

# MODELOWANIE PRZEMIESZCZAJĄCEJ SIĘ STRUNY W KONTAKCIE Z PODUKŁADEM O PARAMETRACH SKUPIONYCH

Rafał Hein<sup>1</sup>, Cezary Orlikowski<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Katedra Mechaniki i Mechatroniki, Politechnika Gdańska

<sup>2</sup>Instytut Politechniczny, Państwowa Wyższa Szkoła Zawodowa w Elblągu

<sup>1</sup>rahe@pg.gda.pl, <sup>2</sup>c.orlikowski@pwsz.elblag.pl

## Streszczenie

W artykule przedstawiono metodę modelowania i analizę układu składającego się z przemieszczającej struny w kontakcie z elementami o parametrach skupionych. Równania ruchu rozważanego układu wyprowadzane są metodą hybrydową, która wykorzystuje metodę dekompozycji modalnej oraz elementów skończonych. Zredukowany model modalny zbudowano dla podukładu nieuwzględniającego przyspieszenia Coriolisa i nieproporcjonalnego tłumienia. Zjawiska te modelowano z zastosowaniem dyskretyzacji przestrzennej. Przedstawiona metoda hybrydowa modelowania jest skuteczna, co potwierdziły obliczenia numeryczne i symulacje komputerowe, z których część przedstawiono w pracy. Umożliwia ona względnie łatwe otrzymanie modelu niskiego rzędu o odpowiedniej i wymaganej dokładności.

**Słowa kluczowe:** modelowanie, układy mechaniczne, układy dynamiczne, drgania, metoda elementów skończonych

## MODELLING OF MOVING STRING IN CONTACT WITH LUMPED PARAMETERS SUBSYSTEM

### Summary

The paper presents the method of modelling and analysis of discrete-continuous systems containing traveling string. In the proposed method a hybrid model of the considered system is constructed. It consists of reduced modal model of the string without Coriolis phenomena and without non proportional damping. Simple lumping method is next applied to model omitted phenomena which are difficult to handle with the modal decomposition. Proposed method of modelling is effective and enables to obtain low order model of a required accuracy. Some simulation results show effectiveness and accuracy of the method proposed.

**Keywords:** modelling, mechanical system, dynamic systems, vibration, finite element method

### 1. WSTĘP

Zagadnienie analizy drgań przemieszczającej się struny jest przedmiotem badań opisywanym w wielu publikacjach naukowych [2,3]. Struna taka może być bowiem rozważana jako model fizyczny wielu typowych, ale zarazem ważnych z praktycznego punktu widzenia układów technicznych. W szczególności może być modelem pasów transmisyjnych, lin w urządzeniach dźwigowych i wyciągowych, taśm magnetycznych, lin trakcji elektrycznej, łańcuchów i wielu innych. Badania drgań przemieszczających się translacyjnie układów ciągłych

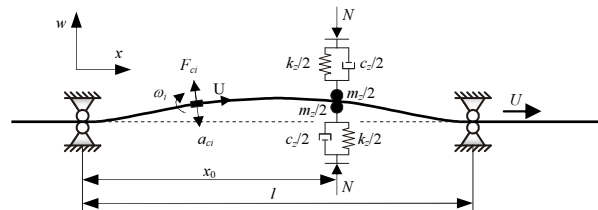
(o parametrach rozłożonych) są ważne i ciekawe również z teoretycznego punktu widzenia. Układy takie są bowiem najprostszymi przykładami układów "żyroskopowych" (gyroscopic systems), do których w ogólności zalicza się układy przemieszczające się translacyjnie i rotacyjnie. Równania takich układów zawierają czynnik związany z przyspieszeniem Coriolisa (w przypadku układów z przemieszczeniem liniowym) lub związany z oddziaływaniami żyroskopowymi (w przypadku przemieszczeń rotacyjnych). Obecność tego czynnika

w równaniach sprawia, że są to równania niesamosprężone (z powodu skośno-symetrycznych macierzy w modelu matematycznym układu o parametrach skupionych lub czynnika „żyroskopowego” w modelu o parametrach rozłożonych). Sformułowanie warunków ortogonalności w celu przeprowadzenia dekompozycji modalnej jest w takich przypadkach trudne lub niemożliwe. Dodatkowe trudności w analizie ciągłych układów przemieszczających się mogą wynikać z konieczności uwzględnienia np.: przemieszczenia z niezerowym przyspieszeniem, zjawisk nieliniowych (np. nieliniowe tarcie wewnętrzne lub zewnętrzne) lub z oddziaływań z innymi układami.

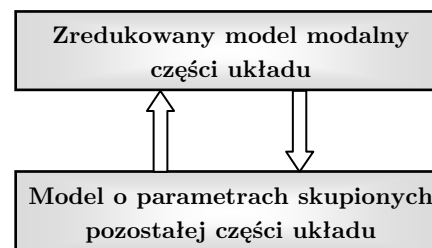
Przedmiotem badań w niniejszej pracy są drgania poprzeczne przemieszczającej się struny oddziałującej z układem mechanicznym o parametrach skupionych (rys. 1). Model takiego układu można uzyskać, stosując metodę elementów skończonych lub posługując się znanym opisem struny za pomocą równań różniczkowych cząstkowych.

Metoda sztywnych elementów skończonych [4] pozwala otrzymać przybliżony model układu rzeczywistego, którego dokładność zależy od liczby elementów skończonych. Im większa ich liczba, tym model jest dokładniejszy. Istnieje jednak optymalna gęstość podziału i liczba elementów skończonych, powyżej której błędy zaokrągleń i obliczeń numerycznych zaczynają odgrywać decydującą rolę. Stosowanie metody elementów skończonych dla układów smukłych jest nieuzasadnione. Wymagałoby bowiem gęstej siatki podziału dla zachowania odpowiednich proporcji zastosowanych elementów skończonych. Ponadto rząd modelu (liczba równań różniczkowych odpowiedniego rzędu) rośnie proporcjonalnie do liczby elementów skończonych. W wielu przypadkach interesują nas jednak modele możliwie niskiego rzędu (np. w modelowaniu obiektów automatycznego sterowania). Jedną z metod redukcji rzędu modelu jest dekompozycja modalna. Pewnym ograniczeniem tej metody jest konieczność formułowania warunków ortogonalności. W pracy zaproponowano metodę hybrydową, która łączy zalety metod opisu układów ciągłych z metodami modelowania układów dyskretyzowanych przestrzennie. W proponowanym podejściu model całego układu składa się z dwóch części: zredukowanego modelu modalnego, otrzymanego na podstawie opisu ciągłego za pomocą równań różniczkowych cząstkowych, oraz modelu otrzymanego na podstawie dyskretyzacji przestrzennej. Model modalny buduje się dla tej części układu, w której pomija się zjawiska nieliniowe i efekt Coriolisa. Pominięte zjawiska i efekty uwzględnia się następnie w modelu dyskretnym (rys. 2). Konstruowanie takiego hybrydowego modelu jest względnie łatwe i polega na budowaniu modelu modalnego dla prostego układu samosprężonego drugiego rzędu o parametrach rozłożonych i wykorzystaniu elementarnej metody dyskretyzacji przestrzennej. Dokładność otrzymanego

modelu hybrydowego zależy od liczby uwzględnionych modów w części modalnej i liczby elementów skończonych występujących w drugiej części modelu. Przy czym warto zaznaczyć, że rząd modelu (liczba równań różniczkowych zwyczajnych drugiego rzędu) zależy tylko od złożoności części modalnej modelu, a nie zależy od gęstości siatki dyskretyzacji przestrzennej stosowanej w modelowaniu zjawisk nieuwzględnionych w modelu modalnym. Metodę modelowania hybrydowego opisaną powyżej autorzy zastosowali z powodzeniem do analizy dynamicznej wielu innych układów, w tym także do modelowania układów „żyroskopowych” [1,5-13].



Rys. 1. Badany układ [3]



Rys. 2. Ogólna postać modelu hybrydowego

## 2. MODEL UKŁADU

Równanie różniczkowe opisujące rozważany układ jest następujące [3]

$$\rho A w_{tt}(x,t) + 2U\rho A w_{xt}(x,t) + U^2\rho A w_{xx}(x,t) - F w_{xx}(x,t) = -[k_s w(x,t) + c_s w_t(x,t) + m_s w_{tt}(x,t) - F_\theta w_x(x,t)]\delta(x-x_0) \quad (1)$$

gdzie:

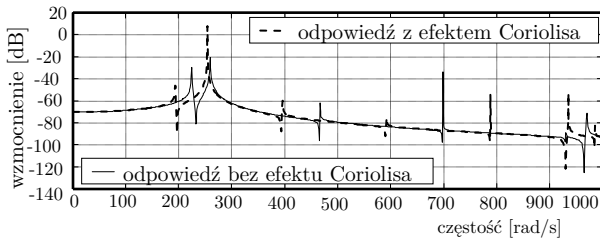
- $w$  - przemieszczenie poprzeczne (odkształcenie) struny,
- $\rho$  - gęstość [kg/m<sup>3</sup>],
- $A$  - przekrój poprzeczny [m<sup>2</sup>],
- $U$  - prędkość przemieszczania się struny [m/s],
- $F_\theta$  - siła tarcia na styku struna – układ mechaniczny,
- $F = \begin{cases} P & x_0 < x < L \\ P - F_\theta & 0 < x < x_0 \end{cases}$
- $P$  - naciąg struny [N],
- $l$  - długość struny [m],
- $x_0$  - współrzędna miejsca oddziaływania z podukładem mechanicznym [m],
- $m_s$  - masa skupiona [kg],
- $k_s$  - współczynnik sztywności [N/m],
- $c_s$  - współczynnik tłumienia [Ns/m],
- $\delta$  - delta Diraca,
- $(\cdot)_t$  - oznacza pochodną cząstkową względem czasu,
- $(\cdot)_x$  - oznacza pochodną cząstkową względem zmiennej przestrzennej  $x$ .

Aby umożliwić weryfikację uproszczonego modelu hybrydowego zbudowano model referencyjny opisany równaniami różniczkowymi cząstkowymi. Do rozwiązania równań opisujących model dokładny zastosowano metodę transmitancji układów o parametrach rozłożonych [14, 15].

Przyjęto dane liczbowe:

$$\rho=8 \cdot 10^3 \text{ [kg/m}^3\text{]}, \quad d=10^{-3} \text{ [m]}, \quad l=1 \text{ [m]}, \quad P=80 \text{ [N]}, \\ F_\phi=0.75P, \quad U=30 \text{ [m/s]}, \quad k_z=3000 \text{ [N/m]}, \quad m_z=0.05 \text{ [kg]}$$

Na rys. 3 przedstawiono charakterystykę częstotliwościową modelu referencyjnego opisanego równaniami różniczkowymi cząstkowymi. Pokazuje ona wpływ efektu Coriolisa na własności dynamiczne rozważanego układu. Wykonano ją dla jednostkowego wymuszenia siłowego przyłożonego w punkcie  $x_0$ . W tym samym punkcie rejestrowano również przebieg przemieszczenia badanej struny.



Rys. 3. Wpływ efektu Coriolisa na własności dynamiczne układu dla modelu referencyjnego

### 3. MODEL HYBRYDOWY ZREDUKOWANY

Przepisując równanie (1) w następującej postaci

$$\rho A w_{tt}(x, t) + U^2 \rho A w_{xx}(x, t) - F w_{xx}(x, t) + [k_z w(x, t) + m_z w_{tt}(x, t)] \delta(x - x_0) = \Phi_s, \quad (2)$$

gdzie  $\Phi_s = -2U\rho A w_{xt}(x, t) - [c_z w_t(x, t) - F_\phi w_x(x, t)] \delta(x - x_0)$ ,

otrzymano po lewej stronie równania (2) tę część modelu, dla którego zostanie dokonana dekompozycja modalna, a człony znajdujące się po prawej stronie będą modelowane z zastosowaniem dyskretyzacji przestrzennej. W związku z tym prawą stronę równania należy potraktować jako wymuszenie skupione z przedziałem dyskretyzacji  $\Delta x_j$ . Stosując zatem metodę dyskretyzacji przestrzennej dla czynników pominiętych w równaniu (2) (siły Coriolisa, siłę tarcia skupionego i tłumienia), otrzymano równanie:

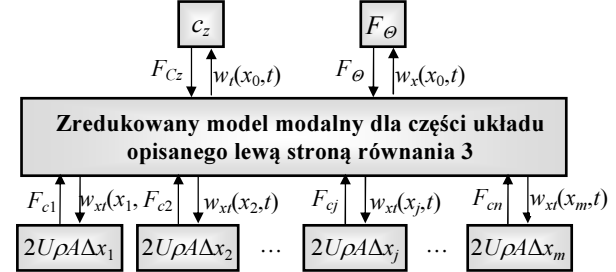
$$\rho A w_{tt}(x, t) + (U^2 \rho A - F) w_{xx}(x, t) + [k_z w(x, t) + m_z w_{tt}(x, t)] \delta(x - x_0) = \Phi_s, \quad (3)$$

gdzie:

$$\Phi_s = -[c_z w_t(x, t) - F_\phi w_x(x, t)] \delta(x - x_0) - \sum_{j=1}^m 2U\rho A w_{xt}(x, t) \Delta x_j \delta(x - x_j),$$

$j=1, \dots, m$ ,  $m$  – liczba elementów skończonych.

Schemat modelu hybrydowego prezentuje rys. 4.

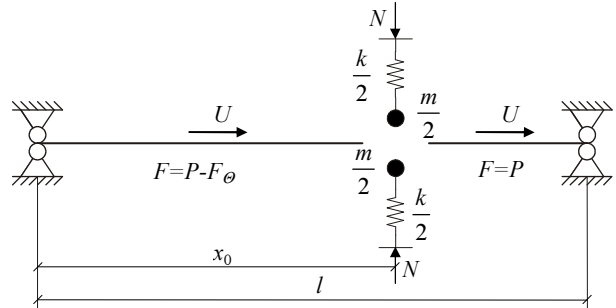


Rys. 4. Struktura modelu hybrydowego

W kolejnym etapie należy zbudować model modalny dla układu opisanego równaniem (równanie struny z pominięciem oddziaływania Coriolisa, tłumienia i siły tarcia)

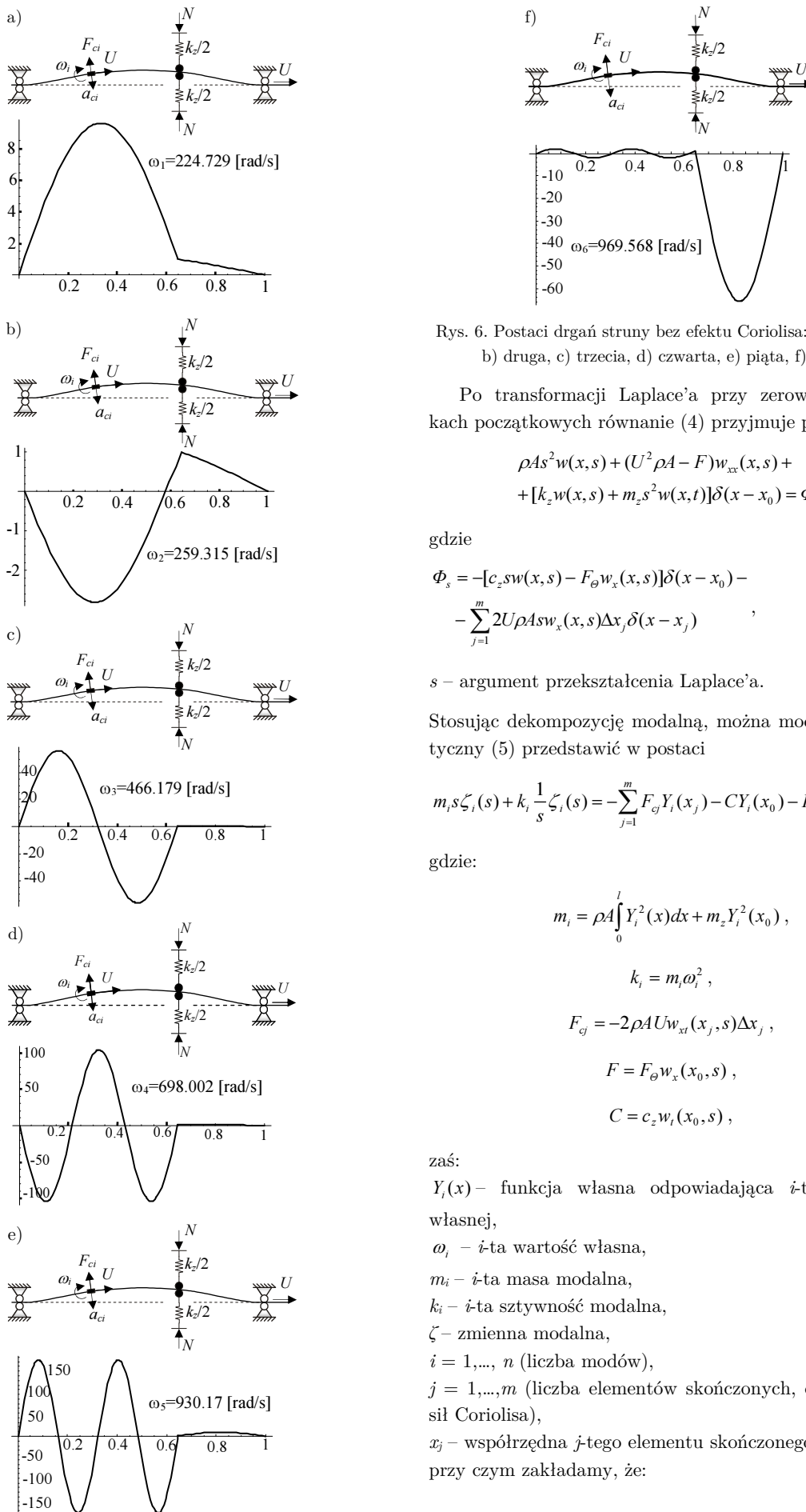
$$\rho A w_{tt}(x, t) + (U^2 \rho A - F) w_{xx}(x, t) + [k_z w(x, t) + m_z w_{tt}(x, t)] \delta(x - x_0) = \Phi_s, \quad (4)$$

przy czym równanie to reprezentuje trzy podukłady: dwie struny o różnych długościach i siłach naciągu oraz element o parametrach skupionych – rys. 5.



Rys. 5. Dekompozycja układu do analizy modalnej

Stosując metodę transmitancji dla układów o parametrach rozłożonych [14, 15], wyznaczono funkcje własne i częstości własne układu częściowego pokazane na rys. 6. Układ wymuszano siłą jednostkową przyłożoną w punkcie  $x_0$ . W tym samym punkcie rejestrowano również odpowiedź w postaci przemieszczenia.



Rys. 6. Postaci drgań struny bez efektu Coriolisa: a) pierwsza, b) druga, c) trzecia, d) czwarta, e) piąta, f) szósta

Po transformacji Laplace'a przy zerowych warunkach początkowych równanie (4) przyjmuje postać

$$\rho A s^2 w(x, s) + (U^2 \rho A - F) w_{xx}(x, s) + [k_z w(x, s) + m_z s^2 w(x, t)] \delta(x - x_0) = \Phi_s, \quad (5)$$

gdzie

$$\Phi_s = -[c_z s w(x, s) - F_\theta w_x(x, s)] \delta(x - x_0) - \sum_{j=1}^m 2U \rho A s w_x(x, s) \Delta x_j \delta(x - x_j),$$

$s$  – argument przekształcenia Laplace'a.

Stosując dekompozycję modalną, można model matematyczny (5) przedstawić w postaci

$$m_i s \zeta_i(s) + k_i \frac{1}{s} \zeta_i(s) = - \sum_{j=1}^m F_{cj} Y_i(x_j) - C Y_i(x_0) - F Y_i(x_0), \quad (6)$$

gdzie:

$$m_i = \rho A \int_0^l Y_i^2(x) dx + m_z Y_i^2(x_0),$$

$$k_i = m_i \omega_i^2,$$

$$F_{cj} = -2 \rho A U w_{xt}(x_j, s) \Delta x_j,$$

$$F = F_\theta w_x(x_0, s),$$

$$C = c_z w_t(x_0, s),$$

zaś:

$Y_i(x)$  – funkcja własna odpowiadająca  $i$ -tej częstotliwości własnej,

$\omega_i$  –  $i$ -ta wartość własna,

$m_i$  –  $i$ -ta masa modalna,

$k_i$  –  $i$ -ta sztywność modalna,

$\zeta$  – zmienna modalna,

$i = 1, \dots, n$  (liczba modów),

$j = 1, \dots, m$  (liczba elementów skończonych, oddziaływań sił Coriolisa),

$x_j$  – współrzędna  $j$ -tego elementu skończonego,

przy czym zakładamy, że:

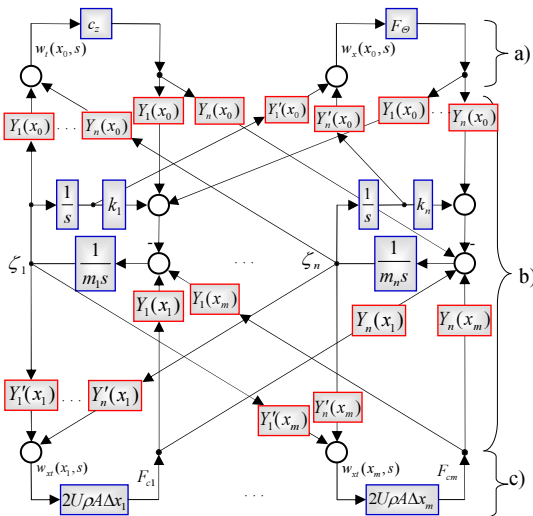
$$w(x_j, s) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{s} \zeta_i(s) Y_i(x_j), \quad w_t(x_j, s) = \sum_{i=1}^n \zeta_i(s) Y_i(x_j),$$

$$w_x(x_j, s) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{s} \zeta_i(s) Y_i'(x_j), \quad w_{xt}(x_j, s) = \sum_{i=1}^n \zeta_i(s) Y_i'(x_j),$$

$$Y_i'(x) = \frac{dY_i(x)}{dx}.$$

Równania (6) są to równania modalne układu z rys. 5 zawierające wymuszenie w postaci sił Coriolisa oraz uwzględniające oddziaływania podukładu o parametrach skupionych.

Szczegółowy schemat blokowy odpowiadający układowi równań pokazano na rys. 7.

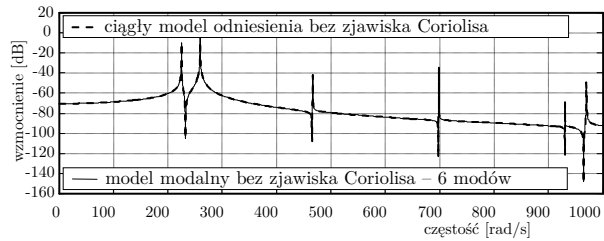


Rys. 7. Schemat ogólny modelu hybrydowego: a) oddziaływania podukładu o parametrach skupionych, b) model modalny, c) oddziaływania Coriolisa

Otrzymany model jest modelem hybrydowym składającym się z modelu modalnego wyodrębnionej części rozważanego układu i modelu dyskretnego (otrzymanego metodą dyskretyzacji przestrzennej) opisującego wpływ sił Coriolisa. W ten sam sposób uwzględniono skupioną siłę tarcia i tłumienie w oscylatorze mechanicznym.

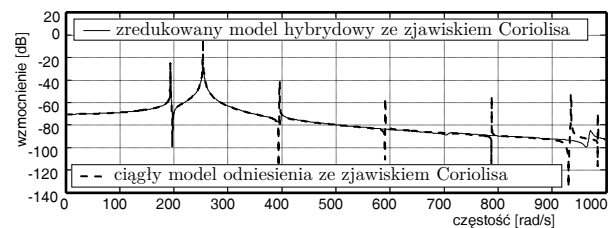
#### 4. WYNIKI SYMULACJI

Dla otrzymanego modelu modalnego (rys. 7) wykonano obliczenia w dziedzinie częstotliwości. Wyniki zaprezentowano na rys. 8 i 9. Rys. 8 przedstawia charakterystykę częstotliwościową zredukowanego modelu modalnego, układu z rys. 5. Model został porównany z modelem referencyjnym. W zakresie rozważanych częstotliwości model zredukowany jest zgodny z dokładnym modelem referencyjnym.



Rys. 8. Porównanie modelu modalnego struny bez efektu Coriolisa z modelem referencyjnym

Otrzymany model zredukowany powiązано następnie z częścią modelu o parametrach skupionych. Uzyskano w ten sposób model hybrydowy. Charakterystyki częstotliwościowe dla zredukowanego modelu hybrydowego odpowiadającego pełnemu układowi (rys. 1) przedstawiono na rys. 9.



Rys. 9. Porównanie modelu hybrydowego struny z efektem Coriolisa z modelem referencyjnym (pochodna funkcji własnej mnożona przez siłę tarcia)

W zakresie częstotliwości odpowiadających uwzględnionej liczbie modów otrzymano pełną zgodność modelu hybrydowego z modelem referencyjnym.

#### 5. PODSUMOWANIE

W pracy zaprezentowano metodę modelowania układu dyskretno – ciągłego składającego się z przemieszczającej się struny i podukładu mechanicznego o parametrach skupionych. Zaproponowano hybrydową metodę opisu matematycznego polegającą na zastosowaniu dekompozycji modalnej i dyskretyzacji przestrzennej. Zredukowany model modalny zbudowano dla tej części układu, która nie zawiera komponentów utrudniających opis modalny. W tym przypadku są to siły Coriolisa i część oddziaływań podukładu o parametrach skupionych. Nieuwzględnione w modelu modalnym zjawiska wprowadzono do modelu z zastosowaniem dyskretyzacji przestrzennej – formalnie jako wymuszenie w modelu modalnym. Dokładność otrzymanego modelu zależy od liczby modów części modalnej modelu oraz od siatki podziału przestrzennego w części drugiej modelu hybrydowego, przy czym rząd modelu nie zależy od szczegółowości dyskretyzacji przestrzennej. Zaproponowana metoda pozwala konstruować modele niskiego rzędu o wymaganej dokładności. Przedstawione przykładowe obliczenia potwierdzają efektywność zaproponowanego podejścia w modelowaniu rozważanej klasy układów dynamicznych.

## Literatura

1. Orlikowski C.: Modelowanie, analiza i synteza układów dynamicznych z zastosowaniem grafów wiązań. Gdańsk: Wyd. Pol. Gdańskiej, 2005. Seria: Monografie nr 55.
2. Orlikowski C., Hein R.: Hybrid model of axially moving continua: selected problems of modal analysis of mechanical systems. Publishing House of the Institute for Sustainable Technologies-National Research Institute, Radom, Editor T. Uhl. Kraków: AGH, 2009.
3. Chen J.-S.: Natural frequencies and stability of an axially-traveling string in contact with a stationary load system. "Journal of Vibration and Acoustics" 1997, Vol. 119, p. 152 – 157.
4. Kruszewski J., Gawroński W., Wittbrodt E., Najbar F., Grabowski S.: Metoda sztywnych elementów skończonych. Warszawa: Arkady, 1975.
5. Hein R., Orlikowski C.: Modelling method for a class of distributed-lumped parameter systems, projektowanie mechatroniczne: zagadnienia wybrane. Praca zbiorowa pod red. T. Uhla. Kraków: AGH, 2011, s. 49 – 55.
6. Orlikowski C., Hein R.: Software tool for modelling of mechatronic systems with elastic continua, projektowanie mechatroniczne : zagadnienia wybrane. Praca zbiorowa pod red. T. Uhla. Kraków: AGH, 2011, s. 147 – 158.
7. Hein R., Orlikowski C.: Modelling of distributed-lumped parameter systems for simulation-based diagnostics. W: XXXIX Ogólnopolskie Sympozjum „Diagnostyka maszyn”. Gliwice: Pol. Śląska, 2012.
8. Orlikowski C., Hein R.: Modelling of geared multi-rotor system. "Solid State Phenomena" 2013, Vol. 198, p. 669 – 674.
9. Orlikowski C., Hein R.: A simplified model of 3-D pipe system conveying flowing liquid. "Solid State Phenomena" 2013, Vol. 198, p. 621 – 626.
10. Hein R., Orlikowski C.: Hybrid reduced model of rotor. "The Archive of Mechanical Engineering" 2013, Vol. LX, No 3, p. 319 – 333.
11. Hein R., Orlikowski C.: Hybrid model of geared rotor system. „Diagnostyka”, 2013, Vol. 14, No 2, p. 17 - 22.
12. Hein R., Orlikowski C.: Simplified dynamic model of rotating beam. „Diagnostyka” 2013, Vol. 14, No 2, p. 43 – 48.
13. Orlikowski C., Hein R.: Model hybrydowy układu wielowirnikowego z przekładnią: elbląskie przekładnie zębate. Teoria i praktyka. Elbląg: Wyd. PWSZ, 2013, ,pp. 33 – 47.
14. Yang B., Tan C.A.: Transfer functions of one-dimensional distributed parameter systems. ASME "Journal of Applied Mechanics" 1991, Vol. 59, p. 1009 – 1014.
15. Yang B.: Distributed transfer function analysis of complex distributed parameter systems. ASME "Journal of Applied Mechanics" 1994, Vol. 61, p. 84 – 92.