PRÓBA ZASTOSOWANIA ROZKŁADU WEIBULLA DO ANALIZ STRAT W RUCHU DROGOWYM

1. Wstęp

Rozwój współczesnego świata w zdecydowanym stopniu zależy od sprawności funkcjonowania systemu transportowego, w tym od bezpieczeństwa ruchu drogowego. Badania naukowe mają fundamentalne znaczenie dla poznania istoty tego zjawiska [2]. Są także niezbędne na poziomie analiz znacznie szerszych, wyjaśniających globalne trendy, porównujących sytuacje w różnych krajach, skuteczność podejmowanych działań, prognozujących rozwój sytuacji w nadchodzących latach.

Podstawowymi metodami badań stosowanymi w odniesieniu do problemów bezpieczeństwa ruchu drogowego (brd) są [4]:

- badania statystyczne (modele rozkładów miar brd, modele trendów wskaźników brd, analizy „przed i po", analizy czynnikowe, analizy regresyjne itp.),
- badania behawioralne (obserwacje na drodze, obserwacje w pojeździe, testy laboratoryjne, obserwacje sytuacji konfliktowych, wywiady i badania ankietowe itp.),
- badania na modelach z uwzględnieniem modeli fizycznych, modeli symulacyjnych oraz modeli analitycznych.

W niniejszym referacie przedstawiona została próba zastosowania rozkładu Weibulla do analiz strat (ofiar śmiertelnych) w ruchu drogowym. Postawiono w nim pytanie: czy wielkość strat w transporcie drogowym może być analizowana metodami niezawodności technicznej? A jeżeli tak, to jaka jest interpretacja poszczególnych wielkości i pojęć?

W zaprezentowanym podejściu przyjęto, że straty wynikające z nieprawidłowego funkcjonowania systemu transportu drogowego to śmiertelne ofiary wypadków drogowych. Wprowadzono założenie, że ekspozycja na ryzyko pojawienia się tych strat jest określana średnią liczbą pojazdów osobowych, jaka bierze udział w ruchu drogowym.

2. Rozdział 2

2.1. Rozkład Weibulla

Rozważmy rodzinę funkcji postaci:

$$F(t) = \begin{cases} 1 - \exp\left(-\dfrac{t^\delta}{\theta}\right) & \text{dla } t > 0 \\ 0 & \text{dla } t \le 0 \end{cases}, \tag{1}$$

gdzie δ, θ są dowolnymi liczbami rzeczywistymi dodatnimi. Dla ustalonych parametrów δ, θ funkcja $F(t)$ jest dystrybuantą pewnej zmiennej losowej *T*, o której mówimy, że ma rozkład Weibulla [1,3]. Ze względu na nieskończoną ilość możliwości wyboru wartości δ, θ możemy zbadać, czy rozważana cecha *T* ma rozkład o dystrybuancie należącej do klasy dystrybuant $F(t;\delta,\theta)$, gdzie nieznane parametry δ, θ wyznacza się wówczas na podstawie próby.
Wystarczy rozważyć dystrybuantę zmiennej losowej T o rozkładzie Weibulla tylko dla $t > 0$, czyli $F(t) = 1 - \exp(-\frac{t^\delta}{\theta})$. Wprowadzając przekształcenie [1]:

$$x = \ln t, \quad y = \ln\ln\frac{1}{1 - F(t)}, \tag{2}$$

odwzorowujemy dystrybuantę rozkładu w prostą:

$$y = \delta x - \ln\theta. \tag{3}$$

Współczynniki tej prostej można wyznaczyć metodą najmniejszych kwadratów z wykorzystaniem dystrybuanty empirycznej $F_E(t)$ dla $t = t_i$, $i = 1,\ldots,n$, gdzie n oznacza liczność próby. Tym samym wyznaczone zostaną parametry δ, θ rozkładu Weibulla.

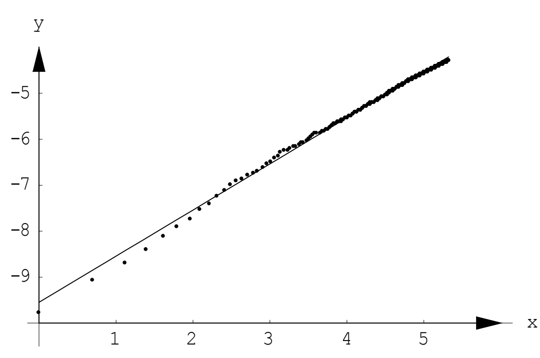
2.2. Wyznaczanie parametrów δ, θ na podstawie próby

Poddamy analizie dane miesięczne o ilości ofiar śmiertelnych w wypadkach drogowych, zebrane od 1 stycznia 1990 r. do 31 grudnia 2006 r. Uwzględnimy ponadto dane roczne o ilości pojazdów osobowych w latach 1999 – 2001 i 2003 – 2006, z których wynika, że średnia ilość pojazdów osobowych wynosiła $A = 11\ 245\ 675$.

Niech zmienna losowa T oznacza czas (liczony w miesiącach począwszy od 1 stycznia 1990r.) rejestrowania ofiar śmiertelnych w wypadkach drogowych. Nasuwa się pytanie, czy zmienna losowa T ma rozkład Weibulla? Na podstawie posiadanych danych wyznaczamy dystrybuantę empiryczną $F_E(t)$, taką że dla $t \leq 0$ mamy $F_E(t) = 0$ oraz dla $t = t_i$, $i = 1,\ldots,204$, mamy $F_E(t_i) = \dfrac{B_i}{\gamma \cdot A}$, gdzie B_i oznacza skumulowaną ilość ofiar śmiertelnych od początku miesiąca nr 1 do końca miesiąca nr *i*, natomiast γ jest dodatnim współczynnikiem. W analizie przyjęliśmy założenie, że w ruchu drogowym uczestniczy miesięcznie 70% średniej ilości pojazdów osobowych, tzn. przyjęliśmy $\gamma = 0{,}7$.

Uwaga. Jak sprawdzono, przedstawiony model ma zastosowanie również wtedy, gdy zamiast współczynnika $\gamma = 0{,}7$ przyjmiemy np. $\gamma = 0{,}6$ lub $\gamma = 0{,}8$ lub $\gamma = 1$ itp. Jednak celem tej pracy nie jest dyskusja nad optymalną wartością tego współczynnika, lecz sprawdzenie m. in., czy cecha T istotna z punktu widzenia brd ma rozkład Weibulla przy różnych γ.

Punktom $(t_i, F_E(t_i))$, $i = 1,\ldots,204$, odpowiadają przy przekształceniu (2) punkty (x_i, y_i), które w przybliżeniu leżą na prostej (rys.1). W ten sposób dokonaliśmy wstępnej weryfikacji hipotezy, że badana cecha ma rozkład Weibulla. Metodą najmniejszych kwadratów otrzymujemy, że wspomniana prosta ma równanie $y = 1{,}00378 \cdot x - 9{,}54681$. Dla analizowanej próby punkty (x_i, y_i), $i = 1,\ldots,204$, oraz wyznaczoną prostą przedstawiono na rys.1.

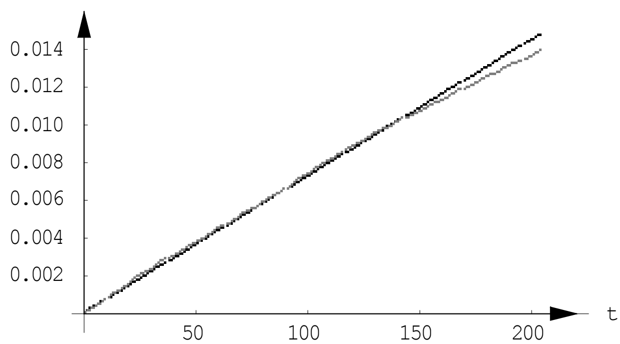


Rys.1. Punkty (x_i, y_i) i prosta $y = 1{,}00378 \cdot x - 9{,}54681$

Zgodnie ze wzorem (3) otrzymujemy z pewnym przybliżeniem:

$$\delta = 1{,}00378\,, \qquad \theta = \exp(9{,}54681) = 13999{,}96348 \tag{4}$$

i następnie mamy funkcję $F(t)$, którą nazywamy dystrybuantą teoretyczną (hipotetyczną). Wartości $F_E(t_i)$ dystrybuanty empirycznej i wartości $F(t_i)$ dystrybuanty teoretycznej różnią się niewiele, o czym świadczą wykresy obu dystrybuant przedstawione dla $t = 1,\ldots,204$ na rys.2 (kolorem ciemniejszym zaznaczony jest wykres dystrybuanty teoretycznej).



Rys.2. Wykresy funkcji $F(t)$, $F_E(t)$ dla $t = 1,\ldots,204$

2.3. Weryfikacja hipotezy o rozkładzie Weibulla

Stawiamy hipotezę, że rozważana zmienna losowa T ma rozkład Weibulla o parametrach $\delta = 1{,}00378$, $\theta = 13999{,}96348$. Postawioną hipotezę zweryfikujemy za pomocą testu Kołmogorowa [5] na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$. Statystyką testową jest $D = \sup\limits_{t_i} \left| F(t_i) - F_E(t_i) \right|$. Dla poziomu istotności $\alpha = 0{,}05$ wartość krytyczna statystyki Kołmogorowa wynosi $d_{(0,05)} = 1{,}354$. Skoro $\sqrt{204} \cdot D \approx 0{,}0124804 < d_{(0,05)}$, więc analizowana próba nie przeczy na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$ hipotezie, że badana cecha T ma rozkład Weibulla.

3. Rozdział 3

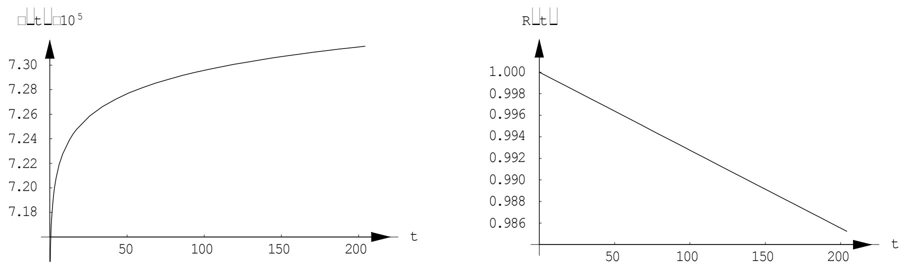
3.1. Analiza właściwości badanej cechy o rozkładzie Weibulla

Oszacowane na podstawie próby wartości parametrów δ, θ, które przedstawia wzór (4), pozwalają na zbudowanie i analizę pewnych funkcji teorii niezawodności [1, 3], np. funkcji gęstości $f(t)$, funkcji intensywności

$\lambda(t)$, funkcji niezawodności $R(t)$. Funkcje te dla rozkładu Weibulla określone są dla $t > 0$ następującymi wzorami:

$$f(t) = \frac{\delta}{\theta} \cdot t^{\delta - 1} \cdot \exp\left(-\frac{t^{\delta}}{\theta} \right), \quad \lambda(t) = \frac{\delta}{\theta} \cdot t^{\delta - 1}, \quad R(t) = 1 - F(t) = \exp\left(-\frac{t^{\delta}}{\theta} \right),$$

natomiast dla $t \leq 0$ jest $f(t) = 0$, $\lambda(t) = 0$, $R(t) = 1$. Wykresy funkcji $\lambda(t)$, $R(t)$ dla obliczonych wartości δ, θ przedstawione są na rys.3 (na osi pionowej dla wykresu funkcji $\lambda(t)$ przyjęto $\lambda(t) \cdot 10^5$).



Rys.3. Wykresy funkcji $\lambda(t)$, $R(t)$

3.2. Interpretacja wyników analizy

Analizowany system jest systemem pracującym awaryjnie. Pojawiają się w nim straty (w naszym przypadku ofiary śmiertelne). Zmienna losowa T oznacza tu czas pracy z awarią, $F(t)$ oznacza prawdopodobieństwo, że do chwili t pojawią się ofiary śmiertelne, natomiast $R(t)$ oznacza prawdopodobieństwo, że po chwili t pojawią się ofiary śmiertelne. Funkcja $R(t)$ jest malejąca, co w naszym przypadku oznacza, że prawdopodobieństwo pojawienia się ofiary śmiertelnej po chwili t maleje. Jest to sytuacja, której z punktu widzenia Krajowego Programu Bezpieczeństwa Ruchu Drogowego GAMBIT 2005 oczekujemy.

Dynamika spadku niezawodności awarii systemu określana jest przez funkcję intensywności $\lambda(t)$. Można zatem przyjąć, że funkcja $\lambda(t)$ jest tu funkcją intensywności braku strat. Dla oszacowanych parametrów δ, θ funkcja ta jest rosnąca, co oznacza, że brak strat rośnie, a to de facto znaczy, że straty maleją (więcej uczestników ruchu drogowego nie staje się ofiarami śmiertelnymi wypadków drogowych). Jest to sytuacja przez nas pożądana. Pozostaje jednak pytanie, czy dynamika spadku tych strat jest satysfakcjonująca?

4. Wnioski

Zmienna losowa T ma rozkład Weibulla dla różnych wartości współczynnika γ.

Zaprezentowana metoda hipotetycznie pozwala wykorzystywać inne sposoby modelowania wielkości ekspozycji na ryzyko w systemie transportu drogowego, np. poprzez wykorzystanie informacji o liczbie przejechanych kilometrów (tzw. pojazdo-kilometry), liczbie pojazdów (nie tylko osobowych) lub liczbie mieszkańców.

Metodami teorii niezawodności można analizować wielkość strat w transporcie drogowym, przy czym poszczególne wielkości mają swoją interpretację.

Okazało się, że globalny trend poprawy bezpieczeństwa mierzony liczbą śmiertelnych ofiar wypadków drogowych jest pozytywny, to znaczy malejący. Wszystko wskazuje jednak na to, że dynamika spadku liczby ofiar śmiertelnych jest zbyt mała, by osiągnąć cel Krajowego Programu Bezpieczeństwa Ruchu Drogowego GAMBIT 2005, tzn. nie więcej niż 2800 ofiar śmiertelnych w roku 2013.

Przedstawiona metoda stwarza nowe możliwości analiz bezpieczeństwa w transporcie drogowym, chociażby w zakresie porównań międzynarodowych, analiz dynamiki osiągania celów i ich sposobów, badania związku ryzyka w ruchu drogowym z wielkością ekspozycji, ponadto metodę tę można wykorzystać do prognozowania oraz symulacji.

Dr **MILEWSKA ANITA**, adiunkt na Wydziale Fizyki Technicznej i Matematyki Stosowanej Politechniki Gdańskiej. Specjalizacja: metody matematyczne w technice, układy dynamiczne, nieklasyczny rachunek operatorów

Dr inż. **ŻUKOWSKA JOANNA**, adiunkt na Wydziale Inżynierii Lądowej i Środowiska Politechniki Gdańskiej. Specjalizacja: inżynieria ruchu drogowego, bezpieczeństwo ruchu drogowego, polityka transportowa