

## Modelowanie warstwowych struktur powłokowych przy pomocy sześcioparametrowej teorii powłok

J. Chrościelewski, I. Kreja, A. Sabik, W. Witkowski

Politechnika Gdańska, Katedra Mechaniki Budowli i Mostów, ul. Narutowicza 11/12, 80-233 Gdańsk

**Abstrakt:** W pracy przedstawiono związek konstytutywny dla sprężystej kompozytowej powłoki wielowarstwowej sformułowany w ramach 6-parametrowej nieliniowej teorii powłok z miarami odkształceń ośrodka Cosseratów. Zaletą proponowanego podejścia jest możliwość bezpośredniego zastosowania inżynierskich stałych materiałowych. Równania wyprowadzane są z wykorzystaniem koncepcji pojedynczej warstwy zastępczej przy założeniu liniowego rozkładu przemieszczeń w kierunku grubości powłoki (teoria ścinania pierwszego rzędu).

### WPROWADZENIE

Prezentowane w pracy liniowe prawo konstytutywne dla kompozytowej powłoki warstwowej wyprowadzane jest w ramach 6-parametrowej nieliniowej teorii powłok, m.in. [2], co stanowi o oryginalności sformułowania. Podstawowym założeniem teorii jest przyjęcie sześciu stopni swobody w opisie przemieszczeń punktów powierzchni odniesienia powłoki  $M$ , jak w teorii ośrodka mikropolarnego Cosseratów. Konsekwentnie, miary odkształceń ośrodka nie są symetryczne, [10], [12]. Warstwy rozważanej powłoki kompozytowej mogą być zbrojone włóknami, w związku z czym pojedyncza warstwa stanowi ośrodek poprzecznie izotropowy. Laminat natomiast – wskutek możliwości zmiany kąta orientacji tychże włókien w kolejnych warstwach – jest ośrodkiem anizotropowym. W prezentowanym podejściu ośrodek warstwowy traktowany jest jako pojedyncza ortotropowa warstwa zastępcza (*ESL-Equivalent Single Layer*) o wypadkowej sztywności całego laminatu, [8], [16]. Konsekwentnie, prawo materiałowe formułowane jest na poziomie całego przekroju z wykorzystaniem wielkości związanych z powierzchnią odniesienia powłoki. Przy wyprowadzaniu prawa konstytutywnego zastosowany został formalizm teorii ścinania pierwszego rzędu, jednakże z uwzględnieniem asymetrii miar odkształceń. Szczególną zaletą podejścia jest możliwość bezpośredniego zastosowania inżynierskich stałych materiałowych z dodatkowym parametrem charakterystycznym dla przyjętej teorii powłok.

Należy podkreślić, że przyjęte podejście (*ESL*) z założenia nie opisuje części zjawisk lokalnych, typu delaminacja czy oddziaływanie obciążeń skupionych nie pozostających w powierzchni powłoki. Ten ostatni przypadek może prowadzić do lokalnego zniszczenia słabszych warstw wewnętrznych laminatu. Ujęcie tego typu zjawiska wymaga wzbogacenia teorii i wzrostu liczby jej parametrów. Jedną z możliwości jest tak zwany dyskretny model warstwowy (*LW-layer wise*, zob. przegląd literatury w [8]). Od strony technicznej w tego typu obszarach stosowane są lokalne powłoki pełne (*lite*) albo wypełnienie w postaci pianek wzmocnionych czy konstrukcyjnych o podwyższonych parametrach wytrzymałościowych. Przykładowe podejście do teoretycznego ujęcia wzbogacenia opisu materiału zawarto w pracy [13].

### ZARYS TEORII POWŁOK

Przybliżmy symbolikę zastosowaną w opisie 6-parametrowej teorii powłok. Indeksy greckie przyjmują wartości 1, 2. Wektory oznaczono małymi, a tensory wielkimi literami pisanymi pogrubioną czcionką. Przecinek oznacza pochodną cząstkową względem współrzędnych krzywoliniowych.

Niech  $M$  oznacza powierzchnię odniesienia powłoki w konfiguracji niezdeformowanej. W każdym punkcie  $\mathbf{x} \in M$  zaczepiamy sztywną ortogonalną triadę direktorów  $\mathbf{t}_i^0$  zdefiniowaną przez  $\mathbf{t}_j^0 = \mathbf{T}_0(\mathbf{x})\mathbf{e}_j$ , gdzie  $\mathbf{e}_j$  są wektorami w bazie kartezjańskiej. Ruch powłoki opisany jest przez wektorowe pole translacji  $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}(\mathbf{x}) - \mathbf{x}$  i tensorowe pole obrotów  $\mathbf{T}(\mathbf{x}) = \mathbf{Q}(\mathbf{x})\mathbf{T}_0(\mathbf{x})$ , gdzie  $\mathbf{x}$  i  $\mathbf{y}$  są odpowiednio wektorami wodzącymi niezdeformowanej i aktualnej powierzchni bazowej powłoki.  $\mathbf{Q}(\mathbf{x})$  jest niezależnym właściwym ortogonalnym polem tensorowym reprezentującym ruch obrotowy związanego z powłoką tensora struktury  $\mathbf{T}_0(\mathbf{x})$ . Można wykazać, że składowe tensora krzywizny dane są przez  $b_{\alpha\beta} = (\mathbf{T}_{0,\beta}\mathbf{e}_\alpha) \cdot \mathbf{t}^0$ . Tensor przesunięcia i jego wyznacznik dla dowolnej współrzędnej na grubości  $\zeta \in [-h^-, +h^+]$  wyrażone są następująco  $\mu_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} - \zeta b_{\alpha\beta}$ ,  $\mu = \det(\mu_{\alpha\beta})$ .

Naturalne wektory bazowe dla dowolnej współrzędnej  $\zeta$  opisuje zależność  $\mathbf{g}_\alpha^0 = \mu_{\alpha\beta} \mathbf{t}_\beta^0$ . Miary odkształceń wirtualnych przedstawione są następująco  $\delta\boldsymbol{\varepsilon}_\beta = \mathbf{v}_{,\beta} + \mathbf{y}_{,\beta} \times \mathbf{w}$  i  $\delta\boldsymbol{\kappa}_\beta = \mathbf{w}_{,\beta}$ . Wyrażenia dla wirtualnych odkształceń są podobne do formuł znanych z analizy liniowego ośrodka Cosseratów. Wektory miar odkształceń powłoki dane są przez: wektor odkształcenia  $\boldsymbol{\varepsilon}_\beta = \mathbf{y}_{,\beta} - \mathbf{Q}\mathbf{x}_{,\beta}$ , wektor zginania  $\boldsymbol{\kappa}_\beta = \text{ad}^{-1}(\mathbf{Q}_{,\beta}\mathbf{Q}^T)$ , gdzie  $\text{ad}^{-1}(\cdot)$  jest operacją ekstrakcji wektora osiowego tensora skośnego.

Składowe wektorów miar odkształceń  $\boldsymbol{\varepsilon}_\beta$  i  $\boldsymbol{\kappa}_\beta$  są następujące:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} &= \{\varepsilon^{11} \ \varepsilon^{22} \ \varepsilon^{12} \ \varepsilon^{21} \mid \varepsilon^1 \ \varepsilon^2 \mid \kappa^{11} \ \kappa^{22} \ \kappa^{12} \ \kappa^{21} \mid \kappa^1 \ \kappa^2\}^T \\ &= \{\boldsymbol{\varepsilon}_m \mid \boldsymbol{\varepsilon}_s \mid \boldsymbol{\varepsilon}_b \mid \boldsymbol{\varepsilon}_d\}^T \end{aligned} \quad (1)$$

Ponieważ rozważania ograniczone są do zakresu materiału liniowo sprężystego, związek konstytutywny omówiony w kolejnej części odnosi się zarówno do relacji rzeczywistych, jak i wirtualnych.

## RÓWNANIE KONSTYTUTYWNE

Jako że kinematyka powłoki w przyjętej teorii jest zgodna z ośrodkiem Cosseratów, najodpowiedniejsze wydawałoby się wyprowadzenie związku konstytutywnego z powszechnie znanych równań dla tego ośrodka. Izotropowy ośrodek Cosseratów został opisany m.in. w [10], [12]. Przypadek ortotropowego ośrodka mikropolarnego omawia praca [11], który przedstawia ciekawe przejście z pięciu niezależnych klasycznych stałych sprężystych mikropolarnego materiału izotropowego do dziewięciu stałych dwuwymiarowego ośrodka ortotropowego Cosseratów. W metodzie tej wykorzystuje założenie, że stałe sprężyste dla naprężeń kojarzonych z siłami przekrojowymi są wprost równe parametrom materiałowym (kompozyt: włókna grafitowe w osnowie polimerowej), podczas gdy stałe dla naprężeń kojarzonych z momentami przekrojowymi są obliczane przy arbitralnym przyjęciu długości charakterystycznych.

W niniejszej pracy przyjęto inne podejście, a mianowicie prawo materiałowe dla kompozytowej powłoki Cosseratów budowane jest jako bezpośrednie uogólnienie związku konstytutywnego znanego dla niepolarnego ośrodka ortotropowego. Dzięki temu możliwe staje się zastosowanie pięciu niezależnych klasycznych stałych inżynierskich oraz dodatkowego parametru materiałowego  $a_t$  charakterystycznego dla przyjętej 6-parametrowej teorii powłok, [5].

Zakładamy, że warstwa wykonana jest z poprzecznie izotropowego materiału sprężystego. W każdej warstwie ( $k$ ) wprowadza się ortogonalny układ osi materiałowych ( $a_{(k)}$ ,  $b_{(k)}$ ,  $c_{(k)}$ ). Oś  $a_{(k)}$  jest zgodna z kierunkiem ewentualnego zbrojenia, oś  $b_{(k)}$  jest do niej prostopadła i jest lokalnie styczna do powierzchni odniesienia warstwy, zaś oś  $c_{(k)}$  jest lokalnie prostopadła do tej powierzchni.

Zgodnie z założeniami teorii ścinania pierwszego rzędu – przyjętymi tu tylko i wyłącznie w zakresie związków konstytutywnych – zakładamy płaski stan naprężenia w każdej warstwie, przy czym nie uwzględniamy także wpływu deformacji w kierunku grubości powłoki.

Po odrzuceniu warunków symetrii związek naprężenie-odkształcenie w pojedynczej warstwie w osiach materialnych ( $a_{(k)}$ ,  $b_{(k)}$ ,  $c_{(k)}$ ) dany jest następująco

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{aa} \\ \sigma_{bb} \\ \sigma_{ab} \\ \sigma_{ba} \\ \sigma_a \\ \sigma_b \end{array} \right\}_k = \left[ \begin{array}{cccc|cc} \frac{E_a}{1-\nu_{ab}\nu_{ba}} & \frac{\nu_{ab}E_b}{1-\nu_{ab}\nu_{ba}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_{ba}E_a}{1-\nu_{ab}\nu_{ba}} & \frac{E_b}{1-\nu_{ab}\nu_{ba}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2G_{ab} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2G_{ab} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 2G_{ac} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2G_{bc} \end{array} \right]_k \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon^{aa} \\ \varepsilon^{bb} \\ \varepsilon^{ab} \\ \varepsilon^{ba} \\ \varepsilon^a \\ \varepsilon^b \end{array} \right\}_k, \quad (2)$$

gdzie  $(E_a)_k$ ,  $(E_b)_k$  są odpowiednio modułami Young'a wzdłuż i w poprzek włókien warstwy,  $(G_{ab})_k$  jest modułem ścinania w płaszczyźnie warstwy,  $(G_{ac})_k$ ,  $(G_{bc})_k$  są poprzecznymi modułami ścinania, zaś  $(\nu_{ab})_k$ ,  $(\nu_{ba})_k$  to współczynniki Poisson'a; przy czym zachodzi  $E_a\nu_{ba} = E_b\nu_{ab}$  (bez sumowania). Oznaczając przez  $\phi_{(k)}$  kąt pomiędzy lokalną osią  $a_{(k)}$  a wektorem  $\mathbf{g}_i^0$ , oraz  $C = \cos(\phi_{(k)})$  and  $S = \sin(\phi_{(k)})$ , związek konstytutywny po transformacji do współrzędnych krzywoliniowych powłoki zapiszemy jako

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_m \\ \boldsymbol{\sigma}_s \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{T}}_m^{-1} \tilde{\mathbf{C}}_m \tilde{\mathbf{T}}_m & \mathbf{0}_{4 \times 2} \\ \mathbf{0}_{4 \times 2} & \tilde{\mathbf{T}}_s^{-1} \tilde{\mathbf{C}}_s \tilde{\mathbf{T}}_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_m \\ \boldsymbol{\varepsilon}_s \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_m & \mathbf{0}_{4 \times 2} \\ \mathbf{0}_{4 \times 2} & \mathbf{C}_s \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_m \\ \boldsymbol{\varepsilon}_s \end{Bmatrix}_k, \quad (3)$$

z macierzami transformacji

$$\tilde{\mathbf{T}}_m = \begin{bmatrix} C^2 & S^2 & SC & SC \\ S^2 & C^2 & -SC & -SC \\ -SC & SC & C^2 & -S^2 \end{bmatrix}_k, \quad \tilde{\mathbf{T}}_s = \begin{bmatrix} C & -S \\ S & C \end{bmatrix}_k. \quad (4)$$

Przyjmując, że powłoka zbudowana jest z  $N_L$  warstw o grubości  $h_k = \zeta_k^+ - \zeta_k^-$ , gdzie  $\zeta_k^+$  i  $\zeta_k^-$  oznaczają odpowiednio odległość od powierzchni odniesienia do górnych i dolnych włókien warstwy  $k$ , oraz biorąc pod uwagę założenie teorii ścinania pierwszego rzędu, siły membranowe  $\mathbf{s}_m$ , poprzecznego ścinania  $\mathbf{s}_s$  oraz momenty  $\mathbf{s}_b$  dane są przez

$$\mathbf{s}_m = \sum_{k=1}^{N_L} \left( \int_{\zeta_k^-}^{\zeta_k^+} \{\mathbf{C}_m\}_k (\boldsymbol{\varepsilon}_m + \zeta \boldsymbol{\varepsilon}_b) \mu d\zeta \right) = \mathbf{A}_{4 \times 4} \boldsymbol{\varepsilon}_m + \mathbf{B}_{4 \times 4} \boldsymbol{\varepsilon}_b, \quad (5)$$

$$\mathbf{s}_s = \sum_{k=1}^{N_L} \left( \int_{\zeta_k^-}^{\zeta_k^+} (\alpha_s)_k \{\mathbf{C}_s\}_k \boldsymbol{\varepsilon}_s \mu d\zeta \right) = \mathbf{S}_{2 \times 2} \boldsymbol{\varepsilon}_s, \quad (6)$$

$$\mathbf{s}_b = \sum_{k=1}^{N_L} \left( \int_{\zeta_k^-}^{\zeta_k^+} \{\mathbf{C}_m\}_k (\zeta \boldsymbol{\varepsilon}_m + (\zeta)^2 \boldsymbol{\varepsilon}_b) \mu d\zeta \right) = \mathbf{B}_{4 \times 4} \boldsymbol{\varepsilon}_m + \mathbf{D}_{4 \times 4} \boldsymbol{\varepsilon}_b. \quad (7)$$

Wykorzystując formalizm teorii ścinania pierwszego rzędu można zaproponować związek pomiędzy momentami  $\mathbf{s}_d$  a odkształceniami  $\boldsymbol{\varepsilon}_d$  związanymi z owinięciem  $\alpha_t$  w postaci

$$\mathbf{s}_d = \alpha_t \sum_{k=1}^{N_L} \left( \int_{\zeta_k^-}^{\zeta_k^+} (\alpha_t)_k \{\mathbf{C}_d\}_k \boldsymbol{\varepsilon}_d \mu d\zeta \right) = \mathbf{G}_{2 \times 2} \boldsymbol{\varepsilon}_d, \quad \mathbf{C}_d = \zeta^2 \mathbf{C}_s \quad (8)$$

Tutaj stała materiałowa  $(\alpha_t)_k$  jest współczynnikiem owinięcia warstwy ( $k$ ). Jej wartość została dobrana numerycznie, [5], [6]. Gdy powłoka jest cienka, można założyć bez umniejszenia ogólności, że  $\mu \approx 1$  i w konsekwencji macierze występujące w (5-7) mają postać

$$\mathbf{A}_{4 \times 4} = \sum_{k=1}^{N_L} \{\mathbf{C}_m\}_k (\zeta_k^+ - \zeta_k^-), \quad \mathbf{S}_{2 \times 2} = \sum_{k=1}^{N_L} (\alpha_s)_k \{\mathbf{C}_s\}_k (\zeta_k^+ - \zeta_k^-), \quad (9)$$

$$\mathbf{B}_{4 \times 4} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N_L} \{\mathbf{C}_m\}_k ((\zeta_k^+)^2 - (\zeta_k^-)^2), \quad (10)$$

$$\mathbf{D}_{4 \times 4} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{N_L} \{\mathbf{C}_m\}_k ((\zeta_k^+)^3 - (\zeta_k^-)^3), \quad (11)$$

$$\mathbf{G}_{2 \times 2} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{N_L} (\alpha_t)_k \{\mathbf{C}_s\}_k ((\zeta_k^+)^3 - (\zeta_k^-)^3). \quad (12)$$

W notacji macierzowej proponowane prawo przedstawia się następująco

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{s}_m \\ \mathbf{s}_s \\ \mathbf{s}_b \\ \mathbf{s}_d \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} & \mathbf{D} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{G} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_m \\ \boldsymbol{\varepsilon}_s \\ \boldsymbol{\varepsilon}_b \\ \boldsymbol{\varepsilon}_d \end{Bmatrix}. \quad (13)$$

Należy podkreślić, że związek konstytutywny (13) bazuje na inżynierskich stałych materiałowych poszczególnych warstw, uzupełnionych tylko jednym dodatkowym parametrem  $\alpha_t$ .

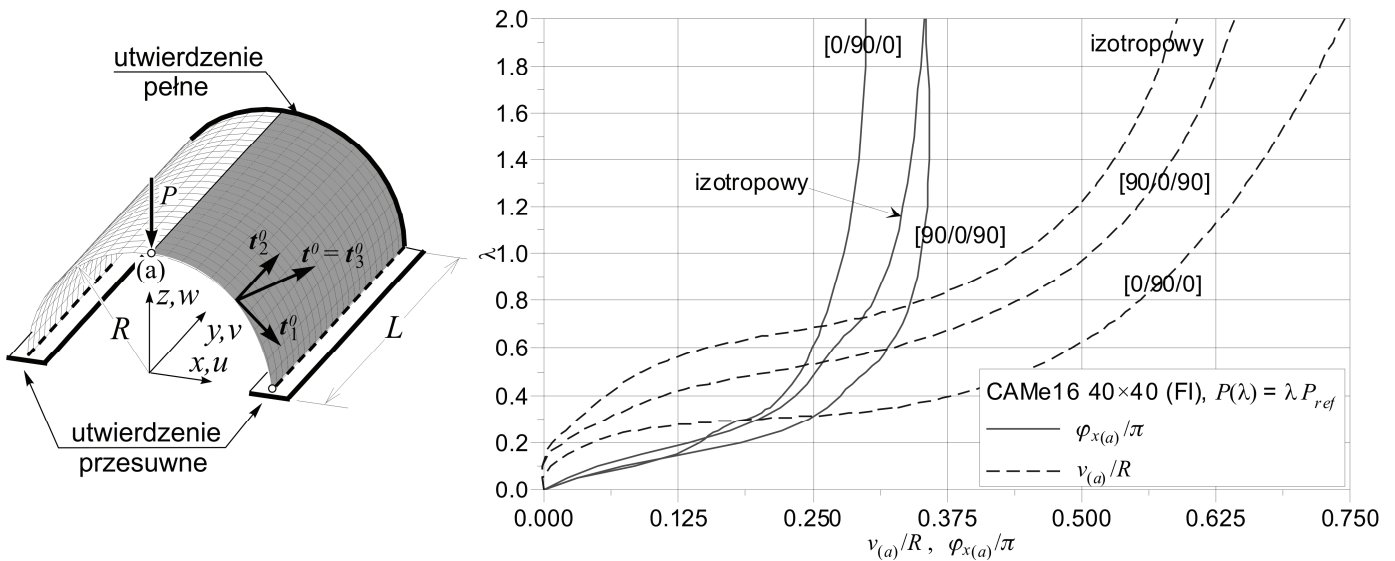
## PRZYKŁADY NUMERYCZNE

Poprawność proponowanego sformułowania została sprawdzona na podstawie kilku przykładów numerycznych. W obliczeniach stosowany jest 16-węzłowy element z pełnym całkowaniem oznaczany

akronimem CAM, [5]. Orientacja osi materiałowych opisywana jest w odniesieniu do direktora  $\mathbf{g}_i^0 \equiv \mathbf{t}_i^0$ . Wartość współczynnika  $\alpha_i$  w tych obliczeniach jest ustalona i wynosi 0.01. Prezentowane wyniki są częścią rezultatów prezentowanych w pracach [3], [4].

### Cylindryczna powłoka obciążona siłą skupioną

Ten popularny przykład (Rys.1) był analizowany m.in. w pracach [1], [14]. Dane geometryczne powłoki:  $L = 304.8$  mm,  $R = 101.6$  mm,  $h = 3$  mm. Kompozyt wykorzystany do budowy warstw to włókna nieorganiczne w osnowie epoksydowej (boron-epoxy). Dane materiałowe:  $E_a = 20.685$  GPa,  $E_b = 5.17125$  GPa,  $G_{ab} = G_{ac} = 7.965$  GPa,  $G_{bc} = 1.989$  GPa i  $\nu_{ab} = 0.25$ . Dodatkowo rozpatrzono izotropowy wariant powłoki z danymi  $E = 20.685$  GPa i  $\nu = 0.25$ . Powłoka poddana jest działaniu siły skupionej  $P(\lambda) = \lambda P_{ref}$  gdzie  $P_{ref} = 1000$  kN. Porównanie wyników przedstawiono na rysunku 1.



Rys.1 Cylindryczna powłoka obciążona siłą skupioną.

### Dwuwarstwowa [0/90] swobodnie podparta powłoka sferyczna

Analizowana jest swobodnie podparta powłoka sferyczna pod ciśnieniem (Rys.2). Geometrię powłoki opisują:  $R = 1000$  in,  $L = 50$  in, [9]. Warstwy o grubości  $h = 0.5$  in wykonane są z tego samego materiału. Układ warstw [0/90] oznacza, że osie materiałowe dolnej warstwy pokrywają się z osiami układu współrzędnych powłoki. Parametry materiału:  $E_1 = 25 \times 10^6$  psi,  $E_2 = 10^6$  psi,  $G_{12} = G_{13} = 5 \times 10^5$  psi,  $G_{23} = 2 \times 10^5$  psi,  $\nu_{12} = 0.25$ . Warunki brzegowe BC1 i BC3 są identyczne jak w pracy [9].

$$BC1: v = w = \varphi_2 = \varphi_3 = 0 \text{ w } x = \pm a \text{ i } u = w = \varphi_2 = \varphi_3 = 0 \text{ w } y = \pm a \quad (14a)$$

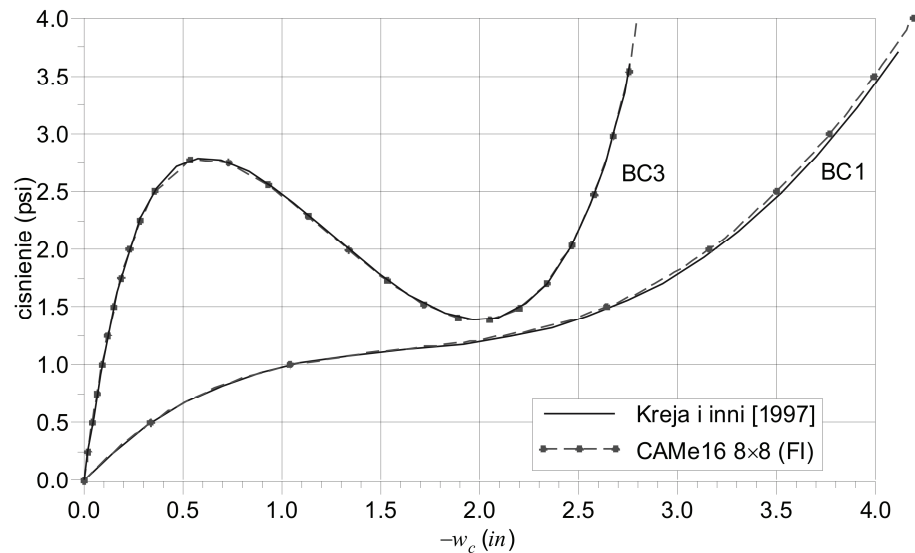
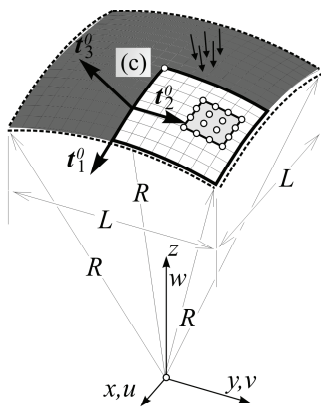
$$BC3: u = w = \varphi_2 = \varphi_3 = 0 \text{ w } x = \pm a \text{ i } v = w = \varphi_2 = \varphi_3 = 0 \text{ w } y = \pm a \quad (14b)$$

Ze względu na bisymetrię układu zadanie rozwiązuje się przy dodatkowych do (14a) i (14b) warunkach brzegowych w postaci

$$u = \varphi_1 = \varphi_3 = 0 \text{ w } x = 0 \text{ i } v = \varphi_2 = \varphi_3 = 0 \text{ w } y = 0 \quad (15)$$

Uzyskane rozwiązania ilustruje rysunek 2.





Rys.2 Dwuwarstwowa [0/90] swobodnie podparta powłoka sferyczna.

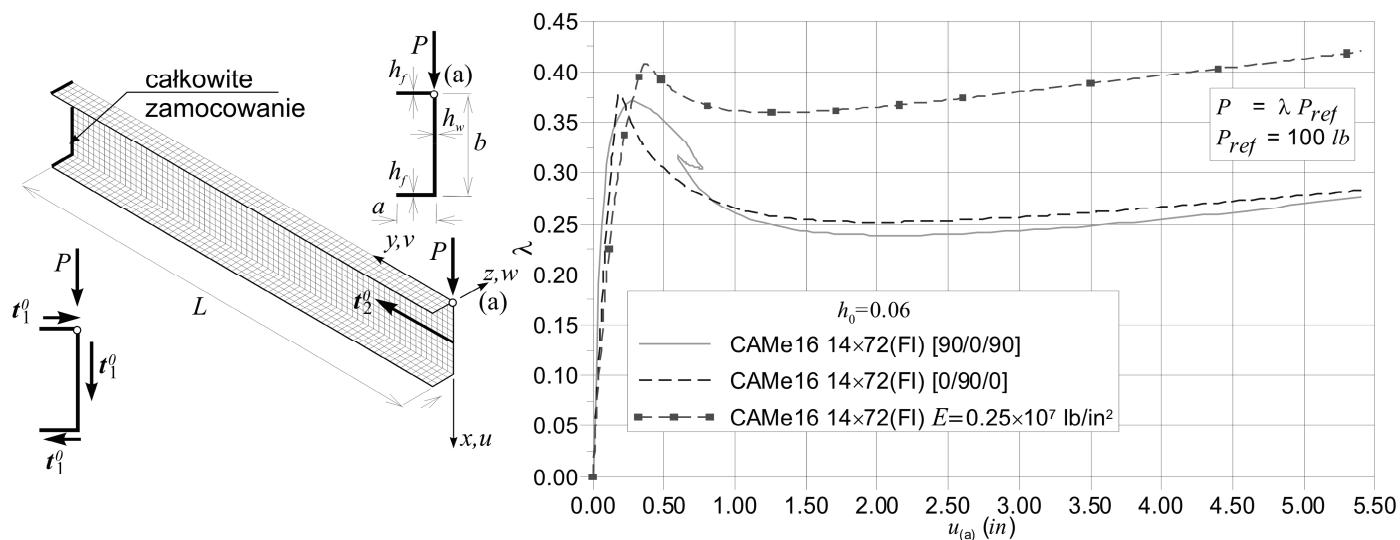
Powyższe rezultaty dowodzą poprawności proponowanego sformułowania co najmniej w zakresie przykładów znanych z literatury. Kolejne dwa zadania dotyczą powłok z ortogonalnymi przecięciami płatów i stanowią oryginalną propozycję autorów.

### Trójwarstwowy wspornik ceowy

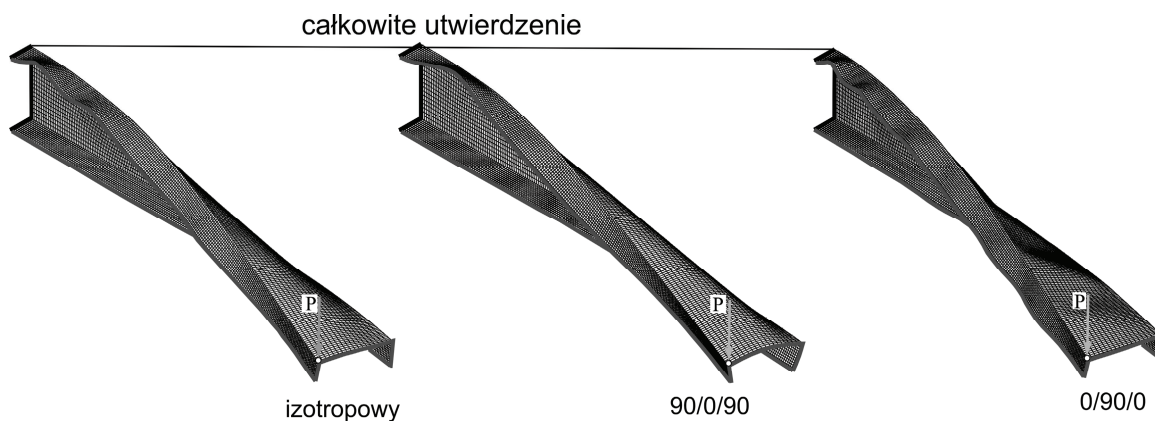
Rozważamy wspornik ceowy pod działaniem siły skupionej (Rys.3). Wariant izotropowy tego zadania jest popularnym benchmarkiem dla różnych sformułowań elementów powłokowych, [2], [7], [15]. Geometria powłoki dana jest przez  $L = 36$  in,  $a = 2$  in,  $b = 6$  in. Przyjęto obciążenie proporcjonalne  $P(\lambda) = \lambda P_{ref}$  gdzie  $P_{ref} = 100$  lb. Całkowita grubość powłoki wynosi  $h = 0.06$  in, warstwy mają jednakową grubość 0.02 in. Analizowane są dwa schematy uwarstwienia: [90/0/90] i [0/90/0]. Przyjęto następujące parametry materiałowe:  $E_1 = 10^7$  lb/in<sup>2</sup>,  $E_2 = 4 \times 10^5$  lb/in<sup>2</sup>,  $G_{12} = G_{13} = 2 \times 10^5$  lb/in<sup>2</sup>,  $G_{23} = 8 \times 10^4$  lb/in<sup>2</sup>,  $\nu_{12} = 0.333$ . W wariantcie izotropowym powłoka ma identyczną grubość i wykonana jest z materiału o stałych  $E = 0.25 \times 10^7$  lb/in<sup>2</sup> i  $\nu = 0.333$ . Dyskretyzacja na elementy skończone jest następująca: 72 elementy wzdłuż belki, 4 elementy na szerokości (wzdłuż półek), 6 elementów na wysokości (wzdłuż środnika). Z rysunku 4 wynika, że układ warstw [0/90/0] zapewnia sztywność przekroju podczas gdy w przypadku schematu [90/0/90] środnik ulega deformacji.

### Podwójnie zakrzywiony panel cylindryczny z usztywnieniem

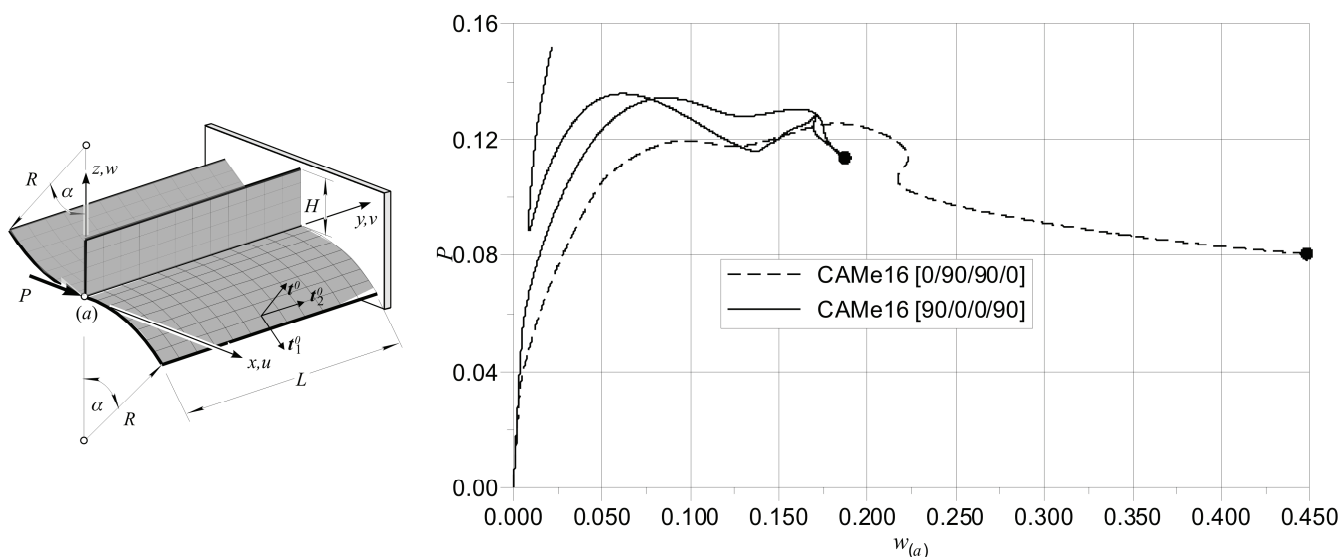
Zadanie to (Rys.5) zostało zaproponowane w wariantcie izotropowym w pracy [6]. W analizowanym wariantcie warstwowym przyjęto następujące dane:  $L = 2$  m,  $\alpha = 45^\circ$ ,  $R = 1$  m,  $H = 0.4$  m,  $P(\lambda) = \lambda P_{ref}$ ,  $P_{ref} = 1$  MN. Całkowita grubość  $h = 0.01$  m podzielona jest na 4 warstwy o jednakowej grubości. Badane są dwa warianty uwarstwienia [90/0/0/90] i [0/90/90/0] z danymi materiałowymi  $E_1 = 10^5$  MPa,  $E_2 = 7 \times 10^3$  MPa,  $G_{12} = G_{13} = 4 \times 10^3$  MPa,  $G_{23} = 3.2 \times 10^3$  MPa,  $\nu_{12} = 0.25$ . Rysunek 6 przedstawia konfiguracje zdeformowane przy  $\lambda = 0.0804374$  w przypadku uwarstwienia [0/90/90/0] i  $\lambda = 0.113801$  dla schematu [90/0/0/90].



Rys.3 Trójwarstwowy wspornik ceowy, geometria i wyniki.

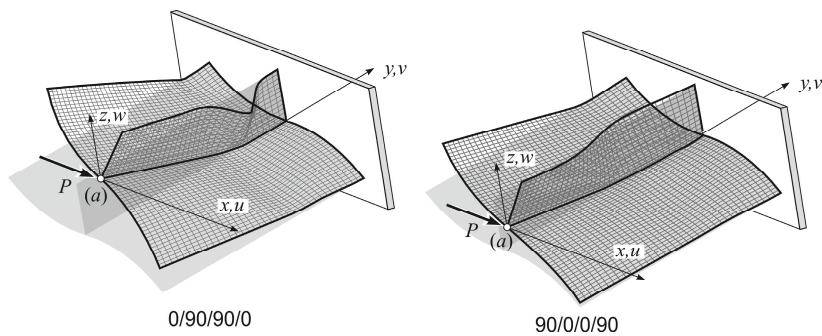


Rys.4 Deformacje wsporników,  $u(a) = 5.4$  in.



Rys.5 Podwójnie zakrzywiony panel cylindryczny z usztywnieniem, geometria i wyniki.





Rys.6 Podwójnie zakrzywiony panel cylindryczny z usztywnieniem, deformacje.

## PODSUMOWANIE

Zaprezentowano model kompozytowej powłoki wielowarstwowej w ramach 6-parametrowej nieliniowej teorii powłok z kinematyką ośrodka Cosseratów. Przyjmując koncepcję pojedynczej warstwy zastępczej, wyprowadzono prawo materiałowe jako bezpośrednie rozszerzenie równań konstytutywnych znanych z klasycznych modeli 5-parametrowych. Zasadniczą zaletą proponowanego sformułowania jest fakt, że wykorzystuje się w nim pięć niezależnych klasycznych stałych materiałowych bez konieczności identyfikacji wielkości charakteryzujących ośrodki Cosseratów. Numeryczne rezultaty uzyskane przy zastosowaniu proponowanego modelu są zgodne z rozwiązaniami odniesienia. Proponowane sformułowanie umożliwia analizę powłok o nieregularnej geometrii, w tym powłok z przecięciami, co jest zaletą przedstawionego modelu.

## PODZIĘKOWANIA

Praca wykonana w ramach projektu badawczego własnego MNiSW Nr N N506 254237 pt.: „Nieliniowa analiza deformacji i stateczności warstwowych powłok kompozytowych metodą elementów skończonych”

## LITERATURA

- [1] Arciniega, R.A & Reddy, J.N. 2007. Tensor-based finite element formulation for geometrically nonlinear analysis of shell structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 196: 1048–1073.
- [2] Chróścielewski, J. & Witkowski, W. 2006. 4-node semi-EAS element in 6-field nonlinear theory of shells. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 68: 1137–1179.
- [3] Chróścielewski, J., Kreja, I., Sabik, A. & Witkowski, W. 2009. *Laminated shells in nonlinear six-parameter shell theory. Shell Structures: Theory and Applications*; vol. 2 / eds. W. Pietraszkiewicz, I. Kreja. - London : CRC Press/Balkema, (2010), 229-232.
- [4] Chróścielewski, J., Kreja, I., Sabik, A. & Witkowski, W. 2010. *Modeling of Composite Shells in 6-Parameter Nonlinear Theory with Drilling Degree of Freedom. Mechanics of Advanced Materials and Structures*. (2010) w druku.
- [5] Chróścielewski, J., Makowski, J. & Stumpf, H. 1992. Genuinely resultant shell finite elements accounting for geometric and material non-linearity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 35: 63-94.
- [6] Chróścielewski, J., Makowski, J. & Stumpf, H. 1997. Finite element analysis of smooth, folded and multi-shell structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 141: 1-46.
- [7] Klinkel, S., Gruttmann, F. & Wagner, W. 2008. A mixed shell formulation accounting for thickness strains and finite strain 3d material models. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 74: 945–970.
- [8] Kreja, I. 2007. *Geometrically non-linear analysis of layered composite plates and shells*. Gdańsk: Gdansk University of Technology.
- [9] Kreja, I., Schmidt, R. & Reddy, J.N. 1997. Finite elements based on a first-order shear deformation moderate rotation shell theory with applications to the analysis of composite structures. *International Journal of Non-Linear Mechanics* 32: 1123–1142.
- [10] Mindlin, R.D. 1965. Stress functions for a Cosserat continuum. *International Journal of Solids and Structures* 1: 265-271.
- [11] Nakamura, S., Benedict, R. & Lakes, R. 1984. Finite element method for orthotropic micropolar elasticity. *International Journal of Engineering Science* 22 (3): 319–330.
- [12] Nowacki, W. 1986. *Theory of asymmetric elasticity*. Oxford: Pergamon Press.
- [13] Reissner E. 1972. On Sandwich-Type Plates with Cores Capable of Supporting Moment Stresses. *Acta Mechanica* 14, 43–51.
- [14] Sze, K.Y., Liu, X.H. & Lo, S.H. 2004. Popular benchmark problems for geometric nonlinear analysis of shells. *Finite Elements in Analysis and Design* 40: 1151–1569.
- [15] Tan, X.G. & Vu-Quoc, L. 2005. Efficient and accurate multilayer solid-shell element: Non-linear materials at finite strain. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 63: 2124–2170.

[16] Vasiliev, V.V. & Morozov, E.V. 2001. *Mechanics and Analysis of Composite Materials*. Oxford: Elsevier Science Ltd.