazania górnego oszacowania na rozmiar najmniejszej globalnej koalicji krawędziowej w drzewach.

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

Twierdzenie 4.18. *Niech T będzie drzewem i niech $\mathrm{n}(T) \geq 3$. Wtedy $\gamma_{ea}(T) \leq \frac{2}{3}\,\mathrm{n}(T)$. Co więcej, istnieje globalna koalicja krawędziowa S w drzewie T, która jest również globalną koalicją w drzewie T oraz $|S| \leq \frac{2}{3}\,\mathrm{n}(T)$.*

Dowód zostanie poprzedzony wprowadzeniem własności pomocniczych i obserwacjami dotyczącymi drzew T, dla których $\mathrm{n}(T) \leq 2$.

Lemat 4.19. *Niech T będzie drzewem i niech $e_b = \{v_1, v_2\} \in \mathrm{E}(T)$ będzie dowolną krawędzią. Niech $V_1, V_2 \subseteq \mathrm{V}(T)$ będą zbiorami wierzchołków składowych spójności grafu $H = (\mathrm{V}(T), \mathrm{E}(T) \setminus \{e_b\})$ (tzn. drzewa T z usuniętą krawędzią e_b) takimi, że $v_1 \in V_1$ oraz $v_2 \in V_2$. Jeżeli zbiory S_1, S_2 są globalnymi koalicjami krawędziowymi oraz globalnymi koalicjami defensywnymi odpowiednio w poddrzewach indukowanych $H[V_1]$ oraz $H[V_2]$ oraz zachodzi jeden z warunków:*

1. *$v_1 \in S_1$ oraz $v_2 \in S_2$,*
2. *$v_1 \in S_1$, $v_2 \notin S_2$, $|\mathrm{N}_{H[V_1]}[v_1] \cap S_1| \geq |\mathrm{N}_{H[V_1]}[v_1] \setminus S_1| + 1$ oraz $|\mathrm{N}_{H[V_1]}[e_i] \cap S_1| \geq |\mathrm{N}_{H[V_1]}[e_i] \setminus S_1| + 1$ dla każdej krawędzi $e_i = \{v_i, v_1\}$, gdzie $v_i \in V_1$,*
3. *$v_1 \notin S_1$, $v_2 \in S_2$, $|\mathrm{N}_{H[V_2]}[v_2] \cap S_2| \geq |\mathrm{N}_{H[V_2]}[v_2] \setminus S_2| + 1$ oraz $|\mathrm{N}_{H[V_2]}[e_i] \cap S_2| \geq |\mathrm{N}_{H[V_2]}[e_i] \setminus S_2| + 1$ dla każdej krawędzi $e_i = \{v_i, v_2\}$, gdzie $v_i \in V_2$,*
4. *$v_1 \notin S_1$ oraz $v_2 \notin S_2$,*

to zbiór $S = S_1 \cup S_2$ jest globalną koalicją krawędziową oraz globalną koalicją defensywną w drzewie T.

Dowód. Oczywiście zbiór S jest zbiorem dominującym w drzewie T. Pozostaje nam zweryfikować, że wierzchołki v_1 oraz v_2 są zabezpieczone (w sensie predykatu SEC), o ile należą do zbioru S. Musimy też zweryfikować, że krawędzie o końcach w wierzchołkach v_1 lub w v_2 są zabezpieczone (w sensie predykatu SEC), dla wszystkich krawędzi, których oba końce należą do zbioru S.
Przypadek (1). Sytuacja jest symetryczna, więc skoncentrujemy się na analizie wierzchołka v_1:

- $\mathrm{SEC}_T(S, v_1)$, ponieważ $|\mathrm{N}_T[v_1] \cap S| = |\mathrm{N}_{H[V_1]}[v_1] \cap S_1| + 1$ oraz $|\mathrm{N}_T[v_1] \setminus S| = |\mathrm{N}_{H[V_1]}[v_1] \setminus S_1|$,
- $\mathrm{SEC}_T(S, e_b)$, ponieważ $|\mathrm{N}_T[e_b] \cap S| = |\mathrm{N}_{H[V_1]}[v_1] \cap S_1| + |\mathrm{N}_{H[V_2]}[v_2] \cap S_2|$ oraz $|\mathrm{N}_T[e_b] \setminus S| = |\mathrm{N}_{H[V_1]}[v_1] \setminus S_1| + |\mathrm{N}_{H[V_2]}[v_2] \setminus S_2|$,
- $\mathrm{SEC}_T(S, e_i)$ dla wszystkich krawędzi $e_i = \{v_i, v_1\}$, dla których $v_i \in V_1$, ponieważ $|\mathrm{N}_T[e_i] \cap S| = |\mathrm{N}_{H[V_1]}[e_i] \cap S_1| + 1$ oraz $|\mathrm{N}_T[e_i] \setminus S| = |\mathrm{N}_{H[V_1]}[e_i] \setminus S_1|$.

Analiza dla wierzchołka v_2 jest analogiczna.
Przypadki (2) **i** (3). Oba przypadki są symetryczne, zatem skupimy się na analizie przypadku (2).

- $\mathrm{SEC}_T(S, v_1)$, ponieważ $|\mathrm{N}_T[v_1] \cap S| = |\mathrm{N}_{H[V_1]}[v_1] \cap S_1|$ oraz $|\mathrm{N}_T[v_1] \setminus S| = |\mathrm{N}_{H[V_1]}[v_1] \setminus S_1| + 1$,
- $\mathrm{SEC}_T(S, e_i)$ dla wszystkich krawędzi $e_i = \{v_i, v_1\}$, dla których $v_i \in V_1$, ponieważ $|\mathrm{N}_T[e_i] \cap S| = |\mathrm{N}_{H[V_1]}[e_i] \cap S_1|$ oraz $|\mathrm{N}_T[e_i] \setminus S| = |\mathrm{N}_{H[V_1]}[e_i] \setminus S_1| + 1$.

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

Analiza dla przypadku (3) jest analogiczna.

Przypadek (4). W tej sytuacji nie ma potrzeby weryfikacji, ponieważ dla żadnego z wierzchołków zbiorów S_1 i S_2 nie zmienia się ich liczba sąsiadów. Nie pojawia się również ani jedna nowa krawędź o końcach w zbiorze S. □

W kolejnych lematach osobno rozpatrzymy własności analogiczne do przedstawionej w lemacie 4.19. W tych przypadkach skupiamy się na sytuacji, w której po rozcięciu drzewa rozmiar jednej ze składowych spójności powstałych po rozcięciu okazuje się mały.

Lemat 4.20. *Niech T będzie drzewem, $l \in \mathrm{V}(T)$ liściem a $s \in \mathrm{V}(T)$ jego sąsiadem. Zbiory $V_1 = \{l\}$ oraz $V_2 = \mathrm{V}(G) \setminus \{l\}$ są składowymi spójności grafu $H = (\mathrm{V}(T), \mathrm{E}(T) \setminus \{l, s\})$ (tzn. drzewa T z usuniętą krawędzią $\{l, s\}$). Jeżeli zbiór $S \subseteq V_2$ jest globalną koalicją krawędziową oraz globalną koalicją defensywną w poddrzewie indukowanym $H[V_2]$, oraz zachodzą warunki:*

- $s \in S$,
- $|\mathrm{N}_{H[V_2]}[s] \cap S| \geq |\mathrm{N}_{H[V_2]}[s] \setminus S| + 1$,
- $|\mathrm{N}_{H[V_2]}[e_i] \cap S| \geq |\mathrm{N}_{H[V_2]}[e_i] \setminus S| + 1$ *dla każdej krawędzi* $e_i = \{v_i, s\}$, *gdzie* $v_i \in V_2$,

to zbiór S jest globalną koalicją krawędziową oraz globalną koalicją defensywną w drzewie T.

Dowód. Oczywiście zbiór S jest zbiorem dominującym w drzewie T. Pozostaje nam zweryfikować, że wierzchołek s jest zabezpieczony (w sensie predykatu SEC), oraz że zabezpieczone (w sensie predykatu SEC) są też wszystkie krawędzie wychodzące z wierzchołka s w kierunku wierzchołków zbioru S.

- $\mathrm{SEC}_T(S, s)$, ponieważ $|\mathrm{N}_T[s] \cap S| = |\mathrm{N}_{H[V_2]}[s] \cap S|$ oraz $|\mathrm{N}_T[s] \setminus S| = |\mathrm{N}_{H[V_2]}[v_2] \setminus S| + 1$,
- $\mathrm{SEC}_T(S, e_i)$ dla wszystkich krawędzi $e_i = \{v_i, s\}$, dla których $v_i \in S$, ponieważ $|\mathrm{N}_T[e_i] \cap S| = |\mathrm{N}_{H[V_2]}[e_i] \cap S|$ oraz $|\mathrm{N}_T[e_i] \setminus S| = |\mathrm{N}_{H[V_2]}[e_i] \setminus S| + 1$. □

Lemat 4.21. *Niech T będzie drzewem, $l \in \mathrm{V}(T)$ liściem, $s \in \mathrm{V}(T)$ jego sąsiadem, $\deg_T(s) = 2$ oraz $c \in \mathrm{V}(T)$ drugim sąsiadem wierzchołka s (tzn. $s \neq l$). Zbiory $V_1 = \{l, s\}$ oraz $V_2 = \mathrm{V}(G) \setminus \{l, s\}$ są składowymi spójności grafu $H = (\mathrm{V}(T), \mathrm{E}(T) \setminus \{s, c\})$ (tzn. drzewa T z usuniętą krawędzią $\{s, c\}$). Jeżeli zbiór $S \subseteq V_2$ jest globalną koalicją krawędziową oraz globalną koalicją defensywną w poddrzewie indukowanym $H[V_2]$ oraz $c \in S$, to zbiór $S' = S \cup \{s\}$ jest globalną koalicją krawędziową oraz globalną koalicją defensywną w drzewie T.*

Dowód. Oczywiście zbiór S' jest zbiorem dominującym w drzewie T. Pozostaje nam zweryfikować, że wierzchołki c oraz s są zabezpieczone (w sensie predykatu SEC), oraz że zabezpieczone (w sensie predykatu SEC) są również wszystkie krawędzie wychodzące z wierzchołka c w kierunku wierzchołków zbioru S.

- $\mathrm{SEC}_T(S', s)$, ponieważ $|\mathrm{N}_T[s] \cap S'| = 2$ oraz $|\mathrm{N}_T[s] \setminus S'| = 1$,

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

- $\mathrm{SEC}_T(S', c)$, ponieważ $|\mathrm{N}_T[c] \cap S'| = |\mathrm{N}_{H[V_2]}[c] \cap S| + 1$ oraz $|\mathrm{N}_T[c] \setminus S'| = |\mathrm{N}_{H[V_2]}[c] \setminus S|$,
- $\mathrm{SEC}_T(S', \{s, c\})$, ponieważ $|\mathrm{N}_T[\{s, c\}] \cap S'| = |\mathrm{N}_{H[V_2]}[c] \cap S| + 1$ oraz $|\mathrm{N}_T[\{s, c\}] \setminus S'| = |\mathrm{N}_{H[V_2]}[c] \setminus S| + 1$,
- $\mathrm{SEC}_T(S', e_i)$ dla wszystkich krawędzi $e_i = \{v_i, c\}$, dla których $v_i \in S$, ponieważ $|\mathrm{N}_T[e_i] \cap S'| = |\mathrm{N}_{H[V_2]}[e_i] \cap S| + 1$ oraz $|\mathrm{N}_T[e_i] \setminus S'| = |\mathrm{N}_{H[V_2]}[e_i] \setminus S|$. □

Lemat 4.22. *Niech $0 \leq n \leq N$ oraz $0 \leq m \leq M$ będą liczbami całkowitymi, gdzie $N, M > 0$, $\frac{n}{N} \leq \delta$ oraz $\frac{m}{M} \leq \delta$ dla pewnej liczby $\delta > 0$. Wtedy $\frac{n+m}{N+M} \leq \delta$.*

Dowód. Zauważmy, że $n \leq N\delta$ oraz $m \leq M\delta$. Dodając obie nierówności stronami otrzymujemy $n + m \leq N\delta + M\delta = (N + M)\delta$. □

Powyższe lematy pozwolą nam rozcinać drzewa, szukać rozwiązań spełniających oszacowanie w składowych spójności a następnie łączyć rozwiązanie zachowując oszacowanie dla wyjściowego drzewa. Jednak najpierw podsumujemy kwestię istnienia i rozmiaru globalnej koalicji krawędziowej w najmniejszych drzewach.

Lemat 4.23. *Zachodzą następujące własności:*

1. *w drzewie jednowierzchołkowym N_1 nie istnieje globalna koalicja krawędziowa,*
2. *dla dwuwierzchołkowego drzewa P_2 mamy $\gamma_{ea}(P_2) = 2 = \mathrm{n}(P_2)$.*

Dowód. Punkt (1) wynika z lematu 4.3. W przypadku punktu (2) z lematu 4.3 wiemy, że potrzebujemy co najmniej dwóch wierzchołków. Łatwo zauważyć, że zbiór $\mathrm{V}(P_2)$ jest globalna koalicją krawędziową w grafie P_2. □

Po zidentyfikowaniu dwóch skrajnych przypadków (lemat 4.23), możemy przejść do dowodu twierdzenia 4.18.

Dowód twierdzenia 4.18. Jako, że $\mathrm{n}(T) \geq 3$, to $\mathrm{diam}(T) \geq 2$. Przyjmijmy oznaczenia $V = \mathrm{V}(G)$ oraz $n = |\mathrm{V}(G)|$. W dalszej części przeprowadzimy rozumowanie polegające na wskazywaniu i zliczaniu wierzchołków należących do globalnej koalicji krawędziowej, oraz wierzchołki leżące poza nią. Niech S będzie globalną koalicją krawędziową w drzewie T. Dla dowolnego zbioru $A \subseteq V$ przyjmijmy następujące oznaczenia:

- $B_{T,S}(A) = \mathrm{N}_T[A] \cap S$,
- $b_{T,S}(A) = |B_{T,S}(A)|$,
- $W_{T,S}(A) = \mathrm{N}_T[A] \setminus B_{T,S}(A)$,
- $w_{T,S}(A) = |w_{T,S}(A)|$.

W przypadku zbioru A będącego pojedynczym wierzchołkiem $v \in V$ zastosujemy uproszczoną notację: $B_{T,S}(v), W_{T,S}(v), b_{T,S}(v), w_{T,S}(v)$. W dowodzie będziemy analizować liczne przypadki wykazując bezpieczeństwo (w sensie predykatu SEC) wierzchołków i krawędzi drzewa. Zauważmy, że

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

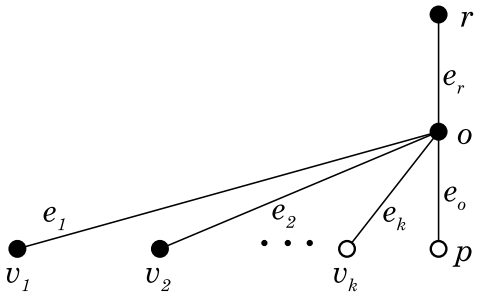
$\mathrm{SEC}_T(S, A)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $b_{T,S}(A) \geq w_{T,S}(A)$. Podczas analiz będziemy wyznaczać wartości $b_{T,S}(A)$ oraz $w_{T,S}(A)$ i przedstawimy je w postaci łatwej do porównania.

Schemat dowodu jest następujący:

1. Najpierw konstrukcyjnie dowodzimy tezy dla drzew o średnicy równej 2 i 3.
2. Następnie dla drzew o średnicy nie mniejszej niż 4 przeprowadzamy indukcję ze względu na liczbę wierzchołków drzewa.

Przypadek $\mathrm{diam}(T) = 2$.

Ogólna postać drzewa T wraz z proponowaną globalną koalicją krawędziową została zaprezentowana na rysunku 4.9. Niech $S = \{r, o, v_1, \ldots, v_{\lfloor k/2 \rfloor}\}$ według oznaczeń zgodnych z rysunkiem 4.9.



Rys. 4.9: Ogólna postać drzewa o średnicy równej 2 wraz z proponowaną globalną koalicją krawędziową (wierzchołki czarne).

Dla parzystych wartości $k = 2l$, gdzie $l \geq 0$, mamy $b_{T,S}(V) = 2 + l$ oraz $w_{T,S}(V) = 1 + l$ a także $n = 3 + 2l$. Oszacowanie jest wtedy spełnione ponieważ:

$$\frac{b_{T,S}(V)}{n} = \frac{2+l}{3+2l} \leq \frac{2}{3} \iff l \geq 0.$$

Zachodzi:

- $\mathrm{SEC}_T(S, e_r)$, ponieważ $b_{T,S}(e_r) = 2 + l$ oraz $w_{T,S}(e_r) = 1 + l$,
- $\mathrm{SEC}_T(S, e_i)$ dla $i \in \{1, \ldots, \lfloor k/2 \rfloor\}$, ponieważ $b_{T,S}(e_i) = 2 + l$ oraz $w_{T,S}(e_i) = 1 + l$,
- $\mathrm{SEC}_T(S, r)$, ponieważ $b_{T,S}(r) = 2$ oraz $w_{T,S}(r) = 0$,
- $\mathrm{SEC}_T(S, o)$, ponieważ $b_{T,S}(o) = 2 + l$ oraz $w_{T,S}(o) = 1 + l$,
- $\mathrm{SEC}_T(S, v_i)$ dla $i \in \{1, \ldots, \lfloor k/2 \rfloor\}$, ponieważ $b_{T,S}(v_i) = 2$ oraz $w_{T,S}(v_i) = 0$.

Dla nieparzystych wartości $k = 2l + 1$, gdzie $l \geq 0$, mamy $b_{T,S}(V) = 2 + l$ oraz $w_{T,S}(V) = 2 + l$, a także $n = 4 + 2l$. Oszacowanie jest wtedy spełnione ponieważ:

$$\frac{b_{T,S}(V)}{n} = \frac{2+l}{4+2l} \leq \frac{2}{3} \iff l \geq -2.$$

Zachodzi:

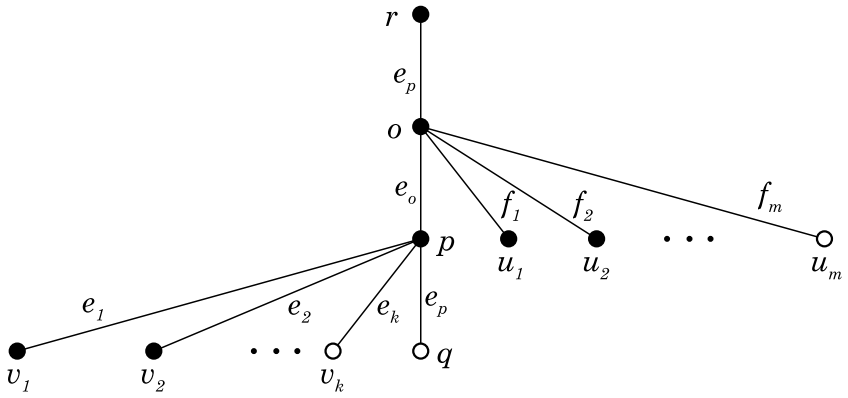
MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

- $\mathrm{SEC}_T(S, e_r)$, ponieważ $b_{T,S}(e_r) = 2 + l$ oraz $w_{T,S}(e_r) = 2 + l$,
- $\mathrm{SEC}_T(S, e_i)$ dla $i \in \{1, \ldots, \lfloor k/2 \rfloor\}$, ponieważ $b_{T,S}(e_i) = 2 + l$ oraz $w_{T,S}(e_i) = 2 + l$,
- $\mathrm{SEC}_T(S, r)$, ponieważ $b_{T,S}(r) = 2$ oraz $w_{T,S}(r) = 0$,
- $\mathrm{SEC}_T(S, o)$, ponieważ $b_{T,S}(o) = 2 + l$ oraz $w_{T,S}(o) = 2 + l$,
- $\mathrm{SEC}_T(S, v_i)$ dla $i \in \{1, \ldots, \lfloor k/2 \rfloor\}$, ponieważ $b_{T,S}(v_i) = 2$ oraz $w_{T,S}(v_i) = 0$.

Zatem zbiór S spełnia tezę twierdzenia.

Przypadek $\mathrm{diam}(T) = 3$.

Ogólna postać drzewa T wraz z proponowaną (za wyjątkiem sytuacji $k = m = 0$) globalną koalicją krawędziową została przedstawiona na rysunku 4.10.



Rys. 4.10: Ogólna postać drzewa o średnicy równej 3 wraz z proponowaną koalicją krawędziową (wierzchołki czarne).

Na początek rozważmy sytuacje w której $k = m = 0$. Zbiór $S = \{o, p\}$ jest globalną koalicją krawędziową. W dalszej części będziemy zakładać, że $k + m \geq 1$.

Niech $S = \{r, o, p, v_1, \ldots, v_{\lfloor k/2 \rfloor}, u_1, \ldots, u_{\lfloor m/2 \rfloor}\}$. Rozważmy przypadek, w którym wartości k, m są parzyste, czyli $k = 2a$ oraz $m = 2b$ dla pewnych całkowitych wartości a i b. Wtedy $b_{T,S}(V) = 3 + a + b$, $w_{T,S}(V) = 1 + a + b$ oraz $n = 4 + 2a + 2b$. Oszacowanie jest spełnione ponieważ:

$$\frac{b_{T,S}(V)}{n} = \frac{3 + a + b}{4 + 2a + 2b} \leq \frac{2}{3} \iff a + b \geq 1 \iff k + m \geq 0.$$

Zachodzi:

- $\mathrm{SEC}_T(S, e_r)$, ponieważ $b_{T,S}(e_r) = 3 + b$ oraz $w_{T,S}(e_r) = b$,
- $\mathrm{SEC}_T(S, e_o)$, ponieważ $b_{T,S}(e_o) = 3 + a + b$ oraz $w_{T,S}(e_o) = 1 + a + b$,
- $\mathrm{SEC}_T(S, e_i)$, dla $i \in \{1, \ldots, \lfloor k/2 \rfloor\}$, ponieważ $b_{T,S}(e_i) = 2 + a$ oraz $w_{T,S}(e_i) = 1 + a$,
- $\mathrm{SEC}_T(S, f_i)$, dla $i \in \{1, \ldots, \lfloor m/2 \rfloor\}$, ponieważ $b_{T,S}(f_i) = 3 + b$ oraz $w_{T,S}(f_i) = b$,
- $\mathrm{SEC}_T(S, r)$, ponieważ $b_{T,S}(r) = 2$ oraz $w_{T,S}(r) = 0$,

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

- $\mathrm{SEC}_T(S, o)$, ponieważ $b_{T,S}(o) = 3 + b$ oraz $w_{T,S}(o) = b$,
- $\mathrm{SEC}_T(S, p)$, ponieważ $b_{T,S}(p) = 2 + a$ oraz $w_{T,S}(p) = 1 + a$,
- $\mathrm{SEC}_T(S, v_i)$ dla $i \in \{1, \ldots, \lfloor k/2 \rfloor\}$, ponieważ $b_{T,S}(v_i) = 2$ oraz $w_{T,S}(v_i) = 0$,
- $\mathrm{SEC}_T(S, u_i)$ dla $i \in \{1, \ldots, \lfloor m/2 \rfloor\}$, ponieważ $b_{T,S}(u_i) = 2$ oraz $w_{T,S}(u_i) = 0$.

Rozważmy teraz przypadek, w którym wartość k jest nieparzysta ($k = 2a + 1$) a wartość m jest parzysta ($m = 2b$). Wtedy $b_{T,S}(V) = 3 + a + b$, $w_{T,S}(V) = 2 + a + b$ oraz $n = 5 + 2a + 2b$. Oszacowanie jest spełnione ponieważ:

$$\frac{b_{T,S}(V)}{n} = \frac{3 + a + b}{5 + 2a + 2b} \leq \frac{2}{3} \iff a + b \geq -1.$$

Zachodzi:

- $\mathrm{SEC}_T(S, e_r)$, ponieważ $b_{T,S}(e_r) = 3 + b$ oraz $w_{T,S}(e_r) = b$,
- $\mathrm{SEC}_T(S, e_o)$, ponieważ $b_{T,S}(e_o) = 3 + a + b$ oraz $w_{T,S}(e_o) = 2 + a + b$,
- $\mathrm{SEC}_T(S, e_i)$, dla $i \in \{1, \ldots, \lfloor k/2 \rfloor\}$, ponieważ $b_{T,S}(e_i) = 2 + a$ oraz $w_{T,S}(e_i) = 2 + a$,
- $\mathrm{SEC}_T(S, f_i)$, dla $i \in \{1, \ldots, \lfloor m/2 \rfloor\}$, ponieważ $b_{T,S}(f_i) = 3 + b$ oraz $w_{T,S}(f_i) = b$,
- $\mathrm{SEC}_T(S, r)$, ponieważ $b_{T,S}(r) = 2$ oraz $w_{T,S}(r) = 0$,
- $\mathrm{SEC}_T(S, o)$, ponieważ $b_{T,S}(o) = 3 + b$ oraz $w_{T,S}(o) = b$,
- $\mathrm{SEC}_T(S, p)$, ponieważ $b_{T,S}(p) = 2 + a$ oraz $w_{T,S}(p) = 2 + a$,
- $\mathrm{SEC}_T(S, v_i)$ dla $i \in \{1, \ldots, \lfloor k/2 \rfloor\}$, ponieważ $b_{T,S}(v_i) = 2$ oraz $w_{T,S}(v_i) = 0$,
- $\mathrm{SEC}_T(S, u_i)$ dla $i \in \{1, \ldots, \lfloor m/2 \rfloor\}$, ponieważ $b_{T,S}(u_i) = 2$ oraz $w_{T,S}(u_i) = 0$.

Rozważmy teraz przypadek, w którym wartość k jest parzysta ($k = 2a$) a wartość m jest nieparzysta ($m = 2b + 1$). Wtedy $b_{T,S}(V) = 3 + a + b$, $w_{T,S}(V) = 2 + a + b$ oraz $n = 5 + 2a + 2b$. Oszacowanie jest spełnione ponieważ:

$$\frac{b_{T,S}(V)}{n} = \frac{3 + a + b}{5 + 2a + 2b} \leq \frac{2}{3} \iff a + b \geq -1.$$

Zachodzi:

- $\mathrm{SEC}_T(S, e_r)$, ponieważ $b_{T,S}(e_r) = 3 + b$ oraz $w_{T,S}(e_r) = 1 + b$,
- $\mathrm{SEC}_T(S, e_o)$, ponieważ $b_{T,S}(e_o) = 3 + a + b$ oraz $w_{T,S}(e_o) = 2 + a + b$,
- $\mathrm{SEC}_T(S, e_i)$, dla $i \in \{1, \ldots, \lfloor k/2 \rfloor\}$, ponieważ $b_{T,S}(e_i) = 2 + a$ oraz $w_{T,S}(e_i) = 1 + a$,
- $\mathrm{SEC}_T(S, f_i)$, dla $i \in \{1, \ldots, \lfloor m/2 \rfloor\}$, ponieważ $b_{T,S}(f_i) = 3 + b$ oraz $w_{T,S}(f_i) = 1 + b$,
- $\mathrm{SEC}_T(S, r)$, ponieważ $b_{T,S}(r) = 2$ oraz $w_{T,S}(r) = 0$,
- $\mathrm{SEC}_T(S, o)$, ponieważ $b_{T,S}(o) = 3 + b$ oraz $w_{T,S}(o) = 1 + b$,
- $\mathrm{SEC}_T(S, p)$, ponieważ $b_{T,S}(p) = 2 + a$ oraz $w_{T,S}(p) = 1 + a$,

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

- $\mathrm{SEC}_T(S, v_i)$ dla $i \in \{1, \ldots, \lfloor k/2 \rfloor\}$, ponieważ $b_{T,S}(v_i) = 2$ oraz $w_{T,S}(v_i) = 0$,
- $\mathrm{SEC}_T(S, u_i)$ dla $i \in \{1, \ldots, \lfloor m/2 \rfloor\}$, ponieważ $b_{T,S}(u_i) = 2$ oraz $w_{T,S}(u_i) = 0$.

Rozważmy przypadek, w którym wartości k, m są nieparzyste, czyli $k = 2a+1$ oraz $m = 2b+1$ dla całkowitych wartości a i b. Wtedy $b_{T,S}(V) = 3 + a + b$, $w_{T,S}(V) = 3 + a + b$ oraz $n = 6 + 2a + 2b$. Oszacowanie jest spełnione ponieważ:

$$\frac{b_{T,S}(V)}{n} = \frac{3 + a + b}{6 + 2a + 2b} \leq \frac{2}{3} \iff a + b \geq -3.$$

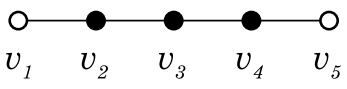
Zachodzi:

- $\mathrm{SEC}_T(S, e_r)$, ponieważ $b_{T,S}(e_r) = 3 + b$ oraz $w_{T,S}(e_r) = 1 + b$,
- $\mathrm{SEC}_T(S, e_o)$, ponieważ $b_{T,S}(e_o) = 3 + a + b$ oraz $w_{T,S}(e_o) = 3 + a + b$,
- $\mathrm{SEC}_T(S, e_i)$, dla $i \in \{1, \ldots, \lfloor k/2 \rfloor\}$, ponieważ $b_{T,S}(e_i) = 2 + a$ oraz $w_{T,S}(e_i) = 2 + a$,
- $\mathrm{SEC}_T(S, f_i)$, dla $i \in \{1, \ldots, \lfloor m/2 \rfloor\}$, ponieważ $b_{T,S}(f_i) = 3 + b$ oraz $w_{T,S}(f_i) = 1 + b$,
- $\mathrm{SEC}_T(S, r)$, ponieważ $b_{T,S}(r) = 2$ oraz $w_{T,S}(r) = 0$,
- $\mathrm{SEC}_T(S, o)$, ponieważ $b_{T,S}(o) = 3 + b$ oraz $w_{T,S}(o) = 1 + b$,
- $\mathrm{SEC}_T(S, p)$, ponieważ $b_{T,S}(p) = 2 + a$ oraz $w_{T,S}(p) = 2 + a$,
- $\mathrm{SEC}_T(S, v_i)$ dla $i \in \{1, \ldots, \lfloor k/2 \rfloor\}$, ponieważ $b_{T,S}(v_i) = 2$ oraz $w_{T,S}(v_i) = 0$,
- $\mathrm{SEC}_T(S, u_i)$ dla $i \in \{1, \ldots, \lfloor m/2 \rfloor\}$, ponieważ $b_{T,S}(u_i) = 2$ oraz $w_{T,S}(u_i) = 0$.

Zatem zbiór S spełnia tezę twierdzenia.

Przypadek $\mathrm{diam}(T) \geq 4$.

Przeprowadzimy indukcję ze względu na liczbę wierzchołków drzewa. Najmniejszym (oraz jednym) w sensie liczby wierzchołków drzewem o średnicy nie mniejszej niż 4 jest pięciowierzchołkowy graf P_5 (rys. 4.11).



Rys. 4.11: Graf P_5 z najmniejszą globalną koalicją krawędziową (wierzchołki czarne).

Zbiór $S = \{v_2, v_3, v_4\}$ (oznaczenia zgodne z rysunkiem 4.11) spełnia tezę twierdzenia. Załóżmy teraz, że teza jest spełniona dla wszystkich drzew o średnicy nie mniejszej niż 4, których rozmiar jest mniejszy niż n, gdzie $n > 5$. Pokażemy, że teza jest spełniona dla dowolnego drzewa o średnicy nie mniejszej niż 4 rozmiaru n.

Schemat dowodu jest następujący:

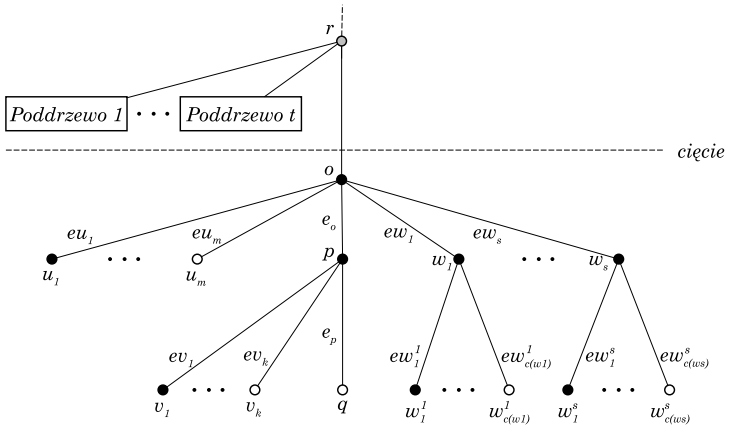
- W pierwszej części będziemy odcinać z drzewa T poddrzewo o ustalonej strukturze (rys. 4.12).

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

- Poprzez analizę przypadków wskażemy konstrukcję globalnej koalicji krawędziowej w odciętym poddrzewie, chyba że struktura jest taka jak na rysunku 4.18. W tym przypadku odcinamy większe poddrzewo i poprzez analizę przypadków wskazujemy globalną koalicję krawędziową.
- Skorzystamy z założenia indukcyjnego oraz lematów 4.20, 4.21, 4.19 oraz 4.22, żeby wskazać jak uzyskać globalną koalicję krawędziową w całym drzewie T.

Wybierzmy dowolną najdłuższą ścieżkę w drzewie T i oznaczmy ją przez P. Niech $(\alpha, \ldots, r, o, p, q)$ będzie uszeregowaniem wierzchołków ścieżki P w kolejności w jakiej są ze sobą połączone w ścieżce P. Rozważmy drzewo T w reprezentacji ukorzenionej w wierzchołku α, czyli w jednym z końców ścieżki P.

W pierwszej części rozumowania będziemy starali się rozciąć drzewo T poprzez usunięcie krawędzi $\{r, o\}$. Uzyskamy w ten sposób dwa mniejsze drzewa, które oznaczymy jako T_u oraz T_b. Przyjmijmy, że wierzchołek $o \in \mathrm{V}(T_b)$ i rozważmy drzewo T_b w wersji ukorzenionej w wierzchołku o. Zostało to przedstawione na rysunku 4.12.



Rys. 4.12: Rozcięcie krawędzi $\{r, o\}$ drzewa T.

W drzewie T_b wskażemy zbiór S zgodny z tezą twierdzenia (tzn. będący globalną koalicją krawędziową oraz globalną koalicją defensywną), który spełnia dodatkowe warunki:

- $o \in S$,
- $b_{T_b,S}(\{o, v\}) - w_{T_b,S}(\{o, v\}) \geq 1$, dla wszystkich wierzchołków $v \in \mathrm{V}(T_b)$, dla których $\{o, v\} \in \mathrm{E}(T_b)$,
- $b_{T_b,S}(o) - w_{T_b,S}(o) \geq 1$,
- $|S| \leq \frac{2}{3}|\mathrm{V}(T_b)|$.

Drzewo T_u może mieć jedną z następujących postaci, od której zależy sposób w jaki będziemy konstruować zbiór S' spełniający tezę twierdzenia.

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

1. **Graf jednowierzchołkowy** N_1**:** W tym przypadku skorzystamy z lematów 4.20 oraz 4.22 żeby uzasadnić, że zbiór $S' = S$ spełnia tezę twierdzenia.
2. **Ścieżka** P_2**:** W tym przypadku skorzystamy z lematów 4.21 oraz 4.22 żeby uzasadnić, że zbiór $S' = S \cup \{r\}$ spełnia tezę twierdzenia.
3. **Drzewo o średnicy** 2 **lub** 3**:** W pierwszej części dowodu przedstawiliśmy konstrukcję zbioru S_u, który spełnia tezę twierdzenia dla drzewa T_u. Skorzystamy z lematów 4.19 oraz 4.22 żeby uzasadnić, że zbiór $S' = S_u \cup S$ spełnia tezę twierdzenia.
4. **Drzewo o średnicy nie mniejszej niż** 4**:** W tym przypadku na mocy założenia indukcyjnego istnieje zbiór S_u, który spełnia tezę twierdzenia dla drzewa T_u. Ponownie skorzystamy z lematów 4.19 oraz 4.22, żeby uzasadnić, że zbiór $S' = S_u \cup S$ spełnia tezę twierdzenia.

Przejdziemy teraz do analizy przypadków drzewa T_b. Niech:

$$\begin{aligned} S &= \{o, p\} \cup \{u_1, \ldots, u_{\lfloor m/2 \rfloor}\} \cup \{v_1, \ldots, v_{\lceil k/2 \rceil}\} \cup \\ &\quad \{w_1, \ldots, w_s\} \cup \{w_1^1, \ldots, w_{\lfloor c(w_1)/2 \rfloor}^1\} \cup \cdots \cup \{w_1^s, \ldots, w_{\lfloor c(w_s)/2 \rfloor}^s\}. \end{aligned}$$

Pokażemy, że tak zdefiniowany zbiór S spełnia przedstawione kryteria, chyba że struktura grafu jest taka jak na rysunkach 4.13, 4.15, lub 4.18.

Przypadek $2 \mid k$ **i** $2 \mid m$.

Rozważmy przypadek, w którym wartości k, m są parzyste, czyli $k = 2a$ oraz $m = 2b$ dla całkowitych wartości $a \geq 0$ i $b \geq 0$. Wtedy:

$$\begin{aligned} b_{T_b,S}(V) &= 2 + a + b + s + \lfloor c(w_1)/2 \rfloor + \cdots + \lfloor c(w_s)/2 \rfloor, \\ w_{T_b,S}(V) &= 1 + a + b + \lceil c(w_1)/2 \rceil + \cdots + \lceil c(w_s)/2 \rceil, \\ n &= 3 + 2a + 2b + s + c(w_1) + \cdots + c(w_s). \end{aligned}$$

Nierówność:

$$\frac{b_{T_b,S}(V)}{n} = \frac{2 + a + b + s + \lfloor c(w_1)/2 \rfloor + \cdots + \lfloor c(w_s)/2 \rfloor}{3 + 2a + 2b + s + c(w_1) + \cdots + c(w_s)} \leq \frac{2}{3}$$

jest równoważna nierówności:

$$a + b \geq s + (3\lfloor c(w_1)/2 \rfloor - 2c(w_1)) + \cdots + (3\lfloor c(w_s)/2 \rfloor - 2c(w_s)).$$

Ta nierówność jest spełniona ponieważ $a + b \geq 0$ oraz:

$$0 \geq s + (3\lfloor c(w_1)/2 \rfloor - 2c(w_1)) + \cdots + (3\lfloor c(w_s)/2 \rfloor - 2c(w_s)).$$

Zachodzi:

- $\mathrm{SEC}_{T_b}(S, e_o)$, ponieważ $b_{T_b,S}(e_o) = 2 + a + b + s$ oraz $w_{T_b,S}(e_o) = 1 + a + b$,

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

- $\mathrm{SEC}_{T_b}(S, eu_i)$, dla $i \in \{1, \ldots, \lfloor m/2 \rfloor\}$, ponieważ $b_{T_b,S}(eu_i) = 2 + b + s$ oraz $w_{T_b,S}(eu_i) = b$,
- $\mathrm{SEC}_{T_b}(S, ew_i)$, dla $i \in \{1, \ldots, s\}$, ponieważ $b_{T_b,S}(ew_i) = 2+b+s+\lfloor c(w_i)/2 \rfloor$ oraz $w_{T_b,S}(ew_i) = b + \lceil c(w_i)/2 \rceil$,
- $\mathrm{SEC}_{T_b}(S, ev_i)$, dla $i \in \{1, \ldots, \lceil k/2 \rceil\}$, ponieważ $b_{T_b,S}(ev_i) = 2 + a$ oraz $w_{T_b,S}(ev_i) = 1 + a$,
- $\mathrm{SEC}_{T_b}(S, ew_j^i)$, dla $i \in \{1, \ldots, s\}$, $j \in \{1, \ldots, \lfloor c(w_i)/2 \rfloor\}$, ponieważ $b_{T_b,S}(ew_j^i) = 2+\lfloor c(w_j)/2 \rfloor$ oraz $w_{T_b,S}(ew_j^i) = \lceil c(w_j)/2 \rceil$,
- $\mathrm{SEC}_{T_b}(S, o)$, ponieważ $b_{T_b,S}(o) = 2 + b + s$ oraz $w_{T_b,S}(o) = b$,
- $\mathrm{SEC}_{T_b}(S, p)$, ponieważ $b_{T_b,S}(p) = 2 + a$ oraz $w_{T_b,S}(p) = 1 + a$,
- $\mathrm{SEC}_{T_b}(S, u_i)$ dla $i \in \{1, \ldots, \lfloor m/2 \rfloor\}$, ponieważ $b_{T_b,S}(u_i) = 2$ oraz $w_{T_b,S}(u_i) = 0$,
- $\mathrm{SEC}_{T_b}(S, v_i)$ dla $i \in \{1, \ldots, \lceil k/2 \rceil\}$, ponieważ $b_{T_b,S}(v_i) = 2$ oraz $w_{T_b,S}(v_i) = 0$,
- $\mathrm{SEC}_{T_b}(S, w_i)$ dla $i \in \{1, \ldots, s\}$, ponieważ $b_{T_b,S}(w_i) = 2 + \lfloor c(w_i)/2 \rfloor$ oraz $w_{T_b,S}(w_i) = \lceil c(w_i)/2 \rceil$,
- $\mathrm{SEC}_{T_b}(S, w_j^i)$ dla $i \in \{1, \ldots, s\}$, $j \in \{1, \ldots, \lfloor c(w_i)/2 \rfloor\}$, ponieważ $b_{T_b,S}(w_j^i) = 2$ oraz $w_{T_b,S}(w_j^i) = 0$.

Zauważmy również, że spełnione są dodatkowe wymagania stawiane przez warunki (2) lub (3) lematu 4.19:

- $b_{T_b,S}(e_o) - w_{T_b,S}(e_o) = 1 + s \geq 1$,
- $b_{T_b,S}(eu_i) - w_{T_b,S}(eu_i) = 2 + s \geq 1$, dla $i \in \{1, \ldots, \lfloor m/2 \rfloor\}$,
- $b_{T_b,S}(ew_i) - w_{T_b,S}(ew_i) = 2 + s + \lfloor c(w_i)/2 \rfloor - \lceil c(w_i)/2 \rceil \geq 1$, dla $i \in \{1, \ldots, s\}$,
- $b_{T_b,S}(o) - w_{T_b,S}(o) = 2 + s \geq 1$.

Przypadek $2 \nmid k$ i $2 \nmid m$.

Rozważmy teraz przypadek, w którym wartości k, m są nieparzyste, czyli $k = 2a + 1$ oraz $m = 2b + 1$ dla całkowitych wartości $a \geq 0$ i $b \geq 0$. Wtedy:

$$\begin{aligned} b_{T_b,S}(V) &= 3 + a + b + s + \lfloor c(w_1)/2 \rfloor + \cdots + \lfloor c(w_s)/2 \rfloor, \\ w_{T_b,S}(V) &= 2 + a + b + \lceil c(w_1)/2 \rceil + \cdots + \lceil c(w_s)/2 \rceil, \\ n &= 5 + 2a + 2b + s + c(w_1) + \cdots + c(w_s). \end{aligned}$$

Nierówność:

$$\frac{b_{T_b,S}(V)}{n} = \frac{3 + a + b + s + \lfloor c(w_1)/2 \rfloor + \cdots + \lfloor c(w_s)/2 \rfloor}{5 + 2a + 2b + s + c(w_1) + \cdots + c(w_s)} \leq \frac{2}{3}$$

jest równoważna nierówności:

$$a + b \geq -1 + s + (3\lfloor c(w_1)/2 \rfloor - 2c(w_1)) + \cdots + (3\lfloor c(w_s)/2 \rfloor - 2c(w_s)).$$

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

Ta nierówność jest spełniona ponieważ $a + b \geq 0$ oraz:

$$0 \geq -1 + s + (3\lfloor c(w_1)/2 \rfloor - 2c(w_1)) + \cdots + (3\lfloor c(w_s)/2 \rfloor - 2c(w_s))$$

Zachodzi:

- $\mathrm{SEC}_{T_b}(S, e_o)$, ponieważ $b_{T_b,S}(e_o) = 3 + a + b + s$ oraz $w_{T_b,S}(e_o) = 2 + a + b$,
- $\mathrm{SEC}_{T_b}(S, eu_i)$, dla $i \in \{1, \ldots, \lfloor m/2 \rfloor\}$, ponieważ $b_{T_b,S}(eu_i) = 2+b+s$ oraz $w_{T_b,S}(eu_i) = 1+b$,
- $\mathrm{SEC}_{T_b}(S, ew_i)$, dla $i \in \{1, \ldots, s\}$, ponieważ $b_{T_b,S}(ew_i) = 2+b+s+\lfloor c(w_i)/2 \rfloor$ oraz $w_{T_b,S}(ew_i) = 1 + b + \lceil c(w_i)/2 \rceil$,
- $\mathrm{SEC}_{T_b}(S, ev_i)$, dla $i \in \{1, \ldots, \lceil k/2 \rceil\}$, ponieważ $b_{T_b,S}(ev_i) = 3 + a$ oraz $w_{T_b,S}(ev_i) = 1 + a$,
- $\mathrm{SEC}_{T_b}(S, ew_j^i)$, dla $i \in \{1, \ldots, s\}, j \in \{1, \ldots, \lfloor c(w_i)/2 \rfloor\}$, ponieważ $b_{T_b,S}(ew_j^i) = 2+\lfloor c(w_j)/2 \rfloor$ oraz $w_{T_b,S}(ew_j^i) = \lceil c(w_j)/2 \rceil$,
- $\mathrm{SEC}_{T_b}(S, o)$, ponieważ $b_{T_b,S}(o) = 2 + b + s$ oraz $w_{T_b,S}(o) = 1 + b$,
- $\mathrm{SEC}_{T_b}(S, p)$, ponieważ $b_{T_b,S}(p) = 3 + a$ oraz $w_{T_b,S}(p) = 1 + a$,
- $\mathrm{SEC}_{T_b}(S, u_i)$ dla $i \in \{1, \ldots, \lfloor m/2 \rfloor\}$, ponieważ $b_{T_b,S}(u_i) = 2$ oraz $w_{T_b,S}(u_i) = 0$,
- $\mathrm{SEC}_{T_b}(S, v_i)$ dla $i \in \{1, \ldots, \lceil k/2 \rceil\}$, ponieważ $b_{T_b,S}(v_i) = 2$ oraz $w_{T_b,S}(v_i) = 0$,
- $\mathrm{SEC}_{T_b}(S, w_i)$ dla $i \in \{1, \ldots, s\}$, ponieważ $b_{T_b,S}(w_i) = 2 + \lfloor c(w_i)/2 \rfloor$ oraz $w_{T_b,S}(w_i) = \lceil c(w_i)/2 \rceil$,
- $\mathrm{SEC}_{T_b}(S, w_j^i)$ dla $i \in \{1, \ldots, s\}, j \in \{1, \ldots, \lfloor c(w_i)/2 \rfloor\}$, ponieważ $b_{T_b,S}(w_j^i) = 2$ oraz $w_{T_b,S}(w_j^i) = 0$.

Zauważmy również, że spełnione są dodatkowe wymagania stawiane przez warunki (2) lub (3) lematu 4.19:

- $b_{T_b,S}(e_o) - w_{T_b,S}(e_o) = 1 + s \geq 1$,
- $b_{T_b,S}(eu_i) - w_{T_b,S}(eu_i) = 1 + s \geq 1$, dla $i \in \{1, \ldots, \lfloor m/2 \rfloor\}$,
- (krawędzie tego typu istnieją dla $s \geq 1$) $b_{T_b,S}(ew_i) - w_{T_b,S}(ew_i) = 1 + s + \lfloor c(w_i)/2 \rfloor - \lceil c(w_i)/2 \rceil \geq 1$, dla $i \in \{1, \ldots, s\}$,
- $b_{T_b,S}(o) - w_{T_b,S}(o) = 1 + s \geq 1$.

Przypadek $2 \nmid k$ i $2 \mid m$.

Rozważmy teraz przypadek, w którym wartość k jest nieparzysta ($k = 2a + 1$ dla całkowitego $a \geq 0$) a wartość m jest parzysta ($m = 2b$ dla całkowitego $b \geq 0$). Wtedy:

$$\begin{aligned} b_{T_b,S}(V) &= 3 + a + b + s + \lfloor c(w_1)/2 \rfloor + \cdots + \lfloor c(w_s)/2 \rfloor, \\ w_{T_b,S}(V) &= 1 + a + b + \lceil c(w_1)/2 \rceil + \cdots + \lceil c(w_s)/2 \rceil, \\ n &= 4 + 2a + 2b + s + c(w_1) + \cdots + c(w_s). \end{aligned}$$

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

Nierówność:

$$\frac{b_{T_b,S}(V)}{n} = \frac{3+a+b+s+\lfloor c(w_1)/2\rfloor+\cdots+\lfloor c(w_s)/2\rfloor}{4+2a+2b+s+c(w_1)+\cdots+c(w_s)} \leq \frac{2}{3}$$

jest równoważna nierówności:

$$a+b \geq 1+s+(3\lfloor c(w_1)/2\rfloor - 2c(w_1))+\cdots+(3\lfloor c(w_s)/2\rfloor - 2c(w_s)).$$

Ta nierówność jest spełniona jeżeli $a+b \geq 1$, ponieważ:

$$1 \geq 1+s+(3\lfloor c(w_1)/2\rfloor - 2c(w_1))+\cdots+(3\lfloor c(w_s)/2\rfloor - 2c(w_s)).$$

Załóżmy zatem, że $a+b \geq 1$. Zachodzi wtedy:

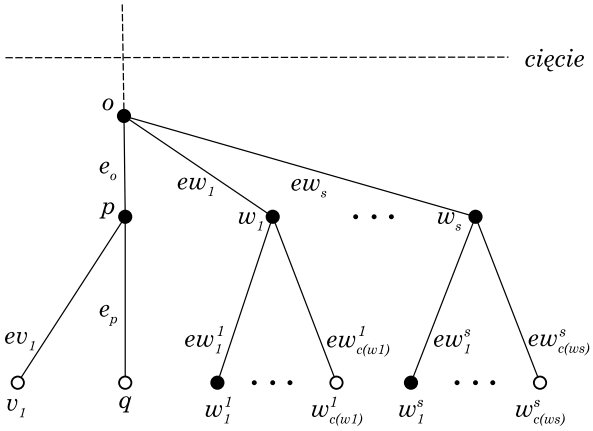
- $\mathrm{SEC}_{T_b}(S, e_o)$, ponieważ $b_{T_b,S}(e_o) = 3+a+b+s$ oraz $w_{T_b,S}(e_o) = 1+a+b$,
- $\mathrm{SEC}_{T_b}(S, eu_i)$, dla $i \in \{1,\ldots,\lfloor m/2\rfloor\}$, ponieważ $b_{T_b,S}(eu_i) = 2+b+s$ oraz $w_{T_b,S}(eu_i) = b$,
- $\mathrm{SEC}_{T_b}(S, ew_i)$, dla $i \in \{1,\ldots,s\}$, ponieważ $b_{T_b,S}(ew_i) = 2+b+s+\lfloor c(w_i)/2\rfloor$ oraz $w_{T_b,S}(ew_i) = b+\lceil c(w_i)/2\rceil$,
- $\mathrm{SEC}_{T_b}(S, ev_i)$, dla $i \in \{1,\ldots,\lceil k/2\rceil\}$, ponieważ $b_{T_b,S}(ev_i) = 3+a$ oraz $w_{T_b,S}(ev_i) = 1+a$,
- $\mathrm{SEC}_{T_b}(S, ew_j^i)$, dla $i \in \{1,\ldots,s\}$, $j \in \{1,\ldots,\lfloor c(w_i)/2\rfloor\}$, ponieważ $b_{T_b,S}(ew_j^i) = 2+\lfloor c(w_j)/2\rfloor$ oraz $w_{T_b,S}(ew_j^i) = \lceil c(w_j)/2\rceil$,
- $\mathrm{SEC}_{T_b}(S, o)$, ponieważ $b_{T_b,S}(o) = 2+b+s$ oraz $w_{T_b,S}(o) = b$,
- $\mathrm{SEC}_{T_b}(S, p)$, ponieważ $b_{T_b,S}(p) = 3+a$ oraz $w_{T_b,S}(p) = 1+a$,
- $\mathrm{SEC}_{T_b}(S, u_i)$ dla $i \in \{1,\ldots,\lfloor m/2\rfloor\}$, ponieważ $b_{T_b,S}(u_i) = 2$ oraz $w_{T_b,S}(u_i) = 0$,
- $\mathrm{SEC}_{T_b}(S, v_i)$ dla $i \in \{1,\ldots,\lceil k/2\rceil\}$, ponieważ $b_{T_b,S}(v_i) = 2$ oraz $w_{T_b,S}(v_i) = 0$,
- $\mathrm{SEC}_{T_b}(S, w_i)$ dla $i \in \{1,\ldots,s\}$, ponieważ $b_{T_b,S}(w_i) = 2+\lfloor c(w_i)/2\rfloor$ oraz $w_{T_b,S}(w_i) = \lceil c(w_i)/2\rceil$,
- $\mathrm{SEC}_{T_b}(S, w_j^i)$, dla $i \in \{1,\ldots,s\}$, $j \in \{1,\ldots,\lfloor c(w_i)/2\rfloor\}$, ponieważ $b_{T_b,S}(w_j^i) = 2$ oraz $w_{T_b,S}(w_j^i) = 0$.

Zauważmy również, że spełnione są dodatkowe wymagania stawiane przez warunek (2) lub (3) lematu 4.19:

- $b_{T_b,S}(e_o) - w_{T_b,S}(e_o) = 2+s \geq 1$,
- $b_{T_b,S}(eu_i) - w_{T_b,S}(eu_i) = 2+s \geq 1$, dla $i \in \{1,\ldots,\lfloor m/2\rfloor\}$,
- $b_{T_b,S}(ew_i) - w_{T_b,S}(ew_i) = 2+s+\lfloor c(w_i)/2\rfloor - \lceil c(w_i)/2\rceil \geq 1$, dla $i \in \{1,\ldots,s\}$,
- $b_{T_b,S}(o) - w_{T_b,S}(o) = 2+s \geq 1$.

Załóżmy teraz, że $a+b=0$, czyli $a=0$ i $b=0$, czyli $k=1$ i $m=0$. Odcinana część ma postać jak na rysunku 4.13.

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl



Rys. 4.13: Odcinana struktura dla $a = 0$ i $b = 0$, czyli $k = 1$, $m = 0$.

Niech:

$$S = \{o, p\} \cup \{w_1, \ldots, w_s\} \cup \{w^1_1, \ldots, w^1_{\lfloor c(w_1)/2 \rfloor}\} \cup \cdots \cup \{w^s_1, \ldots, w^s_{\lfloor c(w_s)/2 \rfloor}\},$$

przy oznaczeniach jak na rysunku 4.13. Zachodzi wtedy:

$$\begin{aligned} b_{T_b,S}(V) &= 2 + s + \lfloor c(w_1)/2 \rfloor + \cdots + \lfloor c(w_s)/2 \rfloor, \\ w_{T_b,S}(V) &= 2 + \lceil c(w_1)/2 \rceil + \cdots + \lceil c(w_s)/2 \rceil, \\ n &= 4 + s + c(w_1) + \cdots + c(w_s). \end{aligned}$$

Nierówność:

$$\frac{b_{T_b,S}(V)}{n} = \frac{2 + s + \lfloor c(w_1)/2 \rfloor + \cdots + \lfloor c(w_s)/2 \rfloor}{4 + s + c(w_1) + \cdots + c(w_s)} \leq \frac{2}{3}$$

jest równoważna nierówności:

$$2 + (2c(w_1) - 3\lfloor c(w_1)/2 \rfloor - 1) + \cdots + (2c(w_s) - 3\lfloor c(w_s)/2 \rfloor - 1) \geq 0.$$

Ta nierówność jest spełniona, ponieważ dla każdego $x \geq 1$ mamy $2x - 3\lfloor x/2 \rfloor - 1 \geq 0$.. Zachodzi:

- $\mathrm{SEC}_{T_b}(S, e_o)$, ponieważ $b_{T_b,S}(e_o) = 2 + s$ oraz $w_{T_b,S}(e_o) = 2$,
- $\mathrm{SEC}_{T_b}(S, ew_i)$, dla $i \in \{1, \ldots, s\}$, ponieważ $b_{T_b,S}(ew_i) = 2 + s + \lfloor c(w_i)/2 \rfloor$ oraz $w_{T_b,S}(ew_i) = \lceil c(w_i)/2 \rceil$,
- $\mathrm{SEC}_{T_b}(S, ew^i_j)$, dla $i \in \{1, \ldots, s\}, j \in \{1, \ldots, \lfloor c(w_i)/2 \rfloor\}$, ponieważ $b_{T_b,S}(ew^i_j) = 2 + \lfloor c(w_j)/2 \rfloor$ oraz $w_{T_b,S}(ew^i_j) = \lceil c(w_j)/2 \rceil$,
- $\mathrm{SEC}_{T_b}(S, o)$, ponieważ $b_{T_b,S}(o) = 2 + s$ oraz $w_{T_b,S}(o) = 0$,
- $\mathrm{SEC}_{T_b}(S, p)$, ponieważ $b_{T_b,S}(p) = 2$ oraz $w_{T_b,S}(p) = 2$,
- $\mathrm{SEC}_{T_b}(S, w_i)$ dla $i \in \{1, \ldots, s\}$, ponieważ $b_{T_b,S}(w_i) = 2 + \lfloor c(w_i)/2 \rfloor$ oraz $w_{T_b,S}(w_i) = \lceil c(w_i)/2 \rceil$,

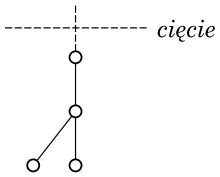
MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

- $\mathrm{SEC}_{T_b}(S, w_j^i)$, dla $i \in \{1, \ldots, s\}, j \in \{1, \ldots, \lfloor c(w_i)/2 \rfloor\}$, ponieważ $b_{T_b,S}(w_j^i) = 2$ oraz $w_{T_b,S}(w_j^i) = 0$.

Zauważmy również, że dla $s \geq 1$ spełnione są dodatkowe wymagania stawiane przez warunek (2) lub (3) lematu 4.19:

- $b_{T_b,S}(e_o) - w_{T_b,S}(e_o) = s \geq 1$,
- $b_{T_b,S}(ew_i) - w_{T_b,S}(ew_i) = 2 + s + \lfloor c(w_i)/2 \rfloor - \lceil c(w_i)/2 \rceil \geq 1$, dla $i \in \{1, \ldots, s\}$,
- $b_{T_b,S}(o) - w_{T_b,S}(o) = 2 + s \geq 1$.

Pozostaje nam zatem jedna sytuacja ($k = 1$, $m = 0$, $s = 0$), którą prezentujemy na rysunku 4.14. Zostanie ona uwzględniona w dalszej części.



Rys. 4.14: Odcinana struktura dla $k = 1$, $m = 0$ oraz $s = 0$.

Przypadek $2 \mid k$ **i** $2 \nmid m$.

Rozważmy teraz przypadek, w którym wartość k jest parzysta ($k = 2a$ dla całkowitego $a \geq 0$) a wartość m jest nieparzysta ($m = 2b + 1$ dla całkowitego $b \geq 0$). Niech:

$S = \{o, p, q\} \cup \{u_1, \ldots, u_{\lfloor m/2 \rfloor}\} \cup \{v_1, \ldots, v_{\lceil k/2 \rceil}\} \cup \{w_1, \ldots, w_s\} \cup$
$\{w_1^1, \ldots, w_{\lfloor c(w_1)/2 \rfloor}^1\} \cup \cdots \cup \{w_1^s, \ldots, w_{\lfloor c(w_s)/2 \rfloor}^s\}$

przy oznaczeniach jak na rysunku 4.14. Zachodzi wtedy:

$$\begin{aligned} b_{T_b,S}(V) &= 3 + a + b + s + \lfloor c(w_1)/2 \rfloor + \cdots + \lfloor c(w_s)/2 \rfloor, \\ w_{T_b,S}(V) &= 1 + a + b + \lceil c(w_1)/2 \rceil + \cdots + \lceil c(w_s)/2 \rceil, \\ n &= 4 + 2a + 2b + s + c(w_1) + \cdots + c(w_s). \end{aligned}$$

Nierówność:

$$\frac{b_{T_b,S}(V)}{n} = \frac{3 + a + b + s + \lfloor c(w_1)/2 \rfloor + \cdots + \lfloor c(w_s)/2 \rfloor}{4 + 2a + 2b + s + c(w_1) + \cdots + c(w_s)} \leq \frac{2}{3}$$

jest równoważna nierówności:

$$a + b \geq 1 + s + (3\lfloor c(w_1)/2 \rfloor - 2c(w_1)) + \cdots + (3\lfloor c(w_s)/2 \rfloor - 2c(w_s)).$$

Ta nierówność jest spełniona jeżeli $a + b \geq 1$, ponieważ:

$$1 \geq 1 + s + (3\lfloor c(w_1)/2 \rfloor - 2c(w_1)) + \cdots + (3\lfloor c(w_s)/2 \rfloor - 2c(w_s))$$

Załóżmy zatem, że $a + b \geq 1$. Zachodzi wtedy:

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

- $\mathrm{SEC}_{T_b}(S, e_o)$, ponieważ $b_{T_b,S}(e_o) = 3 + a + b + s$ oraz $w_{T_b,S}(e_o) = 1 + a + b$,
- $\mathrm{SEC}_{T_b}(S, e_p)$, ponieważ $b_{T_b,S}(e_p) = 3 + a$ oraz $w_{T_b,S}(e_p) = a$,
- $\mathrm{SEC}_{T_b}(S, eu_i)$, dla $i \in \{1, \ldots, \lfloor m/2 \rfloor\}$, ponieważ $b_{T_b,S}(eu_i) = 2+b+s$ oraz $w_{T_b,S}(eu_i) = 1+b$,
- $\mathrm{SEC}_{T_b}(S, ew_i)$, dla $i \in \{1, \ldots, s\}$, ponieważ $b_{T_b,S}(ew_i) = 2+b+s+\lfloor c(w_i)/2 \rfloor$ oraz $w_{T_b,S}(ew_i) = 1 + b + \lceil c(w_i)/2 \rceil$,
- $\mathrm{SEC}_{T_b}(S, ev_i)$, dla $i \in \{1, \ldots, \lceil k/2 \rceil\}$, ponieważ $b_{T_b,S}(ev_i) = 3 + a$ oraz $w_{T_b,S}(ev_i) = a$,
- $\mathrm{SEC}_{T_b}(S, ew_j^i)$, dla $i \in \{1, \ldots, s\}, j \in \{1, \ldots, \lfloor c(w_i)/2 \rfloor\}$, ponieważ $b_{T_b,S}(ew_j^i) = 2+\lfloor c(w_j)/2 \rfloor$ oraz $w_{T_b,S}(ew_j^i) = \lceil c(w_j)/2 \rceil$,
- $\mathrm{SEC}_{T_b}(S, o)$, ponieważ $b_{T_b,S}(o) = 2 + b + s$ oraz $w_{T_b,S}(o) = 1 + b$,
- $\mathrm{SEC}_{T_b}(S, p)$, ponieważ $b_{T_b,S}(p) = 3 + a$ oraz $w_{T_b,S}(p) = a$,
- $\mathrm{SEC}_{T_b}(S, u_i)$ dla $i \in \{1, \ldots, \lfloor m/2 \rfloor\}$, ponieważ $b_{T_b,S}(u_i) = 2$ oraz $w_{T_b,S}(u_i) = 0$,
- $\mathrm{SEC}_{T_b}(S, v_i)$ dla $i \in \{1, \ldots, \lceil k/2 \rceil\}$, ponieważ $b_{T_b,S}(v_i) = 2$ oraz $w_{T_b,S}(v_i) = 0$,
- $\mathrm{SEC}_{T_b}(S, w_i)$ dla $i \in \{1, \ldots, s\}$, ponieważ $b_{T_b,S}(w_i) = 2 + \lfloor c(w_i)/2 \rfloor$ oraz $w_{T_b,S}(w_i) = \lceil c(w_i)/2 \rceil$,
- $\mathrm{SEC}_{T_b}(S, w_j^i)$, dla $i \in \{1, \ldots, s\}, j \in \{1, \ldots, \lfloor c(w_i)/2 \rfloor\}$, ponieważ $b_{T_b,S}(w_j^i) = 2$ oraz $w_{T_b,S}(w_j^i) = 0$.

Zauważmy również, że spełnione są dodatkowe wymagania stawiane przez warunek (2) lub (3) lematu 4.19:

- $b_{T_b,S}(e_o) - w_{T_b,S}(e_o) = 2 + s \geq 1$,
- $b_{T_b,S}(eu_i) - w_{T_b,S}(eu_i) = 1 + s \geq 1$, dla $i \in \{1, \ldots, \lfloor m/2 \rfloor\}$,
- (krawędzie tego typu istnieją dla $s \geq 1$) $b_{T_b,S}(ew_i) - w_{T_b,S}(ew_i) = 1 + s + \lfloor c(w_i)/2 \rfloor - \lceil c(w_i)/2 \rceil \geq 1$, dla $i \in \{1, \ldots, s\}$,
- $b_{T_b,S}(o) - w_{T_b,S}(o) = 1 + s \geq 1$.

Załóżmy teraz, że $a + b = 0$, czyli $a = 0$ i $b = 0$, czyli $k = 0$ i $m = 1$. Odcinana część ma wtedy postać jak na rysunku 4.15.

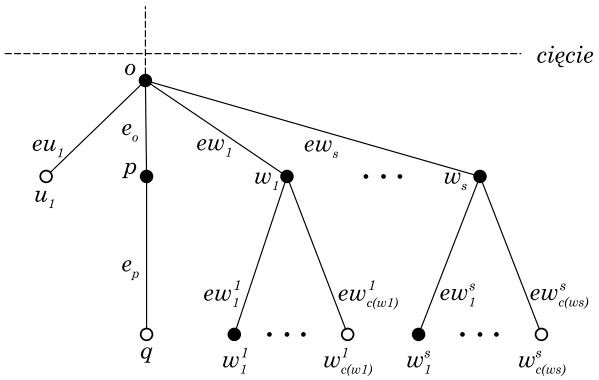
Niech:

$$S = \{o, p\} \cup \{w_1, \ldots, w_s\} \cup \{w_1^1, \ldots, w_{\lfloor c(w_1)/2 \rfloor}^1\} \cup \cdots \cup \{w_1^s, \ldots, w_{\lfloor c(w_s)/2 \rfloor}^s\},$$

przy oznaczeniach jak na rysunku 4.15. Mamy wtedy:

$$\begin{aligned} b_{T_b,S}(V) &= 2 + s + \lfloor c(w_1)/2 \rfloor + \cdots + \lfloor c(w_s)/2 \rfloor, \\ w_{T_b,S}(V) &= 2 + \lceil c(w_1)/2 \rceil + \cdots + \lceil c(w_s)/2 \rceil, \\ n &= 4 + s + c(w_1) + \cdots + c(w_s). \end{aligned}$$

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl



Rys. 4.15: Odcinana struktura dla $a = 0$ i $b = 0$, czyli $k = 0$ i $m = 1$.

Nierówność:

$$\frac{b_{T_b,S}(V)}{n} = \frac{2 + s + \lfloor c(w_1)/2 \rfloor + \cdots + \lfloor c(w_s)/2 \rfloor}{4 + s + c(w_1) + \cdots + c(w_s)} \leq \frac{2}{3}$$

jest równoważna nierówności:

$$2 + (2c(w_1) - 3\lfloor c(w_1)/2 \rfloor - 1) + \cdots + (2c(w_s) - 3\lfloor c(w_s)/2 \rfloor - 1) \geq 0.$$

Ta nierówność jest spełniona, ponieważ dla każdego $x \geq 1$ mamy $2x - 3\lfloor x/2 \rfloor - 1 \geq 0$. Zachodzi:

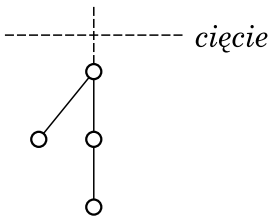
- $\mathrm{SEC}_{T_b}(S, e_o)$, ponieważ $b_{T_b,S}(e_o) = 2 + s$ oraz $w_{T_b,S}(e_o) = 2$,
- $\mathrm{SEC}_{T_b}(S, ew_i)$, dla $i \in \{1, \ldots, s\}$, ponieważ $b_{T_b,S}(ew_i) = 2 + s + \lfloor c(w_i)/2 \rfloor$ oraz $w_{T_b,S}(ew_i) = 1 + \lceil c(w_i)/2 \rceil$,
- $\mathrm{SEC}_{T_b}(S, ew_j^i)$, dla $i \in \{1, \ldots, s\}, j \in \{1, \ldots, \lfloor c(w_i)/2 \rfloor\}$, ponieważ $b_{T_b,S}(ew_j^i) = 2 + \lfloor c(w_j)/2 \rfloor$ oraz $w_{T_b,S}(ew_j^i) = \lceil c(w_j)/2 \rceil$,
- $\mathrm{SEC}_{T_b}(S, o)$, ponieważ $b_{T_b,S}(o) = 2 + s$ oraz $w_{T_b,S}(o) = 1$,
- $\mathrm{SEC}_{T_b}(S, p)$, ponieważ $b_{T_b,S}(p) = 2$ oraz $w_{T_b,S}(p) = 1$,
- $\mathrm{SEC}_{T_b}(S, w_i)$ dla $i \in \{1, \ldots, s\}$, ponieważ $b_{T_b,S}(w_i) = 2 + \lfloor c(w_i)/2 \rfloor$ oraz $w_{T_b,S}(w_i) = \lceil c(w_i)/2 \rceil$,
- $\mathrm{SEC}_{T_b}(S, w_j^i)$, dla $i \in \{1, \ldots, s\}, j \in \{1, \ldots, \lfloor c(w_i)/2 \rfloor\}$, ponieważ $b_{T_b,S}(w_j^i) = 2$ oraz $w_{T_b,S}(w_j^i) = 0$.

Zauważmy również, że dla $s \geq 1$ spełnione są dodatkowe wymagania stawiane przez warunek (2) lub (3) lematu 4.19:

- $b_{T_b,S}(e_o) - w_{T_b,S}(e_o) = s \geq 1$,
- (krawędzie tego typu istnieją dla $s \geq 1$) $b_{T_b,S}(ew_i) - w_{T_b,S}(ew_i) = 1 + s + \lfloor c(w_i)/2 \rfloor - \lceil c(w_i)/2 \rceil \geq 1$, dla $i \in \{1, \ldots, s\}$,
- $b_{T_b,S}(o) - w_{T_b,S}(o) = 1 + s \geq 1$.

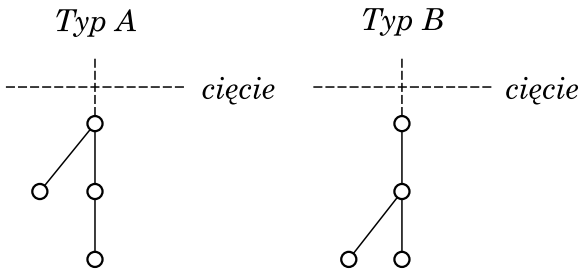
MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

Pozostaje nam zatem jedna sytuacja ($k = 0$, $m = 1$, $s = 0$), którą prezentujemy na rysunku 4.16. Zostanie ona uwzględniona w dalszej części.



Rys. 4.16: Odcinana struktura dla $k = 0$, $m = 1$ oraz $s = 0$.

Podsumowując dotychczasowe rozważania, strategia odcinania poddrzewa wysokości 3 pozwala skutecznie radzić sobie z niemal wszystkimi sytuacjami. Wyjątkiem są dwa poddrzewa przedstawione na poniższym rysunku 4.17 i oznaczone odpowiednio jako *Typ A* oraz *Typ B*.



Rys. 4.17: Poddrzewa nie uwzględnione podczas odcinania poddrzew wysokości 3.

Do tej pory rozważaliśmy arbitralnie wybraną najdłuższą ścieżkę P w drzewie T. Rozważmy każdą ścieżkę z rodziny najdłuższych ścieżek w drzewie T. Łatwo widać, że jeżeli dla żadnej z nich nie możemy odciąć drzewa T_b wysokości 3, które została sklasyfikowana w przeanalizowanych wcześniej przypadkach, to struktura drzewa T jest taka jak na rysunku 4.18.

Pokażemy, że możemy odciąć poddrzewo T_b ukorzenione w wierzchołku r (wysokości 4) i przeprowadzimy rozumowanie analogiczne do tego, które zastosowaliśmy dokonując cięcia krawędzi $\{r, o\}$ (czyli odcinania poddrzewa wysokości 3).

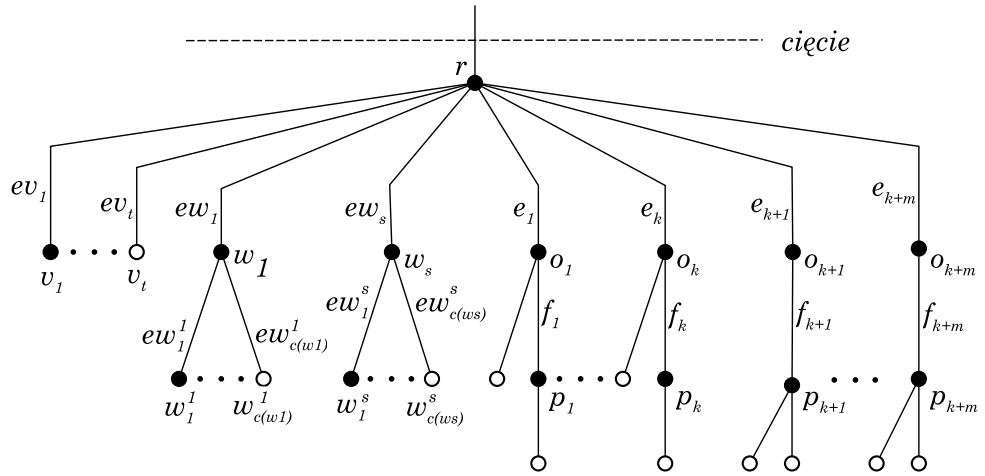
Zauważmy najpierw, że $k + m \geq 1$, ponieważ wysokość poddrzewa ukorzenionego w wierzchołku r jest równa 4. Oprócz tego $t \geq 0$ oraz $s \geq 0$ a także $c(w_i) \geq 1$ dla każdego $i \in \{1, \ldots, s\}$. Niech:

$$S = \{r\} \cup \{v_1, \ldots, v_{\lfloor t/2 \rfloor}\} \cup \{w_1, \ldots, w_s\} \cup \{w_1^1, \ldots, w_{\lfloor c(w_1)/2 \rfloor}^1\} \cup \cdots \cup \{w_1^s, \ldots, w_{\lfloor c(w_s)/2 \rfloor}^s\}.$$

Przypadek $2 \mid t$.

Rozważmy przypadek, w którym wartości t jest parzysta, tzn. $t = 2a$ dla całkowitego $a \geq 0$.

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl



Rys. 4.18: Odcinanie poddrzewa wysokości 4, w przypadku, w którym odcinanie poddrzew wysokości 3 wymuszałoby odcinanie poddrzew *Typu A* lub *Typu B*.

Wtedy:

$$\begin{aligned} b_{T_b,S}(V) &= 1 + a + s + 2k + 2m + \lfloor c(w_1)/2 \rfloor + \cdots + \lfloor c(w_s)/2 \rfloor, \\ w_{T_b,S}(V) &= a + 2k + 2m + \lceil c(w_1)/2 \rceil + \cdots + \lceil c(w_s)/2 \rceil, \\ n &= 1 + 2a + s + 4k + 4m + c(w_1) + \ldots c(w_s). \end{aligned}$$

Nierówność:

$$\frac{b_{T_b,S}(V)}{n} = \frac{1 + a + s + 2k + 2m + \lfloor c(w_1)/2 \rfloor + \cdots + \lfloor c(w_s)/2 \rfloor}{1 + 2a + s + 4k + 4m + c(w_1) + \ldots c(w_s)} \leq \frac{2}{3}$$

jest równoważna nierówności:

$$2(k+m) \geq 1 - a + (1 + 3\lfloor c(w_1)/2 \rfloor - 2c(w_1)) + \cdots + (1 + 3\lfloor c(w_s)/2 \rfloor - 2c(w_s))$$

Ta nierówność jest spełniona, ponieważ $2(k+m) \geq 2$ oraz:

$$1 \geq 1 - a + (1 + 3\lfloor c(w_1)/2 \rfloor - 2c(w_1)) + \cdots + (1 + 3\lfloor c(w_s)/2 \rfloor - 2c(w_s)),$$

ponieważ dla dowolnego $x \geq 1$ mamy $1 + 3\lfloor x/2 \rfloor - 2x \leq 0$. Zachodzi:

- $\mathrm{SEC}_{T_b}(S, e_i)$, dla $i \in \{1, \ldots, k\}$, ponieważ $b_{T_b,S}(e_i) = 2+k+m+s+a$ oraz $w_{T_b,S}(e_i) = 1+a$,
- $\mathrm{SEC}_{T_b}(S, e_i)$, dla $i \in \{k+1, \ldots, k+m\}$, ponieważ $b_{T_b,S}(e_i) = 2 + k + m + s + a$ oraz $w_{T_b,S}(e_i) = a$,
- $\mathrm{SEC}_{T_b}(S, f_i)$, dla $i \in \{1, \ldots, k+m\}$, ponieważ $b_{T_b,S}(f_i) = 3$ oraz $w_{T_b,S}(f_i) = 2$,
- $\mathrm{SEC}_{T_b}(S, ev_i)$, dla $i \in \{1, \ldots, \lfloor t/2 \rfloor\}$, ponieważ $b_{T_b,S}(ev_i) = 1+k+m+s+a$ oraz $w_{T_b,S}(ev_i) = a$,

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

- $\mathrm{SEC}_{T_b}(S, ew_i)$, dla $i \in \{1, \ldots, s\}$, ponieważ $b_{T_b,S}(ew_i) = 1 + k + m + s + a + \lfloor c(w_i)/2 \rfloor$ oraz $w_{T_b,S}(ew_i) = a + \lceil c(w_i)/2 \rceil$,
- $\mathrm{SEC}_{T_b}(S, ew_j^i)$, dla $i \in \{1, \ldots, s\}, j \in \{1, \ldots, \lfloor c(w_i)/2 \rfloor\}$, ponieważ $b_{T_b,S}(ew_j^i) = 2 + \lfloor c(w_j)/2 \rfloor$ oraz $w_{T_b,S}(ew_j^i) = \lceil c(w_j)/2 \rceil$,
- $\mathrm{SEC}_{T_b}(S, r)$, ponieważ $b_{T_b,S}(r) = 1 + k + m + s + a$ oraz $w_{T_b,S}(r) = a$,
- $\mathrm{SEC}_{T_b}(S, o_i)$, dla $i \in \{1, \ldots, k\}$, ponieważ $b_{T_b,S}(o_i) = 3$ oraz $w_{T_b,S}(o_i) = 1$,
- $\mathrm{SEC}_{T_b}(S, o_i)$, dla $i \in \{k+1, \ldots, k+m\}$, ponieważ $b_{T_b,S}(o_i) = 3$ oraz $w_{T_b,S}(o_i) = 0$,
- $\mathrm{SEC}_{T_b}(S, p_i)$, dla $i \in \{1, \ldots, k\}$, ponieważ $b_{T_b,S}(p_i) = 2$ oraz $w_{T_b,S}(p_i) = 1$,
- $\mathrm{SEC}_{T_b}(S, p_i)$, dla $i \in \{k+1, \ldots, k+m\}$, ponieważ $b_{T_b,S}(p_i) = 2$ oraz $w_{T_b,S}(p_i) = 2$,
- $\mathrm{SEC}_{T_b}(S, v_i)$, dla $i \in \{1, \ldots, \lfloor t/2 \rfloor\}$, ponieważ $b_{T_b,S}(v_i) = 2$ oraz $w_{T_b,S}(v_i) = 0$,
- $\mathrm{SEC}_{T_b}(S, w_i)$ dla $i \in \{1, \ldots, s\}$, ponieważ $b_{T_b,S}(w_i) = 2 + \lfloor c(w_i)/2 \rfloor$ oraz $w_{T_b,S}(w_i) = \lceil c(w_i)/2 \rceil$,
- $\mathrm{SEC}_{T_b}(S, w_j^i)$, dla $i \in \{1, \ldots, s\}, j \in \{1, \ldots, \lfloor c(w_i)/2 \rfloor\}$, ponieważ $b_{T_b,S}(w_j^i) = 2$ oraz $w_{T_b,S}(w_j^i) = 0$.

Zauważmy również, że spełnione są dodatkowe wymagania stawiane przez warunek (2) lub (3) lematu 4.19:

- $b_{T_b,S}(e_i) - w_{T_b,S}(e_i) = 1 + k + m + s \geq 1$, dla $i \in \{1, \ldots, k\}$,
- $b_{T_b,S}(e_i) - w_{T_b,S}(e_i) = 2 + k + m + s \geq 1$, dla $i \in \{k+1, \ldots, k+m\}$,
- $b_{T_b,S}(ev_i) - w_{T_b,S}(ev_i) = 1 + k + m + s \geq 1$, dla $i \in \{1, \ldots, \lfloor t/2 \rfloor\}$,
- (krawędzie tego typu istnieją dla $s \geq 1$) $b_{T_b,S}(ew_i) - w_{T_b,S}(ew_i) = 1 + k + m + s + \lfloor c(w_i)/2 \rfloor - \lceil c(w_i)/2 \rceil \geq 1$, dla $i \in \{1, \ldots, s\}$,
- $b_{T_b,S}(r) - w_{T_b,S}(r) = 1 + k + m + s \geq 1$.

Przypadek $2 \nmid t$.

Rozważmy przypadek, w którym wartości t jest nieparzysta, tzn. $t = 2a + 1$ dla całkowitego $a \geq 0$. Wtedy:

$$\begin{aligned} b_{T_b,S}(V) &= 1 + a + s + 2k + 2m + \lfloor c(w_1)/2 \rfloor + \cdots + \lfloor c(w_s)/2 \rfloor, \\ w_{T_b,S}(V) &= 1 + a + 2k + 2m + \lceil c(w_1)/2 \rceil + \cdots + \lceil c(w_s)/2 \rceil, \\ n &= 2 + 2a + s + 4k + 4m + c(w_1) + \ldots c(w_s). \end{aligned}$$

Nierówność:

$$\frac{b_{T_b,S}(V)}{n} = \frac{1 + a + s + 2k + 2m + \lfloor c(w_1)/2 \rfloor + \cdots + \lfloor c(w_s)/2 \rfloor}{2 + 2a + s + 4k + 4m + c(w_1) + \ldots c(w_s)} \leq \frac{2}{3}$$

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

jest równoważna nierówności:

$$2(k+m) \geq -1-a+(1+3\lfloor c(w_1)/2\rfloor - 2c(w_1))+\cdots+(1+3\lfloor c(w_s)/2\rfloor - 2c(w_s))$$

ta nierówność jest spełniona, ponieważ $2(k+m) \geq 2$ oraz:

$$-1 \geq -1-a+(1+3\lfloor c(w_1)/2\rfloor - 2c(w_1))+\cdots+(1+3\lfloor c(w_s)/2\rfloor - 2c(w_s)),$$

ponieważ dla każdego $x \geq 1$ zachodzi $1+3\lfloor x/2\rfloor - 2x \leq 0$. Zachodzi:

- $\mathrm{SEC}_{T_b}(S, e_i)$, dla $i \in \{1,\ldots,k\}$, ponieważ $b_{T_b,S}(e_i) = 2+k+m+s+a$ oraz $w_{T_b,S}(e_i) = 2+a$,
- $\mathrm{SEC}_{T_b}(S, e_i)$, dla $i \in \{k+1,\ldots,k+m\}$, ponieważ $b_{T_b,S}(e_i) = 2+k+m+s+a$ oraz $w_{T_b,S}(e_i) = 1+a$,
- $\mathrm{SEC}_{T_b}(S, f_i)$, dla $i \in \{1,\ldots,k+m\}$, ponieważ $b_{T_b,S}(f_i) = 3$ oraz $w_{T_b,S}(f_i) = 2$,
- $\mathrm{SEC}_{T_b}(S, ev_i)$, dla $i \in \{1,\ldots,\lfloor t/2\rfloor\}$, ponieważ $b_{T_b,S}(ev_i) = 1+k+m+s+a$ oraz $w_{T_b,S}(ev_i) = 1+a$,
- $\mathrm{SEC}_{T_b}(S, ew_i)$, dla $i \in \{1,\ldots,s\}$, ponieważ $b_{T_b,S}(ew_i) = 1+k+m+s+a+\lfloor c(w_i)/2\rfloor$ oraz $w_{T_b,S}(ew_i) = 1+a+\lceil c(w_i)/2\rceil$,
- $\mathrm{SEC}_{T_b}(S, ew_j^i)$, dla $i \in \{1,\ldots,s\}, j \in \{1,\ldots,\lfloor c(w_i)/2\rfloor\}$, ponieważ $b_{T_b,S}(ew_j^i) = 2+\lfloor c(w_j)/2\rfloor$ oraz $w_{T_b,S}(ew_j^i) = \lceil c(w_j)/2\rceil$,
- $\mathrm{SEC}_{T_b}(S, r)$, ponieważ $b_{T_b,S}(r) = 1+k+m+s+a$ oraz $w_{T_b,S}(r) = 1+a$,
- $\mathrm{SEC}_{T_b}(S, o_i)$, dla $i \in \{1,\ldots,k\}$, ponieważ $b_{T_b,S}(o_i) = 3$ oraz $w_{T_b,S}(o_i) = 1$,
- $\mathrm{SEC}_{T_b}(S, o_i)$, dla $i \in \{k+1,\ldots,k+m\}$, ponieważ $b_{T_b,S}(o_i) = 3$ oraz $w_{T_b,S}(o_i) = 0$,
- $\mathrm{SEC}_{T_b}(S, p_i)$, dla $i \in \{1,\ldots,k\}$, ponieważ $b_{T_b,S}(p_i) = 2$ oraz $w_{T_b,S}(p_i) = 1$,
- $\mathrm{SEC}_{T_b}(S, p_i)$, dla $i \in \{k+1,\ldots,k+m\}$, ponieważ $b_{T_b,S}(p_i) = 2$ oraz $w_{T_b,S}(p_i) = 2$,
- $\mathrm{SEC}_{T_b}(S, v_i)$, dla $i \in \{1,\ldots,\lfloor t/2\rfloor\}$, ponieważ $b_{T_b,S}(v_i) = 2$ oraz $w_{T_b,S}(v_i) = 0$,
- $\mathrm{SEC}_{T_b}(S, w_i)$ dla $i \in \{1,\ldots,s\}$, ponieważ $b_{T_b,S}(w_i) = 2+\lfloor c(w_i)/2\rfloor$ oraz $w_{T_b,S}(w_i) = \lceil c(w_i)/2\rceil$,
- $\mathrm{SEC}_{T_b}(S, w_j^i)$, dla $i \in \{1,\ldots,s\}, j \in \{1,\ldots,\lfloor c(w_i)/2\rfloor\}$, ponieważ $b_{T_b,S}(w_j^i) = 2$ oraz $w_{T_b,S}(w_j^i) = 0$.

Zauważmy również, że spełnione są dodatkowe wymagania stawiane przez warunek (2) lub (3) lematu 4.19:

- $b_{T_b,S}(e_i) - w_{T_b,S}(e_i) = k+m+s \geq 1$, dla $i \in \{1,\ldots,k\}$, ponieważ $k+m \geq 1$,
- $b_{T_b,S}(e_i) - w_{T_b,S}(e_i) = 1+k+m+s \geq 1$, dla $i \in \{k+1,\ldots,k+m\}$,
- $b_{T_b,S}(ev_i) - w_{T_b,S}(ev_i) = k+m+s \geq 1$, dla $i \in \{1,\ldots,\lfloor t/2\rfloor\}$, ponieważ $k+m \geq 1$,
- (krawędzie tego typu istnieją dla $s \geq 1$ oraz $k+m \geq 1$) $b_{T_b,S}(ew_i) - w_{T_b,S}(ew_i) = k+m+s+\lfloor c(w_i)/2\rfloor - \lceil c(w_i)/2\rceil \geq 1$, dla $i \in \{1,\ldots,s\}$,

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

- $b_{T_b,S}(r) - w_{T_b,S}(r) = k + m + s \geq 1$, ponieważ $k + m \geq 1$.

Zatem jeżeli nie jesteśmy w stanie odciąć poddrzewa wysokości 3 z końca żadnej najdłuższej ścieżki w drzewie T, to potrafimy odciąć poddrzewo wysokości 4 o specyficznej strukturze (która musi wtedy wystąpić) przedstawionej na rysunku 4.18.

Łączenia odciętego drzewa T_b z pozostałą częścią drzewa T (oznaczoną jako T_u) dokonujemy analogicznie jak w przypadku odcinania drzewa wysokości 3. To znaczy jeśli drzewo T_u jest grafem N_1 lub P_2 to korzystamy odpowiednio z lematów 4.20 lub 4.21 w połączeniu z lematem 4.22. W pozostałych przypadkach wskazujemy zgodny z tezą zbiór S_u w drzewie T_u i korzystamy z lematów 4.19 oraz 4.22. □

4.3 Globalne koalicje krawędziowe w różnych klasach grafów

W tej części pokażemy formuły na dokładny rozmiar najmniejszych, w sensie liczby wierzchołków, globalnych koalicji krawędziowych w grafach następujących klas: ścieżek, cykli, kół, grafów pełnych k–dzielnych oraz drzew pełnych k–arnych.

Lemat 4.24. *Niech G będzie grafem, $\mathrm{n}(G) \geq 2$ oraz $\Delta(G) \leq 2$. Wtedy zbiór $S \in \mathrm{V}(G)$ jest globalną koalicją krawędziową wtedy i tylko wtedy, gdy jest zbiorem totalnie dominującym.*

Dowód. $\Rightarrow$ Jeżeli zbiór S jest globalną koalicją krawędziową, to na mocy stwierdzenia 4.6 jest również zbiorem totalnie dominującym.
$\Leftarrow$ Załóżmy teraz, że zbiór S jest zbiorem totalnie dominującym. Oczywiście jest zatem zbiorem dominującym oraz podgraf indukowany $G[S]$ nie posiada wierzchołków izolowanych. Zauważmy, że przy założeniu $\Delta(G) \leq 2$ dla dowolnej krawędzi $\{u, v\} \in \mathrm{E}(G)$ mamy $|\mathrm{N}_G[\{u, v\}] \setminus \{u, v\}| \leq 2$. Zatem jeśli $u, v \in S$, to $\mathrm{SEC}_G(S, \{u, v\})$. □

Wniosek 4.25. *Niech G będzie grafem $\mathrm{n}(G) \geq 2$ oraz $\Delta(G) \leq 2$. Wtedy $\gamma_{ea}(G) = \gamma_t(G)$.* □

Skorzystamy z powyższej własności do wykazania poszukiwanej liczności dla grafów o stopniu nie przekraczającym wartości 2. Zaczniemy od spójnych grafów 2–regularnych, czyli cykli.

Twierdzenie 4.26. *Niech C_n będzie cyklem rzędu $n \geq 3$. Wtedy*

$$\gamma_{ea}(C_n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{jeżeli } 4 \mid n, \\ \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Dowód. Zacznijmy od zauważenia, że teza zachodzi dla cykli rzędu $n \geq 6$. To znaczy $\gamma_{ea}(C_3) = 2$, $\gamma_{ea}(C_4) = 2$, $\gamma_{ea}(C_5) = 3$ oraz $\gamma_{ea}(C_6) = 4$. Załóżmy więc, że $n \geq 7$. Na mocy lematu 4.24 i wniosku 4.25 wystarczy wykazać ograniczenie na najmniej liczny zbiór totalnie dominujący.

Niech $n = 4k + l$ dla pewnych liczb naturalnych k, l i $l < 4$. Ponumerujmy wierzchołki cyklu jako $v_1, v_2, \ldots, v_{4k-1}, \ldots, v_{4k+l}$ w sposób zgodny ze strukturą ich połączeń. To znaczy dla dowolnego

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

$i \in \{2, \ldots, n-1\}$ wierzchołek v_i sąsiaduje z wierzchołkami v_{i-1} oraz v_{i+1}. Wtedy połączone są również wierzchołki v_1 i v_{4k+l}.

Zauważmy, że:

(1) Na każde cztery sąsiadujące wierzchołki cyklu, co najmniej dwa muszą należeć do globalnej koalicji krawędziowej, zatem $\gamma_{ea}(C_{4k+l}) \geq 2k$.

(2) Na każde trzy sąsiadujące wierzchołki cyklu, co najmniej jeden musi należeć do globalnej koalicji krawędziowej.

Jeżeli $l = 0$, to zbiór $S_0 = \{v_2, v_3, v_6, v_7, \ldots, v_{4k-2}, v_{4k-1}\}$ jest globalną koalicją krawędziową w cyklu C_{4k}, oraz $|S_0| = 2k = \frac{n}{2}$. Z obserwacji (1) jest zatem najmniej liczna.

Jeżeli $l = 1$, to zbiór $S_1 = \{v_2, v_3, v_6, v_7, \ldots, v_{4k-2}, v_{4k-1}, v_{4k}\}$ jest globalną koalicją krawędziową w cyklu C_{4k+1}, oraz $|S_1| = 2k + 1 = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$. Załóżmy nie wprost, że istnieje mniejsza globalna koalicja krawędziowa S_1', taka że $\left|S_1'\right| = 2k$. Wtedy z własności (1) mamy $S_1' \subseteq \{v_1, \ldots, v_{4k}\}$ a także $S_1' \subseteq \{v_2, \ldots, v_{4k+1}\}$. Zatem $S_1' \subseteq \{v_2, \ldots, v_{4k}\}$ a wtedy z warunku totalnego dominowania mamy $v_2, v_3, v_{4k-1}, v_{4k} \in S_1'$. Zatem dla sekwencji wierzchołków cyklu $v_4, \ldots, v_{4k-2}$ do zbioru S_1' może należeć tylko $2k-4 = 2(k-2)$ z nich. Jednak sekwencja $v_4, \ldots, v_{4k-2}$ składa się z $4k-5 = 4(k-2)+3$ wierzchołków. Czyli z $k-2$ sąsiadujących czwórek wierzchołków oraz jednej trójki wierzchołków. Z własności (1) oraz (2) wynika zatem, że $2(k-2)+1$ wierzchołków sekwencji musi należeć do zbioru S_1'. Jest to sprzeczność, zatem $\gamma_{ea}(C_{4k+1}) = |S_1| = 2k + 1 = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$.

Jeżeli $l = 2$, to zbiór $S_2 = \{v_2, v_3, v_6, v_7, \ldots, v_{4k-2}, v_{4k-1}, v_{4k+1}, v_{4k+2}\}$ jest globalną koalicją krawędziową w cyklu C_{4k+2}, oraz $|S_2| = 2k+2 = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$. Załóżmy nie wprost, że istnieje mniejsza globalna koalicja krawędziowa S_2', taka że $\left|S_2'\right| = 2k + 1$. Wtedy korzystając z wykazanego wyniku dla $l = 1$, mamy $S_2' \subseteq \{v_1, \ldots, v_{4k+1}\}$ a także $S_2' \subseteq \{v_2, \ldots, v_{4k+2}\}$. Zatem $S_2' \subseteq \{v_2, \ldots, v_{4k+1}\}$ a wtedy z warunku totalnego dominowania mamy $v_2, v_3, v_{4k}, v_{4k+1} \in S_2'$. Zatem dla sekwencji wierzchołków cyklu $v_4, \ldots, v_{4k-1}$ do zbioru S_2' może należeć tylko $2k + 1 - 4 = 2(k-2) + 1$ z nich. Jednak sekwencja $v_4, \ldots, v_{4k-1}$ składa się z $4k - 4 = 4(k-1)$ wierzchołków. Czyli z $k-1$ sąsiadujących czwórek wierzchołków. Z własności (1) wynika zatem, że $2(k-1)$ wierzchołków sekwencji musi należeć do zbioru S_2'. Jest to sprzeczność, zatem $\gamma_{ea}(C_{4k+2}) = |S_2| = 2k + 2 = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$.

Jeżeli $l = 3$, to zbiór $S_3 = \{v_2, v_3, v_6, v_7, \ldots, v_{4k-2}, v_{4k-1}, v_{4k+1}, v_{4k+2}\}$ jest globalną koalicją krawędziową w cyklu C_{4k+3}, oraz $|S_3| = 2k + 2 = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$. Zauważmy, że gdyby w cyklu C_{4k+3} istniała globalna koalicja krawędziowa rozmiaru $2k + 1$, to istniała by również W cyklu C_{4k+2}, co wykluczyliśmy w analizie przypadku $l = 2$. Zatem $\gamma_{ea}(C_{4k+3}) = |S_3| = 2k + 2 = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$. □

Kolejną rozważaną klasą grafów będą ścieżki.

Lemat 4.27. *Niech n będzie liczbą całkowitą oraz $n \geq 3$. Wtedy $\gamma_{ea}(P_n) \geq \gamma_{ea}(C_n)$.*

Dowód. Na mocy lematu 4.24 i wniosku 4.25 wystarczy wykazać, że $\gamma_t(P_n) \geq \gamma_t(C_n)$. Dla dowolnego zbioru totalnie dominującego na ścieżce zbiór ten pozostaje zbiorem totalnie dominującym po

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

dodaniu krawędzi między wierzchołkami końcowymi ścieżki. □

Twierdzenie 4.28. *Niech P_n będzie ścieżką, gdzie $n \geq 2$. Wtedy:*

$$\gamma_{ea}(G) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{jeżeli } 4 \mid n, \\ \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Dowód. Dla $n = 2, 3$ mamy $\gamma_{ea}(P_n) = 2$. W przypadku $n \geq 4$ wskażemy konstrukcję globalnej koalicji krawędziowej w grafie P_n, o liczności równej najmniejszej globalnej koalicji krawędziowej w grafie C_n. Na mocy lematu 4.27 będzie ona zatem najmniej liczna również w ścieżce P_n.

Niech $n = 4k + l$ dla pewnych liczb naturalnych k, l i $l < 4$. Ponumerujmy wierzchołki ścieżki jako $v_1, v_2, \ldots, v_{4k-1}, \ldots, v_{4k+l}$ w sposób zgodny ze strukturą ich połączeń. To znaczy dla dowolnego $i \in \{2, \ldots, n-1\}$ wierzchołek v_i sąsiaduje z wierzchołkami v_{i-1} oraz v_{i+1}.

Wtedy:

- Jeżeli $l = 0$, to zbiór $S_0 = \{v_2, v_3, v_6, v_7, \ldots, v_{4k-2}, v_{4k-1}\}$ jest globalną koalicją krawędziową w ścieżce P_{4k}, oraz $|S_0| = 2k = \frac{n}{2}$,
- Jeżeli $l = 1$, to zbiór $S_1 = \{v_2, v_3, v_6, v_7, \ldots, v_{4k-2}, v_{4k-1}, v_{4k}\}$ jest globalną koalicją krawędziową w ścieżce P_{4k+1}, oraz $|S_1| = 2k + 1 = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$,
- Jeżeli $l = 2$, to zbiór $S_2 = \{v_2, v_3, v_6, v_7, \ldots, v_{4k-2}, v_{4k-1}, v_{4k+1}, v_{4k+2}\}$ jest globalną koalicją krawędziową w ścieżce P_{4k+2}, oraz $|S_2| = 2k + 2 = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$,
- Jeżeli $l = 3$, to zbiór $S_3 = \{v_2, v_3, v_6, v_7, \ldots, v_{4k-2}, v_{4k-1}, v_{4k+1}, v_{4k+2}\}$ jest globalną koalicją krawędziową w ścieżce P_{4k+3}, oraz $|S_2| = 2k + 2 = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$.

Na koniec odnotujmy, że $|S_0| = \gamma_{ea}(C_{4k})$, $|S_1| = \gamma_{ea}(C_{4k+1})$, $|S_2| = \gamma_{ea}(C_{4k+2})$, $|S_3| = \gamma_{ea}(C_{4k+3})$. □

Kolejną rozważaną klasą grafów, są koła. Przypomnijmy (def. 1.25), że kołem rzędu n nazywamy graf uzyskany z cyklu C_n poprzez dodanie jednego wierzchołka oraz krawędzi do każdego z wierzchołków cyklu.

Twierdzenie 4.29. *Niech W_n będzie kołem rzędu $n \geq 3$. Wtedy $\gamma_{ea}(W_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$.*

Dowód. Zauważmy, że $\gamma_{ea}(W_3) = 2$. Załóżmy zatem, że $n \geq 4$ i niech wierzchołek $v_c \in \mathrm{V}(W_n)$ będzie osią koła W_n. Niech $S \subseteq \mathrm{V}(W_n)$ będzie dowolną globalną koalicją krawędziową w kole W_n. Jeżeli $v_c \in S$, to istnieje wierzchołek $v \neq v_c$, taki że $v \in S$. Zauważmy, że $\mathrm{N}_{W_n}[\{v_c, v\}] = \mathrm{V}(W_n)$, zatem $|S| \geq \lceil n/2 \rceil$. Rozważmy teraz sytuację, w której $v_c \notin S$. Dla każdej krawędzi $\{v, u\} \in \mathrm{E}(W_n[S])$ mamy $|\mathrm{N}_{W_n}[\{v, u\}] \setminus \{v, u\}| = 3$, zatem $|S \cap \mathrm{N}_{W_n}[\{u, v\}]| \geq 3$. Stąd każda składowa spójności podgrafu indukowanego $W_n[S]$ zawiera co najmniej trzy wierzchołki. Jako, że zbiór S jest zbiorem dominującym w kole W_n, to $|S| \geq \lceil 3(n-1)/5 \rceil$. Zatem, $|S| \geq \min\{\lceil n/2 \rceil, \lceil 3(n-1)/5 \rceil\} = \lceil n/2 \rceil$.

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

Weźmy dowolny zbiór $S \subseteq \mathrm{V}(W_n)$, taki że $v_c \in S$ oraz $|S| = \lceil n/2 \rceil$. Zbiór S jest globalną koalicją krawędziową, zatem $\gamma_{ea}(W_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$. □

Kolejną rozważaną klasą będą grafy pełne k–dzielne. Przyjmujemy konwencję zgodnie z którą dla $k = 1$ graf G jest grafem pełnym.

Twierdzenie 4.30. *Niech G będzie pełnym grafem k–dzielnym, dla którego $\mathrm{n}(G) \geq 3$ oraz $k \geq 1$. Wtedy $\gamma_{ea}(G) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$.*

Dowód. Dla każdej krawędzi $\{u, v\} \in \mathrm{E}(G)$ mamy $\mathrm{N}_G[\{u, v\}] = \mathrm{V}(G)$. Niech $S \subseteq \mathrm{V}(G)$ będzie globalną koalicją krawędziową w grafie G i niech $\{u, v\} \in \mathrm{E}(G[S])$. Wtedy $\mathrm{SEC}_G(S, \{u, v\}) \Leftrightarrow |\mathrm{V}(G) \cap S| \geq |\mathrm{V}(G) \setminus S| \Leftrightarrow |S| \geq \mathrm{n}(G) - |S| \Leftrightarrow |S| \geq \lceil n/2 \rceil$. Stąd, $\gamma_{ea}(G) \geq \lceil n/2 \rceil$.

Jeżeli $k = 1$, to graf G jest grafem pełnym. Dowolny zbiór S, taki że $|S| = \lceil n/2 \rceil$ jest globalną koalicją krawędziową w grafie G.

Niech $\mathrm{V}(G) = V_1 \cup \ldots \cup V_k$, gdzie $k \geq 2$ oraz zbiory V_i są parami rozłącznymi maksymalnymi zbiorami niezależnymi. Przyjmijmy oznaczenie $r_i = |V_i|$, dla każdego $i \in \{1, \ldots, k\}$. Jeżeli dla każdego $i \in \{1, \ldots, k\}$ liczba r_i jest parzysta, to dowolny zbiór $S \subseteq \mathrm{V}(G)$, dla którego $|S \cap V_i| = r_i/2$ jest globalną koalicją krawędziową w grafie G, oraz $|S| = n/2$.

Teraz bez straty ogólności załóżmy, że wartości $r_1, \ldots, r_l$ są nieparzyste, a wartości $r_{l+1}, \ldots, r_k$ są parzyste dla pewnej liczby $1 \leq l \leq k$. Weźmy dowolny zbiór $S \subseteq \mathrm{V}(G)$ taki, że:

- $|S \cap V_i| = \lceil r_i/2 \rceil$ dla każdego $i \in \{1, \ldots, \lceil l/2 \rceil\}$,
- $|S \cap V_i| = \lfloor r_i/2 \rfloor$ dla każdego $i \in \{\lceil l/2 \rceil + 1, \ldots, l\}$,
- $|S \cap V_i| = r_i/2$ dla każdego $i \in \{l + 1, \ldots, k\}$.

Wtedy podgraf indukowany $G[S]$ nie posiada wierzchołków izolowanych oraz $|S| = \lceil n/2 \rceil$, a zatem zbiór S jest globalną koalicją krawędziową. □

Następną rozważaną klasą grafów będą pełne drzewa k–arne (def. 1.29). Warto zauważyć, że dokładna formuła na rozmiar najmniejszej globalnej koalicji defensywnej w drzewach k–arnych jest znana wyłącznie dla przypadków $k \in \{2, 3, 4\}$ ([9]). W przypadku globalnych koalicji krawędziowych podamy ogólną formułę dla dowolnych wartości $k \geq 2$.

Zacznijmy od wprowadzenia pewnych oznaczeń. Dla dowolnego grafu G, dla którego $\delta(G) \geq 1$ oraz $A \subseteq \mathrm{V}(G)$ przez $\gamma_{ea}(G, A)$ rozumiemy $\min\{|S \cap A| \colon S \text{ jest globalną koalicją krawędziową}\}$. Dla tak zdefiniowanego operatora zachodzi następująca obserwacja:

Stwierdzenie 4.31. *Niech G będzie grafem oraz $\delta(G) \geq 1$. Niech $A_i \subseteq \mathrm{V}(G)$, dla $i \in \{1, \ldots, p\}$, gdzie $p \geq 1$. Jeśli zbioru $A_1, \ldots, A_p$ są parami rozłączne, to:*

$$\sum_{i=1}^{p} \gamma_{ea}(G, A_i) \leq \gamma_{ea}(G, \bigcup_{i=1}^{p} A_i) \leq \gamma_{ea}(G).$$

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

Dowód. Zauważmy, że $\sum_{i=1}^{p}\gamma_{ea}(G,A_i) = |S_1\cap A_1| + \cdots + |S_p\cap A_p|$ dla pewnych globalnych koalicji krawędziowych $S_1,\ldots,S_p$ w grafie G. Natomiast $\gamma_{ea}(G,\bigcup_{i=1}^{p}A_i) = |S_0\cap(A_1\cup\cdots\cup A_p)| = |S_0\cap A_1| + \cdots + |S_0\cap A_p|$ dla pewnej globalnej koalicji S_0 w grafie G, ponieważ zbiory $A_1,\ldots,A_p$ są parami rozłączne. Z definicji wartości $\gamma_{ea}(G,A_i)$ dla każdego $i\in\{1,\ldots,p\}$, mamy $|S_i|\leq|S_0|$. Zatem $\sum_{i=1}^{p}\gamma_{ea}(G,A_i)\leq\gamma_{ea}(G,\bigcup_{i=1}^{p}A_i)$.

Niech S będzie globalną koalicją krawędziową, taką że $|S| = \gamma_{ea}(G)$. Zauważmy, że z definicji wartości $\gamma_{ea}(G,\bigcup_{i=1}^{p}A_i)$ mamy $|S_0\cap(A_1\cup\cdots\cup A_p)|\leq|S\cap(A_1\cup\cdots\cup A_p)|$. Zatem tym bardziej $|S_0\cap(A_1\cup\cdots\cup A_p)|\leq|S|$. □

Niech T będzie pełnym drzewem k–arnym T_k^h. Przyjmijmy oznaczenia jak w definicji 1.29. Zauważmy, że $\deg_T(v_1^0) = k$. Dla każdych dowolnych $i\in\{1,\ldots,h\}$ oraz $j\in\{1,\ldots,k^i\}$ mamy $\mathrm{d}_T(v_1^0,v_j^i) = i$ oraz, o ile $i\neq h$, to $\deg_T(v_j^i) = k+1$. Zbiór wszystkich liści w drzewie T składa się z wierzchołków $\{v_1^h,\ldots,v_{k^h}^h\}$ oraz dla każdego $j\in\{1,\ldots,k^h\}$ mamy $d_T(v_1^0,v_j^h) = h$. Przez $r(T)$ oznaczmy jedyny wierzchołek drzewa T, którego stopień jest równy k i nazwijmy go korzeniem drzewa T.

Dla każdego $l\in\{0,\ldots,h\}$ niech $L_l = \{v_1^l,\ldots,v_{k^l}^l\}$, (czyli $L_l = \{v\in\mathrm{V}(T)\colon d_T(v,r(T)) = l\}$). Pomocniczo przyjmijmy również, że $L_{h+i} = \emptyset$, dla $i\geq 1$. Niech $v\in L_p$, dla pewnego $p\in\{0,\ldots,h\}$. Przez $C(T,v)$ oznaczamy $\mathrm{N}_T(v)\cap L_{p+1}$, a dla każdego $A\subseteq\mathrm{V}(G)$ przez $C(T,A)$ oznaczamy $\bigcup_{v\in A}C(T,v)$. Zauważmy, że jeżeli wierzchołek v nie jest liściem to oczywiście $|C(T,v)| = k$. Zachodzi również $C(T,L_h) = \emptyset$. Oznaczmy jeszcze $C^0(T,v) = \{v\}$, a dla każdego $l\geq 1$, niech $C^l(T,v) = C(T,C^{l-1}(T,v))$ oraz $T_v^l = T[\bigcup_{i=0}^{l}C^i(T,v)]$ i $T_v = T_v^{h-p}$.

Lemat 4.32. *Niech T będzie pełnym drzewem k–arnym T_k^h, gdzie $h\geq 2, k\geq 2$. Dla dowolnego $l\in\{1,2,3\}$ mamy*

$$\gamma_{ea}(T,\mathrm{V}(T_{r(T)}^{l-1})) \geq \frac{k^{l-1}-1}{k-1}.$$

Dowód. Oznaczmy $r = r(T)$. Jeżeli $l\leq 2$, to teza zachodzi ponieważ ograniczenie dolne $\frac{k^{l-1}-1}{k-1}$ nie przekracza wtedy wartości 1. Zatem niech $l = 3$ i niech zbiór $S\subseteq\mathrm{V}(T)$ będzie globalną koalicją krawędziową w drzewie T. Jeżeli $r\in S$, to istnieje wierzchołek u taki, że $u\in L_1\cap S$. Stąd $\gamma_{ea}(T,V(T_r^2))\geq k+1$. Jeżeli $r\notin S$, to dla każdego wierzchołka $u\in L_1$ mamy $\gamma_{ea}(T,V(T_u^1))\geq 1$. Jako że $\mathrm{N}_T[r]\cap S\neq\emptyset$, to istnieje wierzchołek $u\in L_1\cap S$. Jako, że $\mathrm{N}_T[u]\cap S\neq\emptyset$, to $|S\cap\mathrm{V}(T_u^1)|\geq 2$. W efekcie ze stwierdzenia 4.31 otrzymujemy $\gamma_{ea}(T,\mathrm{V}(T_r^2))\geq\sum_{u\in L_1}\gamma_{ea}(T,\mathrm{V}(T_u^1))\geq k+1$. □

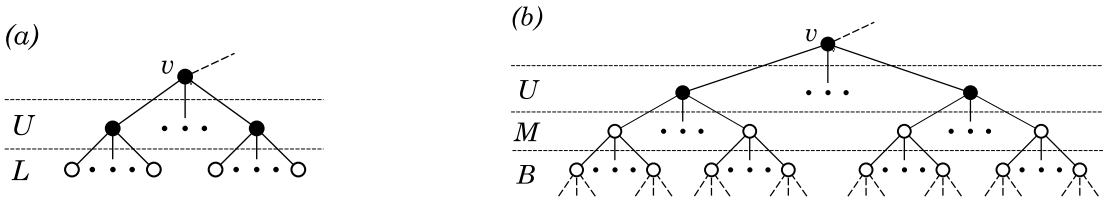
Lemat 4.33. *Niech T będzie pełnym drzewem k–arnym T_k^h, gdzie $h\geq 2, k\geq 2$. Wtedy:*

$$\gamma_{ea}(T,L_{h-2}\cup L_{h-1}\cup L_h)\geq(k+1)k^{h-2}.$$

Dowód. Niech $v\in L_{h-2}$, i niech $L = C^2(T,v)$ oraz $U = C^1(T,v)$ (rys. 4.19(*a*)). Niech zbiór $S\subseteq\mathrm{V}(T)$ będzie globalną koalicją krawędziową w drzewie T. Jako, że $L\subseteq L_h$ i $\mathrm{N}_T[L] = U$, to na mocy stwierdzenia 4.12 mamy $U\subseteq S$. Jeżeli $v\in S$, to $|S\cap\mathrm{V}(T_v)|\geq k+1$. Jeżeli $v\notin S$, to dla każdego $u\in U$ mamy $|S\cap\mathrm{V}(T_u)|\geq 2$. Zatem $\gamma_{ea}(T,\mathrm{V}(T_v))\geq k+1$.

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

Mamy $|L_{h-2}| = k^{h-2}$ oraz $\bigcup_{v \in L_{h-2}} V(T_v) = L_{h-2} \cup L_{h-1} \cup L_h$, więc ze stwierdzenia 4.31 otrzymujemy tezę. □



Rys. 4.19: Podgrafy drzewa T_k^h rozważanie w dowodach lematu 4.33 (a) i lematu 4.34 (b).

Lemat 4.34. *Niech T będzie pełnym drzewem k–arnym T_k^h, gdzie $h \geq 5, k \geq 2$. Wtedy dla każdego $l \in \{0, \ldots, h-5\}$:*

$$\gamma_{ea}(T, L_l \cup L_{l+1} \cup L_{l+2} \cup L_{l+3}) \geq (k+1)k^l.$$

Dowód. Niech $l \in \{0, \ldots, h-5\}$ i $v \in L_l$. Oznaczmy $B = C^3(T, v)$, $M = C^2(T, v)$ i $U = C^1(T, v)$ (rys. 4.19(b)). Niech zbiór $S \subseteq \mathrm{V}(T)$ będzie globalną koalicją krawędziową w drzewie T. Jako że $\mathrm{N}_T(M) = B \cup U$, to dla każdego wierzchołka $u \in U$ mamy $|S \cap \mathrm{V}(T_u^2)| \geq 1$. Jeżeli $v \in S$, to $|S \cap \mathrm{V}(T_v)| \geq k+1$. Jeżeli $v \notin S$, to dla każdego wierzchołka $u \in U$, $|S \cap \mathrm{V}(T_u^2)| \geq 2$. Zatem $\gamma_{ea}(T, \mathrm{V}(T_v)) \geq k+1$.

Jako, że $|L_l| = k^l$ i $\bigcup_{v \in L_l} V(T_v^3) = L_l \cup L_{l+1} \cup L_{l+2} \cup L_{l+3}$, to ze stwierdzenia 4.31 otrzymujemy tezę. □

Lemat 4.35. *Niech T będzie pełnym drzewem k–arnym T_k^h, gdzie $h = 4p+2, p \geq 0, k \geq 2$. Wtedy:*

$$\gamma_{ea}(T) = (k+1)\frac{k^{h+2}-1}{k^4-1}.$$

Dowód. Niech $A_i = L_{4i} \cup L_{4i+1} \cup L_{4i+2} \cup L_{4i+3}$ dla każdego $i \in \{0, \ldots, p-1\}$ i niech $A_p = L_{4p} \cup L_{4p+1} \cup L_{4p+2}$. Na mocy stwierdzenia 4.31 oraz lematów 4.33 i 4.34 otrzymujemy $\gamma_{ea}(T) \geq \sum_{i=0}^{p} \gamma_{ea}(T, A_i) = (k+1)\sum_{i=0}^{p} k^{4i} = (k+1)\frac{k^{h+2}-1}{k^4-1}$.

Weźmy zbiór $S = \bigcup_{i=0}^{p}(L_{4i} \cup L_{4i+1})$. Zbiór S jest globalną koalicją krawędziową w drzewie T, a także $|S| = (k+1)\frac{k^{h+2}-1}{k^4-1}$. Zatem $\gamma_{ea}(T) = |S|$. □

Lemat 4.36. *Niech T będzie pełnym drzewem k–arnym T_k^h, gdzie $h = q+4p+2, q \in \{1,2,3\}, p \geq 0, k \geq 2$. Wtedy:*

$$\gamma_{ea}(T) = \frac{k^{q-1}-1}{k-1} + (k+1)\frac{k^{h+2}-k^q}{k^4-1}.$$

Dowód. Niech $h = q+4p+2$, gdzie $q \in \{1,2,3\}$ i $p \geq 0$. Przyjmijmy oznaczenie $r = r(T)$. Niech $A_i = L_{q+4i} \cup L_{q+4i+1} \cup L_{q+4i+2} \cup L_{q+4i+3}$ dla każdego $i \in \{0, \ldots, p-1\}$ i niech $A_p = L_{q+4p} \cup L_{q+4p+1} \cup L_{q+4p+2}$. Jako, że $\mathrm{V}(T) = \mathrm{V}(T_r^{q-1}) \cup \bigcup_{i=0}^{p} A_i$, to ze stwierdzenia 4.31 oraz lematów 4.32 i 4.35 uzyskujemy oszacowanie $\gamma_{ea}(T) \geq \frac{k^{q-1}-1}{k-1} + (k+1)\frac{k^{h+2}-k^q}{k^4-1}$.

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

Weźmy zbiór $\hat{S} = \bigcup_{i=0}^{p}(L_{q+4i} \cup L_{q+4i+1})$. Niech $S_1 = \emptyset$, $S_2 = \{u\}$, gdzie $u \in \mathrm{N}_T(r)$ i $S_3 = \mathrm{V}(T_r^1)$. Zauważmy, że dla każdego $q \in \{1, 2, 3\}$ zbiór $S = \hat{S} \cup S_q$ jest globalną koalicją krawędziową w drzewie T, a także $|S| = \frac{k^{q-1}-1}{k-1} + (k+1)\frac{k^{h+2}-k^q}{k^4-1}$. Zatem $\gamma_{ea}(T) = |S|$. □

Z lematów 4.35 i 4.36 uzyskujemy pełną konkluzję dla dowolnych pełnych drzew k–arnych.

Twierdzenie 4.37. *Niech T będzie pełnym drzewem k–arnym T_k^h, gdzie $h \geq 2, k \geq 2$. Wtedy:*

1. *jeżeli $h \equiv 0 \mod 4$, to $\gamma_{ea}(T) = \frac{k+1}{k^4-1}(k^{h+2} - k^2) + 1$,*
2. *jeżeli $h \equiv 1 \mod 4$, to $\gamma_{ea}(T) = \frac{k+1}{k^4-1}(k^{h+2} - k^3) + k + 1$,*
3. *jeżeli $h \equiv 2 \mod 4$, to $\gamma_{ea}(T) = \frac{k+1}{k^4-1}(k^{h+2} - 1)$,*
4. *jeżeli $h \equiv 3 \mod 4$, to $\gamma_{ea}(T) = \frac{k+1}{k^4-1}(k^{h+2} - k)$.* □

4.4 Wielomianowy algorytm konstruujący najmniejszą globalną koalicję krawędziową w drzewach

W [9] autorzy przedstawili konstrukcję algorytmu wielomianowego znajdującego najmniejszą - w sensie liczby wierzchołków – globalną koalicję defensywną w drzewach. Zaprezentowany algorytm cechował się (czasową) złożonością obliczeniową $O(n \log \Delta)$, gdzie n to liczba wierzchołków drzewa, a Δ to największy stopień wierzchołka w tym drzewie. W rozdziale 3.4 zaprezentowaliśmy konstrukcję algorytmu wielomianowego znajdującego najmniejszy - w sensie liczby wierzchołków - globalny zbiór defensywny w drzewach. Uzyskany algorytm cechował się (czasową) złożonością obliczeniową $O(n\Delta^2 \log \Delta)$, gdzie n to liczba wierzchołków drzewa, a Δ to największy stopień wierzchołka w tym drzewie.

W niniejszej sekcji zaprezentujemy wielomianowy algorytm dla problemu poszukiwania najmniejszej, w sensie liczby wierzchołków, globalnej koalicji krawędziowej o (czasowej) złożoności obliczeniowej $O(n\Delta^2 \log \Delta)$.

Ogólny szkic zastosowanej techniki algorytmicznej

Zastosujemy dynamiczną technikę wstępującą (ang. *bottom-up*) względem ustalonego ukorzenienia drzewa. Za korzeń drzewa przyjmujemy dowolny wierzchołek będący liściem, tzn. wierzchołek stopnia 1. Następnie zorientujemy wszystkie krawędzie drzewa w kierunku korzenia. W ten sposób doprowadzimy do sytuacji, w której dla każdego wierzchołka w drzewie nie będącego korzeniem istnieje dokładnie jedna krawędź wychodząca w kierunku korzenia.

Przyjmijmy oznaczenie T dla drzewa oraz r dla arbitralnie wybranego korzenia (z zachowaniem $\deg_T(r) = 1$). Dla każdego wierzchołka $v \in \mathrm{V}(T) \setminus \{r\}$ przez e_v oznaczymy (jedyną) krawędź wychodzącą z wierzchołka v w kierunku korzenia r. Drugi koniec krawędzi e_v oznaczymy jako r_v (to znaczy $e_v = \{v, r_v\}$). Dodatkowo przez T_v oznaczymy poddrzewo drzewa T ukorzenione

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

w wierzchołku v, zawierające wszystkie wierzchołki drzewa T, dla których ścieżki prowadzące do korzenia r (w drzewie T), zawierają wierzchołek v. Przez T_v^* oznaczmy drzewo T_v rozszerzone dodatkowo o krawędź e_v i ukorzenione w wierzchołku r_v. Niech $p_v = \deg_T(v) - 1$, a także niech $N_v^b = \{v_1, \dots v_{p_v}\}$ będzie zbiorem wszystkich wierzchołków drzewa T sąsiadujących z wierzchołkiem v różnych od r_v.

Kluczową ideą jest rekurencyjny schemat, w którym dla wierzchołka v budujemy pewną strukturę A_v na podstawie uzyskanych wcześniej struktur $A_{v_1}, \dots, A_{v_{p_v}}$ powiązanych z wierzchołkami potomnymi wierzchołka v. Użyjemy pośrednich struktur (B_v) dla klarownego przedstawienia procesu uzyskiwania struktury A_v. Wspomniana technika wstępująca (ang. *bottom-up*) przedstawia się następująco:

1. Rozpoczynamy od liści, dla których bezpośrednio zdefiniujemy struktury A_v.
2. Podążamy w kierunku korzenia r.
3. Przemierzając drzewo T dla każdego wierzchołka $v \in \mathrm{V}(T)$ różnego od r:
   (i) konstruujemy pomocniczą strukturę B_v na podstawie struktur $A_{v_i} \dots, A_{v_{p_v}}$,
   (ii) konstruujemy strukturę A_v na podstawie struktury B_v.
4. Wykorzystujemy strukturę A_s, gdzie s jest jedynym sąsiadem korzenia r do znalezienia optymalnego rozwiązania.

Złożoność obliczeniowa algorytmu jest zdeterminowana przez złożoność obliczeniową procedur konstruujących struktury A_v oraz pomocnicze struktury B_v.

Algorytm wyznaczający rozmiar globalnej koalicji krawędziowej w drzewie o złożoności $O(n\Delta^2 \log \Delta)$

Przedstawimy algorytm dynamiczny, którego działanie ogranicza się do określenia liczności optymalnej (tzn. najmniejszej w sensie liczby wierzchołków) globalnej koalicji krawędziowej. Odpowiednie rozwinięcie struktur pomocniczych pozwala, bez wpływu na złożoność obliczeniową, na rozszerzenie zakresu działania algorytmu tak, żeby wyznaczać również poszukiwany optymalny zbiór wierzchołków.

Będziemy postępować zgodnie z przedstawionym szkicem. To znaczy zdefiniujemy struktury A_v oraz B_v a także przedstawimy ich konstrukcję. Pomocniczo wykorzystamy symbol ∞ w celu znaczenia pewnych przypadków. Przyjmijmy uproszczoną arytmetykę, w której zachodzą następujące własności: $\infty \geq a$, $\infty \pm a = \infty$ i $\min\{\infty, a\} = a$, gdzie a jest liczbą, lub $a = \infty$.

Niech $v \in \mathrm{V}(T) \setminus \{r\}$, $p = p_v = \deg_T(v) - 1$ oraz $q = \deg_T(r_v) - 1$. Niech T_v^l będzie drzewem uzyskanym z drzewa T_v^* przez dołączenie l liści $L_l = \{u_1, \dots, u_l\}$ do wierzchołka r_v. Zauważmy, że $T_v^0 = T_v^*$.

W dalszej części, dla uproszczenia, będziemy pisać *GKK* zamiast *globalna koalicja krawędziowa*

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

oraz *KK* zamiast *koalicja krawędziowa*. Zdefiniujemy teraz struktury A_v oraz $B_v = (B_v^0, B_v^1)$ następująco:

(A_v) Niech $A_v = (a_v^{00}, a_v^{01}, a_v^{10}, A_v^{11})$, gdzie a_v^{jh} jest liczbą całkowitą lub symbolem ∞, dla $(j,h) \in \{(0,0),(0,1),(1,0)\}$, a A_v^{11} jest ciągiem długości $(q+1)$, dla których:

(00) $a_v^{00} = \min\{|S|\colon S \text{ jest } GKK \text{ w } T_v \wedge v \notin S\}$,

(01) $a_v^{01} = \min\{|S \setminus \{r_v\}|\colon S \setminus \{r_v\} \text{ jest } GKK \text{ w } T_v \setminus \{v\} \text{ i jest } KK \text{ w } T_v \wedge v \notin S \wedge r_v \in S\}$,

(10) $a_v^{10} = \min\{|S|\colon S \text{ jest } GKK \text{ w } T_v^* \wedge v \in S \wedge r_v \notin S\}$,

Dla każdego $k \in \{0,\ldots,q\}$, jeżeli $k < q/2$, to:

$$A_v^{11}[k] = \min\{|S \setminus \{r_v\}|\colon S \text{ jest } GKK \text{ w } T_v^{q-2k} \wedge \{v, r_v\} \subseteq S \wedge L_{q-2k} \cap S = \emptyset\},$$

a jeżeli $k \geq q/2$, to:

$$A_v^{11}[k] = \min\{|S \setminus (L_{2k-q} \cup \{r_v\})|\colon S \text{ jest } GKK \text{ w } T_v^{2k-q} \wedge \{v, r_v\} \subseteq S \wedge L_{2k-q} \subseteq S\}.$$

Zauważmy, że dla a_v^{jh} mamy $j = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $v \in S$ oraz $h = 1$ wtedy i tylko wtedy gdy $r_v \in S$. Jeżeli operacja $\min\{\cdot\}$ nie może być poprawnie określona, za wartość przyjmujemy symbol ∞.

Dla wierzchołka $v \neq r$ będącego liściem łatwo wyznaczyć wartości: $a_v^{00} = \infty$, $a_v^{01} = 0$, $a_v^{10} = \infty$ oraz $A_v^{11}[k] = 1$ dla $2k+2 \geq q$ i $A_v^{11}[k] = \infty$ dla $2k+2 < q$.

(B_v^0) Rozważmy teraz wierzchołek v nie będący liściem. Niech B_v^0 będzie macierzą wymiaru $p \times 3$. Przypomnijmy, że $N_v^b = \{v_1,\ldots,v_p\}$. Dla $i = 1,\ldots,p$ definiujemy $B_v^0[i,0] = i$, a jeżeli $a_{v_i}^{10} > a_{v_i}^{00}$, to $B_v^0[i,1] = 1$, w przeciwnym razie $B_v^0[i,1] = 0$. Definiujemy również $B_v^0[i,2] = |a_{v_i}^{10} - a_{v_i}^{00}|$. Zauważmy, że jeśli $a_{v_i}^{10} = \infty$ lub $a_{v_i}^{00} = \infty$, to $B_v^0[i,2] = \infty$. Definiujemy $a_v^0 = \sum_{i=1}^p (1 - B_v^0[i,1])$ oraz $b_v^0 = \sum_{i=1}^p \min\{a_{v_i}^{10}, a_{v_i}^{00}\}$. Zauważmy, że jeśli dla pewnego i mamy $a_{v_i}^{10} = a_{v_i}^{00} = \infty$, to $b_v^0 = \infty$. Niech c_v^0 będzie najmniejszą wartością $B_v^0[i,2]$, dla której $B_v^0[i,1] = 1$. Zauważmy, że jeśli $a_{v_i}^{10} = \infty$ lub $a_{v_i}^{00} = \infty$, to $B_v^0[i,2] = \infty$. Macierz B_v^0 może być skonstruowana w czasie $O(p)$.

(B_v^1) Nadal rozważmy wierzchołek v nie będący liściem. Niech B_v^1 będzie macierzą wymiaru $(p+1) \times p \times 4$. Przypomnijmy jeszcze raz, że $N_v^b = \{v_1,\ldots,v_p\}$

Dla każdego $k \in \{0,\ldots,p\}$ oraz $i \in \{1,\ldots,p\}$ definiujemy $B_v^1[k,i,0] = i$. Jeżeli $A_{v_i}^{11}[k] > a_{v_i}^{01}$, to $B_v^1[k,i,1] = 1$, w przeciwnym razie $B_v^1[k,i,1] = 0$. Definiujemy $B_v^1[k,i,2] = \min\{A_{v_i}^{11}[k], a_{v_i}^{01}\}$ oraz $B_v^1[k,i,3] = |A_{v_i}^{11}[k] - a_{v_i}^{01}|$. Macierz B_v^1 może być skonstruowana w czasie $O(p^2)$.

Teraz przedstawimy metodę konstrukcji struktury A_v na podstawie wartości wyznaczonej struktury pomocniczej B_v.

Niech $a_v^0 = \sum_{i=1}^p (1 - B_v^0[i,1])$ oraz $b_v^0 = \sum_{i=1}^p \min\{a_{v_i}^{10}, a_{v_i}^{00}\}$. Jeżeli dla pewnego $i \in \{1,\ldots,p\}$ mamy $a_{v_i}^{10} = a_{v_i}^{00} = \infty$, to przyjmujemy $b_v^0 = \infty$. Niech $c_v^0 = \min\{B_v^0[i,2] : i \in \{1,\ldots,p\} \wedge B_v^0[i,1] = 1\}$. Wartości a_v^0, b_v^0 oraz c_v^0 mogą być skonstruowane w czasie $O(p)$.

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

Stwierdzenie 4.38. *Wartość a_v^{00} może być obliczona w czasie $O(p)$.*

Dowód. Musimy zapewnić dominowanie wierzchołka v przez co najmniej jeden z wierzchołków v_i, gdzie $i \in \{1, \ldots, p\}$. Jeżeli $a_v^0 > 0$, to $a_v^{00} = b_v^0$, w przeciwnym razie $a_v^{00} = b_v^0 + c_v^0$. □

Stwierdzenie 4.39. *Wartość a_v^{01} może być obliczona w czasie $O(p)$.*

Dowód. Wierzchołek v jest zdominowany przez wierzchołek r_v, zatem $a_v^{01} = b_v^0$. □

Stwierdzenie 4.40. *Wartość a_v^{10} może być obliczona w czasie $O(p^2 \log p)$.*

Dowód. W tym przypadku musimy zapewnić, warunek bezpieczeństwa dla każdej krawędzi $\{v, v_i\}$, gdzie $v_i \in S \cap N_v^b$. Dla każdego $k \in \{1, \ldots, p\}$, zdefiniujmy:

$$s_k = \min\{|S \setminus \{r_v\}| : S \text{ jest } GKK \text{ w } T_v^* \wedge v \in S \wedge r_v \notin S \wedge |N_v^b \cap S| = k\},$$

lub $s_k = \infty$, jeżeli powyższe wyrażenie nie jest dobrze określone. Mamy wtedy $a_v^{10} = \min\{s_1, \ldots, s_p\}$.

Dla $k \in \{1, \ldots, p\}$ obliczamy s_k lub wykazujemy, że istnieje $l > k$, takie że $s_l \leq s_k$. Niech $a = \sum_{i=1}^{p} (1 - B_v^1[k-1, i, 1])$ oraz $b = \sum_{i=1}^{p} B_v^1[k-1, i, 2]$. Musimy zapewnić, żeby dokładnie k krawędzi $\{v, v_i\}$ było zabezpieczonych (w sensie predykatu SEC), gdzie $i \in \{1, \ldots, p\}$. Pozostałe wierzchołki v_i znajdują się poza koalicją krawędziową.

Jeżeli $a > k$, to łatwo zauważyć, że dla pewnego $l \geq a$ mamy $s_l \leq s_k$. Zatem bez straty ogólności załóżmy, że $a \leq k$. Jeżeli $a = k$, to $s_k = b + 1$.

W przypadku $a < k$, rozważmy macierz $\hat{B}_v$ wymiaru $p \times 4$ uzyskaną z macierzy $B_v^1[k-1]$ poprzez posortowanie wierszy $B_v^1[k-1, i]$ (dla $i \in \{1, \ldots, p\}$) w sposób niemalejący względem wartości $B_v^1[k-1, i, 3]$. Otrzymujemy wtedy zależność $\hat{B}[1, 3] \leq \hat{B}[2, 3] \leq \ldots \leq \hat{B}[p, 3]$. Konstrukcja macierzy $\hat{B}_v$ może być wykonana w czasie $O(p \log p)$. Niech k_0 będzie najmniejszą wartością, dla której $k - a = \sum_{i=1}^{k_0} \hat{B}_v[i, 1]$. Niech $c = \sum_{i=1}^{k_0} \hat{B}_v[i, 3] \cdot \hat{B}_v[i, 1]$. Wtedy $s_k = b + c + 1$. W ten sposób obliczyliśmy wartość a_v^{10} w czasie $O(p^2 \log p)$. □

Stwierdzenie 4.41. *Macierz A_v^{11} może być skonstruowana w czasie $O(qp^2 \log p)$.*

Dowód. Dla $l \in \{0, \ldots, q\}$ przedstawimy konstrukcję wartości $A_v^{11}[l]$, którą wykonamy w czasie $O(p^2 \log p)$.

Zasadniczą różnicą między konstrukcjami wartości a_v^{10} a A_v^{11} jest konieczność zapewnienia bezpieczeństwa (w sensie predykatu SEC) krawędzi $\{v, r_v\}$. Dowód jest analogiczny jak dla przypadku a_v^{10} (stwierdzenie 4.40).

Dla dowolnej pary wartości $k \in \{0, \ldots, p\}$ i $l \in \{0, \ldots, q\}$ mamy:

- jeżeli $l < q/2$, to $s_{k,l} = \min\{|S \setminus \{r_v \cup L_{q-2l}\}| : S \text{ jest } GKK \text{ w } T_v^{q-2l} \wedge v \in S \wedge r_v \in S \wedge |N_v^b \cap S| = k \wedge L_{q-2l} \cap S = \emptyset\}$,
- jeżeli $l \geq q/2$, to $s_{k,l} = \min\{|S \setminus \{r_v \cup L_{2l-q}\}| : S \text{ jest } GKK \text{ w } T_v^{2l-q} \wedge v \in S \wedge r_v \in S \wedge |N_v^b \cap S| = k \wedge L_{2l-q} \subseteq S\}$,

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

- w obu powyższych przypadkach, jeśli wartość jest nieokreślona, to przyjmujemy $s_{k,l} = \infty$.

Analogicznie jak w konstrukcji a_v^{10} (stwierdzenie 4.40), musimy zapewnić, że dokładnie k spośród wierzchołków $\{v, v_i\}$, gdzie $i \in \{1, \ldots, p\}$ jest bezpiecznych (w sensie predykatu SEC). Zauważmy, że jeżeli S jest *GKK* w T_v^{q-2l}, to $\mathrm{SEC}_{T_v^{q-2l}}(S, \{v, r_v\})$ (lub odpowiednio jeżeli S jest *GKK* w T_v^{2l-q}, to $\mathrm{SEC}_{T_v^{2l-q}}(S, \{v, r_v\})$) wtedy i tylko wtedy, gdy $2k+2l+2 \geq q+p$. Zatem jeśli $2k+2l+2 \geq q+p$, to obliczamy wartość $s_{k,l}$ analogicznie jak w przypadku obliczania wartości a_v^{10} (stwierdzenie 4.40). W przeciwnym przypadku $s_{k,l} = \infty$. Ostatecznie $A_v^{11}[l] = \min\{s_{1,l}, \ldots, s_{p,l}\}$.

Konstrukcja macierzy A_v^{11} może być wykonana w czasie $O(qp^2 \log p)$. □

Stwierdzenie 4.42. *Zachodzi* $\gamma_{ea}(T) = \min\{a_s^{10}, A_s^{11}[0] + 1\}$, *gdzie* $\{s\} = \mathrm{N}_T(r)$.

Dowód. Korzeń drzewa T musi być zdominowany, zatem dla każdej globalnej koalicji krawędziowej S zachodzi $\{r, s\} \cap S \neq \emptyset$. Zatem $a_s^{00} = \infty$. Wierzchołek s jest jedynym sąsiadem wierzchołka r, czyli jego wierzchołkiem wspierającym. Ze stwierdzenia 4.12 mamy $s \in S$. Zatem również $a_s^{01} = \infty$. Jako, że $q(s) = 0$, to macierz A_s^{11} ma tylko jeden element, tzn. $A_s^{11}[0]$. Zatem $\gamma_{ea}(T) = \min\{a_s^{10}, A_s^{11}[0] + 1\}$. □

Podsumowując, algorytm obliczający rozmiar najmniejszej globalnej koalicji krawędziowej w drzewie działa następująco:

1. Orientujemy drzewo wybierając za korzeń dowolny jego liść.
2. Dla każdego liścia l (oprócz korzenia) w drzewie tworzymy strukturę A_v o następujących wartościach:
   a) $a_l^{00} = \infty$, $a_l^{01} = 0$, $a_l^{10} = \infty$,
   b) $A_l^{11}[k] = 1$ dla każdego k, dla którego $2k + 2 \geq q$,
   c) $A_l^{11}[k] = \infty$ dla każdego k dla którego $2k + 2 < q$.
3. Trawersujemy drzewo T w kierunku korzenia, gdzie dla każdego wierzchołka $v \neq r$ nie będącego liściem:
   a) konstruujemy *pomocniczą* strukturę B_v korzystając z $A_{v_1}, \ldots, A_{v_{p(v)}}$,
   b) stosujemy stwierdzenia 4.38, 4.39, 4.40 oraz 4.41 żeby uzyskać A_v na podstawie B_v.
4. Na podstawie stwierdzenia 4.42 poszukiwaną wartością jest $\min\{a_s^{10}, A_s^{11}[0] + 1\}$, gdzie s jest jedynym sąsiadem korzenia r.

W dowodach stwierdzeń 4.38, 4.39, 4.40 oraz 4.41 wskazane zostały czasy wykonania poszczególnych kroków. Dla każdego wierzchołka v drzewa T konstrukcja struktury A_v może być wykonana w czasie $O(qp^2 \log p)$. Zatem sumaryczna złożoność obliczeniowa algorytmy to $O(n\Delta^2 \log \Delta)$.

Przypomnijmy jeszcze, że przedstawiony algorytm ogranicza się do określenia liczności najmniej licznej globalnej koalicji krawędziowej. Odpowiednio rozbudowując strukturę A_v oraz strukturę

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

pomocniczą B_v możemy, bez wpływu na złożoność, stworzyć algorytm konstruujący najmniej liczną globalną koalicję krawędziową.

4.5 $\mathcal{NP}$–zupełność problemu istnienia globalnej koalicji krawędziowej dla grafów podkubicznych

W niniejszej sekcji wykażemy, że problem znalezienia globalnej koalicji krawędziowej o rozmiarze nie przekraczającym zadanego rozmiaru jest $\mathcal{NP}$–zupełny w klasie grafów podkubicznych. Przedstawimy redukcję z $\mathcal{NP}$–zupełnego (twierdzenie 1.10) problemu *3DM*.

Zdefiniujemy teraz problem poszukiwania globalnej koalicji krawędziowej:

Problem	*MINGEA*
Instancja	Podkubiczny graf G oraz liczba naturalna $m > 0$.
Pytanie	Czy w grafie G istnieje globalna koalicja krawędziowa S, taka że $\|S\| \leq m$?

Twierdzenie 4.43. *Problem MINGEA jest $\mathcal{NP}$–zupełny w klasie grafów podkubicznych.*

Dowód. Problem *MINGEA* należy do klasy $\mathcal{NP}$. Dowód przeprowadzimy poprzez redukcję od problemu *3DM*. Niech $G = (V \cup Q, E)$ będzie podkubicznym grafem dwudzielnym o składowych dwudzielności V oraz Q, takich że $V = X \cup Y \cup Z$, $|X| = |Y| = |Z| = m$, $|V| = 3m$ oraz $|Q| = t$. Dla każdego wierzchołka $q \in Q$ mamy $\deg_G(q) = 3$ i q jest połączony z dokładnie jednym wierzchołkiem w każdym zbiorze X, Y i Z. Dla każdego wierzchołka $v \in V$ mamy $\deg_G(v) \in \{2, 3\}$.

Niech $V_i = \{v \in V : \deg_G(v) = i\}$ i $m_i = |V_i|$, dla $i \in \{2, 3\}$. Skonstruujemy graf podkubiczny G^*, w którym istnieje podzbiór $Q' \subseteq Q$, taki że $|Q'| = m$ dominujący wszystkie wierzchołki zbioru V wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje w nim globalna koalicja krawędziowa S taka, że $|S| \leq 2m_2 + 5m_3 + 9t$.

Wykonamy transformację grafu G w graf G^* w czterech krokach, które możemy wykonać w czasie wielomianowym:

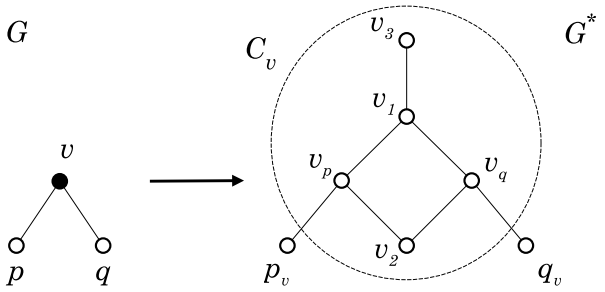
(S_1) każdy wierzchołek $v \in V_2$, gdzie $\mathrm{N}_G(v) = \{p, q\} \subseteq Q$, zastępujemy grafem C_v jak na rysunku 4.20,

(S_2) każdy wierzchołek $v \in V_3$, gdzie $\mathrm{N}_G(v) = \{p, q, r\} \subseteq Q$, zastępujemy grafem D_v jak na rysunku 4.21,

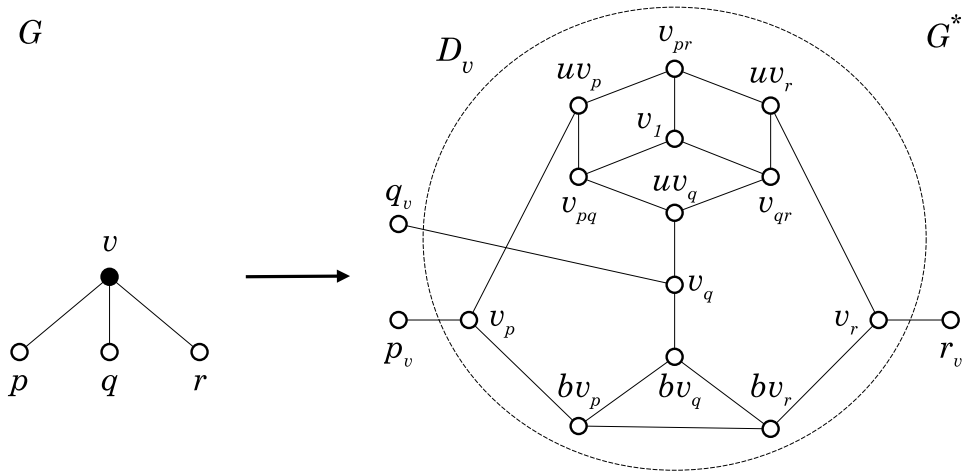
(S_3) każdy wierzchołek $q \in Q$, gdzie $\mathrm{N}_G(q) = \{x, y, z\} \subseteq V$ i $x \in X, y \in Y, z \in Z$, zastępujemy grafem H_q jak na rysunku 4.22,

(S_4) każdą krawędź $\{v, q\} \in \mathrm{E}(G)$, gdzie $v \in V, q \in Q$, zastępujemy krawędzią $\{v_q, q_v\} \in \mathrm{E}(G^*)$.

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl



Rys. 4.20: Graf C_v zastępujący wierzchołek $v \in V$ stopnia 2. Mamy $p_v, q_v \notin \mathrm{V}(C_v)$, ale $p_v \in \mathrm{V}(H_p), q_v \in \mathrm{V}(H_q)$.



Rys. 4.21: Graf D_v zastępujący wierzchołek $v \in V$ stopnia 3. Mamy $p_v, q_v, r_v \notin \mathrm{V}(D_v)$, ale $p_v \in \mathrm{V}(H_p), q_v \in \mathrm{V}(H_q), r_v \in \mathrm{V}(H_r)$.

Wszystkie grafy rodziny $\{C_v\}_{v\in V_2}$ są wzajemnie izomorficzne i parami rozłączne. Analogicznie grafy rodzin $\{D_v\}_{v\in V_3}$ oraz $\{H_q\}_{q\in Q}$. Zatem:

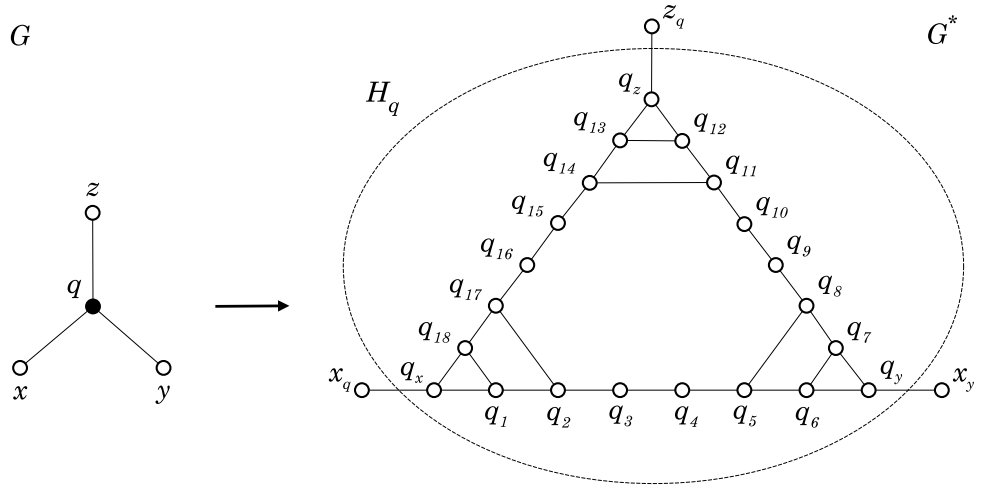
$$\begin{aligned}
\mathrm{V}(G^*) &= \bigcup_{v\in V_2} \mathrm{V}(C_v) \cup \bigcup_{v\in V_3} \mathrm{V}(D_v) \cup \bigcup_{q\in Q} \mathrm{V}(H_q),\\
\mathrm{E}(G^*) &= \bigcup_{v\in V_2} \mathrm{E}(C_v) \cup \bigcup_{v\in V_3} \mathrm{E}(D_v) \cup \bigcup_{q\in Q} \mathrm{E}(H_q) \cup \bigcup_{v\in V, q\in Q, \{v,q\}\in \mathrm{E}(G)} \{\{v_q, q_v\}\}.
\end{aligned}$$

Zauważmy, że $\Delta(G^*) \leq 3$.

($\Rightarrow$) Załóżmy najpierw, że zbiór $Q' \subseteq Q$ dominuje zbiór V oraz $|Q'| = m$. Jako, że $|X| = |Y| = |Z| = m$, to mamy $|\,\mathrm{N}_G(v) \cap Q'| = 1$, dla każdego $v \in V$. Stąd, możemy zdefiniować $\{q(v)\} = \mathrm{N}_G(v) \cap Q'$, dla każdego $v \in V$. Co więcej, jeśli $v \in V_2$, to możemy zdefiniować $\{p(v)\} = \mathrm{N}_G(v) \cap (Q \setminus Q')$ i jeżeli $v \in V_3$, to $\{p(v), r(v)\} = \mathrm{N}_G(v) \cap (Q \setminus Q')$.

Dla każdego wierzchołka $q \in Q$, jeżeli $\mathrm{N}_G(q) = \{x, y, z\} \subseteq V$ i $x \in X, y \in Y, z \in Z$, to $Q_q^+ = \{q_x, q_y, q_z, q_3, q_4, q_9, q_{10}, q_{15}, q_{16}\} \subseteq \mathrm{V}(H_q)$ i $Q_q^- = \{q_1, q_2, q_3, q_7, q_8, q_9, q_{13}, q_{14}, q_{15}\} \subseteq \mathrm{V}(H_q)$

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl



Rys. 4.22: Graf H_q zastępujący wierzchołek $q \in Q$. Mamy $x_q, y_q, z_q \notin \mathrm{V}(H_q)$.

(rys. 4.22). Niech

$$S = \bigcup_{v \in V_2} \{v_1, v_{q(v)}\} \cup \bigcup_{v \in V_3} \{v_{q(v)}, bv_{q(v)}, uv_{p(v)}, v_{p(v)r(v)}, uv_{r(v)}\} \cup \bigcup_{q \in Q'} Q_q^+ \cup \bigcup_{q \in Q \setminus Q'} Q_q^-.$$

Dla każdego $v \in V_2$ zbiór $\{v_1, v_{q(v)}\} \subseteq \mathrm{V}(C_v)$ dominuje zbiór C_v i dla każdego $v \in V_3$ zbiór $\{v_{q(v)}, bv_{q(v)}, uv_{p(v)}, v_{p(v)r(v)}, uv_{r(v)}\} \subseteq \mathrm{V}(D_v)$ dominuje zbiór D_v. Jeżeli $q \in Q'$, to zbiór Q_q^+ dominuje zbiór H_q, a jeżeli $q \in Q \setminus Q'$, to zbiór Q_q^- dominuje zbiór H_q. Zatem zbiór S jest dominujący w grafie G^*.

Każda krawędź podgrafu indukowanego $G^*[S]$ należy do jednego z grafów $\{C_v\}_{v \in V_2} \cup \{D_v\}_{v \in V_3} \cup \{H_q\}_{q \in Q}$, lub jest to krawędź $\{v_q, q_v\}$ dla pewnych $q \in Q'$ oraz $v \in V$.

Niech $e \in \mathrm{E}(G^*[S])$. Jeżeli e jest jedną z krawędzi $\{q_3, q_4\}$, $\{q_9, q_{10}\}$ lub $\{q_{15}, q_{16}\}$ dla pewnego $q \in Q'$, to $\mathrm{SEC}_{G^*}(S, e)$. W przeciwnym razie krawędź e nie jest izolowaną krawędzią $G^*[S]$, ale jako że $\Delta(G^*) \leq 3$, to również $\mathrm{SEC}_{G^*}(S, e)$, a zatem zbiór S jest globalną koalicją krawędziową, a także $|S| \leq 2m_2 + 5m_3 + 9|Q'| + 9|Q \setminus Q'| = 2m_2 + 5m_3 + 9t$.

($\Leftarrow$) Niech teraz zbiór S będzie globalną koalicją krawędziową w grafie G^*, taką że $|S| \leq 2m_2 + 5m_3 + 9t$. Będziemy trzymali się konwencji nazewnictwa zaproponowanej na rysunkach 4.20, 4.21 i 4.22.

Stwierdzenie 4.44. *Dla każdego wierzchołka $v \in V_2$, mamy $|S \cap \mathrm{V}(C_v)| \geq 2$. Co więcej, jeżeli $|S \cap \mathrm{V}(C_v)| = 2$, to $|S \cap \{v_p, v_q\}| = 1$ oraz ($\{v_1, v_p, p_v\} \subseteq S$ lub $\{v_1, v_q, q_v\} \subseteq S$), gdzie $\mathrm{N}_G(v) = \{p, q\}$.*

Dowód. Niech $v \in V_2$ oraz $\mathrm{N}_G(v) = \{p, q\}$. Jako, że zbiór S dominuje graf G^*, to $v_1 \in S$. Jeżeli $v_3 \in S$, to $|\mathrm{N}_{G^*}[v_2] \cap S| \geq 1$ oraz $|S \cap \mathrm{V}(C_v)| \geq 3$. W przeciwnym razie, $v_p \in S$ lub $v_q \in S$. Jako, że S jest koalicją krawędziową, to $p_v \in S$ oraz $q_v \in S$. Zatem $\{v_1, v_p, p_v\} \subseteq S$ lub $\{v_1, v_q, q_v\} \subseteq S$. □

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

Stwierdzenie 4.45. *Dla każdego wierzchołka $v \in V_3$ mamy $|S \cap \mathrm{V}(D_v)| \geq 5$. Jeżeli $|S \cap \mathrm{V}(D_v)| = 5$, to $|S \cap \{v_p, v_q, v_r\}| = 1$ oraz ($\{bv_p, v_p, p_v\} \subseteq S$ lub $\{bv_q, v_q, q_v\} \subseteq S$ lub $\{bv_r, v_r, r_v\} \subseteq S$), gdzie $\mathrm{N}_G(v) = \{p, q, r\}$.*

Dowód. Niech $v \in V_3$ oraz $\mathrm{N}_G(v) = \{p, q, r\}$. Przypomnijmy, że zbiór S jest globalną koalicją krawędziową. Załóżmy, że $\{bv_p, bv_q, bv_r\} \cap S = \emptyset$. Zatem, $\{v_p, v_q, v_r\} \subseteq S$. Jeżeli $v_1 \in S$, to istnieje $u \in \mathrm{N}_{G^*}[v_1] \cap S$, że $|S \cap \mathrm{N}_{G^*}[u]| \geq 3$. Zatem, $|S \cap \mathrm{V}(D_v)| \geq 6$. Przyjmijmy, że $v_1 \notin S$ oraz załóżmy, bez zmiany ogólności, że $v_{pr} \in S$. Jeżeli $|\mathrm{N}_{G^*}[v_{pr}] \cap S| \geq 3$, to $|S \cap \mathrm{V}(D_v)| \geq 6$. Niech $|\mathrm{N}_{G^*}[v_{pr}] \cap S| = 2$. Jeżeli $uv_r \in S$ (analogicznie $uv_p \in S$), to $\mathrm{N}_{G^*}[v_{pq}] \cap S \neq \emptyset$. Zatem $|S \cap \mathrm{V}(D_v)| \geq 6$.

Przyjmijmy $S \cap \{bv_p, bv_q, bv_r\} \neq \emptyset$. Jeżeli $|S \cap \{bv_p, bv_q, bv_r\}| \geq 2$, to analogicznie jak w przypadku $S \cap \{bv_p, bv_q, bv_r\} = \emptyset$ otrzymujemy $|S \cap \mathrm{V}(D_v)| \geq 6$. Zatem, bez straty ogólności, załóżmy, że $bv_q \in S$ oraz $S \cap \{bv_p, bv_r\} = \emptyset$. Stąd $v_q \in S$ i do rozpatrzenia mamy dwa przypadki: $uv_q \in S$ lub $q_v \in S$. Niech $U = \mathrm{N}_{G^*}[v_{pr}]$ oraz $U_1 = \mathrm{N}_{G^*}[U]$. Niech $\{bv_q, v_q, uv_q\} \subseteq S$. Jeżeli $v_{pr} \in S$, to $|S \cap U_1| \geq 3$. Jako że $\{bv_q, v_q, uv_q\} \cap U_1 = \emptyset$, to mamy $|S \cap \mathrm{V}(D_v)| \geq 6$. Zatem niech $v_{pr} \notin S$. Zauważmy, że $S \cap \{v_{pq}, v_{qr}\} \neq \emptyset$. Jeżeli $\{v_{pq}, v_{qr}, v_1\} \subseteq S$, to $|S \cap \mathrm{V}(D_v)| \geq 6$. Jeżeli $v_{qr} \notin S$ (analogicznie $v_{pq} \notin S$), to $v_{pq} \in S$ i $|S \cap \mathrm{N}_{G^*}[\{v_{pr}, uv_r\}]| \geq 2$. Zatem $|S \cap \mathrm{V}(D_v)| \geq 6$. Niech teraz $S \cap \{v_{pq}, v_{qr}, v_1\} = \{v_{pq}, v_{qr}\}$. Jako, że $S \cap U \neq \emptyset$, to mamy $|S \cap \mathrm{V}(D_v)| \geq 6$. Niech $\{bv_q, v_q, q_v\} \subseteq S$, i niech $U_2 = \mathrm{N}_{G^*}[U_1] \cap \mathrm{V}(D_v)$. Jako, że $S \cap U \neq \emptyset$ i $U_2 \cap \{bv_q, v_q\} = \emptyset$, mamy $|S \cap U_2| \geq 3$. Zatem $|S \cap \mathrm{V}(D_v)| \geq 5$. □

Stwierdzenie 4.46. *Dla każdego wierzchołka $q \in Q$ zachodzi $|S \cap \mathrm{V}(H_q)| \geq 9$.*

Dowód. Niech $q \in Q$ oraz $\mathrm{N}_G(q) = \{x, y, z\}$, gdzie $x \in X, y \in Y, z \in Z$. Zbiór S jest globalną koalicją krawędziową. Pokażemy, że $|S \cap \{q_x, q_1, q_2, q_3, q_{16}, q_{17}, q_{18}\}| \geq 3$.

Niech $q_x \in S$ oraz $|S \cap \{q_2, q_{17}\}| \leq 1$. Jeżeli $q_2 \in S$ (analogicznie $q_{17} \in S$), to $q_1 \in S$ lub $q_3 \in S$. Jeżeli $S \cap \{q_2, q_{17}\} = \emptyset$, to $S \cap \{q_1, q_3\} \neq \emptyset$ i $S \cap \{q_{16}, q_{18}\} \neq \emptyset$. Załóżmy teraz , że $q_x \notin S$. Jeżeli $q_1 \in S$ (analogicznie $q_{18} \in S$), to istnieje wierzchołek $u \in \mathrm{N}_{G^*}[q_1]$, taki że $|S \cap \mathrm{N}_{G^*}[u]| \geq 3$. Jeżeli $S \cap \{q_1, q_{18}\} = \emptyset$, to $\{q_2, q_{17}\} \subseteq S$, a zatem $S \cap \{q_3, q_{16}\} \neq \emptyset$.

Analogicznie mamy $|S \cap \{q_y, q_4, q_5, q_6, q_7, q_8, q_9\}| \geq 3$ oraz $|S \cap \{q_z, q_{10}, q_{11}, q_{12}, q_{13}, q_{14}, q_{15}\}| \geq 3$. Zatem $|S \cap \mathrm{V}(H_q)| \geq 9$. □

Stwierdzenie 4.47. *Zachodzi $|S| = 2m_2 + 5m_3 + 9t$ oraz:*

(*i*) *dla każdego $v \in V_2$ zachodzi $|S \cap \mathrm{V}(C_v)| = 2$. Co więcej $|S \cap \{v_p, v_q\}| = 1$ oraz $\{v_u, u_v\} \subseteq S$ dla dokładnie jednego wierzchołka $u \in \mathrm{N}_G(v) = \{p, q\}$,*

(*ii*) *dla każdego $v \in V_3$ zachodzi $|S \cap \mathrm{V}(D_v)| = 5$. Co więcej $|S \cap \{v_p, v_q, v_r\}| = 1$ oraz $\{v_u, u_v\} \subseteq S$ dla dokładnie jednego wierzchołka $u \in \mathrm{N}_G(v) = \{p, q, r\}$.*

(*iii*) *dla każdego $q \in Q$ zachodzi $|S \cap \mathrm{V}(H_q)| = 9$. Co więcej $\{q_x, q_y, q_z, x_q, y_q, z_q\} \subseteq S$ lub $S \cap \{q_x, q_y, q_z, x_q, y_q, z_q\} = \emptyset$, gdzie $\mathrm{N}_G(q) = \{x, y, z\}$.*

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

Dowód. Jako, że $|S| \leq 2m_2 + 5m_3 + 9t$, to ze stwierdzeń 4.44, 4.45 i 4.46 otrzymujemy, że $|S| = 2m_2 + 5m_3 + 9t$, a także własności (i) oraz (ii).

(iii). Niech $q \in Q$ oraz $\mathrm{N}_G(q) = \{x, y, z\}$, gdzie $x \in X, y \in Y, z \in Z$. Jako, że $|S| = 2m_2+5m_3+9t$, to z własności (i) oraz (ii) mamy $|S \cap \mathrm{V}(H_q)| = 9$. Z dowodu stwierdzenia 4.46 otrzymujemy:

$$|S \cap \{q_x, q_1, q_2, q_3, q_{16}, q_{17}, q_{18}\}| = 3 \tag{4.1}$$

$$|S \cap \{q_y, q_4, q_5, q_6, q_7, q_8, q_9\}| = 3 \tag{4.2}$$

$$|S \cap \{q_z, q_{10}, q_{11}, q_{12}, q_{13}, q_{14}, q_{15}\}| = 3 \tag{4.3}$$

Z własności (i) i (ii) mamy, że:

$$\text{dla każdego } v \in \mathrm{N}_G(q), \text{ jeżeli } v_q \in S, \text{ to } q_v \in S. \tag{4.4}$$

Pokażemy teraz, że:

$$\text{dla każdego } v \in \mathrm{N}_G(q), \text{ jeżeli } q_v \in S, \text{ to } S \cap \mathrm{N}_{G^*}(q_v) = \{v_q\}. \tag{4.5}$$

Bez straty ogólności niech $v = x$ (rys 4.22). Załóżmy że $q_x \in S$ i $S \cap \{q_1, q_{18}\} \neq \emptyset$. Stąd z własności (4.1), mamy $|S \cap \{q_2, q_3, q_{16}, q_{17}\}| \leq 1$. Zatem mamy do rozpatrzenia trzy przypadki: (a) $|S \cap \{q_2, q_{17}\}| = 1$ lub (b) $|S \cap \{q_3, q_{16}\}| = 1$ lub (c) $|S \cap \{q_1, q_{18}\}| = 2$.

Przypadek (a). Niech $q_{17} \in S$ (analogicznie $q_2 \in S$). Wtedy $q_{18} \in S$ i $S \cap \{q_2, q_3, q_{16}\} = \emptyset$ a zatem $\{q_4, q_5, q_{14}\} \subseteq S$. Jeżeli $q_y \in S$, to z własności (4.2) otrzymujemy $\neg\,\mathrm{SEC}_{G^*}(S, \{q_4, q_5\})$, co jest sprzecznością. Zatem $q_y \notin S$. Z własności (4.4) otrzymujemy, że $y_q \notin S$, a z tego $q_6 \in S$. Kontynuując, z własności (4.2), otrzymujemy $S \cap \{q_8, q_9\} = \emptyset$, a zatem $\{q_{10}, q_{11}\} \subseteq S$. Jako, że $q_{14} \in S$, to z własności (4.3) uzyskujemy $S \cap \{q_{12}, q_{13}, q_z\} = \emptyset$, co stoi w sprzeczności z własnością (4.4).

Przypadek (b). Niech $q_3 \in S$ (analogicznie $q_{16} \in S$). Wtedy zachodzi $q_{18} \in S$, w przeciwnym razie $S \cap \mathrm{N}_{G^*}[q_{17}] = \emptyset$. Zatem $\{q_4, q_{14}, q_{15}\} \subseteq S$, a z własności (4.3) i (4.4) otrzymujemy, że $q_{13} \in S$. Zatem $\{q_8, q_9\} \subseteq S$, a z własności (4.2) uzyskujemy, że $\neg\,\mathrm{SEC}_{G^*}(S, \{q_8, q_9\})$, sprzeczność.

Przypadek (c). Niech $\{q_1, q_{18}\} \subseteq S$. Stąd $S \cap \{q_2, q_3, q_{16}\} = \emptyset$, a zatem $\{q_4, q_5, q_{14}\} \subseteq S$. Dalsza część dowodu przebiega analogicznie jak w przypadku (a). Zatem uzasadniliśmy własność (4.5).

Pokażemy teraz, że $\{q_x, q_y, q_z\} \subseteq S$ lub $S \cap \{q_x, q_y, q_z\} = \emptyset$. Wystarczy pokazać, że jeżeli $q_x \in S$, to $q_y \in S$. Załóżmy przeciwnie, że $q_x \in S$ ale $q_y \notin S$. Z własności (4.1) i (4.5), mamy $x_q \in S$, $S \cap \{q_1, q_{18}\} = \emptyset$ oraz $|S \cap \{q_2, q_3, q_{16}, q_{17}\}| = 2$.

Jeżeli $\{q_2, q_{17}\} \subseteq S$, to z własności (4.1) mamy $\neg\,\mathrm{SEC}_{G^*}(S, \{q_2, q_{17}\})$, a z tego $|S \cap \{q_2, q_{17}\}| \leq 1$ oraz $|S \cap \{q_3, q_{16}\}| \geq 1$. Jeżeli $q_3 \notin S$, to $\{q_{16}, q_{17}\} \subseteq S$, a zatem $q_4 \in S$. Jeżeli $q_3 \in S$, to $q_{17} \notin S$, a zatem $q_4 \in S$.

Analogicznie otrzymujemy, że $q_{15} \in S$. Zatem $\{q_4, q_{15}\} \subseteq S$. Ponieważ $q_y \notin S$, to z własności (4.4) uzyskujemy $y_q \notin S$. Stąd z własności (4.2), uzyskujemy $1 \leq |S \cap \{q_6, q_7\}| \leq 2$, a zatem $\{q_4, q_5, q_6\} \subseteq S$. Kontynuując mamy $S \cap \{q_8, q_9\} = \emptyset$, a zatem $\{q_{10}, q_{11}\} \subseteq S$. Z własności (4.3), otrzymujemy, że $\neg\,\mathrm{SEC}_{G^*}(S, \{q_{10}, q_{11}\})$, sprzeczność.

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

Z własności (4.4) i (4.5) mamy, że dla każdego wierzchołka $v \in \mathrm{N}_G(q)$ zachodzi $v_q \in S \Leftrightarrow q_v \in S$. Zatem $\{q_x, q_y, q_z, x_q, y_q, z_q\} \subseteq S$ lub $S \cap \{q_x, q_y, q_z, x_q, y_q, z_q\} = \emptyset$. □

Dla każdego wierzchołka $q \in Q$ oznaczmy $\mathrm{N}_G(q) = \{x(q), y(q), z(q)\}$, gdzie $x(q) \in X, y(q) \in Y, z(q) \in Z$. Niech:

$$Q' = \{q \in Q : \{q_{x(q)}, q_{y(q)}, q_{z(q)}\} \subseteq S\}.$$

Niech $v \in V$. Ze stwierdzenia 4.47 (punkty (i) i (ii)) istnieje wierzchołek $q \in \mathrm{N}_G(v)$, taki że $\{v_q, q_v\} \subseteq S$. Stąd ze stwierdzenia 4.47 (punkt (iii)), mamy $q \in Q'$. Zatem zbiór Q' dominuje zbiór V, a także $3|Q'| = \sum_{q \in Q'} |\mathrm{N}_G(q)| \geq |\mathrm{N}_G(Q')| = |V| = 3m$. Z własności 4.47 mamy dla każdych $p, q \in Q'$ oraz $p \neq q$, że $\mathrm{N}_G(p) \cap \mathrm{N}_G(q) = \emptyset$. Zatem $|Q'| = m$. □

4.6 Podsumowanie i problemy otwarte

W niniejszym rozdziale zaprezentowaliśmy definicję koalicji krawędziowej wprowadzonej w [48]. Analizowaliśmy jej podstawowe własności, oraz oszacowaliśmy (część 4.2) rozmiar najmniejszej globalnej koalicji krawędziowej w grafach. Przedstawiliśmy oszacowanie dolne (część 4.2.1) dla grafów ogólnych oraz oszacowania górne (część 4.2.2) dla drzew.

W części 4.3 analizowaliśmy rozmiar i konstrukcje globalnych koalicji krawędziowych w różnych klasach grafów uzyskując dokładne formuły między innymi dla grafów pełnych k–dzielnych oraz pełnych drzew k–arnych.

W kolejnej części (4.4) zaprezentowaliśmy wielomianowy algorytm poszukujący najmniejszej globalnej koalicji krawędziowej w drzewie. Zatem w przypadku zagadnień praktycznych, w których możliwe jest skorzystanie z modelu koalicji krawędziowych w drzewach, poszukiwanie dokładnych rozwiązań można zrealizować w sposób wydajny.

W ostatniej części (4.5) pokazaliśmy, że problem poszukiwania najmniejszej globalnej koalicji krawędziowej jest $\mathcal{NP}$–zupełny nawet w przypadku klasy grafów podkubicznych.

Problemy otwarte

W części 4.2.2 w twierdzeniu 4.18 przedstawiliśmy oszacowanie górne na rozmiar najmniejszej globalnej koalicji krawędziowej w drzewach. Problemem otwartym pozostaje oszacowanie w grafach ogólnych. Stawiamy w tym miejscu następujące dwie hipotezy:

1. Niech G będzie grafem, dla którego $\mathrm{n}(G) \geq 3$. Wtedy $\gamma_{ea} \leq \frac{2}{3}\,\mathrm{n}(G)$.
2. Niech G będzie grafem, dla którego $\mathrm{n}(G) \geq 3$. Zachodzi $\gamma_{ea} = \frac{2}{3}\,\mathrm{n}(G)$ wtedy i tylko wtedy, gdy graf G jest izomorficzny z cyklem C_3, cyklem C_6 lub jest P_2–rozszerzeniem pewnego grafu H.

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

ROZDZIAŁ 5

Równowaga strategiczna koalicji defensywnych

W niniejszym rozdziale przyjrzymy się definicji, własnościom, algorytmom i zagadnieniom złożoności obliczeniowej w obrębie modelu równowagi strategicznej koalicji defensywnych (ang. *strategic balance of defensive alliances*), który autor niniejszej pracy wprowadził do literatury polskojęzycznej w ramach pracy dyplomowej magisterskiej [45] a później wraz z współautorami w ramach artykułu [48].

Definicja 5.1. Niech G będzie grafem. Rozważmy dwa rozłączne podzbiory zbioru $\mathrm{V}(G)$ które oznaczymy odpowiednio jako N oraz S. Jeżeli zbiory N oraz S są globalnymi koalicjami defensywnymi, to parę nieuporządkowaną $\{N, S\}$ nazywamy *równowagą strategiczną koalicji defensywnych* (ang. *strategic balance of defensive alliances*). Dodatkowo jeżeli rodzina $\{N, S\}$ jest podziałem zbioru $\mathrm{V}(G)$, to *równowagę strategiczną koalicji defensywnych* nazywamy *doskonałą* (ang. *perfect*).

Tak zdefiniowana równowaga strategiczna jest jednym z modeli równowagi strategicznej zgodnych z ogólną definicją 2.10. To znaczy jest to równowaga strategiczna oparta o model struktur defensywnych typu $\mathcal{S}_G^a$ przy oznaczeniach takich jakie zastosowaliśmy w części 2.3.

Warto zwrócić uwagę, że oryginalne sformułowanie ([45] i [46]) definiowało równowagę strategiczną koalicji defensywnych jako *równowagę strategiczną*, bez określenia jakiego modelu struktur defensywnych dotyczy. W niniejszej pracy dokonaliśmy uogólnienia poprzez wprowadzenie meta definicji 2.10 a oryginalna terminologia została przemianowana. Dodatkowo oryginalna definicja odnosiła się również do zbioru wierzchołków będących poza globalnymi koalicjami defensywnymi. To znaczy, dla grafu G, definiowaliśmy parę uporządkowaną $(\{N, S\}, I)$, gdzie $N, S, I \subseteq \mathrm{V}(G)$, oraz zbiory N, S są globalnymi koalicjami defensywnymi. Jako, że definicja w tej postaci nie wymaga spełnienia przez zbiór I żadnych warunków, to w niniejszej pracy została ona uproszczona.

Warunkiem koniecznym istnienia równowagi strategicznej w grafie jest oczywiście istnienie dwóch rozłącznych zbiorów dominujących w tym grafie. Jak można zaobserwować na rysunku 5.1, równowaga strategiczna koalicji defensywnych nie musi istnieć nawet jeśli istnieje podział zbioru wierzchołków na dwa zbiory dominujące.

Rys. 5.1: Ścieżka P_3, w której istnieje podział na dwa rozłączne zbiory dominujące, ale nie istnieje równowaga strategiczna koalicji defensywnych.

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

Pytanie o istnienie równowagi strategicznej koalicji defensywnych określa w takim razie decyzyjny problem obliczeniowy.

Problem	*SBDA*
Instancja	Graf G.
Pytanie	Czy w grafie G istnieje równowaga strategiczna koalicji defensywnych?

Analogicznie sformułujemy problem obliczeniowy dla weryfikacji istnienia doskonałej równowagi strategicznej koalicji defensywnych.

Problem	*PSBDA*
Instancja	Graf G.
Pytanie	Czy w grafie G istnieje doskonała równowaga strategiczna koalicji defensywnych?

Stwierdzenie 2.33, w sposób uniwersalny orzeka, że niezależnie od modelu struktury defensywnej istnienie doskonałej równowagi strategicznej danego typu pociąga za sobą w sposób oczywisty istnienie równowagi strategicznej tego typu. Wynika z tego, że jeśli dla danej instancji odpowiedź dla problemu *PSBDA* jest twierdząca, to jest też twierdząca dla problemu *SBDA*. W dalszej części pokażemy, że w przypadku równowagi strategicznej koalicji defensywnych zachodzi również odwrotna zależność.

5.1 Doskonała równowaga strategiczna koalicji defensywnych

Przypomnijmy, że z twierdzenia 2.1 wiemy, że suma mnogościowa zbiorów będących koalicjami defensywnymi również jest koalicją defensywną. Dodatkowo jeśli choć jedna z koalicji defensywnych jest globalna, to oczywiście ich suma również. Wniosek 2.2 rozszerza to rozumowanie na dowolną liczbę koalicji defensywnych.

Stwierdzenie 5.1. *Niech G będzie grafem. Doskonała równowaga strategiczna koalicji defensywnych w grafie G istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy liczba podziału na koalicje defensywne w tym grafie jest równa co najmniej* 2.

Dowód. Jeśli w grafie G istnieje doskonała równowaga strategiczna koalicji defensywnych, to mamy dwie rozłączne globalne koalicje defensywne. Załóżmy teraz, że istnieje podział zbioru wierzchołków grafu G na globalne koalicje defensywne $S_1, S_2, ..., S_k$, gdzie $k \geq 2$. Na mocy wniosku 2.2 zbiór $S_0 = \bigcup_{i=1}^{k-1} S_i$ jest globalną koalicją defensywną. Zatem para $\{S_0, S_k\}$ jest doskonałą równowagą strategiczną koalicji defensywnych. □

Sformułujemy teraz dwa dwa problemy obliczeniowe związane z poszukiwaniem drugiej globalnej koalicji defensywnej pośród wierzchołków poza zadaną globalną koalicją defensywną.

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

Problem	*SBDAO*
Instancja	Graf G oraz globalna koalicja defensywna $N \subseteq \mathrm{V}(G)$.
Pytanie	Czy w grafie G istnieje równowaga strategiczna koalicji defensywnych $\{N', S'\}$, taka że $S' \subseteq (\mathrm{V}(G) \setminus N')$ oraz $N \subseteq N'$?

Analogicznie zdefiniujemy problem dla doskonałej równowagi strategicznej koalicji defensywnych.

Problem	*PSBDAO*
Instancja	Graf G oraz globalna koalicja defensywna $N \subseteq \mathrm{V}(G)$.
Pytanie	Czy w grafie G istnieje doskonała równowaga strategiczna koalicji defensywnych $\{N', S'\}$, taka że $S' \subseteq (\mathrm{V}(G) \setminus N')$ oraz $N \subseteq N'$?

Lemat 5.2. *Niech G będzie grafem i niech $N \subseteq \mathrm{V}(G)$ będzie globalną koalicją defensywną. Dla każdego wierzchołka $v \in (\mathrm{V}(G) \setminus N)$, jeżeli $|\mathrm{N}_G[v] \cap N| > |\mathrm{N}_G[v] \setminus N|$, to nie istnieje koalicja defensywna $S \subseteq \mathrm{V}(G) \setminus N$ taka, że $v \in S$. Co więcej, zbiór $N \cup \{v\}$ jest globalną koalicją defensywną w grafie G.*

Dowód. Niech $v \in \mathrm{V}(G) \setminus N$ oraz $|\mathrm{N}_G[v] \cap N| > |\mathrm{N}_G[v] \setminus N|$. Załóżmy przeciwnie, że istnieje taka koalicja defensywna $S \subseteq \mathrm{V}(G) \setminus N$, że $v \in S$. Stąd mamy $|\mathrm{N}_G[v] \cap S| \geq |\mathrm{N}_G[v] \setminus S|$, a ze stwierdzenia 1.4 mamy $|\mathrm{N}_G[v] \setminus N| \geq |\mathrm{N}_G[v] \cap S|$. Skoro $N \subseteq \mathrm{V}(G) \setminus S$, to ponownie ze stwierdzenia 1.4 otrzymujemy $|\mathrm{N}_G[v] \setminus S| \geq |\mathrm{N}_G[v] \cap N|$. Mamy w takim razie $|\mathrm{N}_G[v] \setminus S| \geq |\mathrm{N}_G[v] \cap N| > |\mathrm{N}_G[v] \setminus N| \geq |\mathrm{N}_G[v] \cap S|$, co jest sprzecznością.

Niech $N' = N \cup \{v\}$. Jako, że N jest zbiorem dominującym, to oczywiście zbiór N' również jest dominujący. Zbiór N jest koalicją defensywną oraz z założenia zachodzi $|\mathrm{N}_G[v] \cap N| > |\mathrm{N}_G[v] \setminus N|$. Zatem dla dowolnego wierzchołka $u \in N'$ na mocy stwierdzenia 1.4 mamy $|\mathrm{N}_G[u] \cap N'| \geq |\mathrm{N}_G[u] \cap N| \geq |\mathrm{N}_G[u] \setminus N| \geq |\mathrm{N}_G[u] \setminus N'|$. Czyli N' jest globalną koalicją defensywną. □

Lemat 5.3. *Niech G będzie grafem i niech $N \subseteq \mathrm{V}(G)$ będzie globalną koalicją defensywną. Zdefiniujmy zbiór $U = \{v \in \mathrm{V}(G) \setminus N : |\mathrm{N}_G[v] \cap N| > |\mathrm{N}_G[v] \setminus N|\}$. Wtedy zachodzi:*

1. *zbiór $N' = N \cup U$ jest globalną koalicją defensywną,*
2. *jeżeli $U = \emptyset$, to $S = \mathrm{V}(G) \setminus N$ jest koalicją defensywną lub zbiorem pustym,*
3. *dla dowolnej koalicji defensywnej $S \subseteq \mathrm{V}(G) \setminus N$ zachodzi $S \subseteq \mathrm{V}(G) \setminus N'$.*

Dowód. (1) Zauważmy, że $N \cup U = \bigcup_{u \in U}(N \cup \{u\})$. Na mocy lematu 5.2 każdy ze zbiorów $N \cup \{u\}$, gdzie $u \in U$ jest globalną koalicją defensywną. Wtedy z wniosku 2.2 otrzymujemy, że zbiór N' jest globalną koalicją defensywną.

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

(2) Jeżeli $N = \mathrm{V}(G)$, to teza jest oczywiście spełniona. Załóżmy, że $N \neq \mathrm{V}(G)$. Jeżeli $U = \emptyset$, to z definicji zbioru U, dla każdego wierzchołka $v \in \mathrm{V}(G) \setminus N$, mamy $|\mathrm{N}_G[v] \cap N| \leq |\mathrm{N}_G[v] \setminus N|$, zatem zbiór $S = \mathrm{V}(G) \setminus N$ jest koalicją defensywną.

(3) Niech $u \in U \cap S$, gdzie $S \subseteq \mathrm{V}(G) \setminus N$ jest koalicją defensywną. Na mocy lematu 5.2 otrzymujemy sprzeczność. □

Lemat 5.4. *Niech G będzie grafem i niech $N \subseteq \mathrm{V}(G)$ będzie globalną koalicją defensywną. Definiujemy $N_0 = N$, $U_0 = \emptyset$, $U_i = \{v \in \mathrm{V}(G) \setminus N_{i-1} : |\mathrm{N}_G[v] \cap N_{i-1}| > |\mathrm{N}_G[v] \setminus N_{i-1}|\}$, oraz $N_i = N_{i-1} \cup U_i$, dla $i = 1, 2, \ldots$. Wtedy istnieje $1 \leq k \leq \mathrm{n}(G)$, takie że $U_k = \emptyset$ i zachodzi:*

1. *zbiór $N_k = N_{k-1} = N_0 \cup U_1 \cup \ldots \cup U_{k-1}$ jest globalną koalicją defensywną,*
2. *zbiór $S = \mathrm{V}(G) \setminus N_{k-1}$ jest koalicją defensywną lub zbiorem pustym,*
3. *dla dowolnej koalicji defensywnej $S' \subseteq \mathrm{V}(G) \setminus N$ zachodzi $S' \subseteq S = \mathrm{V}(G) \setminus N_{k-1}$.*

Dowód. Jeżeli $U_i \neq \emptyset$ dla pewnego $i \geq 1$, to dla każdego $j = 1, \ldots, i$ mamy $|N_j| = |N_{j-1}| + |U_j| > |N_{j-1}|$. Zatem zachodzi $|N_i| \geq |N| + i$. Zbiór $\mathrm{V}(G)$ jest skończony, zatem istnieje $1 \leq k \leq \mathrm{n}(G)$, dla którego $U_k = \emptyset$. Tezy podpunktów (1-3) wynikają z indukcyjnego rozumowania opartego o lemat 5.3 (1-3). □

Twierdzenie 5.5. *Problemy SBDAO i PSBDAO są równoważne i istnieje algorytm rozwiązujący je w czasie $O(m)$, gdzie m jest liczbą krawędzi grafu.*

Dowód. Niech $N \subseteq \mathrm{V}(G)$ będzie globalną koalicją defensywną w grafie G oraz niech N_{k-1} będzie zdefiniowane jak w lemacie 5.4. Załóżmy, że istnieje równowaga strategiczna koalicji defensywnych $\{N', S'\}$, taka że $N \subseteq N'$. Jako, że $S' \subseteq \mathrm{V}(G) \setminus N' \subseteq \mathrm{V}(G) \setminus N$, to na mocy lematu 5.4 (3) mamy $S' \subseteq S = \mathrm{V}(G) \setminus N_{k-1}$, oraz z lematu 5.4 (2) wiemy, że zbiór S jest koalicją defensywną. Jako, że zbiór S' jest zbiorem dominującym graf G, to zbiór S również jest zbiorem dominującym graf G. Zatem na mocy lematu 5.4 (1) otrzymujemy, że $\{N_{k-1}, \mathrm{V}(G) \setminus N_{k-1}\}$ jest doskonałą równowagą strategiczną koalicji defensywnych.

Algorytm rozwiązujący problem *SBDAO* wykonuje następujące kroki: dla pewnej globalnej koalicji defensywnej $N \subsetneq \mathrm{V}(G)$ w grafie G na podstawie lematu 5.4 konstruujemy zbiory N_{k-1} i $\mathrm{V}(G) \setminus N_{k-1}$. Jeżeli zbiór $\mathrm{V}(G) \setminus N_{k-1}$ nie jest pusty, to jest koalicją defensywną. Stąd dalsza część algorytmu sprowadza się do sprawdzenia, czy zbiór $\mathrm{V}(G) \setminus N_{k-1}$ jest zbiorem dominującym w grafie G. Możemy wykonać całą procedurę w czasie ograniczonym przez $O(\sum_{v \in \mathrm{V}(G) \setminus N} \deg_G(v)) = O(m)$. Wyznaczanie wierzchołków zbioru U_i może zostać zoptymalizowane przez aktualizowanie wartości $|\mathrm{N}_G[v] \setminus N_0| - |\mathrm{N}_G[v] \cap N_0|$ o -2 jeśli istnieje wierzchołek $u \in U_j$, gdzie $j < i$, taki że $\{u, v\} \in \mathrm{E}(G)$. □

Twierdzenie 5.6. *Niech G będzie grafem. Problem SBDA jest równoważny problemowi PSBDA. Co więcej, jeśli $\{N, S\}$ jest równowagą strategiczną koalicji defensywnych w grafie G, to w tym*

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

grafie istnieje doskonała równowaga strategiczna koalicji defensywnych $\{N', S'\}$*, taka że* $N \subseteq N'$ *oraz* $S \subseteq S'$*.*

Dowód. Niech $\{N, S\}$ będzie równowagą strategiczną koalicji defensywnych w grafie G. Zatem na mocy twierdzenia 5.5 istnieje doskonała równowaga strategiczna koalicji defensywnych $\{N_{k-1}, \mathrm{V}(G) \setminus N_{k-1}\}$, gdzie $N_{k-1} = N \cup U_0 \cup \ldots U_{k-1}$. Zatem na mocy lematu 5.4 (3) mamy $N \subseteq N' = N_{k-1}$ oraz $S \subseteq S' = \mathrm{V}(G) \setminus N_{k-1}$. □

Na podstawie stwierdzenia 5.1 praz twierdzenia 5.6 mamy zatem wniosek.

Wniosek 5.7. *Problem SBDA jest równoważny weryfikacji czy liczba podziału na globalne koalicje defensywne jest równa co najmniej* 2*.* □

Pokazaliśmy, że w przypadku modelu równowagi strategicznej koalicji defensywnych problem istnienia równowagi strategicznej koalicji defensywnych (*SBDA*) jest równoważmy problemowi istnienia równowagi doskonałej (*PSBDA*). Rezultat ten umożliwia skupienie się na poszukiwaniu podziałów całego zbioru wierzchołków grafu zamiast rozważania wszystkich potencjalnych wyborów dwóch rozłącznych podzbiorów.

5.2 Równowaga strategiczna koalicji defensywnych w różnych klasach grafów

W niniejszej części skupimy się na badaniu problemu istnienia równowagi strategicznej koalicji defensywnych w podstawowych klasach grafów. Na mocy twierdzenia 5.6 istnienie równowagi strategicznej koalicji defensywnych jest równoważne istnieniu doskonałej równowagi strategicznej koalicji defensywnych. Zatem nasza analiza może ograniczyć się do poszukiwania doskonałej równowagi strategicznej w danych klasach grafów.

Zacznijmy od własności pomocniczej.

Lemat 5.8. *Niech* G *będzie grafem i niech* $\{N, S\}$ *będzie równowagą strategiczną koalicji defensywnych. Wtedy dla każdego wierzchołka* $v \in \mathrm{V}(G)$ *stopnia* 2*, jeden z jego sąsiadów należy do zbioru* N*, a drugi do zbioru* S*.*

Dowód. Jeśli obaj sąsiedzi należeliby do tej samej koalicji defensywnej, to:

- jeżeli wszystkie trzy wierzchołki należałyby do tej samej koalicji defensywnej, to wierzchołek v nie byłby zdominowany przez drugą z koalicji defensywnych,
- jeżeli wierzchołki sąsiadujące należałyby do innej koalicji defensywnej niż wierzchołek v, to wierzchołek v nie byłby zabezpieczony (w sensie predykatu SEC). □

Twierdzenie 5.9. *Doskonała równowaga strategiczna w ścieżce istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy liczba wierzchołków ścieżki jest parzysta.*

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

Dowód. ($\Rightarrow$) Niech $\{N, S\}$ będzie równowagą strategiczną koalicji defensywnych w ścieżce P_n, gdzie $n \geq 2$, o wierzchołkach $v_1, v_2, \ldots, v_n$ (w numeracji naturalnej, tzn. krawędzie występują między wierzchołkami o indeksach różniących się o 1). Załóżmy bez straty ogólności, że $v_1 \in N$. Stąd mamy $v_2 \in S$. Wtedy na mocy lematu 5.8 dla każdego $i = 2, \ldots, n-1$ mamy albo $v_{i-1} \in N$ oraz $v_{i+1} \in S$, albo $v_{i-1} \in S$ oraz $v_{i+1} \in N$. W efekcie otrzymujemy $v_{4k+2}, v_{4k+3} \in S$, dla wszystkich k spełniających $3 \leq 4k+3 \leq n$, oraz $v_{4k}, v_{4k+1} \in S$, dla wszystkich k spełniających $1 \leq 4k+1 \leq n$. Na koniec zauważmy, że wierzchołki v_{n-1} oraz v_n muszą należeć do różnych koalicji defensywnych, co zachodzi gdy n jest liczbą parzystą.
($\Leftarrow$) Niech P_{2m} będzie ścieżką parzystej długości, gdzie $m \geq 1$. Ponownie przyjmijmy naturalną numerację wierzchołków ścieżki jako $v_1, v_2, \ldots, v_{2m}$. Zdefiniujmy $v_1 \in N$, $v_2, v_3 \in S$, $v_4, v_5 \in N$, $v_6, v_7 \in S, \ldots$, czyli parami naprzemiennie. W ten sposób pozostaje nam określić przynależność dla wierzchołka v_{2m} w dwóch z czterech przypadków. Jeżeli liczba m jest parzysta, to $m = 2k$ dla pewnego k. Wtedy wierzchołki $v_{4k-2}, v_{4k-1} \in S$ i przyjmujemy $v_{4k} \in N$. Jeżeli liczba m jest nieparzysta, to $m = 2k-1$ dla pewnego k. Wtedy wierzchołki $v_{4k-4}, v_{4k-3} \in N$ i przyjmujemy $v_{4k-2} \in S$. Zbiory N, S są globalnymi koalicjami defensywnymi oraz $N \cup S = \mathrm{V}(G)$, zatem $\{N, S\}$ jest równowagą strategiczną koalicji defensywnych w ścieżce P_{2m}. □

Z analizy dowodu twierdzenia 5.9 wynika wniosek dotyczący struktury równowagi strategicznej koalicji defensywnych w ścieżkach.

Wniosek 5.10. *Niech P_n będzie ścieżką. Dla dowolnej doskonałej równowagi strategicznej koalicji defensywnych w ścieżce P_n oba końce ścieżki należą do jednej globalnej koalicji defensywnej tej równowagi strategicznej struktur defensywnych wtedy i tylko wtedy, gdy n jest podzielne przez* 4. □

Twierdzenie 5.11. *Doskonała równowaga strategiczna w cyklu istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy liczba wierzchołków cyklu jest podzielna przez* 4.

Dowód. ($\Rightarrow$) Niech $\{N, S\}$ będzie doskonałą równowagą strategiczną koalicji defensywnych w cyklu C_n, gdzie $n \geq 3$, o wierzchołkach $v_1, v_2, \ldots, v_n$ (w numeracji naturalnej, tzn. krawędzie występują między wierzchołkami o indeksach różniących się o 1 oraz pomiędzy wierzchołkami v_1 i v_n). Bez straty ogólności, na mocy lematu 5.8, możemy przyjąć, że $v_1, v_n \in N$. Wtedy, również na mocy lematu 5.8 wierzchołki $v_2, v_{n-1} \in S$. W przypadku $n = 3$ wierzchołek v_2 nie jest wtedy zabezpieczony (w sensie predykatu SEC). Zatem rozważamy przypadek $n \geq 4$. Załóżmy, że n nie jest liczbą podzielną przez 4. Zauważmy, że równowaga strategiczna koalicji defensywnych $\{N, S\}$ jest również równowagą strategiczną koalicji defensywnych w cyklu C_n z usuniętą krawędzią pomiędzy wierzchołkami v_1, v_n, czyli w ścieżce P_n. Stoi to w sprzeczności z wnioskiem 5.10. Zatem n musi być liczbą podzielną przez 4.
($\Leftarrow$) Niech C_{4k} będzie cyklem, dla pewnego $k \geq 1$. Definiujemy $v_{4k}, v_1 \in N$, $v_2, v_3 \in S$, $v_4, v_5 \in N, \ldots, v_{4k-2}, v_{4k-1} \in S$, czyli parami naprzemiennie. W ten sposób dla wszystkich wierzchołków cyklu określiliśmy przynależność albo do zbioru N, albo do zbioru S. Zbiory N, S są globalnymi

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

koalicjami defensywnymi, zatem $\{N, S\}$ jest równowagą strategiczną koalicji defensywnych w cyklu C_{4k}. □

Twierdzenie 5.12. *Doskonała równowaga strategiczna koalicji defensywnych w kole W_n o $n+1$ wierzchołkach istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy $n = 4k + l$, dla $k \geq 1$ oraz $l \in \{-1, 0, 1\}$.*

Dowód. Przyjmijmy oznaczenia dla koła W_n. Niech $W_n = (\{s\} \cup L, E)$, gdzie wierzchołek s jest osią koła, a wierzchołki zbioru L, gdzie $|L| = n$, są wierzchołkami cyklu. Wierzchołki cyklu będziemy nazywali *wierzchołkami zewnętrznymi.*

($\Rightarrow$) Niech $\{N, S\}$ będzie doskonałą równowagą strategiczną koalicji defensywnych koła W_n o n wierzchołkach zewnętrznych $L = \{v_1, \ldots, v_n\}$ oraz osi s. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że $s \in N$. To wystarczy, żeby zbiór N był zbiorem dominującym w kole W_n. Wierzchołek s jest zabezpieczony w swojej koalicji defensywnej (w sensie predykatu SEC), zatem $|N \cap L| + 1 \geq |S \cap L|$. Bez utraty ogólności możemy przyjąć, że $v_1, v_2, \ldots, v_n$ są połączone w kole W_n w cykl zgodnie z numerami indeksów.

Zwartą grupą zbioru N nazwiemy dowolny podzbiór zbioru $N \cap L$, zawierający kolejne wierzchołki cyklu, to znaczy każdy zbiór postaci $\{v_i, v_{i+1}, \ldots, v_j\}$ lub $\{v_j, \ldots, v_n, v_1, \ldots, v_i\}$, gdzie $1 \leq i \leq j \leq n$. Analogicznie definiujemy *zwartą grupę zbioru S*. Zauważmy, że liczba wierzchołków każdej zwartej grupy zbioru S jest równa co najmniej 2. Natomiast rozmiar każdej zwartej grupy zbioru N jest równy co najwyżej 2. Niech g_1 i g_2 będą licznościami zwartych grup zbioru N odpowiednio mocy 1 i mocy 2. Podobnie niech h_2 i $h_{>2}$ będą licznościami zwartych grup zbioru S odpowiednio mocy 2, oraz mocy większej niż 2. Stąd, mamy $|N \cap L| = g_1 + 2g_2$ oraz $|S \cap L| \geq 2h_2 + 3h_{>2}$. Zauważmy, że $g_1 + g_2 = h_2 + h_{>2}$, ponieważ zwarte grupy muszą przeplatać się na cyklu. Stąd $1 + g_1 + 2g_2 = 1 + |N \cap L| \geq |S \cap L| \geq 2h_2 + 3h_{>2} = 2g_1 + 2g_2 + h_{>2}$. Zatem $1 \geq g_1 + h_{>2}$. Jeżeli $g_1 = 0$ oraz $h_{>2} = 0$, to $n = 2(g_2 + h_2) = 4g_2$, gdzie $g_2 \geq 1$. Jeżeli $g_1 = 1$ oraz $h_{>2} = 0$, to $n = g_1 + 2g_2 + 2h_2 = 4h_2 - 1$, gdzie $h_2 \geq 1$. Jeżeli $g_1 = 0$ oraz $h_{>2} = 1$, to $2h_2 + 3 = 1 + 2g_2 = 1 + |N \cap L| \geq |S \cap L| = 2h_2 + x$, gdzie x jest rozmiarem zwartej grupy zbioru S rozmiaru większego niż 2, stąd $x = 3$. Zatem $n = 2g_2 + 2h_2 + x = 4g_2 + 1$, gdzie $g_2 \geq 1$.

($\Leftarrow$) Niech W_n będzie dowolnym kołem takim, że $n = 4k + l$, gdzie $k \geq 1$ oraz $l \in \{-1, 0, 1\}$. Definiujemy doskonałą równowagę strategiczną koalicji defensywnych $\{N, S\}$ w następujący sposób:

- jeżeli $n = 4k$, to $N = \{s\} \cup \{v_i : i \mod 4 \in \{1, 2\}, i \leq 4k\}$ oraz $S = \mathrm{V}(W_n) \setminus N$,
- jeżeli $n = 4k + 1$, to $N = \{s\} \cup \{v_i : i \mod 4 \in \{1, 2\}, i \leq 4k\}$ oraz $S = \mathrm{V}(W_n) \setminus N$,
- jeżeli $n = 4k - 1$, to $N = \{s\} \cup \{v_i : i \mod 4 \in \{1, 2\}, i \leq 4k - 3\}$ oraz $S = \mathrm{V}(W_n) \setminus N$. □

Równowaga strategiczna w grafach pełnych k–dzielnych

W tej części dokonamy charakteryzacji grafów pełnych k–dzielnych, w których istnieje doskonała równowaga strategiczna koalicji defensywnych. Rozważmy osobno przypadki $k = 1$ (tzn. grafy pełne), $k = 2$ (tzn. grafy pełne dwudzielne) oraz $k \geq 3$.

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

Twierdzenie 5.13. *Doskonała równowaga strategiczna koalicji defensywnych w grafie pełnym K_n istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy n jest liczbą parzystą.*

Dowód. Jeśli n jest liczbą nieparzystą, to każda koalicja defensywna musi mieć co najmniej $(n+1)/2$ wierzchołków. Stąd niemożliwe jest aby istniały dwie rozłączne koalicje defensywne w grafie K_n. Jeśli n jest liczbą parzystą, to dowolny podział zbioru wierzchołków grafu K_n na dwa rozłączne podzbiory rozmiaru $n/2$ jest doskonałą równowagą strategiczną koalicji defensywnych w grafie K_n. □

Twierdzenie 5.14. *Doskonała równowaga strategiczna koalicji defensywnych w grafie pełnym dwudzielnym $K_{n,m}$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy $n > 1$ oraz $m > 1$ lub $n = m = 1$.*

Dowód. Dwuwierzchołkowy graf pełny dwudzielny $K_{1,1}$ oczywiście posiada równowagę strategiczną koalicji defensywnych. Rozważmy pozostałe przypadki.

Przyjmijmy oznaczenie $K_{n,m} = (V_1 \cup V_2, E)$, gdzie zbiory V_1 i V_2 są rozłącznymi zbiorami niezależnymi rozmiaru odpowiednio n i m. Jeśli $m > 1$, to w grafie $K_{1,m}$ nie istnieje, ponieważ jedyny wierzchołek zbioru V_1 nie jest wtedy zabezpieczony (w sensie predykatu (SEC)).

Załóżmy teraz, że $n > 1$ oraz $m > 1$. Podzielmy zbiór V_1 na dwa rozłączne podzbiory S_1 i N_1 a zbiór V_2 na dwa rozłączne podzbiory S_2 i N_2 w taki sposób, że $|S_1| = \lfloor n/2 \rfloor$, $|N_1| = \lceil n/2 \rceil$, $|S_2| = \lfloor m/2 \rfloor$, oraz $|N_2| = \lceil m/2 \rceil$. Wtedy zbiory $N_1 \cup N_2$ i $S_1 \cup S_2$ są rozłącznymi globalnymi koalicjami defensywnymi. Zatem para $\{N_1 \cup N_2, S_1 \cup S_2\}$ jest doskonałą równowagą strategiczną koalicji defensywnych w grafie $K_{n,m}$. □

Wniosek 5.15. *Doskonała równowaga strategiczna koalicji defensywnych w gwieździe S_n istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy $n = 1$.* □

Przejdziemy teraz do ogólnego przypadku grafu pełnego k–dzielnego. Przypomnijmy oznaczenia. Niech $K_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$ będzie grafem pełnym k–dzielnym, gdzie $(k \geq 1)$. Oznaczmy zbiór wierzchołków tego grafu jako $\mathrm{V}(K_{n_1,n_2,\ldots,n_k}) = V = V_1 \cup \ldots \cup V_k$, gdzie $|V_i| = n_i$, dla $i = 1, \ldots, k$. Dla dowolnego podziału zbioru wierzchołków V na dwa rozłączne zbiory N, S przyjmijmy oznaczenie $N_i = N \cap V_i$, oraz $S_i = S \cap V_i$, gdzie $i = 1, \ldots, k$.

Lemat 5.16. *Dla dowolnej doskonałej równowagi strategicznej koalicji defensywnych $\{N, S\}$ w grafie $G = K_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$, gdzie $k \geq 2$, zachodzi $||N_i| - |S_i|| \leq 1$, dla dowolnego $i = 1, \ldots, k$.*

Dowód. Załóżmy przeciwnie, że istnieje doskonała równowaga strategiczna koalicji defensywnych $\{N, S\}$ w grafie G, taka że istnieje $i_0 \in \{1, 2, ..., k\}$, takie że $||N_{i_0}| - |S_{i_0}|| \geq 2$. Bez utraty ogólności możemy założyć, że $|N_{i_0}| - |S_{i_0}| \geq 2$. Wtedy dla każdego wierzchołka $v \in N_{i_0}$ mamy $|\mathrm{N}_G[v] \cap N| \geq |\mathrm{N}_G[v] \cap S|$, czyli $\sum_{i \neq i_0} |S_i| - \sum_{i \neq i_0} |N_i| \leq 1$.

Weźmy teraz dowolny indeks $i_1 \neq i_0$, taki że $|S_{i_1}| > |N_{i_1}|$. Stąd oczywiście $S_{i_1} \neq \emptyset$. Dla każdego wierzchołka $v \in S_{i_1}$ mamy $|\mathrm{N}_G[v] \cap S| = 1 + \sum_{i \neq i_1} |S_i| = 1 + \sum_{i \neq i_0} |S_i| - |S_{i_1}| + |S_{i_0}|$ oraz $|\mathrm{N}_G[v] \cap N| = \sum_{i \neq i_1} |N_i| = \sum_{i \neq i_0} |N_i| - |N_{i_1}| + |N_{i_0}|$, a stąd $|\mathrm{N}_G[v] \cap S| - |\mathrm{N}_G[v] \cap N| = 1 +$

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

$(\sum_{i\neq i_0}|S_i|-\sum_{i\neq i_0}|N_i|)-(|S_{i_1}|-|N_{i_1}|)+(|S_{i_0}|-|N_{i_0}|)<0$, zatem S nie jest koalicją defensywną. Otrzymaliśmy sprzeczność. Stąd dla każdego indeksu $i\neq i_0$ mamy $|S_i|\leq|N_i|$. Jako, że zbiór S jest zbiorem dominującym oraz $|N_{i_0}|>0$, to istnieje indeks $i_1\neq i_0$, taki że $S_{i_1}\neq\emptyset$. Dla każdego wierzchołka $v\in S_{i_1}$ mamy $|\mathrm{N}_G[v]\cap S|=1+|S_{i_0}|+\sum_{i\notin\{i_0,i_1\}}|S_i|<|N_{i_0}|+\sum_{i\notin\{i_0,i_1\}}|N_i|=|\mathrm{N}_G[v]\cap N|$, zatem zbiór S nie jest koalicją defensywną. Ponownie otrzymaliśmy sprzeczność. □

Na podstawie lematu 5.16 otrzymujemy

Wniosek 5.17. *Niech $\{N,S\}$ będzie dowolną doskonałą równowagą strategiczną koalicji defensywnych w grafie $K_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$, gdzie $k\geq 2$. Dla każdego $1\leq j\leq k$, takiego że $|V_j|>1$, mamy $N_j\neq\emptyset$ i $S_j\neq\emptyset$.* □

Twierdzenie 5.18. *Doskonała równowaga strategiczna koalicji defensywnych w grafie pełnym k–dzielnym $G=K_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$, gdzie $k\geq 3$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy liczba partycji o nieparzystej liczbie wierzchołków jest parzysta lub równa* 1.

Dowód. Jeśli dla każdego $1\leq i\leq k$ liczba $n_i=|V_i|$ jest parzysta, to każdy zbiór V_i możemy rozbić na dwa rozłączne podzbiory N_i, S_i o równej liczbie wierzchołków. Wtedy oczywiście zbiory $N_1\cup\ldots\cup N_k, S_1\cup\ldots\cup S_k$ są globalnymi koalicjami defensywnymi. Zatem para $\{N_1\cup\ldots\cup N_k, S_1\cup\ldots\cup S_k\}$ jest doskonałą równowagą strategiczną koalicji defensywnych.

Załóżmy teraz, że istnieje dokładnie jedna partycja V_{i_0} taka, że $n_{i_0}=|V_{i_0}|$ jest liczbą nieparzystą. Wtedy dla każdego $i\neq i_0$, gdzie $1\leq i\leq k$, możemy podzielić zbiór V_i na dwa rozłączne podzbiory N_i, S_i o równej liczbie wierzchołków. Partycję V_{i_0} dzielimy natomiast na dwa rozłączne podzbiory N_{i_0}, S_{i_0}, takie że $|N_{i_0}|=(|V_i|-1)/2$ oraz $|S_{i_0}|=(|V_i|+1)/2$. Wtedy znowu para $\{N_1\cup\ldots\cup N_k, S_1\cup\ldots\cup S_k\}$ jest doskonałą równowagą strategiczną koalicji defensywnych.

Załóżmy teraz, że liczba partycji o nieparzystej liczbie wierzchołków jest parzysta i dodatnia. Załóżmy bez straty ogólności, że dla pewnego $r>0$ partycje $V_1,\ldots,V_{2r}$ są partycjami o nieparzystej liczbie wierzchołków. Zatem partycje $V_{2r+1},\ldots,V_k$ są partycjami o parzystej liczbie wierzchołków. Dla każdego $j=2r+1,\ldots,k$ podzielmy partycję V_k na dwa rozłączne zbiory podzbiory N_j,S_j o równej liczbie wierzchołków. Dla każdego dla każdego $j=1,\ldots,r$, partycję V_j rozbijamy na dwa rozłączne zbiory podzbiory N_j,S_j o licznościach spełniających zależność $|S_j|=|N_j|+1$. Na koniec dla każdego $j=r+1,\ldots,2r$ partycję V_j rozbijamy na dwa rozłączne zbiory podzbiory N_j,S_j o licznościach spełniających zależność $|N_j|=|S_j|+1$. Wtedy ponownie para $\{N_1\cup\ldots\cup N_k, S_1\cup\ldots\cup S_k\}$ jest doskonałą równowagą strategiczną koalicji defensywnych.

Załóżmy teraz, że liczba partycji o nieparzystej liczbie wierzchołków jest nieparzysta i większa od 1. Oznaczmy liczbę takich partycji przez p. Niech para $\{N,S\}$ będzie doskonałą równowagą strategiczną koalicji defensywnych w grafie G. Na mocy lematu 5.16 zachodzi $|N_i|=|S_i|$ dla każdej partycji o parzystej liczbie wierzchołków, oraz $||N_i|-|S_i||=1$ dla każdej partycji o nieparzystej liczbie wierzchołków. Niech $q=|i:i\in\{1,\ldots,k\}\wedge|S_i|>|N_i||$. Liczba p jest nieparzysta, zatem bez straty ogólności możemy założyć, że $q>p/2$. Jeśli $q=p$, to żaden wierzchołek $v\in N$ nie jest

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

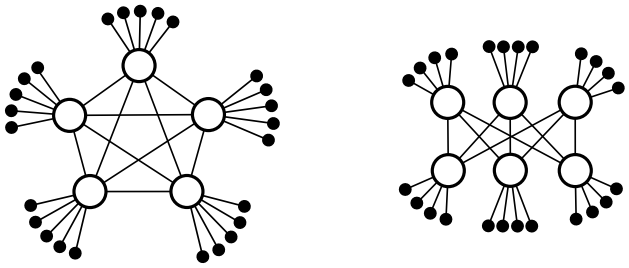
zabezpieczony (w sensie predykatu SEC). Jeśli natomiast $q < p$, to dla pewnego $i_0 \in \{1, \ldots, k\}$ istnieje partycja V_{i_0} o nieparzystej liczbie wierzchołków, dla której zachodzi $|S_{i_0}| \leq |N_{i_0}|$. Żaden wierzchołek $v \in N_{i_0}$ nie jest zabezpieczony (w sensie predykatu SEC). W ten sposób otrzymujemy sprzeczność. □

5.3 Oszacowania na stosunek liczności koalicji defensywnych w równowadze strategicznej

Obie koalicje defensywne w równowadze strategicznej są zabezpieczone (w sensie predykatu SEC), tworząc w ten sposób strukturę, którą można nazwać stabilną. Jednak fakt pozostawania dwóch koalicji defensywnych w równowadze jest definiowany poprzez lokalną własności bezpieczeństwa (w sensie predykatu SEC) ich wierzchołków. Tak zdefiniowany model nie wymusza zbliżonego rozmiaru struktur w sensie globalnym. W niniejszej części pokażemy jak duża może być dysproporcja między rozmiarami (w sensie liczby wierzchołków) koalicji defensywnych równowagi strategicznej. Skupimy się na stosunku liczności większej (w sensie liczby wierzchołków) koalicji defensywnej, do liczności mniejszej (w sensie liczby wierzchołków) koalicji defensywnej.

Zacznijmy od wprowadzenia definicji konstrukcji grafów nazywanych *supernowymi*.

Definicja 5.2. Niech G będzie grafem. Graf uzyskany z grafu G poprzez dodanie $\deg_G(v)+1$ wierzchołków wiszących do każdego wierzchołka $v \in \mathrm{V}(G)$ nazywamy *supernową* grafu G i oznaczamy jako $SN(G)$.



Rys. 5.2: Supernowa $SN(K_5)$ (po lewej) oraz supernowa $SN(K_{3,3})$ (po prawej).

Lemat 5.19. *Dla każdego $k \geq 1$ istnieje doskonała równowaga strategiczna koalicji defensywnych $\{N, S\}$ w supernowej grafu pełnego K_k, taka że $\frac{|N|}{|S|} = \frac{\sqrt{4n+1}-1}{2}$, gdzie $n = |\mathrm{V}(SN(K_k))|$.*

Dowód. Niech $N = \{u \in \mathrm{V}(SN(K_k))\colon \deg_{SN(K_k)}(u) = 1\}$ i $S = \mathrm{V}(SN(K_k)) \setminus N$. Zbiory N, S są rozłącznymi globalnymi koalicjami defensywnymi, które spełniają tezę. □

Twierdzenie 5.20. *Niech $\{N, S\}$ będzie równowagą strategiczną koalicji defensywnych w grafie G, nie koniecznie doskonałą, taką że $|N| \geq |S|$. Wtedy zachodzi:*

$$\frac{|N|}{|S|} \leq \frac{\sqrt{4\,\mathrm{n}(G)+1}-1}{2}$$

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

i to ograniczenie jest osiągane w klasie grafów $\{SN(K_k)\}_{k\geq 1}$.

Dowód. Niech $|S| = k$. Na mocy twierdzenia 2.9 wiemy, że $k \geq \frac{\sqrt{4\,\mathrm{n}(G)+1}-1}{2}$. Mamy też $|N| \leq \mathrm{n}(G) - k$, a stąd:

$$\frac{|N|}{|S|} \leq \frac{\mathrm{n}(G)-k}{k} = \frac{\mathrm{n}(G)}{k} - 1 \leq \frac{2\,\mathrm{n}(G)}{\sqrt{4\,\mathrm{n}(G)+1}-1} - 1 = \frac{\sqrt{4n+1}-1}{2}$$

Na mocy lematu 5.19 to oszacowanie jest osiągane w klasie supernowych $\{SN(K_k)\}_{k\geq 1}$. □

Pokazaliśmy, że dysproporcja pomiędzy rozmiarami globalnych koalicji defensywnych równowagi strategicznej może być rzędu $\Theta(\sqrt{n})$. W przypadku rodziny supernowych $\{SN(K_k)\}_{k\geq 1}$ liczba wierzchołków większej koalicji defensywnej jest kwadratem liczby wierzchołków mniej licznej koalicji defensywnej. Przykład takiego grafu został przedstawiony na rysunku 5.2.

Analogiczna konstrukcja zachowująca rząd wielkości dysproporcji jest możliwa również po ograniczeniu się do grafów dwudzielnych. Przykład takiego grafu został przedstawiony na rysunku 5.2.

Stwierdzenie 5.21. *Dla każdego* $k \geq 1$ *istnieje doskonała równowaga strategiczna koalicji defensywnych* $\{N, S\}$ *w supernowej grafu pełnego* 2*–dzielnego* $K_{k,k}$*, taka że* $\frac{|N|}{|S|} = \sqrt{\frac{n}{2}+1}$*, gdzie* $n = |\mathrm{V}(SN(K_{k,k}))|$.

Dowód. Niech $N = \{u \in \mathrm{V}(SN(K_{k,k}))\colon \deg_{SN(K_{k,k})}(u) = 1\}$ i $S = \mathrm{V}(SN(K_{k,k})) \setminus N$. Zbiory N, S są rozłącznymi globalnymi koalicjami defensywnymi, które spełniają tezę. □

5.4 Wielomianowy algorytm konstruujący równowagę strategiczną koalicji defensywnych

W niniejszej części zaprezentujemy wielomianowy algorytm konstruujący doskonałą równowagę strategiczną koalicji defensywnych w drzewie. Przedstawiony zostanie algorytm działający w czasie $O(n)$ bazujący na schemacie programowania dynamicznego, gdzie n jest liczbą wierzchołków drzewa.

W [17] autorzy analizowali wartość liczby podziału na globalne koalicje defensywne w drzewach zwracając uwagę, że liczba ta jest równa 1 lub 2. Zaprezentowali też częściowe wyniki związane z charakteryzacją drzew, w których nie istnieją dwie rozłączne globalne koalicje defensywne. Jak już wiemy (wniosek 5.7), zagadnienie to jest równoważne zagadnieniu charakteryzacji drzew, w których nie istnieje równowaga strategiczna koalicji defensywnych. W dalszej części zaprezentujemy działający w liniowy, względem liczby wierzchołków, algorytm dla problemu *PSBDA*, czyli weryfikujący czy doskonała równowaga strategiczna koalicji defensywnych istnieje. Następnie, jeżeli taka równowaga strategiczna istnieje, to przedstawimy dodatkowe kroki, pozwalające przeprowadzić konstrukcję globalnych koalicji defensywnych tworzących równowagę strategiczną.

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

Algorytm dynamiczny dla problemu *PSBDA* w drzewach

Zastosujemy dynamiczną technikę wstępującą (ang. *bottom-up*) względem ustalonego ukorzenienia drzewa. Najpierw wprowadzimy oznaczenia. Niech T będzie dowolnym drzewem. Wybieramy dowolny wierzchołek $r \in \mathrm{V}(T)$ drzewa T będący liściem i ukorzeniamy drzewo w wierzchołku r. W ten sposób określamy orientację w drzewie T.

Przez T_v oznaczamy poddrzewo drzewa T ukorzenione w wierzchołku v i zawierająca wszystkie wierzchołki drzewa T, dla których ścieżki prowadzące do korzenia r zawierają wierzchołek v. Dla każdego wierzchołka $v \neq r$ drzewa T istnieje dokładnie jedna krawędź wychodząca z v w kierunku korzenia r. Oznaczamy tą krawędź jako $e_v = \{v, r_v\}$. Dodatkowo przez T_v^* oznaczamy drzewo T_v z dołączoną krawędzią e_v (czyli $T_v^* = (\mathrm{V}(T_v) \cup \{r_v\}, \mathrm{E}(T_v) \cup \{e_v\})$), ukorzenione w wierzchołku r_v. Przez $C(v)$ oznaczmy zbiór wszystkich wszystkich *wierzchołków potomnych* wierzchołka v, czyli wszystkich jego sąsiadów różnych od wierzchołka r_v, oraz $C(r) = \{r_s\}$, gdzie r_s jest jedynym wierzchołkiem sąsiadującym z korzeniem r (wybraliśmy wierzchołek r spośród liści drzewa T, więc rzeczywiście wierzchołek r_s jest dobrze zdefiniowany).

Dla dowolnego drzewa T' ukorzenionego w wierzchołku r' (niekoniecznie liściu) przez *niemal doskonałą równowagę strategiczną koalicji defensywnych* oznaczamy taki podział zbioru wierzchołków $\mathrm{V}(T')$ na dwa podzbiory, w którym jeden jest globalną koalicją defensywną, a drugi jest koalicją defensywną, która dominuje zbiór $\mathrm{V}(T) \setminus \{r'\}$.

Każdemu wierzchołkowi $v \in \mathrm{V}(T) \setminus \{r\}$ przypisujemy dwa bity informacji:

- $s_v = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje niemal doskonała równowaga strategiczna koalicji defensywnych w poddrzewie T_v^*, taka że wierzchołki v i r_v należą do tej samej koalicji defensywnej,
- $d_v = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje niemal doskonała równowaga strategiczna koalicji defensywnych w poddrzewie T_v^*, taka że wierzchołki v i r_v należą do różnych koalicji defensywnych.

Dla dowolnego liścia $l \in \mathrm{V}(T) \setminus \{r\}$ mamy wtedy $s_l = 0$ oraz $d_l = 1$. Trawersując drzewo techniką wstępującą od liści do korzenia, dla każdego wierzchołka $v \in \mathrm{V}(T) \setminus \{r\}$, dla którego wszystkie wierzchołki potomne $C(v)$ mają przypisane wartości bitów s i d definiujemy dla wszystkich $i, j \in \{0, 1\}$:

$$C_v^{ij} = \{c \in C(v) : s_c = i \text{ oraz } d_c = j\}.$$

Stwierdzenie 5.22. *Zachodzi:*

(1) $s_v = 1$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $C_v^{00} = \emptyset$ *oraz* $C_v^{01} \cup C_v^{11} \neq \emptyset$ *oraz* $\left|C_v^{01}\right| \leq 2 + \left|C_v^{10} \cup C_v^{11}\right|$,

(2) $d_v = 1$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $C_v^{00} = \emptyset$ *oraz* $\left|C_v^{01}\right| \leq \left|C_v^{10} \cup C_v^{11}\right|$.

Dowód. Zacznijmy od dowodu punktu (1).

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

($\Rightarrow$) Niech $\{N, S\}$ będzie niemal doskonałą równowagą strategiczną koalicji defensywnych w poddrzewie T_v^*. Bez straty ogólności możemy założyć, że $v \in N$ oraz $r_v \in N$. Wierzchołek v nie jest liściem, zatem $C(v) \neq \emptyset$. Dla każdego wierzchołka $c \in C(v)$ rozważamy poddrzewo T_c^*. Para $\{V(T_c^*) \cap N, V(T_c^*) \cap S\}$ jest niemal doskonałą równowagą strategiczną koalicji defensywnych w poddrzewie T_c^*. Zatem $s_c + d_c \geq 1$. Stąd $C_v^{00} = \emptyset$. Zbiór S dominuje każdy wierzchołek za wyjątkiem wierzchołka r_v, zatem istnieje wierzchołek $c \in C(v)$, dla którego $d_c = 1$. Zatem $C_v^{01} \neq \emptyset$ lub $C_v^{11} \neq \emptyset$. Wierzchołek v jest bezpieczny (w sensie predykatu SEC), więc zachodzi $2 + \left|C_v^{10} \cup C_v^{11}\right| \geq 2 + |C(v) \cap N| \geq |C(v) \cap S| \geq \left|C_v^{01}\right|$.
($\Leftarrow$) Zachodzi $C_v^{00} = \emptyset$, stąd dla każdego wierzchołka $c \in C(v)$ istnieje niemal doskonała równowaga strategiczna koalicji defensywnych w poddrzewie T_c^*. Konstruujemy niemal doskonałą równowagę strategiczną koalicji defensywnych $\{N, S\}$ w poddrzewie T_v^* w następujących krokach:

($c1$) $v, r_v \in N$,

($c2$) $C_v^{01} \subseteq S$,

($c3$) $C_v^{10} \subseteq N$,

($c4$) jeśli $C_v^{01} = \emptyset$, to $\left|C_v^{11} \cap S\right| = 1$ i $\left|C_v^{11} \cap N\right| = \left|C_v^{11}\right| - 1$,

($c5$) jeśli $C_v^{01} \neq \emptyset$, to $C_v^{11} \subseteq N$,

($c6$) wtedy dla każdego wierzchołka $c \in C(v)$ istnieje niemal doskonała równowaga strategiczna koalicji defensywnych $\{N_c, S_c\}$ w poddrzewie T_c^*, taka że $v = r_c \in N$. Niezależnie od tego czy $c \in N$, czy $c \in S$ przyjmujemy $N_c \subseteq N$ oraz $S_c \subseteq S$.

Wtedy:

- $\mathrm{SEC}_{T_v^*}(N, r_v)$, ponieważ $2 = \left|\mathrm{N}_{T_v^*}[r_v] \cap N\right| \geq \left|\mathrm{N}_{T_v^*}[r_v] \setminus N\right| = 0$,
- $\mathrm{SEC}_{T_v^*}(N, v)$, ponieważ:
  - jeśli $C_v^{01} = \emptyset$, to $\left|\mathrm{N}_{T_v^*}[v] \cap N\right| = 2 + \left|C_v^{10} \cup C_v^{11}\right| - 1 \geq 1 = \left|\mathrm{N}_{T_v^*}[v] \setminus N\right|$,
  - jeśli $C_v^{01} \neq \emptyset$, to $\left|\mathrm{N}_{T_v^*}[v] \cap N\right| = 2 + \left|C_v^{10} \cup C_v^{11}\right| \geq \left|C_v^{01}\right| = \left|\mathrm{N}_{T_v^*}[v] \setminus N\right|$,
- z kroków ($c4$) i ($c5$) konstrukcji wierzchołek v jest zdominowany przez zbiór S,
- $C_v^{00} = \emptyset$, zatem dla każdego $c \in C(v)$ mamy $s_c + d_c \geq 1$, oraz z kroków ($c3$), ($c4$) i ($c5$) konstrukcji mamy:
  - jeśli $c \in N$, to , to $s_c = 1$ zatem w poddrzewie T_c^* istnieje niemal doskonała równowaga strategiczna koalicji defensywnych taka, że wierzchołki c i $r_c = v$ należą do tej samej koalicji defensywnej,
  - jeśli $c \in S$, to $d_c = 1$ zatem w poddrzewie T_c^* istnieje niemal doskonała równowaga strategiczna koalicji defensywnych taka, że wierzchołki c i $r_c = v$ należą do różnych koalicji defensywnych.

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

Zatem zbiór N jest globalną koalicją defensywną, a zbiór S jest koalicją defensywną, która dominuje zbiór $\mathrm{V}(T_v^*) \setminus \{r_v\}$. Czyli para $\{N, S\}$ jest niemal doskonałą równowagą strategiczną koalicji defensywnych w drzewie $\mathrm{V}(T_v^*)$, dla której wierzchołki r i r_v należą do tej samej koalicji defensywnej.

Przejdziemy teraz do dowodu punktu (2).

($\Rightarrow$) Niech $\{N, S\}$ będzie niemal doskonałą równowagą strategiczna koalicji defensywnych w poddrzewie T_v^*. Bez utraty ogólności możemy przyjąć, że $v \in N$ oraz $r_v \in S$. Wierzchołek v nie jest liściem, zatem $C(v) \neq \emptyset$. Dla każdego wierzchołka $c \in C(v)$ rozważamy poddrzewo T_c^*. Para $\{\mathrm{V}(T_c^*) \cap N, \mathrm{V}(T_c^*) \cap S\}$ jest niemal doskonałą równowagą strategiczną koalicji defensywnych W poddrzewie T_c^*. Zatem $s_c + d_c \geq 1$, a stąd $C_v^{00} = \emptyset$. Jako, że $\mathrm{SEC}_{T_c^*}(\mathrm{V}(T_c^*) \cap N, c)$, to $\left|C_v^{10} \cup C_v^{11}\right| \geq |C(v) \cap N| \geq |C(v) \cap S| \geq \left|C_v^{01}\right|$.

($\Leftarrow$) Zachodzi $C_v^{00} = \emptyset$, stąd dla każdego wierzchołka $c \in C(v)$ istnieje niemal doskonała równowaga strategiczna koalicji defensywnych w poddrzewie T_c^*. Konstruujemy niemal doskonałą równowagę strategiczną koalicji defensywnych $\{N, S\}$ w poddrzewie T_v^* w następujący sposób:

($d1$) $v \in N$, $r_v \in S$,

($d2$) $C_v^{01} \subseteq S$,

($d3$) $C_v^{10} \cup C_v^{11} \subseteq N$,

($d4$) wtedy dla każdego wierzchołka $c \in C(v)$ istnieje niemal doskonała równowaga strategiczna koalicji defensywnych $\{N_c, S_c\}$ w poddrzewie T_c^*, taka że $v = r_c \in N$. Niezależnie od tego czy $c \in N$, czy $c \in S$ przyjmujemy $N_c \subseteq N$ oraz $S_c \subseteq S$.

Wtedy:

- $\mathrm{SEC}_{T_v^*}(S, r_v)$, ponieważ $1 = \left|\mathrm{N}_{T_v^*}[r_v] \cap S\right| = \left|\mathrm{N}_{T_v^*}[r_v] \setminus S\right| = 1$,
- wierzchołek r_v jest zdominowany przez oba zbiory N i S, ponieważ $v \in N$,
- $\mathrm{SEC}_{T_v^*}(N, v)$, ponieważ $\left|\mathrm{N}_{T_v^*}[v] \cap N\right| = 1 + \left|C_v^{10} \cup C_v^{11}\right| \geq 1 + \left|C_v^{10}\right| = \left|\mathrm{N}_{T_v^*}[v] \setminus N\right|$,
- wierzchołek v jest zdominowany przez oba zbiory N i S, ponieważ $r_v \in S$,
- $C_v^{00} = \emptyset$, zatem dla każdego $c \in C(v)$ mamy $s_c + d_c \geq 1$, oraz z kroków ($d2$) i ($d3$) konstrukcji mamy:
  - jeśli $c \in N$, to $s_c = 1$ zatem w poddrzewie T_c^* istnieje niemal doskonała równowaga strategiczna koalicji defensywnych taka, że wierzchołki c i $r_c = v$ należą do tej samej koalicji defensywnej,
  - jeśli $c \in S$, to $d_c = 1$ zatem w poddrzewie T_c^* istnieje niemal doskonała równowaga strategiczna koalicji defensywnych taka, że wierzchołki c i $r_c = v$ należą do różnych koalicji defensywnych.

Zatem w tym przypadku zarówno zbiór N jest globalną koalicją defensywną, jak i zbiór S jest globalną koalicją defensywną, zatem $\{N, S\}$ jest doskonałą równowagą strategiczną koalicji defen-

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

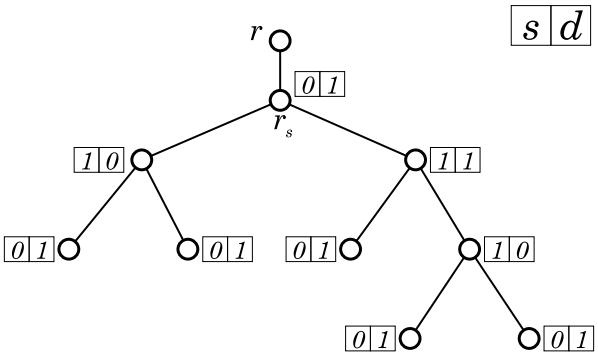
sywnych w drzewie $\mathrm{V}(T_v^*)$, w którym wierzchołki r i r_v należą do różnych koalicji defensywnych. Stąd tym bardziej jest niemal doskonałą równowagą strategiczną koalicji defensywnych w drzewie $\mathrm{V}(T_v^*)$. □

Przypomnijmy, że korzeń r wybraliśmy spośród liści, a przez r_s oznaczyliśmy jedyny wierzchołek z nim sąsiadujący (tzn. $C(r) = \{r_s\}$). Przypisujemy w zaprezentowany powyżej sposób wartości s i d dla wszystkich wierzchołków aż do osiągnięcia wierzchołka r_s. Zachodzi wtedy:

Twierdzenie 5.23. *Doskonała równowaga strategiczna koalicji defensywnych w drzewie T ukorzenionym w wierzchołku $r \in \mathrm{V}(T)$ będącym liściem istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy $d_{r_s} = 1$, gdzie r_s jest jedynym sąsiadem wierzchołka r w drzewie T.*

Dowód. ($\Rightarrow$) Niech $\{N, S\}$ będzie doskonałą równowagą strategiczną koalicji defensywnych w drzewie T ukorzenionym w wierzchołku r. Bez utraty ogólności możemy przyjąć, że $r \in N$. Zbiór S dominuje wierzchołek r, zatem $r_s \in S$. Stąd $\{N, S\}$ jest niemal doskonałą równowagą strategiczną koalicji defensywnych w drzewie $T_{r_s}^*$, taką że wierzchołki r_s i r należą do różnych koalicji defensywnych. Czyli $d_{r_s} = 1$.

($\Leftarrow$) Niech teraz $d_{r_s} = 1$. Zatem istnieje niemal doskonała równowaga strategiczna koalicji defensywnych $\{N, S\}$ w drzewie $T_{r_s}^*$, taka że wierzchołki r_s oraz r należą do różnych koalicji defensywnych. Zauważmy, że w tej sytuacji wierzchołek r jest zdominowany przez obie koalicje defensywne N i S. Zatem $\{N, S\}$ jest doskonałą równowagą strategiczną koalicji defensywnych w drzewie $T_{r_s}^*$. Jako, że korzeń r jest liściem w drzewie T, to drzewo $T_{r_s}^*$ jest izomorficzne z drzewem T. Zatem para $\{N, S\}$ jest doskonałą równowagą strategiczną koalicji defensywnych w drzewie T. □



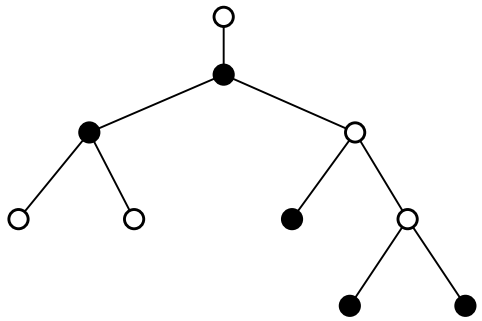
Rys. 5.3: Ukorzenione drzewo wraz z przypisanymi do wierzchołków bitami informacji s i d.

Konstrukcja równowagi strategicznej

Jeśli doskonała równowaga strategiczna koalicji defensywnych w drzewie T ukorzenionym w liściu r istnieje i do wierzchołków przypisane są wartości bitów informacji s i d, to możemy przeprowadzić konstrukcję dwóch rozłącznych globalnych koalicji defensywnych N, S.

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

Dla wierzchołka r_s, czyli jedynego wierzchołka sąsiadującego z korzeniem r rozważamy drzewo $T^*_{r_s}$, które jest izomorficzne z drzewem T (ponieważ korzeń r jest liściem w drzewie T). Zauważmy, że wierzchołki r oraz r_s muszą należeć do różnych koalicji defensywnych, czyli $d_{r_s} = 1$. Zatem skonstruujemy niemal doskonałą równowagę strategiczną koalicji defensywnych w sposób zaprezentowany w punkcie (2) dowodu 5.22. W dowodzie zauważyliśmy, że dla przypadku $d = 1$ konstruujemy nie tylko niemal doskonałą równowagę strategiczną, ale faktyczną doskonałą równowagę strategiczną koalicji defensywnych. Zatem uzyskujemy doskonałą równowagę strategiczną w całym drzewie T.



Rys. 5.4: Równowaga strategiczna koalicji defensywnych w drzewie.

Złożoność obliczeniowa

Dla każdego wierzchołka v grafu G obliczamy wartości s_v oraz d_v korzystając wyłącznie z parametrów przypisanych do wierzchołków zbioru wierzchołków potomnych wierzchołka v, czyli $C(v)$. Każdy wierzchołek ma co najwyżej $\deg_G(v)$ wierzchołków potomnych, zatem całkowita złożoność obliczeniowa wynosi $O(\sum_{v\in \mathrm{V}(T)} \deg_G(v))$. Na podstawie lematu o uściskach dłoni 1.2 oraz twierdzenia 1.6 otrzymujemy złożoność $O(2m) = O(n)$.

5.5 $\mathcal{NP}$–zupełność problemu istnienia równowagi strategicznej koalicji defensywnych dla grafów z $\Delta \leq 4$

W tej części wykażemy, że problem *PSBDA* jest $\mathcal{NP}$–zupełny dla grafów z $\Delta \leq 4$, poprawiając w ten sposób rezultat uzyskany w [60]. Przeprowadzimy wielomianową redukcję przekształcającą instancję $\mathcal{NP}$–zupełnego (twierdzenie 1.8) problemu $\overline{3SAT}$ do instancji problemu *PSBDA*.

Twierdzenie 5.24. *Problem PSBDA jest $\mathcal{NP}$–zupełny dla grafów, dla których $\Delta(G) \leq 4$.*

Dowód. Problem *PSBDA* należy do klasy $\mathcal{NP}$. Przedstawimy wielomianową redukcję przekształcającą instancję problemu $\overline{3SAT}$ w instancję problemu *PSBDA*. Niech ϕ będzie formułą zdaniową o n zmiennych $x_1, \ldots, x_n$, takich że $\phi = C_1 \wedge \ldots \wedge C_k \wedge C_{k+1} \wedge \ldots \wedge C_{k+l}$, gdzie dla każdego $j = 1, \ldots, k$ klauzula C_j zawiera dwa literały, a dla każdego $j = k+1, \ldots, k+l$ klauzula C_j zawiera trzy literały.

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

Konstruujemy graf, który oznaczymy jako $G(\phi)$, którego maksymalny stopień wierzchołka $\Delta(G(\phi))$ jest nie większy niż 4. Konstrukcję przeprowadzamy następująco:

(c1) dodajemy nowy wierzchołek c_j dla każdej formuły C_j, gdzie $j = 1, \ldots, k + l$,

(c2) jeżeli literał x_i lub $\neg x_i$ występuje w klauzuli C_j, to dodajemy wierzchołek $v_{i,j}$, dla każdej pary indeksów (i, j), gdzie $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, k + l$,

(c3) dla wszystkich par indeksów (i, j), gdzie $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, k+l$, jeśli wierzchołki c_j oraz $v_{i,j}$ istnieją, to łączymy je krawędzią,

(c4) dla każdego $i = 1, \ldots, n$ łączymy ścieżką istniejące (dwa lub trzy) wierzchołki $v_{i,j}$ odpowiadające literałowi x_i w odpowiednich klauzulach, w zależności od ich liczby na jeden z dwóch sposobów:

- jeżeli są tylko dwa takie wierzchołki v_{i,j_1}, v_{i,j_2}, dla pewnych $j_1, j_2 \in \{1, \ldots, k + l\}$, to dodajemy nowy wierzchołek $a_{i,1}$ oraz krawędzie $\{v_{i,j_1}, a_{i,1}\}$ oraz $\{a_{i,1}, v_{i,j_2}\}$,
- jeżeli są trzy takie wierzchołki, to literał x_i występuje w formule ϕ trzykrotnie. Albo dwukrotnie w formie zanegowanej $\neg x_i$ i raz w formie prostej x_i, albo odwrotnie, czyli dwukrotnie w formie prostej i raz w formie zanegowanej. Wybierzmy $j_1, j_2, j_3 \in \{1, \ldots, k+l\}$ w taki sposób, żeby wierzchołki v_{i,j_1}, v_{i,j_3} reprezentowały literał x_i w tej samej formie (prostej lub zanegowanej), a wierzchołek v_{i,j_2} reprezentował literał x_i w formie przeciwnej. Do konstruowanego grafu dodajemy wierzchołki $a_{i,1}$, $a_{i,2}$, oraz krawędzie $\{v_{i,j_1}, a_{i,1}\}$, $\{a_{i,1}, v_{i,j_2}\}$,$\{v_{i,j_2}, a_{i,2}\}$ i $\{a_{i,2}, v_{i,j_3}\}$,

(c5) dodajemy nowe wierzchołki b_j, u_j i w_j, dla każdego $j = 1, \ldots, k + l$,

(c6) łączymy wierzchołki $b_1, w_1, b_2, w_2, \ldots, b_{k+l}, w_{k+l}, b_1$ w cykl, w kolejności w jakiej zostały wypisane a następnie na każdej krawędzi powstałego cyklu tworzymy nowy wierzchołek, który oznaczymy jako:

- p_j, jeśli został dodany na krawędzi $\{b_j, w_j\}$,
- q_j jeśli został dodany na krawędzi $\{w_j, b_{j+1}\}$,
- q_{k+l}, jeśli został dodany na krawędzi $\{w_{k+l}b_1\}$,

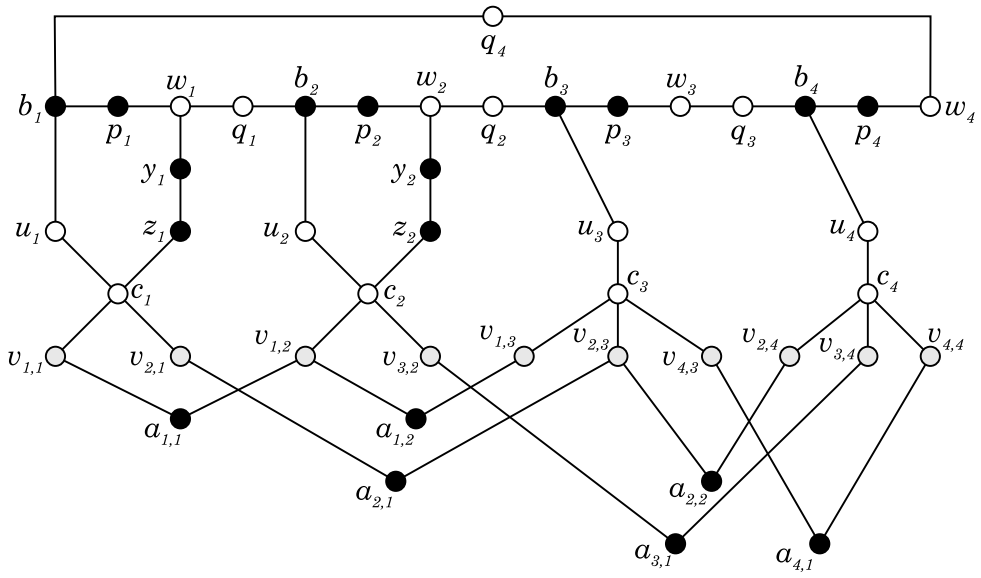
(c7) dodajemy krawędzie $\{u_j, c_j\}$ oraz $\{u_j, b_j\}$, dla każdego $j = 1, \ldots, k + l$,

(c8) dodajemy nowe wierzchołki y_j i z_j, dla każdego $j = 1, \ldots, k$,

(c9) dodajemy krawędzie $\{w_j, y_j\}$, $\{y_j, z_j\}$, $\{z_j, c_j\}$, dla każdego $j = 1, \ldots, k$.

Zauważmy, że każdy wierzchołek zbioru $\mathrm{V}(G(\phi)) \setminus \{c_1, \ldots, c_{k+l}\}$ jest wierzchołkiem stopnia 2 lub 3. Dla każdego $j = 1, \ldots, k + l$ klauzula C_j zawiera 2 lub 3 literały. Zatem z punktów (c2) oraz (c9) konstrukcji grafu $G(\phi)$ mamy $\deg_{G(\phi)}(c_j) \leq 4$. Stąd $\Delta(G(\phi)) \leq 4$. Przykładowy graf $G(\phi)$ dla formuły $\phi = (x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_1 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_4) \wedge (x_2 \vee \neg x_3 \vee x_4)$ został zaprezentowany na rysunku 5.5. Pokażemy teraz, że formuła ϕ jest spełnialna wtedy i tylko wtedy, gdy w grafie $G(\phi)$

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl



Rys. 5.5: Przykładowy graf $G(\phi)$ stowarzyszony z formułą logiczną $\phi = (x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_1 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_4) \wedge (x_2 \vee \neg x_3 \vee x_4)$.

istnieje doskonała równowaga strategiczna koalicji krawędziowych.

($\Rightarrow$) Załóżmy, że formuła ϕ jest spełnialna i niech f będzie takim wartościowaniem zmiennych formuły, że zdanie $f(\phi)$ jest prawdziwe. To znaczy każda klauzula zawiera co najmniej jeden literał x_i w postaci prostej lub zanegowanej, dla którego zdanie $f(x_i)$ jest prawdziwe (jeśli literał występował w postaci prostej), lub zdanie $f(\neg x_i)$ jest prawdziwe (jeśli literał występował w postaci zanegowanej). Konstruujemy doskonałą równowagę strategiczną koalicji defensywnych $\{N, S\}$ w grafie $G(\phi)$ w następujący sposób:

(p1) $c_j, q_j, w_j \in N$ i $b_j, p_j, y_j, z_j \in S$, dla $j = 1, \ldots, k + l$,

(p2) dla wszystkich par i, s, gdzie $i \in \{1, \ldots, n\}$, $s \in \{1, 2\}$, jeżeli w grafie $G(\phi)$ istnieje wierzchołek $a_{i,s}$, to $a_{i,s} \in S$,

(p3) jeżeli literał x_i występuje w klauzuli C_j w postaci prostej x_i, to jeżeli zdanie $f(x_i)$ jest prawdziwe, to $v_{i,j} \in N$, a jeżeli zdanie $f(x_i)$ jest fałszywe, to $v_{i,j} \in S$,

(p4) jeżeli literał x_i występuje w klauzuli C_j w postaci zanegowanej $\neg x_i$, to jeżeli zdanie $f(\neg x_i)$ jest prawdziwe, to $v_{i,j} \in N$, a jeżeli zdanie $f(\neg x_i)$ jest fałszywe, to $v_{i,j} \in S$,

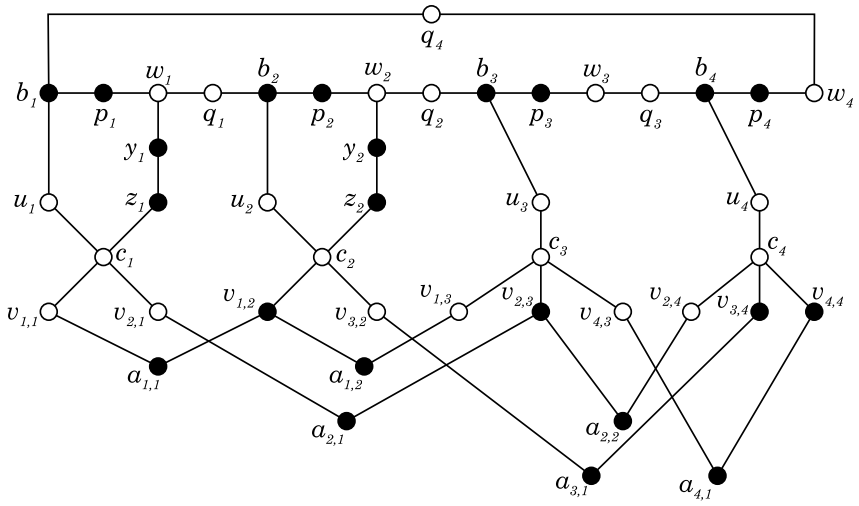
(p5) $u_j \in N$, dla $j = 1, \ldots, k$

(p6) dla $j \in \{k{+}1, \ldots, k{+}l\}$, mamy $u_j \in S$ jeżeli wszystkie wierzchołki sąsiadujące z wierzchołkiem C_j należą do zbioru N (tzn. każdy literał w klauzuli C_j jest prawdziwy przy wartościowaniu f), w przeciwnym razie co najmniej jeden sąsiad wierzchołka C_j należy do zbioru S, wtedy mamy $u_j \in N$.

Doskonała równowaga strategiczna dla przykładowego grafu z rysunku 5.5 została przedstawiona na

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

rysunku 5.6. Wynika z niej wartościowanie f spełniające wyjściową formułę ϕ. Mianowicie $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = \textit{prawda}$ oraz $f(x_4) = \textit{fałsz}$.



Rys. 5.6: Zbiór S oznaczony wierzchołkami czarnymi oraz zbiór N oznaczony wierzchołkami białymi. Wierzchołki $v_{i,j}$ (odpowiadające literałom) odpowiadające wartości logicznej *prawda* są białe, a odpowiadające wartości logicznej *fałsz* są czarne.

Z konstrukcji zbiorów N i S są one rozłączne oraz wspólnie pokrywają cały zbiór wierzchołków grafu $G(\phi)$. Pokażemy, że zbiory N i S są globalnymi koalicjami defensywnymi. Zachodzi następująca własność:

Stwierdzenie 5.25. *Niech v będzie dowolnym wierzchołkiem grafu $G(\phi)$ stopnia 2 lub 3. Jeżeli wierzchołek v ma sąsiada w zbiorze N i w zbiorze S, to jest zabezpieczony (w sensie predykatu* SEC*) oraz zdominowany przez oba zbiory N i S.* □

Zauważmy, że dla każdego literału x_i mamy $f(x_i) = \neg f(\neg x_i)$. Z kroku konstrukcji (c4) wiemy, że wierzchołek $a_{i,1}$ sąsiaduje z jednym wierzchołkiem reprezentującym prostą formę literału x_i w pewnej klauzuli, oraz z drugim wierzchołkiem reprezentującym zanegowaną formę tego literału w innej klauzuli. Stąd, oraz z kroków (p3) i (p4) konstrukcji zbiorów N i S mamy, że wierzchołek $a_{i,1}$ ma zarówno sąsiada w zbiorze N, jak i w zbiorze S. Jeżeli literał x_i występuje w trzech klauzulach, to w grafie $G(\phi)$ istnieje również wierzchołek $a_{i,2}$. Analogiczne rozumowanie oparte o kroki konstrukcyjne (c4), (p3) i (p4) prowadzi do wniosku, że wierzchołek $a_{i,2}$ ma sąsiadów w obu zbiorach N i S.

Łatwo zauważyć, na podstawie kroków konstrukcyjnych, że dla każdego z pozostałych wierzchołków stopnia 2 lub 3 w grafie $G(\phi)$ istnieje zarówno wierzchołek sąsiadujący w zbiorze N, jak i w zbiorze S. Stąd, na mocy 5.25, każdy z nich jest zabezpieczony w sensie predykatu SEC, oraz zdominowany przez oba zbioru N i S.

Wartościowanie f spełnia formułę ϕ, czyli każda klauzula zawiera co najmniej jeden literał (w formie prostej lub zanegowanej), spełniony przez f. Wtedy z kroków (p3) i (p4) konstrukcji zbiorów

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

N i S, dla każdego $j \in \{1, \ldots, k+l\}$, wierzchołek c_j ma co najmniej jednego sąsiada $v_{i,j}$ (dla pewnego $i \in \{1, \ldots, m\}$), który należy do zbioru N. Co więcej, jeżeli $j \leq k$, to z kroku (p5) mamy $u_j \in N$ a z kroku (p1) mamy $z_j \in S$. Jeżeli $j > k$, to z kroku (p6) mamy dwa przypadki. Jeżeli wszystkie wierzchołki sąsiadujące z wierzchołkiem c_j różne od wierzchołka u_j należą do zbioru N, to wierzchołek $u_j \in S$. Jeżeli co najmniej jeden wierzchołek sąsiadujący z wierzchołkiem c_j różny od wierzchołka u_j należy do zbioru S, to mamy $u_j \in N$. Stąd, wierzchołek c_j ma co najmniej dwóch sąsiadów w zbiorze N i co najmniej dwóch sąsiadów w zbiorze S. Zatem jest on zabezpieczony w sensie predykatu SEC, a także zdominowany przez oba zbiory N i S.

Zatem zbiory N i S są rozłącznymi globalnymi koalicjami defensywnymi, a zatem $\{N, S\}$ jest doskonałą równowagą strategiczną koalicji defensywnych.
($\Leftarrow$) Załóżmy teraz, że istnieje doskonała równowaga strategiczna koalicji defensywnych $\{N, S\}$ w grafie $G(\phi)$. Przypomnijmy treść lematu 5.8:

Lemat. *Niech G będzie grafem i niech $\{N, S\}$ będzie równowagą strategiczną koalicji defensywnych. Wtedy dla każdego wierzchołka $v \in \mathrm{V}(G)$ stopnia 2, jeden z jego sąsiadów należy do zbioru N, a drugi do zbioru S.* □

Najpierw zauważmy, że $\deg_{G(\phi)}(p_j) = \deg_{G(\phi)}(q_j) = 2$, dla $j \in \{1, \ldots, k+l\}$. Stąd, na mocy lematu 5.8 wszystkie wierzchołki $\{b_j\}_{j\in\{1,\ldots,k+l\}}$ należą do tej samej globalnej koalicji defensywnej. Analogicznie wykazujemy, że wszystkie wierzchołki $\{w_j\}_{j\in\{1,\ldots,k+l\}}$ również należą do tej jednej globalnej koalicji defensywnej. Co więcej, wierzchołki $\{b_j\}_{j\in\{1,\ldots,k+l\}}$ i $\{w_j\}_{j\in\{1,\ldots,k+l\}}$ nie mogą wspólnie należeć do tej samej globalnej koalicji defensywnej. Bez utraty ogólności możemy przyjąć, że dla każdego $j \in \{1, \ldots, k+l\}$ mamy $b_j \in S$ oraz $w_j \in N$. Wtedy dla każdego $j \in \{1, \ldots, k+l\}$ na mocy lematu 5.8, skoro $\deg_{G(\phi)}(u_j) = 2$, to $c_j \in N$. Dodatkowo jeśli $j \in \{1, \ldots, k\}$, to skoro $\deg_{G(\phi)}(y_j) = 2$, to $z_j \in S$.

Rozważmy teraz dowolny wierzchołek c_j, gdzie $j \in \{1, \ldots, k+l\}$. Ustaliliśmy, że $c_j \in N$. Z warunku bezpieczeństwa dla modelu koalicji defensywnych mamy zatem $|\,\mathrm{N}_{G(\phi)}[c_j] \cap N| \geq 3$. Jako, że wierzchołek $z_j \in S$, to co najmniej jeden z pozostałych sąsiadów wierzchołka c_j należy do zbioru N. Czyli dla pewnego $i \in \{1, \ldots n\}$ wierzchołek $v_{i,j} \in N$. Definiujemy wartościowanie f formuły ϕ w następujący sposób:

(f1) jeżeli literał x_i występuje w klauzuli c_j w postaci prostej (czyli x_i), to jeżeli $v_{i,j} \in N$, to $f(x_i) = \mathit{prawda}$, a jeżeli $v_{i,j} \in S$, to $f(x_i) = \mathit{fałsz}$,

(f2) jeżeli literał x_i występuje w klauzuli c_j w postaci zanegowanej (czyli $\neg x_i$), to jeżeli $v_{i,j} \in N$, to $f(x_i) = \mathit{fałsz}$, a jeżeli $v_{i,j} \in S$, to $f(x_i) = \mathit{prawda}$.

Pokażemy, że wartościowanie f nie jest sprzeczne, oraz że spełnia ono formułę ϕ. Jako, że dla każdego $i \in \{1, \ldots n\}$ i $s \in \{1, 2\}$ mamy $\deg_{G(\phi)}(a_{i,s}) = 2$, to sąsiedzi wierzchołka $a_{i,s}$ nie mogą jednocześnie należeć do tej samej globalnej koalicji defensywnej (tzn. ani do N, ani do S). Z kroku (c4) konstrukcji grafu $G(\phi)$ wiemy, że wierzchołek $a_{i,s}$ sąsiaduje z wierzchołkami reprezentującymi

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

literał x_i. Jeden z wierzchołków reprezentuje go w postaci prostej, a drugi w postaci zanegowanej. Zatem z kroków (f1) i (f2) wartościowanie nie jest sprzeczne.

Dla każdego $j \in \{1, \ldots, k+l\}$ istnieje $i \in \{1, \ldots, n\}$, takie że wierzchołek $v_{i,j} \in N$. Zatem jeżeli literał x_i znajduje się w klauzuli C_j w formie prostej, to na mocy kroku (f1) mamy $f(C_j) = f(x_i) = \mathit{prawda}$. Natomiast jeżeli literał x_i znajduje się w klauzuli C_j w formie zanegowanej, to na mocy kroku (f2) mamy $f(C_j) = f(\neg x_i) = \mathit{prawda}$. Zatem dla wartościowania f każda klauzula formuły ϕ jest spełniona, a więc spełniona jest również formuła ϕ. □

5.6 Podsumowanie i problemy otwarte

W niniejszym rozdziale analizowaliśmy model równowagi strategicznej koalicji defensywnych. Zaczęliśmy od analizy podstawowych własności oraz problemu istnienia równowagi strategicznej koalicji defensywnych w różnych klasach grafów (część 5.2) uzyskując wyniki między innymi dla grafów pełnych k–dzielnych. Analizowaliśmy również (część 5.3) maksymalną dysproporcje pomiędzy rozmiarami (w sensie liczby wierzchołków) koalicji defensywnych w równowadze strategicznej.

W kolejnej części (5.4) zaprezentowaliśmy wielomianowy algorytm konstruujący równowagę strategiczną koalicji defensywnych w drzewie. Zatem w przypadku zagadnień praktycznych, w których model ten adekwatnie reprezentowałby zagadnienie, poszukiwanie rozwiązań można zrealizować w sposób wydajny.

W ostatniej części (5.5) pokazaliśmy, że problem weryfikacji istnienia równowagi strategicznej koalicji krawędziowych jest $\mathcal{NP}$–zupełny w klasie grafów o stopniu ograniczonym przez 4.

Problemy otwarte

Poniższe zagadnienia pozostają problemami otwartymi:

- Weryfikacja statusu trudności problemu *SBDA* dla klasy grafów kubicznych i podkubicznych. Wiemy, że problem jest $\mathcal{NP}$–zupełny dla grafów o stopniu ograniczonym przez 4, zatem w spektrum zainteresowań pojawia się mniejsza i intuicyjnie prostsza strukturalnie klasa grafów kubicznych i podkubicznych.
- Charakteryzacja grafów kubicznych, w których nie istnieje równowaga strategiczna koalicji defensywnych.
- Charakteryzacja drzew w których nie istnieje równowaga strategiczna koalicji defensywnych.

Zauważmy, że pierwszy z wskazanych problemów jest, w przypadku grafów kubicznych, równoważny pytaniu o istnienie dwóch rozłącznych zbiorów totalnie dominujących w grafie.

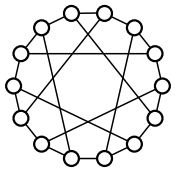
Stwierdzenie 5.26. *Niech G będzie grafem kubicznym i niech $\{N, S\}$ będą rozłącznymi podzbiorami zbioru wierzchołków $\mathrm{V}(G)$. Wtedy $\{N, S\}$ jest równowagą strategiczną koalicji defensywnych w grafie G wtedy i tylko wtedy gdy zbiory N i S są zbiorami totalnie dominującym w grafie G.* □

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

W [30] wykazano, że w każdym grafie kubicznym da się wskazać podział na zbiór dominujący oraz totalnie dominujący, które są rozłączne. W [13] zaprezentowano warunki wystarczające na istnienie podziału na dwa rozłączne zbiory totalnie dominujące. Wskazano tam również nieskończoną rodzinę grafów kubicznych nie posiadających takiego podziału. Problem charakteryzacji grafów kubicznych, w których nie istnieje podział na dwa rozłączne zbiory totalnie dominujące pozostaje otwarty.

Wyniki badań numerycznych

W ramach prac powiązanych z niniejszą rozprawą autor wykorzystał pakiet komputerowy "nauty" [49, 50, 51] w celu przeprowadzenia obliczeń numerycznych. Pakiet został wykorzystany, między innymi, do poszukiwania grafów kubicznych, w których nie istnieje równowaga strategiczna koalicji defensywnych. Pośród wszystkich spójnych grafów kubicznych stopnia do 22 włącznie istnieje tylko jeden taki graf. Jest to 14 wierzchołkowy graf, znany w literaturze ([7]) jako graf Heawooda. Graf ten został przedstawiony na rysunku 5.7.



Rys. 5.7: Graf Heawoooda.

Poniżej prezentujemy wyniki wszystkich obliczeń numerycznych polegających na ocenie częstości istnienia równowagi strategicznej koalicji defensywnej w małych grafach. Przy użyciu pakietu "nauty" [49, 50, 51] wygenerowaliśmy wszystkie spójne grafy zadanej klasy i rozmiaru. Następnie wykorzystaliśmy algorytm przeglądający wszystkie możliwe pary rozłącznych podzbiorów zbioru wierzchołków grafu i weryfikowaliśmy czy oba są globalnymi koalicjami defensywnymi. Tabela 5.1 prezentuje uzyskany rozkład.

Klasa grafów	**Liczność**	**Istnieje *SBDA***	**Udział procentowy**
Dowolne $n \leq 11$	1018690329	1002207962	98.38%
Dwudzielne $n \leq 14$	33678448	32352283	96.06%
Kubiczne $n \leq 22$	7937250	7937249	$> 99.99\%$
Podkubiczne $n \leq 18$	95029746	92663086	97.51%
4–regularne $n \leq 17$	95165383	94942292	99.77%
Drzewa $n \leq 21$	3490529	1339837	38.38%
Drzewa binarne $n \leq 23$	1031741	1005530	97.46%

Tabela 5.1: Wyniki badań numerycznych weryfikujących jak często równowaga strategiczna koalicji defensywnych istnieje w małych grafach.

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

ROZDZIAŁ 6

Równowaga strategiczna innych struktur defensywnych

W niniejszym rozdziale przyjrzymy się dwóm kolejnym definicjom równowagi strategicznej. Będziemy badać podstawowe własności, algorytmy i zagadnienia złożoności obliczeniowej w modelu równowagi strategicznej zbiorów defensywnych. Następnie przeanalizujemy cechy modelu równowagi strategicznej koalicji krawędziowych zwracając uwagę na różnice w stosunku do wcześniejszych pozornie podobnych modeli.

6.1 Równowaga strategiczna zbiorów defensywnych

W niniejszej części będziemy rozważali równowagę strategiczną zbiorów defensywnych.

Definicja 6.1. Niech G będzie grafem. Rozważmy dwa rozłączne podzbiory zbioru $\mathrm{V}(G)$ i oznaczmy je odpowiednio jako N oraz S. Jeżeli zbiory N oraz S są globalnymi zbiorami defensywnymi, to parę nieuporządkowaną $\{N, S\}$ nazywamy *równowagą strategiczną zbiorów defensywnych* (ang. *strategic balance of defensive sets*). Dodatkowo jeżeli rodzina $\{N, S\}$ jest podziałem zbioru $\mathrm{V}(G)$, to *równowagę strategiczną zbiorów defensywnych* nazywamy *doskonałą* (ang. *perfect*).

Tak zdefiniowana równowaga strategiczna jest jednym z modeli równowagi strategicznej zgodnych z ogólną definicją 2.10. To znaczy jest to równowaga strategiczna oparta o model struktur defensywnych typu $\mathcal{S}_G^{ds}$ przy oznaczeniach takich jakie zastosowaliśmy w części 2.3.

Koncepcja równowagi strategicznej zbiorów defensywnych pojawia się w rozważaniach po raz pierwszy w niniejszej pracy. Wcześniej, w rozdziale 5, badaliśmy równowagę strategiczną koalicji defensywnych.

Pytanie o istnienie równowagi strategicznej zbiorów defensywnych określa decyzyjny problem obliczeniowy.

Problem	*SBDS*
Instancja	Graf G.
Pytanie	Czy w grafie G istnieje równowaga strategiczna zbiorów defensywnych?

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

Analogicznie sformułujemy problem obliczeniowy dla weryfikacji istnienia doskonałej równowagi strategicznej zbiorów defensywnych.

Problem	*PSBDS*
Instancja	Graf G.
Pytanie	Czy w grafie G istnieje doskonała równowaga strategiczna zbiorów defensywnych?

Ze stwierdzenia 2.33 wiemy, że niezależnie od modelu struktury defensywnej istnienie równowagi strategicznej danego typu pociąga za sobą w sposób oczywisty istnienie równowagi strategicznej tego typu. Wynika z tego, że jeśli dla danej instancji odpowiedź dla problemu *PSBDS* jest twierdząca, to jest też twierdząca dla problemu *SBDS*. W dalszej części pokażemy, że w przypadku równowagi strategicznej zbiorów zachodzi również odwrotna zależność.

6.2 Doskonała równowaga strategiczna zbiorów defensywnych

Przypomnijmy, że z twierdzenia 3.5 wiemy, że suma mnogościowa zbiorów będących zbiorami defensywnymi również jest zbiorem defensywnym. Dodatkowo jeśli choć jeden ze zbiorów defensywnych jest globalny, to oczywiście ich suma również. Wniosek 3.6 rozszerza to rozumowanie na dowolną liczbę zbiorów defensywnych.

Stwierdzenie 6.1. *Niech G będzie grafem. Doskonała równowaga strategiczna zbiorów defensywnych w grafie G istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy liczba podziału na zbiory defensywne w tym grafie jest równa co najmniej* 2.

Dowód. Jeśli w grafie G istnieje doskonała równowaga strategiczna zbiorów defensywnych, to mamy dwa rozłączne globalne zbiory defensywne. Załóżmy teraz, że istnieje podział zbioru wierzchołków grafu G na globalne zbiory defensywne $S_1, S_2, ..., S_k$, gdzie $k \geq 2$. Na mocy wniosku 3.6 zbiór $S_0 = \bigcup_{i=1}^{k-1} S_i$ jest globalnym zbiorem defensywnym. Zatem para $\{S_0, S_k\}$ jest doskonałą równowagą strategiczną zbiorów defensywnych. □

Sformułujemy teraz dwa dwa problemy obliczeniowe związane z poszukiwaniem drugiego globalnego zbioru defensywnego pośród wierzchołków poza zadanym globalnym zbiorem defensywnym.

Problem	*SBDSO*
Instancja	Graf G oraz globalny zbiór defensywny $N \subseteq \mathrm{V}(G)$.
Pytanie	Czy w grafie G istnieje równowaga strategiczna zbiorów defensywnych $\{N', S'\}$, taka że $S' \subseteq (\mathrm{V}(G) \setminus N')$ oraz $N \subseteq N'$?

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

Analogicznie zdefiniujemy problem dla doskonałej równowagi strategicznej zbiorów defensywnych.

Problem	*PSBDSO*
Instancja	Graf G oraz globalny zbiór defensywny $N \subseteq \mathrm{V}(G)$.
Pytanie	Czy w grafie G istnieje doskonała równowaga strategiczna zbiorów defensywnych $\{N', S'\}$, taka że $S' \subseteq (\mathrm{V}(G) \setminus N')$ oraz $N \subseteq N'$?

Lemat 6.2. *Niech G będzie grafem i niech $N \subseteq \mathrm{V}(G)$ będzie globalnym zbiorem defensywnym w grafie G. Dla każdego wierzchołka $v \in \mathrm{V}(G) \setminus N$, jeżeli $|\mathrm{N}_G[v] \cap N| > |\mathrm{N}_G[v] \setminus N|$ oraz dla każdego wierzchołka $u \in \mathrm{N}_G(v) \setminus N$ zachodzi $|\mathrm{N}_G[\{u, v\}] \cap N| > |\mathrm{N}_G[\{u, v\}] \setminus N|$, to nie istnieje zbiór defensywny $S \subseteq \mathrm{V}(G) \setminus N$ zawierający wierzchołek v. Co więcej $N \cup \{v\}$ jest globalnym zbiorem defensywnym.*

Dowód. Niech $v \in \mathrm{V}(G) \setminus N$ oraz $|\mathrm{N}_G[v] \cap N| > |\mathrm{N}_G[v] \setminus N|$. Ponadto dla każdego wierzchołka $u \in \mathrm{N}_G(v) \setminus N$ mamy $|\mathrm{N}_G[\{u, v\}] \cap N| > |\mathrm{N}_G[\{u, v\}] \setminus N|$. Załóżmy, że istnieje zbiór defensywny $S \subseteq \mathrm{V}(G) \setminus N$, taki że $v \in S$. Zatem $\mathrm{SEC}_G(S, v)$ lub $\mathrm{SEC}_G(S, \{u, v\})$ dla pewnego wierzchołka $u \in \mathrm{N}_G(v) \cap S$.

Jeśli $\mathrm{SEC}_G(S, v)$, to $|\mathrm{N}_G[v] \cap S| \geq |\mathrm{N}_G[v] \setminus S|$. Z lematu 1.4 mamy $|\mathrm{N}_G[v] \cap S| \leq |\mathrm{N}_G[v] \cap (\mathrm{V}(G) \setminus N)| = |\mathrm{N}_G[v] \setminus N|$. Jako, że $N \subseteq \mathrm{V}(G) \setminus S$, to ponownie korzystając z lematu 1.4 zachodzi $|\mathrm{N}_G[v] \cap N| \leq |\mathrm{N}_G[v] \setminus S|$. Stąd $|\mathrm{N}_G[v] \cap S| \leq |\mathrm{N}_G[v] \setminus N| < |\mathrm{N}_G[v] \cap N| \leq |\mathrm{N}_G[v] \setminus S|$. Sprzeczność z założeniem, że $|\mathrm{N}_G[v] \cap S| \geq |\mathrm{N}_G[v] \setminus S|$.

Jeśli $\mathrm{SEC}_G(S, \{u, v\})$ dla pewnego wierzchołka $u \in S$, takiego że krawędź $\{u, v\} \in \mathrm{E}(G)$ mamy $|\mathrm{N}_G[\{u, v\}] \cap S| \geq |\mathrm{N}_G[\{u, v\}] \setminus S|$. Jako, że $S \subseteq \mathrm{V}(G) \setminus N$, to korzystając z lematu 1.4 mamy $|\mathrm{N}_G[\{u, v\} \cap S]| \leq |\mathrm{N}_G[\{u, v\}] \setminus N|$. Podobnie $N \subseteq \mathrm{V}(G) \setminus S$, a stąd $|\mathrm{N}_G[\{u, v\}] \cap N| \leq |\mathrm{N}_G[\{u, v\}] \setminus S|$. Łącząc obie nierówności otrzymujemy, że $|\mathrm{N}_G[\{u, v\}] \cap S| \leq |\mathrm{N}_G[\{u, v\}] \setminus N| < |\mathrm{N}_G[\{u, v\}] \cap N| \leq |\mathrm{N}_G[\{u, v\}] \setminus S|$. Sprzeczność z założeniem, że $|\mathrm{N}_G[\{u, v\}] \cap S| \geq |\mathrm{N}_G[\{u, v\}] \setminus S|$.

Niech $N' = N \cup \{v\}$. Jako, że zbiór N jest zbiorem dominującym, to zbiór N' również jest zbiorem dominującym. Ponieważ zbiór N jest zbiorem defensywnym i zachodzi $|\mathrm{N}_G[v] \cap N| > |\mathrm{N}_G[v] \setminus N|$, to mamy:

- $\mathrm{SEC}_G(N', v)$, ponieważ na mocy lematu 1.4 zachodzi $|\mathrm{N}_G[v] \cap N'| \geq |\mathrm{N}_G[v] \cap N| \geq |\mathrm{N}_G[v] \setminus N| \geq |\mathrm{N}_G[v] \setminus N'|$,
- dla każdego wierzchołka $u \in N$, jeżeli $\mathrm{SEC}_G(N, u)$, to na mocy lematu 1.4 mamy $|\mathrm{N}_G[u] \cap N'| \geq |\mathrm{N}_G[u] \cap N| \geq |\mathrm{N}_G[u] \setminus N| \geq |\mathrm{N}_G[u] \setminus N'|$, czyli $\mathrm{SEC}_G(N', u)$,
- dla każdej krawędzi $\{u, w\} \in \mathrm{E}(G)$, takiej że $u, w \in N$ oraz $\mathrm{SEC}_G(N, \{u, w\})$, na mocy lematu 1.4 mamy $|\mathrm{N}_G[\{u, w\}] \cap N'| \geq |\mathrm{N}_G[\{u, w\}] \cap N| \geq |\mathrm{N}_G[\{u, w\}] \setminus N| \geq |\mathrm{N}_G[\{u, w\}] \setminus N'|$, czyli $\mathrm{SEC}_G(N', \{u, w\})$.

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

Zatem zbiór N' jest globalnym zbiorem defensywnym. □

Lemat 6.3. *Niech G będzie grafem i niech $N \subseteq \mathrm{V}(G)$ będzie globalnym zbiorem defensywnym. Zdefiniujmy zbiory $U_1 = \{v \in \mathrm{V}(G) \setminus N\colon |\mathrm{N}_G[v] \cap N| > |\mathrm{N}_G[v] \setminus N|\}$ oraz $U_2 = \{v \in \mathrm{V}(G) \setminus N\colon$ dla każdego $u \in \mathrm{N}_G(v) \setminus N$ zachodzi $|\mathrm{N}_G[\{u,v\}] \cap N| > |\mathrm{N}_G[\{u,v\}] \setminus N|\}$. Niech $U = U_1 \cap U_2$. Wtedy zachodzi:*

1. *zbiór $N' = N \cup U$ jest globalnym zbiorem defensywnym,*
2. *jeżeli $U = \emptyset$, to $S = \mathrm{V}(G) \setminus N$ jest zbiorem defensywnym, lub zbiorem pustym,*
3. *dla dowolnego zbioru defensywnego $S \subseteq \mathrm{V}(G) \setminus N$ zachodzi $S \subseteq \mathrm{V}(G) \setminus N'$.*

Dowód. (1) Zauważmy, że $N \cup U = \bigcup_{u \in U}(N \cup \{u\})$. Na mocy lematu 6.2 każdy ze zbiorów $N \cup \{u\}$, gdzie $u \in U$ jest globalnym zbiorem defensywnym. Z wniosku 3.6 otrzymujemy, że zbiór N' jest globalnym zbiorem defensywnym.

(2) Jeżeli $N = \mathrm{V}(G)$, to teza jest oczywiście spełniona. Załóżmy, że $N \neq \mathrm{V}(G)$. Jeżeli $U = \emptyset$, to z definicji zbioru U, dla każdego wierzchołka $v \in \mathrm{V}(G) \setminus N$ mamy $v \notin U_1$ lub $v \notin U_2$. Jeżeli $v \notin U_1$, to $|\mathrm{N}_G[v] \cap N| \leq |\mathrm{N}_G[v] \setminus N|$, czyli $\mathrm{SEC}_G(\mathrm{V}(G) \setminus N, v)$. Jeżeli $v \notin U_2$, to istnieje wierzchołek $u \in \mathrm{V}(G) \setminus N$, taki że $\{u,v\} \in \mathrm{E}(G)$ oraz $|\mathrm{N}_G[\{u,v\}] \cap N| \leq |\mathrm{N}_G[\{u,v\}] \setminus N|$. Czyli $\mathrm{SEC}_G(\mathrm{V}(G) \setminus N, \{u,v\})$. Zatem zbiór $S = \mathrm{V}(G) \setminus N$ jest zbiorem defensywnym.

(3) Niech $S \subseteq \mathrm{V}(G) \setminus N$ będzie zbiorem defensywnym w grafie G. Załóżmy nie wprost, że istnieje wierzchołek $v \in S$, taki że $v \in N'$. Czyli $v \in U$, a zatem $v \in U_1$ oraz $v \in U_2$. Na mocy lematu 6.2 otrzymujemy sprzeczność. □

Lemat 6.4. *Niech G będzie grafem i niech $N \subseteq \mathrm{V}(G)$ będzie globalnym zbiorem defensywnym. Definiujemy $N_0 = N$, $U_0 = \emptyset$, $U_i^1 = \{v \in \mathrm{V}(G) \setminus N_{i-1}\colon |\mathrm{N}_G[v] \cap N_{i-1}| > |\mathrm{N}_G[v] \setminus N_{i-1}|\}$, $U_i^2 = \{v \in \mathrm{V}(G) \setminus N_{i-1}\colon$ dla każdego $u \in \mathrm{N}_G(v) \setminus N_{i-1}$ zachodzi $|\mathrm{N}_G[\{u,v\}] \cap N_{i-1}| > |\mathrm{N}_G[\{u,v\}] \setminus N_{i-1}|\}$, $U_i = U_i^1 \cap U_i^2$, oraz $N_i = N_{i-1} \cup U_i$, dla $i = 1, 2, \ldots$. Wtedy istnieje $1 \leq k \leq \mathrm{n}(G)$, takie że $U_k = \emptyset$ i zachodzi:*

1. *zbiór $N_k = N_{k-1} = N_0 \cup U_1 \cup \ldots \cup U_{k-1}$ jest globalnym zbiorem bezpiecznym,*
2. *zbiór $S = \mathrm{V}(G) \setminus N_{k-1}$ jest zbiorem defensywnym lub zbiorem pustym,*
3. *dla dowolnego zbioru defensywnego $S' \subseteq \mathrm{V}(G) \setminus N$ zachodzi $S' \subseteq S = \mathrm{V}(G) \setminus N_{k-1}$.*

Dowód. Jeżeli $U_i \neq \emptyset$ dla pewnego $i \geq 1$, to dla każdego $j = 1, \ldots, i$ mamy $|N_j| = |N_{j-1}| + |U_j| > |N_{j-1}|$. Zatem zachodzi $|N_i| \geq |N| + i$. Zbiór $\mathrm{V}(G)$ jest skończony, zatem istnieje $1 \leq k \leq \mathrm{n}(G)$, dla którego $U_k = \emptyset$. Tezy podpunktów (1-3) wynikają z indukcyjnego rozumowania opartego lemat 6.3 (1-3). □

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

Twierdzenie 6.5. *Problemy SBDSO i PSBDSO są równoważne i istnieje algorytm rozwiązujący je w czasie $O(\Delta m)$, gdzie m jest liczbą krawędzi grafu, a Δ największym stopniem wierzchołka grafu.*

Dowód. Niech $N \subseteq \mathrm{V}(G)$ będzie globalnym zbiorem defensywnym w grafie G. Załóżmy, że istnieje równowaga strategiczna zbiorów defensywnych $\{N', S'\}$, taka że $N \subseteq N'$. Jako, że $S' \subseteq \mathrm{V}(G) \setminus N' \subseteq \mathrm{V}(G) \setminus N$, to na mocy lematu 6.4 (3) mamy $S' \subseteq S = \mathrm{V}(G) \setminus N_{k-1}$, oraz z lematu 6.4 (2) wiemy, że zbiór S jest zbiorem defensywnym. Jako, że zbiór S' jest zbiorem dominującym graf G, to zbiór S również jest zbiorem dominującym graf G. Zatem na mocy lematu 6.4 (1) otrzymujemy, że $\{N_{k-1}, \mathrm{V}(G) \setminus N_{k-1}\}$ jest doskonałą równowagą strategiczną zbiorów defensywnych oraz $N \subseteq N_{k-1}$ i $\mathrm{V}(G) \setminus N_{k-1} \subseteq \mathrm{V}(G) \setminus N$.

Algorytm rozwiązujący problem *SBDSO* wykonuje następujące kroki: dla pewnego globalnego zbioru defensywnego $N \subsetneq \mathrm{V}(G)$ w grafie G na podstawie lematu 6.4 konstruujemy zbiory N_{k-1} i $\mathrm{V}(G) \setminus N_{k-1}$. Jeżeli zbiór $\mathrm{V}(G) \setminus N_{k-1}$ nie jest pusty, to jest zbiorem defensywnym. Stąd dalsza część algorytmu sprowadza się do sprawdzenia, czy zbiór $\mathrm{V}(G) \setminus N_{k-1}$ jest zbiorem dominującym w grafie G. Możemy wykonać całą procedurę w czasie ograniczonym przez:
$O(\sum_{v \in \mathrm{V}(G) \setminus N} \deg_G(v)\Delta(G)) = O(\Delta(G) \sum_{v \in \mathrm{V}(G) \setminus N} \deg_G(v)) = O(\Delta(G)\,\mathrm{E}(G))$. □

Twierdzenie 6.6. *Niech G będzie grafem. Problem SBDS jest równoważny problemowi PSBDS. Co więcej, jeśli $\{N, S\}$ jest równowagą strategiczną zbiorów defensywnych w grafie G, to w tym grafie istnieje doskonała równowaga strategiczna zbiorów defensywnych $\{N', S'\}$, taka że $N \subseteq N'$ i $S \subseteq S'$.*

Dowód. Niech $\{N, S\}$ będzie równowagą strategiczną zbiorów defensywnych w grafie G. Zatem na mocy twierdzenia 6.5 istnieje doskonała równowaga strategiczna zbiorów defensywnych $\{N_{k-1}, \mathrm{V}(G) \setminus N_{k-1}\}$, gdzie $N_{k-1} = N \cup U_0 \cup \ldots U_{k-1}$. Zatem na mocy lematu 6.4 (3) mamy $N \subseteq N' = N_{k-1}$ i $S \subseteq S' = \mathrm{V}(G) \setminus N_{k-1}$. □

Na podstawie stwierdzenia 6.1 praz twierdzenia 6.6 mamy zatem wniosek.

Wniosek 6.7. *Problem SBDS jest równoważny weryfikacji czy liczba podziału na globalne zbiory defensywne jest równa co najmniej* 2. □

Pokazaliśmy, że w przypadku modelu równowagi strategicznej zbiorów defensywnych problem istnienia równowagi strategicznej zbiorów defensywnych (*SBDS*) jest równoważny problemowi istnienia równowagi doskonałej (*PSBDS*). Tak samo jak w przypadku modelu równowagi strategicznej koalicji defensywnych (twierdzenie 5.5), rezultat ten umożliwia skupienie się na poszukiwaniu podziałów całego zbioru wierzchołków grafu zamiast rozważania wszystkich potencjalnych wyborów dwóch rozłącznych podzbiorów.

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

6.3 Wielomianowy algorytm konstruujący równowagę strategiczną zbiorów defensywnych

W niniejszej części zaprezentujemy wielomianowy algorytm konstruujący doskonałą równowagę strategiczną zbiorów defensywnych w drzewach. Przedstawiony zostanie algorytm działający w czasie $O(n)$ bazujący na schemacie programowania dynamicznego, gdzie n jest liczbą wierzchołków drzewa.

Algorytm dynamiczny dla problemu *PSBDS* w drzewach

Zastosujemy dynamiczną technikę wstępującą (ang. *bottom-up*) względem ustalonego ukorzenienia drzewa. Najpierw wprowadzimy oznaczenia. Niech T będzie dowolnym drzewem. Wybieramy dowolny wierzchołek $r \in \mathrm{V}(T)$ drzewa T będący liściem i ukorzeniamy drzewo w wierzchołku r. W ten sposób określamy orientację w drzewie T.

Przez T_v oznaczamy poddrzewo drzewa T ukorzenione w wierzchołku v i zawierająca wszystkie wierzchołki drzewa T, których ścieżki prowadzące do korzenia r zawierają wierzchołek v. Dla każdego wierzchołka $v \neq r$ drzewa T istnieje dokładnie jedna krawędź wychodząca z v w kierunku korzenia r. Oznaczamy tą krawędź jako $e_v = \{v, r_v\}$. Dodatkowo przez T_v^* oznaczamy drzewo T_v z dołączoną krawędzią e_v (czyli $T_v^* = (\mathrm{V}(T_v) \cup \{r_v\}, \mathrm{E}(T_v) \cup \{e_v\})$), ukorzenione w wierzchołku r_v. Przez $C(v)$ oznaczmy zbiór wszystkich wszystkich *wierzchołków potomnych* wierzchołka v, czyli wszystkich jego sąsiadów różnych od wierzchołka r_v, oraz $C(r) = \{r_s\}$, gdzie r_s jest jedynym wierzchołkiem sąsiadującym z korzeniem r (wybraliśmy wierzchołek r spośród liści drzewa T, więc rzeczywiście wierzchołek r_s jest dobrze zdefiniowany).

Dla dowolnego drzewa T' ukorzenionego w wierzchołku r' (niekoniecznie liściu) przez *niemal doskonałą równowagę strategiczną zbiorów defensywnych* oznaczamy taki podział zbioru wierzchołków $\mathrm{V}(T')$ na dwa podzbiory, w którym jeden jest globalnym zbiorem defensywnym, a drugi jest zbiorem defensywnym, który dominuje zbiór $\mathrm{V}(T) \setminus \{r'\}$.

Każdemu wierzchołkowi $v \in \mathrm{V}(T) \setminus \{r\}$ przypisujemy dwa bity informacji i dwa parametry liczbowe:

- $s_v = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje niemal doskonała równowaga strategiczna zbiorów defensywnych w poddrzewie T_v^*, taka że wierzchołki v i r_v należą do tego samego zbioru defensywnego,
- $d_v = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje niemal doskonała równowaga strategiczna zbiorów defensywnych w poddrzewie T_v^*, taka że wierzchołki v i r_v należą do różnych zbiorów defensywnych,
- jeśli $s_v = 1$, to definiujemy parametr D_v jako najmniejszą możliwą liczbę wierzchołków zbioru $C(v)$, które należą do innego zbioru defensywnego, niż wierzchołki v i r_v spośród wszystkich doskonałych równowag strategicznych zbiorów defensywnych w drzewie T_v^*, dla których v i

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

r_v należą do jednego zbioru defensywnego,

- jeżeli $s_v = 1$, to definiujemy $S_v = |C(v)| - D_v$.

Dla dowolnego liścia $l \in \mathrm{V}(T) \setminus \{r\}$ mamy wtedy $s_l = 0$ oraz $d_l = 1$. Zatem dla liści nie definiujemy parametrów D_v i S_v. Trawersując drzewo techniką wstępującą od liści do korzenia, dla każdego wierzchołka $v \in \mathrm{V}(T) \setminus \{r\}$, dla którego wszystkie wierzchołki potomne $C(v)$ mają przypisane wartości bitów s i d, dla $i, j \in \{0, 1\}$ definiujemy:

$$C_v^{ij} = \{c \in C(v) : s_c = i \text{ oraz } d_c = j\}.$$

Stwierdzenie 6.8. *Zachodzi:*

(1) $s_v = 1$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $C_v^{00} = \emptyset$ *oraz* $C_v^{01} \cup C_v^{11} \neq \emptyset$ *oraz co najmniej jeden z dwóch warunków:*

- $\left|C_v^{01}\right| \leq 2 + \left|C_v^{10} \cup C_v^{11}\right|$,
- *istnieje wierzchołek* $c \in C_v^{10} \cup C_v^{11}$, *dla którego* $\left|C_v^{01}\right| + D_c \leq 2 + \left|C_v^{10} \cup C_v^{11}\right| + S_c$,

(2) $d_v = 1$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $C_v^{00} = \emptyset$ *oraz co najmniej jeden z warunków:*

- $\left|C_v^{01}\right| \leq \left|C_v^{10} \cup C_v^{11}\right|$,
- *istnieje wierzchołek* $c \in C_v^{10} \cup C_v^{11}$, *dla którego* $\left|C_v^{01}\right| + D_c \leq \left|C_v^{10} \cup C_v^{11}\right| + S_c$,

(3) *jeżeli* $s_v = 1$, *to* $D_v = \max\{1, \left|C_v^{01}\right|\}$ *i* $S_v = |C(v)| - D_v$.

Dowód. Zacznijmy od dowodu punktu (1).
($\Rightarrow$) Niech $\{N, S\}$ będzie niemal doskonałą równowagą strategiczną zbiorów defensywnych w poddrzewie T_v^*. Bez straty ogólności możemy założyć, że $v \in N$ oraz $r_v \in N$. Wierzchołek v nie jest liściem, zatem $C(v) \neq \emptyset$. Dla każdego wierzchołka $c \in C(v)$ rozważamy poddrzewo T_c^*. Para $\{V(T_c^*) \cap N, V(T_c^*) \cap S\}$ jest niemal doskonałą równowagą strategiczną zbiorów defensywnych w poddrzewie T_c^*. Zatem $s_c + d_c \geq 1$. Stąd $C_v^{00} = \emptyset$. Zbiór S dominuje każdy wierzchołek za wyjątkiem wierzchołka r_v, zatem istnieje wierzchołek $c \in C(v)$, dla którego $d_c = 1$. Zatem $C_v^{01} \neq \emptyset$ lub $C_v^{11} \neq \emptyset$. Jeśli $\mathrm{SEC}_{T_v^*}(N, v)$, to zachodzi $2 + \left|C_v^{10} \cup C_v^{11}\right| \geq 2 + |C(v) \cap N| \geq |C(v) \cap S| \geq \left|C_v^{01}\right|$. Jeśli natomiast $\neg\,\mathrm{SEC}_{T_v^*}(N, v)$, to również $\neg\,\mathrm{SEC}_{T_v^*}(N, \{v, r_v\})$. Zatem istnieje wierzchołek $c \in C(v)$, taki, że $\mathrm{SEC}_{T_v^*}(N, \{v, c\})$. Zatem $2 + \left|C_v^{10} \cup C_v^{11}\right| + S_c \geq 2 + |C(v) \cap N| + |C(c) \cap N| \geq |C(v) \cap S| + |C(c) \cap S| \geq \left|C_v^{01}\right| + D_c$.
($\Leftarrow$) Zachodzi $C_v^{00} = \emptyset$, stąd dla każdego wierzchołka $c \in C(v)$ istnieje niemal doskonała równowaga strategiczna zbiorów defensywnych w poddrzewie T_c^*. Konstruujemy niemal doskonałą równowagę strategiczną zbiorów defensywnych $\{N, S\}$ w poddrzewie T_v^* w następujący sposób:

($c1$) $v, r_v \in N$,

($c2$) $C_v^{01} \subseteq S$,

($c3$) $C_v^{10} \subseteq N$,

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

($c4$) jeśli $C_v^{01} = \emptyset$, to $\left|C_v^{11} \cap S\right| = 1$ i $\left|C_v^{11} \cap N\right| = \left|C_v^{11}\right| - 1$,

($c5$) jeśli $C_v^{01} \neq \emptyset$, to $C_v^{11} \subseteq N$,

($c6$) wtedy dla każdego wierzchołka $c \in C(v)$ istnieje niemal doskonała równowaga strategiczna zbiorów defensywnych $\{N_c, S_c\}$ w poddrzewie T_c^*, taka że $v = r_c \in N$. Niezależnie od tego czy $c \in N$, czy $c \in S$ przyjmujemy $N_c \subseteq N$ oraz $S_c \subseteq S$.

Wtedy:

- $\mathrm{SEC}_{T_v^*}(N, r_v)$, ponieważ $2 = \left|\mathrm{N}_{T_v^*}[r_v] \cap N\right| \geq \left|\mathrm{N}_{T_v^*}[r_v] \setminus N\right| = 0$,
- $\mathrm{SEC}_{T_v^*}(N, v)$ lub $\mathrm{SEC}_{T_v^*}(N, \{c, v\})$ dla pewnego $c \in C(v)$, ponieważ:
  - jeśli $C_v^{01} = \emptyset$, to $\left|\mathrm{N}_{T_v^*}[v] \cap N\right| = 2 + \left|C_v^{10} \cup C_v^{11}\right| - 1 \geq 1 = \left|\mathrm{N}_{T_v^*}[v] \setminus N\right|$,
  - jeśli $C_v^{01} \neq \emptyset$ i $2 + \left|C_v^{10} \cup C_v^{11}\right| \geq \left|C_v^{01}\right|$, to $\left|\mathrm{N}_{T_v^*}[v] \cap N\right| = 2 + \left|C_v^{10} \cup C_v^{11}\right| \geq \left|C_v^{01}\right| = \left|\mathrm{N}_{T_v^*}[v] \setminus N\right|$,
  - jeśli $C_v^{01} \neq \emptyset$ i istnieje wierzchołek $c \in C(v)$, taki że $\left|C_v^{01}\right| + D_c \leq 2 + \left|C_v^{10} \cup C_v^{11}\right| + S_c$, to $\left|\mathrm{N}_{T_v^*}[\{v, c\}] \cap N\right| = 2 + \left|C_v^{10} \cup C_v^{11}\right| + S_c \geq \left|C_v^{01}\right| + D_c = \left|\mathrm{N}_{T_v^*}[\{v, c\}] \setminus N\right|$,
- z kroków ($c4$) i ($c5$) konstrukcji wierzchołek v jest zdominowany przez zbiór S,
- $C_v^{00} = \emptyset$, zatem dla każdego $c \in C(v)$ mamy $s_c + d_c \geq 1$, oraz z kroków ($c3$), ($c4$) i ($c5$) konstrukcji mamy:
  - jeśli $c \in N$, to , to $s_c = 1$ zatem w poddrzewie T_c^* istnieje niemal doskonała równowaga strategiczna zbiorów defensywnych taka, że wierzchołki c i $r_c = v$ należą do tego samego zbioru defensywnego,
  - jeśli $c \in S$, to $d_c = 1$ zatem w poddrzewie T_c^* istnieje niemal doskonała równowaga strategiczna zbiorów defensywnych taka, że wierzchołki c i $r_c = v$ należą do różnych zbiorów defensywnych.

Zatem zbiór N jest globalnym zbiorem defensywnym, a zbiór S jest zbiorem defensywnym, który dominuje zbiór $\mathrm{V}(T_v^*) \setminus \{r_v\}$. Czyli para $\{N, S\}$ jest niemal doskonałą równowagą strategiczną zbiorów defensywnych w drzewie $\mathrm{V}(T_v^*)$ dla której wierzchołki r i r_v należą do tego samego zbioru defensywnego.

Przejdziemy teraz do dowodu punktu (2).

($\Rightarrow$) Niech $\{N, S\}$ będzie niemal doskonałą równowagą strategiczną zbiorów defensywnych w poddrzewie T_v^*. Bez straty ogólności możemy założyć, że $v \in N$ i $r_v \in S$. Wierzchołek v nie jest liściem, zatem $C(v) \neq \emptyset$. Dla każdego wierzchołka $c \in C(v)$ rozważamy poddrzewo T_c^*. Para $\{V(T_c^*) \cap N, V(T_c^*) \cap S\}$ jest niemal doskonałą równowagą strategiczną zbiorów defensywnych w poddrzewie T_c^*. Zatem $s_c + d_c \geq 1$, a stąd $C_v^{00} = \emptyset$. Jeśli $\mathrm{SEC}_{T_v^*}(N, v)$, to zachodzi $\left|C_v^{10} \cup C_v^{11}\right| \geq |C(v) \cap N| \geq |C(v) \cap S| \geq \left|C_v^{01}\right|$. Jeśli natomiast $\neg\, \mathrm{SEC}_{T_v^*}(N, v)$ to istnieje wierzchołek $c \in C(v)$, taki, że $\mathrm{SEC}_{T_v^*}(N, \{v, c\})$. Zatem $\left|C_v^{10} \cup C_v^{11}\right| + S_c \geq |C(v) \cap N| + |C(c) \cap N| \geq |C(v) \cap S| + |C(c) \cap S| \geq \left|C_v^{01}\right| + D_c$.

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

($\Leftarrow$) Zachodzi $C_v^{00} = \emptyset$, stąd dla każdego wierzchołka $c \in C(v)$ istnieje niemal doskonała równowaga strategiczna zbiorów defensywnych w poddrzewie T_c^*. Konstruujemy niemal doskonałą równowagę strategiczną zbiorów defensywnych $\{N, S\}$ w poddrzewie T_v^* w następujący sposób:

($c1$) $v \in N$, $r_v \in S$,

($c2$) $C_v^{01} \subseteq S$,

($c3$) $C_v^{10} \cup C_v^{11} \subseteq N$,

($c4$) wtedy dla każdego wierzchołka $c \in C(v)$ istnieje niemal doskonała równowaga strategiczna zbiorów defensywnych $\{N_c, S_c\}$ w poddrzewie T_c^*, taka że $v = r_c \in N$. Niezależnie od tego czy $c \in N$, czy $c \in S$ przyjmujemy $N_c \subseteq N$ oraz $S_c \subseteq S$.

Wtedy:

- $\mathrm{SEC}_{T_v^*}(S, r_v)$, ponieważ $1 = \left|\mathrm{N}_{T_v^*}[r_v] \cap S\right| = \left|\mathrm{N}_{T_v^*}[r_v] \setminus S\right| = 1$,
- wierzchołek r_v jest zdominowany przez oba zbiory N i S, ponieważ $v \in N$,
- wierzchołek v jest zdominowany przez oba zbiory N i S, ponieważ $r_v \in S$,
- $\mathrm{SEC}_{T_v^*}(N, v)$ lub $\mathrm{SEC}_{T_v^*}(N, \{c, v\})$ dla pewnego $c \in C(v)$, ponieważ:
  - jeśli $\left|C_v^{10} \cup C_v^{11}\right| \geq \left|C_v^{01}\right|$, to $\left|\mathrm{N}_{T_v^*}[v] \cap N\right| = 1 + \left|C_v^{10} \cup C_v^{11}\right| \geq 1 + \left|C_v^{10}\right| = \left|\mathrm{N}_{T_v^*}[v] \setminus N\right|$,
  - jeśli istnieje wierzchołek $c \in C(v)$, taki że $\left|C_v^{01}\right| + D_c \leq \left|C_v^{10} \cup C_v^{11}\right| + S_c$, to $|\,\mathrm{N}_{T_v^*}[\{v, c\}] \cap N| = 1 + |C_v^{10} \cup C_v^{11}| + S_c \geq 1 + \left|C_v^{01}\right| + D_c = |\,\mathrm{N}_{T_v^*}[\{v, c\}] \setminus N|$,
- $C_v^{00} = \emptyset$, zatem dla każdego $c \in C(v)$ mamy $s_c + d_c \geq 1$, oraz z kroków ($c2$) i ($c3$) konstrukcji mamy:
  - jeśli $c \in N$, to $s_c = 1$ zatem w poddrzewie T_c^* istnieje niemal doskonała równowaga strategiczna zbiorów defensywnych taka, że wierzchołki c i $r_c = v$ należą do tego samego zbioru defensywnego,
  - jeśli $c \in S$, to $d_c = 1$ zatem w poddrzewie T_c^* istnieje niemal doskonała równowaga strategiczna zbiorów defensywnych taka, że wierzchołki c i $r_c = v$ należą do różnych zbiorów defensywnych.

Zatem w tym przypadku zarówno zbiór N jest globalnym zbiorem defensywnym, jak i zbiór S jest globalnym zbiorem defensywnym, zatem $\{N, S\}$ jest doskonałą równowagą strategiczną zbiorów defensywnych w drzewie $\mathrm{V}(T_v^*)$, w którym wierzchołki r i r_v należą do różnych zbiorów defensywnych. Stąd tym bardziej jest niemal doskonałą równowagą strategiczną zbiorów defensywnych w drzewie $\mathrm{V}(T_v^*)$.

Przejdziemy teraz do dowodu punktu (3).

Oczywiście $D_v \geq 0$. W dowodzie punktu (1) przedstawiliśmy konstrukcję niemal doskonałej równowagi strategicznej zbiorów defensywnych, dla której w zbiorze $C(v)$ jest dokładnie $\max\{1, \left|C_v^{01}\right|\}$ wierzchołków w zbiorze defensywnym różnym od tego, w którym jest wierzchołek v. Załóżmy, że

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

istnieje niemal doskonała równowaga strategiczna zbiorów defensywnych, dla której w zbiorze $C(v)$ jest D' wierzchołków w zbiorze defensywnym różnym od tego, w którym jest wierzchołek v, gdzie $D' < \max\{1, \left|C_v^{01}\right|\}$. Wtedy:

- jeśli $\left|C_v^{01}\right| \leq 1$, to $D' = 0$. Wtedy wierzchołek v nie jest zdominowany przez oba zbiory defensywne, sprzeczność,
- jeśli $\left|C_v^{01}\right| > 1$, to istnieje wierzchołek $c \in C(v)$, który należy do tego samego zbioru co wierzchołek v, oraz $s_c = 0$, sprzeczność.

Zatem $D_v = \max\{1, \left|C_v^{01}\right|\}$, a wtedy oczywiście $S_v = |C(v)| - D_v$. □

Przypomnijmy, że korzeń r wybraliśmy spośród liści, a przez r_s oznaczyliśmy jedyny wierzchołek z nim sąsiadujący (tzn. $C(r) = \{r_s\}$). Przypisujemy w zaprezentowany powyżej sposób wartości s i d dla wszystkich wierzchołków aż do osiągnięcia wierzchołka r_s. Zachodzi wtedy:

Twierdzenie 6.9. *Doskonała równowaga strategiczna zbiorów defensywnych w drzewie T ukorzenionym w wierzchołku $r \in \mathrm{V}(T)$ będącym liściem istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy $d_{r_s} = 1$, gdzie r_s jest jedynym sąsiadem wierzchołka r w drzewie T.*

Dowód. ($\Rightarrow$) Niech $\{N, S\}$ będzie doskonałą równowagą strategiczną zbiorów defensywnych w drzewie T ukorzenionym w wierzchołku r. Bez utraty ogólności możemy przyjąć, że $r \in N$. Zbiór S dominuje wierzchołek r, zatem $r_s \in S$. Stąd $\{N, S\}$ jest niemal doskonałą równowagą strategiczną zbiorów defensywnych w drzewie $T^*_{r_s}$, taką że wierzchołki r_s i r należą do różnych zbiorów defensywnych. Czyli $d_{r_s} = 1$.

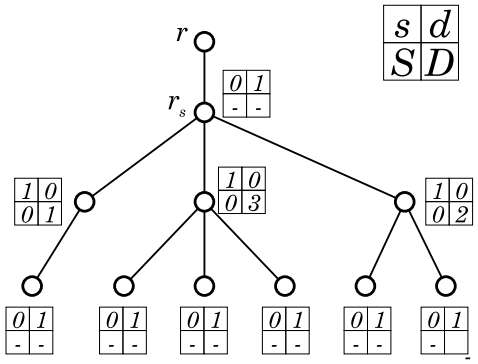
($\Leftarrow$) Niech teraz $d_{r_s} = 1$. Zatem istnieje niemal doskonała równowaga strategiczna zbiorów defensywnych $\{N, S\}$ w drzewie $T^*_{r_s}$, taka że wierzchołki r_s oraz r należą do różnych zbiorów defensywnych. Zauważmy, że w tej sytuacji wierzchołek r jest zdominowany przez oba zbiory defensywne N i S. Zatem $\{N, S\}$ jest doskonałą równowagą strategiczną zbiorów defensywnych w drzewie $T^*_{r_s}$. Jako, że korzeń r jest liściem w drzewie T, to drzewo $T^*_{r_s}$ jest izomorficzne z drzewem T. Zatem para $\{N, S\}$ jest doskonałą równowagą strategiczną zbiorów defensywnych w drzewie T. □

Konstrukcja równowagi strategicznej

Jeśli doskonała równowaga strategiczna zbiorów defensywnych w drzewie T ukorzenionym w liściu r istnieje i do wierzchołków przypisane są wartości bitów informacji s i d oraz parametry S i D, to możemy przeprowadzić konstrukcję dwóch rozłącznych globalnych zbiorów defensywnych N, S.

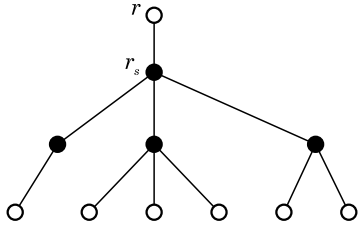
Dla wierzchołka r_s, czyli jedynego wierzchołka sąsiadującego z korzeniem r rozważamy drzewo $T^*_{r_s}$, które jest izomorficzne z drzewem T (ponieważ korzeń r jest liściem w drzewie T). Zauważmy, że wierzchołki r oraz r_s muszą należeć do różnych zbiorów defensywnych, czyli $d_{r_s} = 1$. Zatem

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl



Rys. 6.1: Ukorzenione drzewo wraz z przypisanymi do wierzchołków bitami informacji s i d oraz parametrami S i D.

skonstruujemy niemal doskonałą równowagę strategiczną zbiorów defensywnych w sposób zaprezentowany w punkcie (2) dowodu 6.8. W dowodzie zauważyliśmy, że dla przypadku $d = 1$ konstruujemy nie tylko niemal doskonałą równowagę strategiczną, ale faktyczną doskonałą równowagę strategiczną zbiorów defensywnych. Zatem uzyskujemy doskonałą równowagę strategiczną w całym drzewie T.



Rys. 6.2: Równowaga strategiczna zbiorów defensywnych w drzewie, w którym nie istnieje równowaga strategiczna koalicji defensywnych.

Złożoność obliczeniowa

Dla każdego wierzchołka v grafu G obliczamy wartości s_v, d_v, S_v, oraz D_v korzystając wyłącznie z parametrów przypisanych do wierzchołków zbioru wierzchołków potomnych wierzchołka v, czyli $C(v)$. Każdy wierzchołek ma co najwyżej $\deg_G(v)$ wierzchołków potomnych, zatem całkowita złożoność obliczeniowa wynosi $O(\sum_{v \in \mathrm{V}(T)} \deg_G(v))$. Na podstawie lematu o uściskach dłoni 1.2 oraz twierdzenia 1.6 otrzymujemy złożoność $O(2m) = O(n)$.

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

6.4 $\mathcal{NP}$–zupełność problemu istnienia równowagi strategicznej zbiorów defensywnych dla grafów z $\Delta \leq 4$

W tej części wykażemy, że problem *PSBDS* jest $\mathcal{NP}$–zupełny dla grafów z $\Delta \leq 4$. Tak samo jak w przypadku równowagi strategicznej koalicji defensywnych przeprowadzimy wielomianową redukcję przekształcającą instancję $\mathcal{NP}$–zupełnego (twierdzenie 1.8) problemu $\overline{3SAT}$ do instancji problemu *PSBDS*.

Twierdzenie 6.10. *Problem PSBDS jest $\mathcal{NP}$–zupełny dla grafów, dla których $\Delta(G) \leq 4$.*

Dowód. Problem *PSBDS* należy do klasy $\mathcal{NP}$. Dowód wykorzystuje redukcję przekształcającą instancję problemu $\overline{3SAT}$ w instancję problemu *PSBDS* i jest analogiczny do dowodu twierdzenia 5.24, w którym pokazujemy $\mathcal{NP}$–zupełność problemu *PSBDA*.
($\Rightarrow$) Dla zadanej formuły logicznej ϕ będącej poprawną instancją problemu $\overline{3SAT}$ w identyczny jak w dowodzie twierdzenia 5.24 sposób konstruujemy graf $G(\phi)$. Na mocy lematu 3.1 wiemy, że każda koalicja defensywna jest również zbiorem defensywnym. Stąd, konstrukcja dwóch koalicji defensywnych N i S w grafie $G(\phi)$ na podstawie wartościowania f formuły logicznej ϕ jest też konstrukcją dwóch zbiorów defensywnych N i S. Zatem $\{N, S\}$ jest doskonałą równowagą strategiczną zbiorów defensywnych.
($\Leftarrow$) Dla doskonałej równowagi strategicznej zbiorów defensywnych N, S również postępujemy w niemal identyczny sposób jak w dowodzie twierdzenia 5.24. Zauważmy, że zachodzi lemat analogiczny do lematu 5.8:

Lemat 6.11. *Niech G będzie grafem i niech $\{N, S\}$ będzie równowagą strategiczną zbiorów defensywnych. Wtedy dla każdego wierzchołka $v \in \mathrm{V}(G)$ stopnia 2, jeden z jego sąsiadów należy do zbioru N, a drugi do zbioru S.*

Dowód lematu. Jeśli obaj sąsiedzi należeliby do tego samego zbioru defensywnego, to:

- jeżeli wszystkie trzy wierzchołki należałyby do tego samego zbioru defensywnego, to wierzchołek v nie byłby zdominowany przez drugi zbiór defensywny,
- jeżeli wierzchołki sąsiadujące należałyby do innego zbioru defensywnego niż wierzchołek v, to wierzchołek v nie byłby zabezpieczony (w sensie predykatu SEC) samodzielnie. Nie istnieje też wierzchołek sąsiadujący z wierzchołkiem v należący do tego samego zbioru defensywnego co on, z którym wspólnie mógłby zapewnić sobie bezpieczeństwo (w sensie predykatu SEC). □

Konstrukcja grafu $G(\phi)$ prowadzi do wygenerowania wierzchołków stopnia 2 w tym grafie. Zatem rozumowanie z dowodu twierdzenia 5.24 można powtórzyć w oparciu o analogiczną własność przedstawioną w lemacie 6.11.

W dalszej części korzystać będziemy z oznaczeń używanych w dowodzie twierdzenia 5.24. Jedyny moment, w którym należy zmodyfikować rozumowanie pojawia się w miejscu, w którym argumentujemy, że dla każdego wierzchołka c_j, istnieje $i \in \{1, \ldots, n\}$, dla którego wierzchołek $v_{i,j} \in N$.

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

W dowodzie twierdzenia 5.24 wykorzystujemy wymaganie modelu koalicji defensywnej dla wierzchołka c_j i łatwo otrzymujemy, że $|\mathrm{N}_{G(\phi)}[c_j] \cap N| \geq 3$. W przypadku zbiorów defensywnych należy rozważyć dodatkowo możliwość zabezpieczenia (w sensie predykatu SEC) wierzchołka c_j wspólnie z jednym z jego sąsiadów należącym do tego samego zbioru defensywnego. Możliwe są dwa przypadki. Albo wszystkie wierzchołki $v_{i,j}$ sąsiadujące z wierzchołkiem c_j należą do zbioru defensywnego S. Jednak wtedy mamy $\neg\,\mathrm{SEC}_{G(\phi)}(N, c_j)$ i $\neg\,\mathrm{SEC}_{G(\phi)}(N, \{c_j, u_j\})$, oraz nie istnieje żaden inny sąsiad wierzchołka c_j w zbiorze N. Jest to sprzeczność z założeniem, że zbiór N jest globalnym zbiorem defensywnym. Zatem ostatecznie istnieje $i \in \{1, \ldots, n\}$, dla którego wierzchołek $v_{i,j} \in N$. Dalsza część dowodu twierdzenia 5.24 również bazuje na własności wierzchołków stopnia 2 w równowadze strategicznej koalicji defensywnych. Zatem powtarzając kolejne kroki dowodu w oparciu o analogiczny lemat 6.11 dla równowagi strategicznej zbiorów defensywnych uzyskujemy tezę. □

6.5 Równowaga strategiczna koalicji krawędziowych

W niniejszej części będziemy rozważali równowagę strategiczną koalicji krawędziowych.

Definicja 6.2. Niech G będzie grafem. Rozważmy dwa rozłączne podzbiory zbioru $\mathrm{V}(G)$ które oznaczymy odpowiednio jako N oraz S. Jeżeli zbiory N oraz S są globalnymi koalicjami krawędziowymi, to parę nieuporządkowaną $\{N, S\}$ nazywamy *równowagą strategiczną koalicji krawędziowych* (ang. *strategic balance of edge alliances*). Dodatkowo jeżeli rodzina $\{N, S\}$ jest podziałem zbioru $\mathrm{V}(G)$, to *równowagę strategiczną koalicji krawędziowych* nazywamy *doskonałą* (ang. *perfect*).

Tak zdefiniowana równowaga strategiczna jest jednym z modeli równowagi strategicznej zgodnych z ogólną definicją 2.10. To znaczy jest to równowaga strategiczna oparta o model struktur defensywnych typu $\mathcal{S}_G^{ea}$ przy oznaczeniach takich jakie zastosowaliśmy w części 2.3.

Koncepcja równowagi strategicznej koalicji krawędziowych, podobnie jak w przypadku równowagi strategicznej koalicji defensywnych badanej począwszy od części 6.1, pojawia się w rozważaniach po raz pierwszy w niniejszej pracy. Jeszcze wcześniej, w rozdziale 5 badaliśmy równowagę strategiczną koalicji defensywnych.

Pytanie o istnienie równowagi strategicznej zbiorów defensywnych określa decyzyjny problem obliczeniowy.

Problem	*SBEA*
Instancja	Graf G.
Pytanie	Czy w grafie G istnieje równowaga strategiczna koalicji krawędziowych?

Analogicznie sformułujemy problem obliczeniowy dla weryfikacji istnienia doskonałej równowagi strategicznej koalicji krawędziowych.

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

Problem	*PSBEA*
Instancja	Graf G.
Pytanie	Czy w grafie G istnieje doskonała równowaga strategiczna koalicji krawędziowych?

Zwróćmy uwagę, że problemy obliczeniowe *SBEA* oraz *PSBEA* mają negatywną odpowiedź dla wszystkich instancji grafów, w których istnieje wierzchołek wiszący.

Stwierdzenie 6.12. *Niech G będzie grafem, dla którego $\delta(G) \leq 1$. W grafie G nie istnieje równowaga strategiczna koalicji krawędziowych.*

Dowód. Oczywiście jeśli $\delta(G) = 0$, to w grafie G nie istnieje równowaga strategiczna koalicji krawędziowych. Jeśli $\delta(G) = 1$ to w grafie G istnieje co najmniej jeden wierzchołek wspierający s. Załóżmy, że istnieje równowaga strategiczna koalicji krawędziowych $\{N, S\}$ w grafie G. Ze stwierdzenia 4.12, wierzchołek s należy zarówno do zbioru N, jak i zbioru S. Sprzeczność, ponieważ zbiory N, S są rozłączne. □

Stąd łatwo otrzymujemy wniosek dla wszystkich drzew.

Wniosek 6.13. *Niech T będzie drzewem. W drzewie T nie istnieje równowaga strategiczna koalicji krawędziowych.*

Dowód. Oczywiście jeśli drzewo T ma tylko jeden wierzchołek, to nie istnieje w nim równowaga strategiczna koalicji krawędziowych. Jeśli $\mathrm{n}(T) \geq 2$ to na mocy lematu 1.7 istnieją w nim co najmniej dwa liście. Zatem na mocy stwierdzenia 6.12 w drzewie T nie istnieje równowaga strategiczna koalicji krawędziowych. □

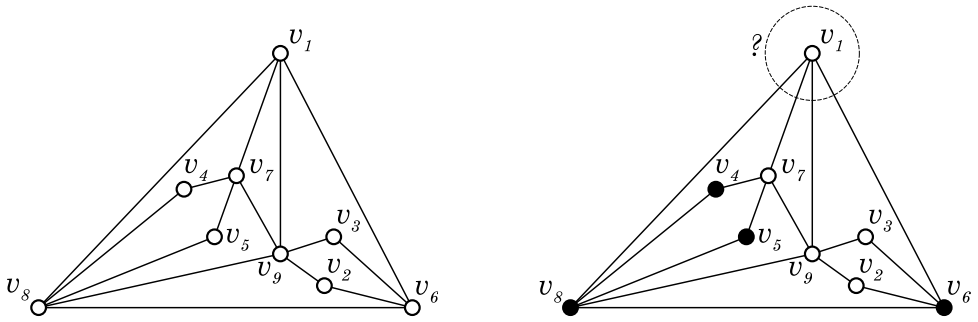
6.6 Doskonała równowaga strategiczna koalicji krawędziowych

Twierdzenia 5.6 i 6.6 orzekają, że równoważne są odpowiednio problemy obliczeniowe *SBDA* i *PSBDA* oraz *SBDS* i *PSBDS*. Czyli równowaga strategiczna koalicji defensywnych w grafie istnieje wtedy tylko i wtedy, gdy istnieje w nim doskonała równowaga strategiczna koalicji defensywnych (twierdzenie 5.6), a także równowaga strategiczna zbiorów defensywnych w grafie istnieje wtedy tylko i wtedy, gdy istnieje w nim doskonała równowaga strategiczna zbiorów defensywnych (twierdzenie 6.6).

Wykażemy, że w przypadku modelu równowagi strategicznej koalicji krawędziowych podobna własność nie zachodzi. Oczywiście z istnienia doskonałej równowagi strategicznej koalicji krawędziowych w oczywisty sposób wynika istnienie równowagi strategicznej koalicji krawędziowych (stwierdzenie 2.33). Nie zachodzi jednak zależność odwrotna.

Graf przedstawiony na rysunku 6.3 posłuży nam za kontrprzykład. Stwierdzenia 6.14 i 6.15, oraz wniosek 6.18 mówią o własnościach tego grafu.

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl



Rys. 6.3: Najmniejszy graf, w którym istnieje globalna równowaga strategiczna koalicji krawędziowych $\{\{v_2, v_3, v_7, v_9\}, \{v_4, v_5, v_6, v_8\}\}$, ale nie istnieje doskonała równowaga strategiczna koalicji krawędziowych.

Stwierdzenie 6.14. *W grafie G przedstawionym na rysunku 6.3 istnieje równowaga strategiczna koalicji krawędziowych.*

Dowód. Skorzystamy z numeracji wierzchołków tak jak na rysunku 6.3. Niech $N = \{v_2, v_3, v_7, v_9\}$ oraz $S = \{v_4, v_5, v_6, v_8\}$. Pokażemy, że para $\{N, S\}$ jest równowagą strategiczną koalicji krawędziowych. Należy wykazać, że zbiory N i S są globalnymi koalicjami krawędziowymi. Zacznijmy od zauważenia, że są to zbiory dominujące. Zauważmy teraz, że podgraf indukowany $G[N]$ jest izomorficzny z gwiazdą S_3. Czyli posiada trzy krawędzie, dla których należy zweryfikować warunek koalicji krawędziowej. Mamy:

$$4 = |\mathrm{N}_G[\{2,9\} \cap N]| \geq |\mathrm{N}_G[\{2,9\} \setminus N]| = 3,$$
$$4 = |\mathrm{N}_G[\{3,9\} \cap N]| \geq |\mathrm{N}_G[\{3,9\} \setminus N]| = 3,$$
$$4 = |\mathrm{N}_G[\{7,9\} \cap N]| \geq |\mathrm{N}_G[\{7,9\} \setminus N]| = 4.$$

Zatem zbiór N jest koalicją krawędziową. Podobnie podgraf indukowany $G[S]$ jest izomorficzny z gwiazdą S_3, więc również zweryfikujemy warunek koalicji krawędziowej dla trzech krawędzi. Mamy:

$$4 = |\mathrm{N}_G[\{4,8\} \cap S]| \geq |\mathrm{N}_G[\{4,8\} \setminus S]| = 3,$$
$$4 = |\mathrm{N}_G[\{5,8\} \cap S]| \geq |\mathrm{N}_G[\{5,8\} \setminus S]| = 3,$$
$$4 = |\mathrm{N}_G[\{6,8\} \cap S]| \geq |\mathrm{N}_G[\{6,8\} \setminus S]| = 4.$$

Zatem zbiór S jest koalicją krawędziową. □

Stwierdzenie 6.15. *W grafie G przedstawionym na rysunku 6.3 nie istnieje doskonała równowaga strategiczna koalicji krawędziowych.*

Dowód. Załóżmy nie wprost, że w grafie z rysunku 6.3 istnieje doskonała równowaga strategiczna koalicji krawędziowych. Czyli istnieją zbiory dominujące N i S będące koalicjami krawędziowymi, oraz $N \cup S = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9\}$. Zauważmy najpierw, że wierzchołki v_8 i v_7 nie mogą

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

należeć do tej samej koalicji krawędziowej. Możemy zatem bez straty ogólności założyć, że $v_8 \in N$ oraz $v_7 \in S$. Analogiczne rozumowanie prowadzi do wniosku, że wierzchołki v_6 i v_9 również nie mogą należeć do tej samej koalicji krawędziowej.

Rozpatrzmy w przypadek, w którym wierzchołki $v_8, v_6 \in N$. Wtedy $v_7, v_9 \in S$. Jeżeli wierzchołek $v_1 \in N$, to musimy zabezpieczyć (w sensie predykatu SEC) krawędzie $\{v_1, v_8\}$ i $\{v_1, v_6\}$. Z tego wynika, że $\{v_4, v_5\} \cap N \neq \emptyset$, oraz $\{v_2, v_3\} \cap N \neq \emptyset$. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że $v_4, v_2 \in N$. Z konieczności zabezpieczenia krawędzi $\{v_7, v_9\}$ w zbiorze S wynika wtedy, że $v_3, v_5 \in S$. Zachodzi $\neg\,\mathrm{SEC}_G(S, \{v_9, v_3\})$, sprzeczność. Jeżeli wierzchołek $v_1 \in S$, to musimy zabezpieczyć krawędzie $\{v_1, v_7\}$ i $\{v_1, v_9\}$. Z tego wynika, że $\{v_4, v_5\} \cap S \neq \emptyset$, oraz $\{v_2, v_3\} \cap S \neq \emptyset$. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że $v_5, v_3 \in S$. Z konieczności zabezpieczenia krawędzi $\{v_8, v_6\}$ w zbiorze N wynika wtedy, że $v_2, v_4 \in N$. Zachodzi $\neg\,\mathrm{SEC}_G(N, \{v_8, v_4\})$, sprzeczność.

Rozpatrzmy teraz przypadek, w którym wierzchołki $v_8, v_9 \in N$. Wtedy $v_7, v_6 \in S$. Jeżeli wierzchołek $v_1 \in N$, to musimy zabezpieczyć krawędzie $\{v_1, v_8\}$ i $\{v_1, v_9\}$. Z tego wynika, że $\{v_4, v_5\} \cap N \neq \emptyset$, oraz $\{v_2, v_3\} \cap N \neq \emptyset$. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że $v_4, v_2 \in N$. Wtedy, żeby zapewnić wierzchołkowi v_7 sąsiada w zbiorze S mamy z konieczności $v_5 \in S$. Zachodzi $\neg\,\mathrm{SEC}_G(S, \{v_7, v_5\})$, sprzeczność. Jeżeli wierzchołek $v_1 \in S$, to musimy zabezpieczyć krawędzie $\{v_1, v_7\}$ i $\{v_1, v_6\}$. Z tego wynika, że $\{v_4, v_5\} \cap S \neq \emptyset$, oraz $\{v_2, v_3\} \cap S \neq \emptyset$. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że $v_5, v_3 \in S$. Zauważmy, że $|\mathrm{N}_G[\{v_8, v_9\}]| = 9$ oraz $|\mathrm{N}_G[\{v_8, v_9\}] \cap S| = 5$. Zatem niezależnie od dalszych wyborów zachodzi $\neg\,\mathrm{SEC}_G(N, \{v_8, v_9\})$, sprzeczność. □

Wniosek 6.16. *Problemy decyzyjne SBEA oraz PSBEA nie są równoważne. To znaczy istnieją grafy, w których istnieje równowaga strategiczna koalicji krawędziowych, ale nie istnieje doskonała równowaga strategiczna koalicji krawędziowych.*

Dowód. Wniosek wynika wprost z ze stwierdzeń 6.14 i 6.15, które podsumowują przykład przedstawiony na rysunku 6.3. Odpowiednia modyfikacja tego przykładu pozwala konstruować dowolnie duże (w sensie liczby wierzchołków) przykłady grafów o tej własności. □

Stwierdzenie 6.17. *Niech G będzie grafem oraz $\mathrm{n}(G) < 9$. Wtedy w grafie G istnieje równowaga strategiczna koalicji krawędziowych wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje w nim doskonała równowaga strategiczna koalicji krawędziowych.*

Dowód. Na mocy stwierdzenia 4.3 wiemy, że $\gamma_{ea}(G) \geq 2$. Zatem kiedy $\mathrm{n}(G) < 4$, to w grafie G nie istnieje równowaga strategiczna koalicji krawędziowych. Rozważymy osobno pozostałe przypadki. Niech $\{N, S\}$ będzie równowagą strategiczną koalicji krawędziowych. Na mocy stwierdzenia 4.3 mamy $|N| \geq 2$ oraz $|S| \geq 2$, czyli $|N| + |S| \geq 4$.

Jeżeli $\mathrm{n}(G) = 4$, to każda dla każdej równowagi strategicznej koalicji krawędziowych mamy $|N| = |S| = 2$. Czyli każda równowaga strategiczna jest doskonała.

W przypadkach $\mathrm{n}(G) > 4$, zauważmy, że na mocy stwierdzenia 4.5, mamy $\gamma_{ea}(G) \geq 3$. Zatem w dalszej części będziemy zakładać, że $|N| \geq 3$ oraz $|S| \geq 3$. W przypadku $\mathrm{n}(G) = 5$, mamy

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

zatem $|N|+|S| \geq 6$. Czyli w takich grafach nie może istnieć żadna równowaga strategiczna koalicji krawędziowych. W przypadku $\mathrm{n}(G) = 6$, mamy $|N| = 3$ oraz $|S| = 3$. W takim razie w takich grafach wszystkie równowagi strategiczne koalicji krawędziowych są doskonałe.

W przypadku $\mathrm{n}(G) = 7$, jeżeli $|N| + |S| = 7$, to równowaga strategiczna koalicji krawędziowych jest doskonała. Załóżmy zatem, że $|N| + |S| = 6$, czyli $|N| = 3$ oraz $|S| = 3$. Podgraf indukowany $G[N]$ nie ma wierzchołków izolowanych, zatem jest izomorficzny z cyklem C_3 lub ścieżką P_3. Niech v będzie jedynym wierzchołkiem zbioru $\mathrm{V}(G) \setminus (N \cup S)$. Jako, że zbiór N jest dominujący, to $v \in \mathrm{N}_G(N)$, czyli wierzchołek v jest połączony z co najmniej jednym wierzchołkiem ze zbioru N. Wtedy $N \cup \{v\}$ jest globalną koalicją krawędziową, ponieważ dla każdego wierzchołka $u \in N$, jeżeli istnieje krawędź $\{v, u\}$, to $|\mathrm{N}_G[\{v, u\}] \cap N| \geq 3$ oraz $|\mathrm{N}_G[\{v, u\}] \setminus N| \leq |S| = 3$. Zatem każda taka krawędź jest zabezpieczona (w sensie predykatu SEC). Czyli $\{N \cup \{v\}, S\}$ jest doskonałą równowagą strategiczną.

W przypadku $\mathrm{n}(G) = 8$, jeżeli $|N| + |S| = 8$, to równowaga strategiczna koalicji krawędziowych jest doskonała. Załóżmy więc, że $|N| + |S| < 8$. Bez utraty ogólności możemy przyjąć $|N| \geq |S|$. Oczywiście wtedy $|S| = 3$. Niech $I = \mathrm{V}(G) \setminus (N \cup S)$. Zbiór N jest dominujący, zatem $I \subseteq \mathrm{N}_G(N)$. Czyli każdy wierzchołek zbioru I jest połączony z co najmniej jednym wierzchołkiem zbioru N. Zbiór $N \cup I$ jest globalną koalicją krawędziową, ponieważ dla każdego wierzchołka $t \in I$ oraz dowolnego wierzchołka $u \in N$, jeżeli istnieje krawędź $\{v, u\}$, to $|\mathrm{N}_G[\{t, u\}] \cap N| \geq 3$ oraz $|\mathrm{N}_G[\{t, u\}] \setminus N| \leq |S| = 3$. Zatem każda taka krawędź jest zabezpieczona (w sensie predykatu SEC). Czyli $\{N \cup I, S\}$ jest doskonałą równowagą strategiczną. □

Na podstawie stwierdzeń 6.14, 6.15 i 6.17 otrzymujemy wniosek.

Wniosek 6.18. *Graf przedstawiony na rysunku 6.3 jest najmniejszym, w sensie liczby wierzchołków, grafem w którym istnieje równowaga strategiczna koalicji krawędziowych, ale nie istnieje doskonała równowaga strategiczna koalicji krawędziowych.* □

6.7 Podsumowanie

W pierwszej części niniejszego rozdziału, począwszy od części 6.1, analizujemy podstawowe własności modelu równowagi strategicznej zbiorów defensywnych.

W kolejnej części (6.3) zaprezentowaliśmy wielomianowy algorytm konstruujący równowagę strategiczną zbiorów defensywnych w drzewie. Zatem w przypadku zagadnień praktycznych, w których model ten adekwatnie reprezentowałby zagadnienie, poszukiwanie rozwiązań można zrealizować w sposób wydajny.

W ostatniej części dotyczącej równowagi strategicznej zbiorów defensywnych (6.4) pokazaliśmy, że problem weryfikacji istnienia równowagi strategicznej zbiorów defensywnych jest $\mathcal{NP}$–zupełny w klasie grafów o stopniu ograniczonym przez 4.

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

W dalszej części rozdziału, począwszy od części 6.5, analizujemy własności modelu równowagi strategicznej koalicji krawędziowych. Badania pokazały, że inaczej niż w przypadku poprzednio analizowanych modeli równowagi strategicznej (tzn. równowagi strategicznej koalicji defensywnych oraz równowagi strategicznej zbiorów defensywnych) nie zachodzi równoważność problemów decyzyjnych *SBEA* i *PSBEA* (stwierdzenia 6.14 i 6.15). Zauważyliśmy również (wniosek 6.13), że równowaga strategiczna koalicji krawędziowych nie istnieje w drzewach. Oznacza to, że ten model nie jest adekwatny do zagadnień praktycznych wykorzystujących drzewiaste topologie grafów.

Dalsze kierunki badań w obrębie modeli równowagi strategicznej zbiorów defensywnych oraz równowagi strategicznej koalicji krawędziowych obejmują:

- Weryfikacja statusu trudności problemów *SBDA* dla klasy grafów kubicznych i podkubicznych. Wiemy, że problem jest $\mathcal{NP}$–zupełny dla grafów o stopniu ograniczonym przez 4, zatem w spektrum zainteresowań pojawia się mniejsza i intuicyjnie prostsza strukturalnie klasa grafów kubicznych i podkubicznych.
- Z uwagi na to, że problemy decyzyjne *SBEA* i *PSBEA* nie są wzajemnie równoważne (stwierdzenie 6.16) dalsze kierunku badań dotyczące równowagi strategicznej koalicji krawędziowych obejmują dociekania zarówno problemu *SBEA* jak i *PSBEA*.

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

ROZDZIAŁ 7

Zastosowanie modeli struktur defensywnych

Niniejszy, ostatni rozdział poświęcimy na przedstawienie praktycznych zastosowań modeli struktur defensywnych w grafach. Temat potencjalnych zastosowań został zaadresowany podczas badań niedługo po pojawieniu się pierwszych teoretycznych opracowań tematu (np. [1, 36, 63]). Badania przedstawione w niniejszej pracy mają na celu przedstawienie praktycznej użyteczności prezentowanych modeli poprzez wskazanie wydajnych, wielomianowych algorytmów dla drzew ale także wyznaczenie ograniczeń związanych z trudnością obliczeniową problemu. Wskazanie ograniczeń stanowi motywację i ukierunkowuje dalsze badania na obszar algorytmów przybliżonych oraz heurystycznych.

Model koalicji defensywnych zainteresował badaczy w związku z użytecznością w problemach społeczności sieciowych (ang. *web communities*) [20, 36] oraz niezawodności systemów obliczeniowych (ang. *fault-tolerant computing*) [53, 62]. W [60] autor analizował zagadnienie podziału na koalicje w zastosowaniach związanych z analizą skupień (ang. *data clustering*). Inne zastosowania dyskutowano w [1, 16, 35, 63]. Ogólna koncepcja struktur defensywnych (w sensie definicji $\mathcal{A}$-bezpieczeństwa, jak w definicji 2.6) stanowi obiecujący model dla zastosowań w wielu innych dziedzinach nauki, przykładowo:

- modelowanie relacji międzyludzkich w naukach społecznych (np. relacja przyjaźni, stosunki zawodowe, zależności biznesowe lub polityczne),
- problem alokacji zasobów w naukach informatycznych (np. równoważenie obciążeń (ang. *load balancing*), klasteryzacja (ang. *data clustering*)),
- modelowanie konfliktów militarnych, politycznych czy biologicznych odpowiednio w naukach wojskowych, politologii i naukach biologicznych.

Z uwagi na uniwersalność i możliwości dopasowania, modele struktur defensywnych mają wysoki potencjał w zastosowaniach praktycznych. Potencjalne zastosowania wykraczają poza dziedziny typowo techniczne a autor zauważa potencjał rozważanych modeli nawet w pozornie odległych naukach społecznych.

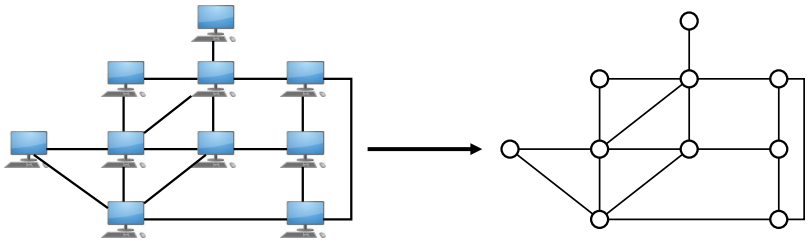
W ramach dalszej części niniejszego rozdziału zaprezentujemy zastosowanie modelu struktury defensywnej (np. zbioru defensywnego) w problemie współdzielenia zasobów w sieci komputerowej.

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

7.1 Struktury defensywne w problemie współdzielenia zasobów w sieci komputerowej

Rozważymy teraz zastosowanie koncepcji globalnej struktury defensywnej (na przykład globalnego zbioru defensywnego) w modelowaniu problemu współdzielenia zasobów (np. obliczeniowych) w sieciach komputerowych.

Rozważmy sieć komputerową składającą się z n maszyn, o których zakładamy, że są początkowo homogeniczne. Przykładowo jeśli rozważanym zasobem oferowanym przez maszynę jest jej moc obliczeniowa, to przez homogeniczność rozumiemy zbliżoną moc obliczeniową maszyn. Jeśli rozważanym zasobem byłaby przestrzeń dyskowa, to aspekt homogeniczność dotyczyłby porównywalnej przestrzeni dyskowej na wszystkich maszynach. Ze względu na ograniczenia techniczne zakładamy, że tylko niektóre z maszyn są połączone bezpośrednio (fizycznie lub w ramach wirtualnej topologii). Taką sytuację możemy modelować za pomocą grafu, jak na przykładzie przedstawionym na rysunku 7.1.



Rys. 7.1: Graf modelujący topologię sieci komputerowej.

Przyjmijmy teraz, że chcemy podzielić zbiór dostępnych maszyn na dwie grupy: *maszyny dostępowe* oraz *maszyny usługowe*. Rolą maszyn dostępowych będzie obsługa zapytań usługowych, natomiast rolą maszyn usługowych będzie faktyczna realizacja usługi (np. wykonanie obliczeń). Podział realizujemy w taki sposób, żeby każda maszyna dostępowa była połączona bezpośrednio z co najmniej jedną maszyną usługową. W ten sposób osiągamy ograniczenie strat komunikacyjnych związanych z przekazywaniem zapytania poprzez maszyny dostępowe w wielu krokach.

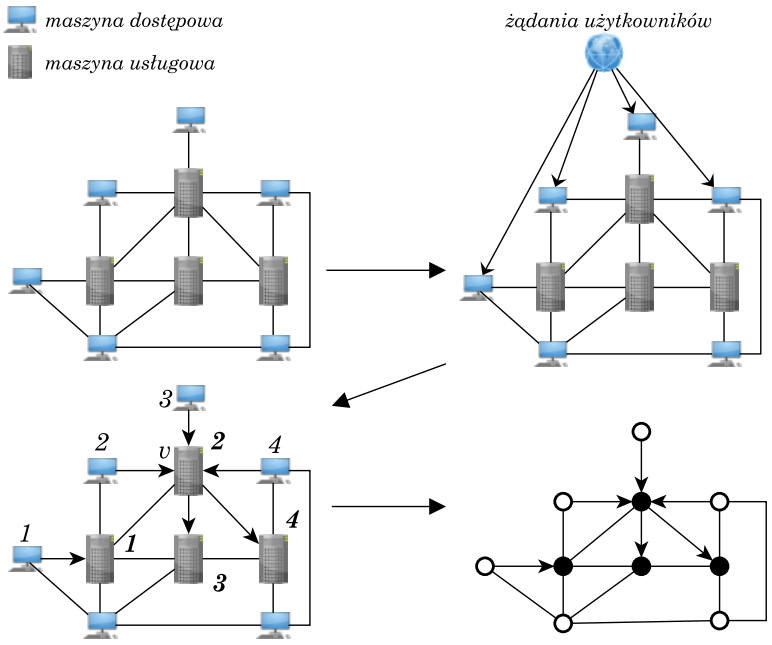
Naszym celem jest udostępnienie pewnej usługi (np. obliczeniowej) w ramach rozległej sieci (np. Internet), w taki sposób, że użytkownicy końcowi (ang. *end users*) tej usługi korzystają z maszyn dostępowych jako punktów dostępowych do usługi. Maszyny usługowe są dostępne jedynie wewnątrz sieci usługi, czyli są połączone z maszynami dostępowymi oraz wzajemnie ze sobą.

Zakładamy, że każde żądanie z rozległej sieci zewnętrznej skierowane jest do jednej z maszyn dostępowych. Maszyny te grupują nadchodzące żądania do usługi w kolekcję, które nazwiemy *paczkami*. Przyjmiemy, że rozmiar paczki jest stały, zatem czas przetworzenia paczki również jest stały. Zadaniem maszyn dostępowych jest delegowanie paczek do wybranej bezpośrednio sąsiadującej maszyny usługowej. W przypadku mnogości wyborów przyjmujemy wybór spośród wszystkich maszyn usługowych z równym prawdopodobieństwem. Zakładamy, że wyłącznie maszyny usługowe są

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

w stanie przetwarzać żądania a także, że w określonej jednostce czasu możliwe jest przetworzenie dokładnie jednej paczki żądań.

Zauważmy teraz, że może okazać się niemożliwe, że przy zadanej delegacji paczek wszystkie żądania zostaną obsłużone w pojedynczej jednostce czasowej. Możemy jednak dopuścić, żeby maszyny usługowe przekazywały paczki pomiędzy sobą. W ten sposób potencjalnie przeciążona maszyna usługowa, ma szanse oddelegować nadmiarowe paczki żądań do innej maszyny usługowej. W zależności od modelu struktury defensywnej (np. zbiór defensywny, koalicja krawędziowa) możemy rozważać delegację na różne odległości. Przykładowo w przypadku zbiorów dominujących (które spełniają definicję globalnej struktury defensywnej bez wymagań dotyczących bezpieczeństwa struktur) maszyny usługowe nie miałyby żadnych możliwości delegowania paczek żądań. Natomiast w przypadku modelu koalicji defensywnych dopuszczona byłaby delegacja do bezpośrednich sąsiadów maszyny usługowej. Taki właśnie scenariusz prezentujemy na rysunku 7.2.



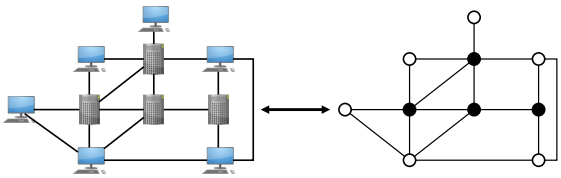
Rys. 7.2: Przetworzenie wszystkich żądań w tym samym czasie jest możliwe po oddelegowaniu pewnych paczek. Paczki z maszyn dostępowych 3 i 4 są ponownie delegowane przez maszynę usługową v do sąsiadujących maszyn usługowych.

Z uwagi na dodatkowe koszty związane z wzmocnieniem maszyn (np. pod względem mocy obliczeniowej), które zostaną wybrane do pełnienia funkcji maszyn usługowych, naszym celem będzie znalezienie możliwie najmniej licznej grupy maszyn, które spełnią warunki narzucone przez definicję struktury defensywnej. Zatem przyjmujemy koszt modernizacji jako najważniejsze kryterium optymalizacyjne. Kryterium związane z przetwarzaniem żądań przez system będzie minimalizacja liczby jednostek czasu potrzebnych do przetworzenia paczek żądań w ujęciu pesymistycznym, tzn. po wszystkich możliwych konfiguracjach żądań przychodzących.

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

Niech teraz G będzie grafem modelującym sieć komputerową i niech zbiór S będzie zbiorem maszyn usługowych. Wtedy, jeżeli wymagamy, żeby wszystkie żądania były przetworzone przez maszyny usługowe jednocześnie (tzn. w jednostce czasu wymaganej dla przetworzenia pojedynczej paczki), to adekwatnym modelem struktury defensywnej będzie globalny zbiór bezpieczny 2.4. Zgodnie z jego charakteryzacją 2.15 model ten gwarantuje bezpieczeństwo (w sensie predykatu SEC) każdego podzbioru $X \subseteq S$. To znaczy, że niezależnie od układu dystrybucji paczek żądań przez maszyny dostępowe (tzn. $\mathrm{V}(G) \setminus S$) gwarantujemy przetwarzanie w pojedynczej jednostce czasu. Jednak taki model wprowadza przeszkody natury praktycznej. Po pierwsze każdy zbiór bezpieczny wymaga wzięcia co najmniej połowy wierzchołków grafu 2.17. Zatem koszty rozbudowy sieci są bardzo wysokie. Po drugie, nawet problem weryfikacji bezpieczeństwa zbioru S jest co–$\mathcal{NP}$–zupełny. To znaczy, że o ile $\mathcal{NP} \neq$ co–$\mathcal{NP}$, to nie istnieje niedeterministyczny algorytm wielomianowy, który dokonałby takiej weryfikacji [34].

Oczywiście udostępnienie usługi działającej w czasie rzeczywistym niezależnie od obciążenia stanowi o jej maksymalnym poziomie dostępności dla użytkowników końcowych. Jednak dla niektórych usług, poziom dostępności nie musi być aż tak rygorystyczny. Z tego względu użyteczne w rozważaniach stają się również słabsze (w sensie bezpieczeństwa) modele struktur defensywnych, takie jak koalicje defensywne, zbiory defensywne czy koalicje krawędziowe.

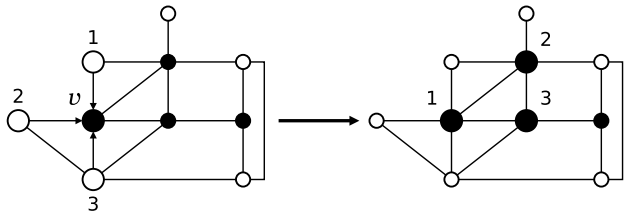


Rys. 7.3: Umiejscowienie maszyn usługowych jako globalnej koalicji defensywnej (czarne wierzchołki).

Jako, że problem poszukiwania najmniejszego zbioru bezpiecznego, a nawet problem weryfikacji cechy bycia zbiorem bezpiecznym jest trudny obliczeniowo [34], a co więcej wymagany rozmiar zbioru bezpiecznego jest duży względem liczby wszystkich maszyn, to osłabimy wymagania związane z przetwarzaniem żądań w czasie rzeczywistym (tzn. z gwarancją obsługi wszystkich paczek w pojedynczej jednostce czasu). Przykładowe osłabienie wymagań, może wyglądać następująco: wymagamy, żeby każda maszyna usługowa mogła tak przekazać nadmiarowe paczki do maszyn usługowych bezpośrednio sąsiadujących, żeby sama została z tylko jedną paczką żądań. Tak osłabione wymaganie okazuje się równoważne modelowi koalicji defensywnych. Zatem problem sprowadza się do poszukiwania możliwie najmniejszej globalnej koalicji defensywnej w grafie reprezentującej siec komputerową. Wymagamy, żeby dla każdego wierzchołka $v \in S$ spełnione było $\mathrm{SEC}_G(S, v)$. Model ten nie daje, w ujęciu globalnym, gwarancji przetwarzania w czasie rzeczywistym. Jednak osiągany jest pewien poziom zabezpieczenia, intuicyjnie wyższy niż w przypadku braku jakichkolwiek wymagań. rysunek 7.3 prezentuje najmniejszą globalną koalicję krawędziową, a rysunek 7.4 przedstawia przykładową delegację paczek żądań.

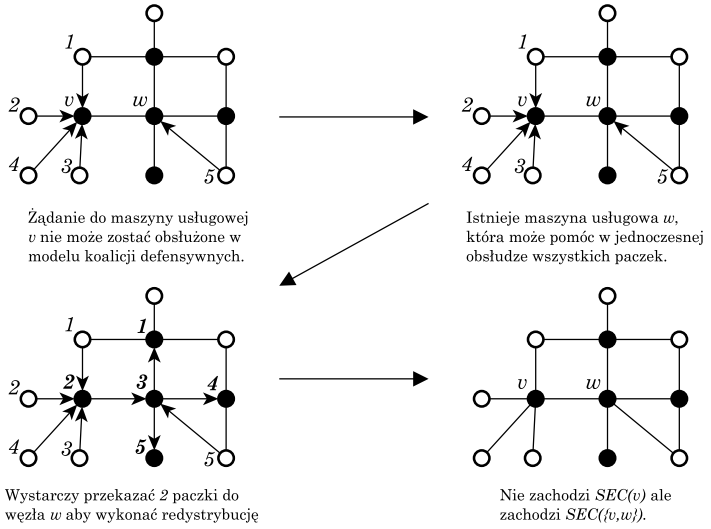
Możemy zmodyfikować warunek bezpieczeństwa tak, żeby umożliwić dodatkowe sposoby odde-

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl



Rys. 7.4: Maszyna usługowa v dystrybuuje paczki od trzech sąsiadujących maszyn dostępowych odsyłając dwie z nich do sąsiadujących maszyn usługowych.

legowywania zadań między maszynami usługowymi. W przypadku, gdy maszyna usługowa v nie jest w stanie obsłużyć nadchodzących żądań nawet z pomocą bezpośrednio sąsiadujących maszyn usługowych (tzn. $\neg\,\mathrm{SEC}_G(S, v)$), to możemy dopuścić następujące rozwiązanie: wybierzmy maszynę usługową w sąsiadującą z v i przekażmy część paczek żądań do wykonania na maszynie usługowej w. Maszyna usługowa w może w tym celu wykorzystać swoich bezpośrednich sąsiadów, którzy niekoniecznie byli w zasięgu maszyny v. W ten sposób współpracujące maszyny usługowe v i w mogą wspólnie obsłużyć wszystkie paczki zgłoszeń w pojedynczej jednostce czasu. To znaczy wymagamy, żeby spełniony był co najmniej jeden z warunków: $\mathrm{SEC}_G(S, v)$ lub $\mathrm{SEC}_G(S, \{v, w\})$ dla pewnej maszyny usługowej w sąsiadującej bezpośrednio z maszyną usługową v. Tak określone wymaganie jest tożsame z modelem zbioru defensywnego, któremu został poświęcony rozdział 3. Rysunek 7.5 prezentuje dyskutowany sposób delegacji paczek żądań.



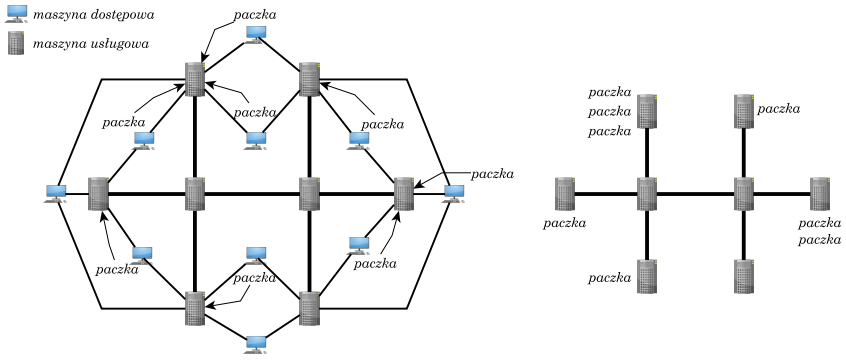
Rys. 7.5: Maszyny usługowe v i w wspólnie obsługują pięć paczek żądań.

Przykład

Na rysunku 7.6 po lewej stronie zaprezentowana została przykładowa sieć komputerowa, w której maszyny zostały podzielone na dostępowe i usługowe (zgodnie z oznaczeniami wskazanymi w legen-

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

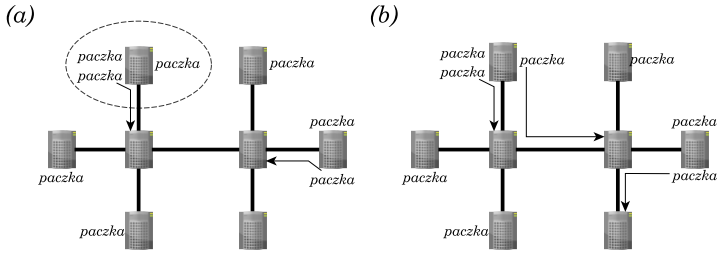
dzie). Na maszynach dostępowych wskazane są paczki żądań wraz z wskazaniem do jakich maszyn usługowych zostają oddelegowane. Rysunek po prawej stronie prezentuje dystrybucję na maszynach usługowych. Na jednej z maszyn skumulowały się aż trzy paczki żądań. Zatem w modelu nie dopuszczającym redystrybucji paczek (np. ograniczając wymagania do minimum czyli oczekiwać, że zbiór maszyn usługowych będzie zbiorem dominującym) przetworzenie wskazanych żądań przez sieć zajęłoby trzy jednostki czasu.



Rys. 7.6: Przykładowa sieć z podziałem na maszyny dostępowe i maszyny usługowe wraz z paczkami żądań.

Na rysunku 7.7 prezentujemy dwa warianty dystrybucji. Wariant oznaczony na rysunku jako (a) prezentuje możliwości redystrybucji dla modelu dopuszczającego przekazywanie paczek żądań do maszyn usługowych bezpośrednio sąsiadujących. W tym przypadku udaje się zredukować sumaryczny czas z trzech jednostek czasu do dwóch jednostek czasu.

W wariancie oznaczonym jako (b) dopuszczona została możliwość redystrybucji paczek żądań do maszyn będących bezpośrednimi sąsiadami bezpośrednich sąsiadów. W tym przypadku istnieje dystrybucja umożliwiająca przetworzenie wszystkich żądań w pojedynczej jednostce czasu. Możemy również odnotować, że grupa maszyn usługowych w sieci zaprezentowanej po lewej stronie rysunku 7.6 tworzy globalny zbiór defensywny oraz globalną koalicję krawędziową, ale nie jest koalicją defensywną.



Rys. 7.7: Dystrybucja paczek w modelu globalnych koalicji (a) oraz zbiorów defensywnych (b).

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

Zakończenie

Niniejsza rozprawa została poświęcona zagadnieniom związanym z grafowymi modelami globalnych struktur defensywnych oraz równowag strategicznych, czyli sytuacji współistnienia dwóch osobnych globalnych struktur defensywnych. Dla modeli struktur defensywnych szczególnej analizie poddaliśmy modele koalicji defensywnych (ang. *defensive alliance*), zbiorów defensywnych (ang. *defensive sets*) i koalicji krawędziowych (ang. *edge alliance*). Badania dotyczące modeli równowagi strategicznej obejmowały równowagę strategiczną koalicji defensywnych (ang. *strategic balance of defensive alliances*), równowagę strategiczną zbiorów defensywnych (ang. *strategic balance of defensive sets*) a także równowagę strategiczną koalicji krawędziowych (ang. *strategic balance of edge alliances*).

Przedstawiliśmy wydajne algorytmu konstruujące najmniejsze struktury defensywne w klasie drzew oraz wskazaliśmy konstrukcje dla popularnych w literaturze i znajdujących zastosowania praktyczne klas grafów. Drugim ważnym elementem było potwierdzenie trudności obliczeniowej rozważanych problemów w możliwie wąskich klasach grafów. W ten sposób wskazaliśmy ograniczenia stosowalności rozważanych modeli w przypadku dużych grafów. Ograniczenia te wyznaczają dalsze kierunki badań obejmujące poszukiwanie algorytmów przybliżonych konstruujących możliwie najmniejsze struktury defensywne. Dla modeli równowagi strategicznej dalsze kierunki dotyczące metod przybliżonych dotyczą algorytmów heurystycznych cechujące się wysoką szansą wydajnej konstrukcji równowag strategicznych, o ile istnieją.

Dla wszystkich dyskutowanych modeli przeprowadzone zostały również ogólne badania teoretyczne. Dociekania dotyczyły podstawowych własności modeli, dolnych i górnych oszacowań na rozmiar poszukiwanych struktur, a także związków między modelami. W rozdziale 2 zaproponowana została ogólna koncepcja stanowiącej trzon wszystkich modeli i otwierającej kierunki badawcze w obrębie zagadnienia.

Rozdziały 3 i 4 poświęciliśmy odpowiednio modelom zbiorów bezpiecznych oraz koalicji krawędziowych. W obu przypadkach przedstawiliśmy wielomianowy algorytm konstruujący najmniejszą strukturę defensywną w drzewach. Wyznaczyliśmy również barierę złożoności obliczeniowej, wykazując trudność problemu w podkubicznych, dwudzielnych grafach planarnych dla modelu zbiorów bezpiecznych, oraz w grafach podkubicznych w przypadku koalicji krawędziowych. Wyniki badań przedstawione w tych dwóch rozdziałach zostały opublikowane w [47] i [48].

Rozdziały 5 i 6 poświęciliśmy ogólnej definicji równowagi strategicznej oraz trzem konkretnym modelom opartym o stryktury defensywne dyskutowane we wcześniejszych rozdziałach. W rozdziale 5 rozważamy równowagę strategiczną koalicji defensywnych, a w rozdziale 6 modele równowagi strategicznej zbiorów defensywnych oraz równowagę strategiczną koalicji krawędziowych. Przedstawiliśmy wydajne algorytmy konstruujące równowagę strategiczne w drzewach. Wyznaczy-

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

liśmy też barierę złożoności obliczeniowej, wykazując trudność problemów poszukiwania równowagi strategicznej koalicji defensywnych oraz równowagi strategicznej zbiorów defensywnych, w obu przypadkach w klasie grafów o stopniu ograniczonym przez 4.

W rozdziale 7 omówiliśmy kontekst zastosowań na przykładzie zagadnienia dystrybucji zasobów w sieci komputerowej.

W podsumowaniach rozdziałów 4 oraz 6 postawiliśmy problemy otwarte, które wyznaczają dalsze kierunki badań w obrębie tematyki. W przypadku rozdziału 5, obejmującego badania modelu równowagi strategicznej koalicji defensywnych, częściowe wyniki i obserwacje dotyczące dalszych prac zostały zaanonsowane w podsumowaniu w postaci hipotez oraz wyników analiz numerycznych.

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

Bibliografia

[1] Balakrishnan, H., Cami, A., Deo, N., & Dutton, R. D. (2006). On the complexity of finding optimal global alliances. *J. Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, 58, 23–31.

[2] Bouzefrane, M., Chellali, M., & Haynes, T. W. (2010). Global defensive alliances in trees. *Utilitas Mathematica*, 82, 241–252.

[3] Bouzefrane, M., & Chellali, M. (2011). A note on global alliances in trees. *Opuscula Mathematica*, 31(2), 153–158.

[4] Brandstädt, A., Le, V. B., & Spinrad, J. P. (1999). *Graph classes: a survey*. Society for Industrial and Applied Mathematics.

[5] Brigham, R. C., Dutton, R. D., & Hedetniemi, S. T. (2007). Security in graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 155(13), 1708–1714.

[6] Brigham, R. C., Dutton, R. D., Haynes, T. W., & Hedetniemi, S. T. (2009). Powerful alliances in graphs. *Discrete Mathematics*, 309(8), 2140–2147.

[7] Brown, E. (2002). The many names of $(7, 3, 1)$. *Mathematics Magazine*, 75(2), 83–94.

[8] Chang, G. J. (1994). The domatic number problem. *Discrete Mathematics*, 125(1–3), 115–122.

[9] Chang, C. W., Chia, M. L., Hsu, C. J., Kuo, D., Lai, L. L., & Wang, F. H. (2012). Global defensive alliances of trees and Cartesian product of paths and cycles. *Discrete Applied Mathematics*, 160(4–5), 479–487.

[10] Chartrand, G. (1977). *Introductory graph theory*. Courier Corporation.

[11] Chellali, M., Haynes, T. W., & Volkmann, L. (2009). Global offensive alliance numbers in graphs with emphasis on trees. *Australas. J Comb.*, 45, 87–96.

[12] Chen, X. G., & Shiu, W. C. (2011). A new upper bound on the global defensive alliance number in trees. *The Electronic Journal Of Combinatorics*, 18(1), 202–202.

[13] Desormeaux, W. J., Haynes, T. W., & Henning, M. A. (2017). Partitioning the vertices of a cubic graph into two total dominating sets. *Discrete Applied Mathematics*, 223, 52–63.

[14] Diestel, R. (2000). Graduate texts in mathematics. *Graph theory*, 173.

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

[15] Enciso, R. I., & Dutton, R. (2007). Lower bounds for global alliances of planar graphs. *Congressus Numerantium*, 187.

[16] Enciso, R. I. (2009). *Alliances in graphs: parameterized algorithms and on partitioning series-parallel graphs*. University of Central Florida.

[17] Eroh, L., & Gera, R. (2008). Global alliance partition in trees. *J. Combin. Math. Combin. Comput*, 66, 161–169.

[18] Eroh, L., & Gera, R. (2012). Alliance Partition Number in Graphs. *Ars Combinatoria*, 103, 519–529.

[19] Feige U., Halldórsson M.M., Kortsarz G., Srinivasan A., (2002) Approximating the domatic number. *SIAM Journal on Computing* 32 (1) (2002), 172–195.

[20] Flake, G. W., Lawrence, S., & Giles, C. L. (2000). Efficient identification of web communities. *Proceedings of the sixth ACM SIGKDD international conference on Knowledge discovery and data mining*, 150–160.

[21] Fricke, G. H., Lawson, L. M., Haynes, T. W., Hedetniemi, S. M., & Hedetniemi, S. T. (2003). A note on defensive alliances in graphs. *Bull. Inst. Combin. Appl*, 38, 37–41.

[22] Garey, M. R., & Johnson, D. S. San Francisco (1979). *Computers and intractability*. W.H. Freeman & Co.

[23] Giaro, K. Olsztyn (2011). *Złożoność obliczeniowa algorytmów w zadaniach*. Olsztyńska Wyższa Szkoła Informatyki i Zarządzania.

[24] Gieniusz, T., Lewoń, R., Małafiejski, M. (2015). Graph security testing. *Journal of Applied Computer Science*, 23(1), 29–45.

[25] Haynes T.W., Hedetniemi S.T., Henning, M.A. (2002). Global defensive alliances. *Proceedings of The 17th International Symposium on Computer and Information Sciences*, 303–307.

[26] Haynes, T. W., Hedetniemi, S. T., & Henning, M. A. (2003). Global defensive alliances in graphs. *Electron. J. Combin.*, 10(1), R47.

[27] Harutyunyan, A. (2013). Some bounds on global alliances in trees. *Discrete Applied Mathematics* 161(12), 1739–1746.

[28] Hedetniemi S.M., Hedetniemi S.T., Kristiansen P. (2002). Introduction to alliances in graphs, *Proceedings of The 17th International Symposium on Computer and Information Sciences*, 308–312.

[29] Hedetniemi S.M., Hedetniemi S.T., Kristiansen P. (2004). Alliances in graphs, *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, 48, 157–177.

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

[30] Henning, M. A., & Southey, J. (2008). A note on graphs with disjoint dominating and total dominating sets. *Ars Combinatoria* 89, 159–162.

[31] Henning, M. A. (2009). A survey of selected recent results on total domination in graphs. *Discrete Mathematics* 309(1), 32–63.

[32] Henning, M. A., & Yeo, A. (2013). *Total domination in graphs*, 10–11. New York: Springer.

[33] Hiler, A., Lewoń, R., Małafiejski, M. (2014). Algorithms for testing security in graphs *Studia i Materiały Informatyki Stosowanej* 14(6), 18–26.

[34] Ho, Y. Y. (2011). Global secure sets of trees and grid-like graphs. *Rozprawa doktorska. University of Central Florida.*

[35] Hsu, C. J., Wang, F. H., & Wang, Y. L. (2009). Global defensive alliances in star graphs. *Discrete Applied Mathematics* 157(8), 1924–1931.

[36] Ino, H., Kudo, M., & Nakamura, A. (2005). Partitioning of web graphs by community topology. *Proceedings of the 14th international conference on World Wide Web*, 661–669.

[37] Jamieson, L. H. (2007). Algorithms and complexity for alliances and weighted alliances of various types, *Rozprawa doktorska. Clemson University.*

[38] Jaworski J., Lonc Z., Woźniak M. (2015). *Słownik angielsko–polski w zakresie teorii grafów.* Pobrane z `http://wms.mat.agh.edu.pl/~md/ang-pol.pdf`, 1–13.

[39] Jesse-Józefczyk, K. (2008). Bezpieczeństwo w grafach. *Zeszyty Naukowe Wydziału ETI Politechniki Gdańskiej. Technologie Informacyjne*, 16, 409–414.

[40] Jesse-Józefczyk K. (2011), On the graphs with the global security number equal to $|V|/2$. *Proc. of 14th Workshop On Graph Theory CID, Szklarska Poręba.*

[41] Kosowski, A., Małafiejski, M., Żyliński, P. (2007). Cooperative mobile guards in grids. *Computational Geometry* 37(2), 59–71.

[42] Kozakiewicz, R., Lewoń, R., Małafiejski, M. (2017). Równowaga strategiczna dla zbiorów defensywnych w drzewach. *Aplikacyjne metody obliczeniowe oraz zarządzanie danymi*, 100–109.

[43] Kubale, M. (1998). *Introduction to Computational Complexity and Algorithmic Graph Coloring.* Gdańskie Towarzystwo Naukowe.

[44] Kubale, M. (2016). *Łagodne wprowadzenie do analizy algorytmów.* Wydawnictwo Politechniki Gdańskiej.

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

[45] Lewoń, R. (2011). Równowaga strategiczna w grafach, *Praca dyplomowa magisterska. Politechnika Gdańska.*

[46] Lewoń, R., Małafiejska, A., Małafiejski, M. (2016). Strategic balance in graphs. *Discrete Mathematics*, 339(7), 1837–1847.

[47] Lewoń, R., Małafiejska, A., Małafiejski, M. (2016). Global defensive sets in graphs. *Discrete Mathematics*, 339(7), 1861–1870.

[48] Lewoń, R., Małafiejska, A., Małafiejski, M. & Wereszko, K. (2019). Global edge alliances in graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 261, 305–315.

[49] McKay B., Piperno A. (2022). *Nauty and Traces.* Retrieved from `https://pallini.di.uniroma1.it`.

[50] McKay, B. (2009). *Nauty user's guide (version 2.8).* Retrieved from `https://pallini.di.uniroma1.it/nug28.pdf`.

[51] McKay, B., Piperno, A. (2014). Practical Graph Isomorphism, II. *Journal of Symbolic Computation*, 60, 94–112.

[52] Papadimitriou, C. H. (1994). *Computational complexity.* Addison-Wesley.

[53] Peleg, D. (2002). Local majorities, coalitions and monopolies in graphs: a review. *Theoretical Computer Science*, 282(2), 231–257.

[54] Poon, S. H., Yen, W. C. K., & Ung, C. T. (2012). Domatic Partition on Several Classes of Graphs. *Combinatorial Optimization and Applications: 6th International Conference, COCOA 2012, Banff, AB, Canada, August 5-9, 2012. Proceedings 6*, 245–256. Springer Berlin Heidelberg.

[55] Rodriguez-Velazquez, J. A., Sigarreta, J. M., & Favaron, O. (2007). Global alliances in planar graphs. *AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics* 4(1), 83–98.

[56] Rodríguez-Velázquez, J. A., & Sigarreta, J. M. (2006). Global offensive alliances in graphs. *Electronic Notes in Discrete Mathematics* 25, 157–164.

[57] Rodríguez-Velázquez J. A., Sigarreta J. M. (2007). Spectral study of alliances in graphs. *Discussiones Mathematicae Graph Theory* 27(1), 143–157.

[58] Rodríguez-Velázquez, J. A., Yero, I. G., & Sigarreta, J. M. (2009). Defensive k-alliances in graphs. *Applied Mathematics Letters*, 22(1), 96–100.

[59] Rodríguez-Velázquez, J. A., & Sigarreta, J. M. (2009). Global defensive k-alliances in graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 157(2), 211–218.

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

[60] Shafique, K. H. (2004). Partitioning a graph in alliances and its application to data clustering, *Rozprawa doktorska. University of Central Florida.*

[61] Sigarreta, J. M., & Rodríguez, J. A. (2006). On defensive alliances and line graphs. *Applied Mathematics Letters* 19(12), 1345–1350.

[62] Srimani, P. K., & Xu, Z. (2007). Distributed protocols for defensive and offensive alliances in network graphs using self-stabilization. *2007 International Conference on Computing: Theory and Applications (ICCTA'07)*, 27–31.

[63] Xu, Z., & Srimani, P. K. (2006). Self-stabilizing distributed algorithms for graph alliances. *Proceedings 20th IEEE International Parallel & Distributed Processing Symposium.*

[64] Yero, I. G., & Rodríguez-Velázquez, J. A. (2013). Defensive alliances in graphs: a survey. *arXiv e-prints, arXiv-1308.*

[65] Wereszko, K., Kozakiewicz, R., Lewoń, R., Małafiejski, M. (2020, Wrzesień). Tight bounds on global edge and complete alliances in trees. *18th Cologne-Twente Workshop on Graphs and Combinatorial Optimization.*

[66] Wilson, R. J. Warszawa (1998). *Wprowadzenie do teorii grafów.* Wydawnictwo Naukowe PWN.

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

Wykaz oznaczeń

Parametry grafu

$\mathrm{V}(G)$	zbiór wierzchołków grafu G
$\mathrm{E}(G)$	zbiór krawędzi grafu G
$G[H]$	podgraf grafu G indukowany przez zbiór $H \subseteq \mathrm{V}(G)$
$\mathrm{n}(G)$	liczba wierzchołków grafu G
$\mathrm{m}(G)$	liczba krawędzi grafu G
$\mathrm{d}_G(u, v)$	odległość między wierzchołkami u i v w grafie G
$\deg_G(v)$	stopień wierzchołka v w grafie G
$\delta(G)$	najmniejszy stopień wierzchołka w grafie G
$\Delta(G)$	największy stopień wierzchołka w grafie G
$\nu(G)$	liczba niezależności grafu G
$\mathrm{N}_G(v)$	otwarte sąsiedztwo wierzchołka v w grafie G
$\mathrm{N}_G(A)$	otwarte sąsiedztwo zbioru $A \subseteq \mathrm{V}(G)$ w grafie G
$\mathrm{N}_G[v]$	domknięte sąsiedztwo wierzchołka v w grafie G
$\mathrm{N}_G[A]$	otwarte sąsiedztwo zbioru $A \subseteq \mathrm{V}(G)$ w grafie G
$\mathrm{SEC}_G(S, v)$	predykat stwierdzający bezpieczeństwo wierzchołka $v \in S$ w strukturze defensywnej $S \subseteq \mathrm{V}(G)$ w grafie G
$\mathrm{SEC}_G(S, A)$	predykat stwierdzający bezpieczeństwo zbioru $A \subseteq S$ w strukturze defensywnej $S \subseteq \mathrm{V}(G)$ w grafie G
$\gamma(G)$	liczność najmniejszego zbioru dominującego w grafie G
$\gamma_t(G)$	liczność najmniejszego zbioru totalnie dominującego w grafie G
$\gamma_a(G)$	liczność najmniejszej globalnej koalicji defensywnej w grafie G
$\gamma_{ds}(G)$	liczność najmniejszego globalnego zbioru defensywnego w grafie G
$\gamma_{ea}(G)$	liczność najmniejszej globalnej koalicji krawędziowej w grafie G

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

Klasy grafów

C_n	cykl o n wierzchołkach
P_n	ścieżka n wierzchołkach
S_k	gwiazda o $k+1$ wierzchołkach
W_n	koło o $n+1$ wierzchołkach
K_n	graf pełny o n wierzchołkach
N_n	graf pusty o n wierzchołkach
$K_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$	graf pełny k–dzielny

Problemy obliczeniowe

MINGDA	czy w grafie istnieje globalna koalicja defensywna nieprzekraczająca zadanego rozmiaru
MINGDS	czy w grafie istnieje globalny zbiór defensywnych nieprzekraczający zadanego rozmiaru
MINGEA	czy w grafie istnieje globalna koalicja krawędziowa nieprzekraczająca zadanego rozmiaru
3DM	czy w grafie dwudzielnym istnieje podzbiór wierzchołków zadanego rozmiaru, zawarty w jednej z partycji dwudzielności, który dominuje wierzchołki drugiej partycji
TDOM	czy w grafie istnieje globalny zbiór totalnie dominujący nieprzekraczająca zadanego rozmiaru
SBDA	czy w grafie istnieje równowaga strategiczna koalicji defensywnych
PSBDA	czy w grafie istnieje doskonała równowaga strategiczna koalicji defensywnych
SBDAO	czy w grafie istnieje równowaga strategiczna koalicji defensywnych dla zadanej globalnej koalicji defensywnej
PSBDAO	czy w grafie istnieje doskonała równowaga strategiczna koalicji defensywnych dla zadanej globalnej koalicji defensywnej
SBDSO	czy w grafie istnieje równowaga strategiczna zbiorów defensywnych dla zadanego globalnego zbioru defensywnego
PSBDSO	czy w grafie istnieje doskonała równowaga strategiczna zbiorów defensywnych dla zadanego globalnego zbioru defensywnego
SBDS	czy w grafie istnieje równowaga strategiczna zbiorów defensywnych
PSBDS	czy w grafie istnieje doskonała równowaga strategiczna zbiorów defensywnych
SBEA	czy w grafie istnieje równowaga strategiczna koalicji krawędziowych
PSBEA	czy w grafie istnieje doskonała równowaga strategiczna koalicji krawędziowych
3SAT	klasyczny problem spełnialności formuł w koniunkcyjnej postaci normalnej, w której klauzule mają nie więcej niż 3 literały
$\overline{\textbf{\textit{3SAT}}}$	zmodyfikowana wersja problemu *3SAT*

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

Skorowidz

graf, 1, 2, 12
- k–dzielny, 9
- cykl, 7, 8, 36, 73, 74, 95
- drzewo, 9, 10, 17, 34, 35, 38, 44, 53–55, 73, 79, 80, 89, 100, 101, 104, 110, 117, 125, 128
- drzewo pełne k–arne, 10, 77–79, 89
- dwudzielny, 9, 11, 12, 42, 44, 100
- gwiazda, 9, 37, 97, 126
- Heawooda, 111
- koło, 9, 75, 96
- kubiczny, 110, 129
- las, 9
- pełny, 8, 36, 76, 96, 97, 99
- pełny k–dzielny, 9, 76, 89, 96–98, 110
- pełny dwudzielny, 9, 37, 96, 97, 99, 100
- planarny, 11, 42, 44
- podkubiczny, 9, 11, 12, 36, 42, 44, 84, 89, 110, 129
- pusty, 8
- regularny, 9
- spójny, 8
- supernowa, 99, 100
- ścieżka, 7, 8, 36, 74, 75, 94, 95

parametr
- globalna liczba koalicji defensywnej, 15, 17, 30, 47, 48
- globalna liczba koalicji krawędziowej, 46–49, 51, 52, 73–79, 83
- globalna liczba zbioru defensywnego, 29, 30, 32–36
- liczba domatyczna, 26, 27
- liczba dominowania, 6
- liczba koalicji krawędziowej, 46
- liczba podziału na globalne koalicje defensywne, 15–17, 91, 94, 100
- liczba podziału na globalne koalicje krawędziowe, 46
- liczba podziału na globalne zbiory defensywne, 29, 113, 116
- liczba podziału na koalicje krawędziowe, 46
- liczba podziału na zbiory dominujące, 7, 16
- liczba podziału na zbiory totalnie dominujące, 7
- liczba totalnego dominowania, 7, 48, 73
- liczba zbioru defensywnego, 29
- maksymalny stopień, 4
- minimalny stopień, 4, 16
- odległość, 7
- predykat SEC, 20, 21, 99, 108, 124, 127, 132, 133
- rząd, 4
- stopień, 4, 16, 17, 80, 94, 99, 108
- średnica, 7, 52, 56, 57, 59

problem
- *MINGDA*, 42
- *MINGDS*, 42, 44
- *MINGEA*, 84
- $\mathcal{NP}$–zupełny, 11, 12, 42, 44, 84, 89, 105, 110, 123, 124, 128, 136, 137
- *PSBDA*, 91, 93, 94, 105, 125
- *PSBDAO*, 92, 93
- *PSBDS*, 113, 116, 123, 125
- *PSBDSO*, 114, 116
- *PSBEA*, 124, 127, 128

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

3SAT, 105, 123
$\overline{3SAT}$, 11, 105, 123
SBDA, 91, 93, 94, 125
SBDAO, 91, 93
SBDS, 112, 116, 125
SBDSO, 113, 116
SBEA, 124, 127, 128
TDOM, 11, 42
3DM, 12, 84
wielomianowy, 11, 44, 79, 80, 82, 89, 100, 105, 110, 116, 117, 122, 128, 136

redukcja, 42, 84, 105, 123

struktura
P_n–rozszerzenie, 49
korzeń, 80, 101, 104, 117, 121
krawędź, 2, 5
liść, 9, 10, 16, 80, 101, 104, 117, 121
marszruta, 7
nadgraf, 3
podgraf, 3, 4
podgraf indukowany, 4, 9, 126
podział domatyczny, 26, 27
równowaga strategiczna, 26, 27, 90, 110
równowaga strategiczna koalicji defensywnych, 27, 90, 91, 93–100, 104, 107, 109, 110, 112, 124, 125
równowaga strategiczna koalicji krawędziowych, 27, 112, 124–128
równowaga strategiczna zbiorów defensywnych, 27, 112, 114, 116, 121, 123–125
równowaga strategiczna zbiorów dominujących, 26, 27
stopień, 105, 109, 116, 123
sąsiedztwo, 2, 5, 6, 19, 20
wierzchołek, 2, 5
wierzchołek izolowany, 4
wierzchołek końcowy, 8
wierzchołek wiszący, 4

zbiór
dominujący, 6, 16, 18, 22, 23, 29, 30, 35, 43, 110, 119, 134
koalicja defensywna, 13–16, 19, 22, 28–31, 36, 42, 47, 48, 53, 54, 92, 93, 108, 130, 133
koalicja krawędziowa, 45–49, 53–55, 73, 89, 126, 132, 133
niezależny, 8
skojarzenie, 8, 50
struktura defensywna, 19–27, 90, 112, 130, 131
totalnie dominujący, 7, 11, 36, 43, 44, 48, 73, 110
zbiór bezpieczny, 13, 18, 19, 23, 28, 121, 132
zbiór defensywny, 29, 31, 32, 42, 44, 47, 113–115, 119, 120, 123, 130–133

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl