

## PROJEKTOWANIE FILTRÓW UŁAMKOWOOPÓZNIAJĄCYCH REPREZENTOWANYCH PRZEZ WSPÓŁCZYNNIKI DYSKRETNEJ CHARAKTERYSTYKI CZĘSTOTLIWOŚCIOWEJ

### DESIGN OF FRACTIONAL DELAY FILTER REPRESENTED BY COEFFICIENTS OF ITS DISCRETE FREQUENCY RESPONSE

**Streszczenie:** W pracy przedstawiono iteracyjną metodę projektowania filtrów ułamkowoopóźniających bazującą na metodzie POCS (rzutowaniu na podzbiory wypukłe). Zastosowanie tej metody pozwala na projektowanie filtrów definiowanych przez ich współczynniki dyskretnej charakterystyki częstotliwościowej sformułowanej, tak że można powiązać ją z projektowaniem tych filtrów metodą okien przesuwanych w dziedzinie czasu.

**Abstract:** The paper presents an iterative method based on the POCS (projection on convex subsets) approach for design of fractional delay filters. The use of this method allows design of filters defined by their discrete frequency response which can be associated with the design of these filters in the time domain with offset window method.

**Słowa kluczowe:** dziedzina DFT, filtr ułamkowoopóźniający, metoda okien przesuwanych, metoda POCS.

**Keywords:** DFT domain, fractional delay filter, offset window method, POCS method.

#### 1. WSTĘP

Reprezentacja sygnałów za pomocą ciągu próbek i stosowanie cyfrowych algorytmów ich przetwarzania znacznie ułatwia realizowanie różnego rodzaju skomplikowanego ich przetwarzania zapewniając jednocześnie jego powtarzalność. Z drugiej strony dyskretyzacja chwil, w których znane są wartości sygnału rodzi problem w realizacji opóźniania tak reprezentowanego sygnału o ułamkową część odstepu próbkowania. Takie opóźnianie wymaga bowiem określenia wartości sygnału w chwilach pomiędzy chwilami, w których był on próbkowany. Rozwiązaniem tego problemu jest użycie filtru ułamkowoopóźniającego (FD – *fractional delay*) [7] o następującej idealnej charakterystyce częstotliwościowej

$$H_{id} = \exp(-j2\pi f\tau_d) \quad (1)$$

gdzie  $\tau_d = D + d$  jest opóźnieniem całkowitym wyrażonym w odstępach próbkowania [Sa] składającym się z części całkowitej  $D$  i ułamkowej  $d \in [-0,5; 0,5)$ . Taki idealny filtr ułamkowoopóźniający nie jest realizowalny, ponieważ jego odpowiedź impulsowa jest nieskończona i nieprzyczynowa

$$h_{id}[n] = \text{sinc}(n - \tau_d) \quad (2)$$

W efekcie, w praktycznych zastosowaniach wykorzystuje się filtry o skończonej liczbie współczynników, których charakterystyka częstotliwościowa aproksymuje charakterystykę idealną [7]. W tej pracy zajmujemy się filtrami FD definiowanymi poprzez współczynniki pozwalające na określenie ich dyskretnej charakterystyki częstotliwościowej ([2],[3],[4]), która dla  $N$  parzystego ma postać

$$H[k] = \begin{cases} W_d^{N-2k}(c_d - js_d), & 0 \leq k \leq \frac{N}{2} - p \\ W_d^{N-2k} \left( c_d - j\alpha_{\frac{N}{2}-k} s_d \right), & \frac{N}{2} - p < k \leq \frac{N}{2} \\ H^*[N - k], & \frac{N}{2} < k < N \end{cases} \quad (3)$$

gdzie  $W_d = \exp(j\frac{\pi}{N}\tau_d)$  oraz  $c_d = \cos(\pi\tau_d)$  i  $s_d = \sin(\pi\tau_d)$ . Charakterystyka ta jest określana przez  $p$  współczynników  $\alpha_i$  ( $i = 0, 1, \dots, p-1$ ), przy czym, co istotne, zwykle aby uzyskać filtr FD cechujący się wysoką dokładnością wystarczające jest zaledwie około trzech współczynników ([2],[3],[4]).

Wykorzystując charakterystykę (3) filtr taki można zaimplementować bezpośrednio w dziedzinie DFT w oparciu o strukturę filtru typu FIR z próbkowaniem w dziedzinie częstotliwości ([2],[3]) lub zaimplementować go bezpośrednio w dziedzinie czasu korzystając z jego odpowiedzi impulsowej

$$h_d[n] = \frac{w(n-d)}{\text{sinc}((n-\tau_d)/N)} h_{id}[n] = \hat{w}(n-d) h_{id}[n] \quad (4)$$

którą uzyskujemy okienkując idealną odpowiedź impulsową (2) oknem przesuwany  $\hat{w}(n-d)$  bazującym na oknie

$$w[n] = \beta_0 + \sum_{i=1}^p \beta_i \cos\left(\frac{2i\pi}{N}(n - \tau_d)\right) \quad (5)$$

o współczynnikach powiązanych ze współczynnikami  $\alpha_i$  następująco

$$\beta_0 = \alpha_1, \quad \beta_i = \alpha_{i+1} - \alpha_i, \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (6)$$

Zaletą powiązania filtrów o charakterystyce (3) z metodą okien przesuwanych jest to, że użycie metody okien przesuwanych pozwala na łatwe przestrajanie pasma takiego filtru ([2],[3]) przy wykorzystaniu tego samego zestawu współczynników, co ma istotne znaczenie w

realizacji algorytmów zmiany szybkości próbkowania [1].

## 2. METODA POCS

Głównym problemem w efektywnym wykorzystaniu filtra VFD przedstawionego w poprzednim punkcie jest trudność w doborze odpowiednich współczynników zapewniających jak najlepszą jakość aproksymacji. Zauważmy, że projektowanie oraz implementację i użycie takiego filtra można rozdzielić. Zatem, realizowane zawczasu, poszukiwanie optymalnych współczynników może być procesem iteracyjnym. Pierwsze próby wyznaczania współczynników  $\alpha$  bazowały na losowym przeszukiwaniu przestrzeni możliwych rozwiązań minimalizującym błęd LS [7] w zakładanym paśmie aproksymacji  $(0, f_a)$

$$\text{LSE}(f_a) = \int_{-f_a}^{f_a} \text{MAE}(f)^2 df \quad (7)$$

gdzie

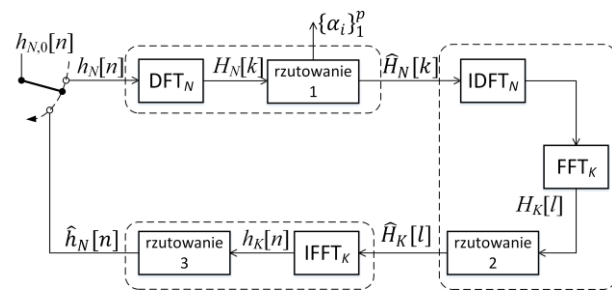
$$\text{MAE}(f) = |H_N(f) - H_{id}(f)| \quad (8)$$

to moduł zespolonego błędu aproksymacji. Aby uzyskać szybką początkową zbieżność i dużą końcową dokładność, obszar poszukiwań rozwiązania był zawężany dla kolejnych iteracji. Problemem w takim rozwiązaniu, poza wolną zbieżnością, bardzo szybko malejącą wraz ze wzrostem parametru  $p$ , było to, że algorytm zatrzymywał się na rozwiązaniach lokalnych i wymagał kilkakrotnego restartu aby dotrzeć do właściwego rozwiązania. Stąd wynikała potrzeba znalezienia lepszego rozwiązania gwarantującego zbieżność algorytmu.

Jednym z rozwiązań stosowanym w projektowaniu filtrów cyfrowych, w tym również ułamkowoopóźniających, jest metoda POCS ([6],[8],[9],[10]). Metoda ta gwarantuje zbieżność oraz pozwala na bezpośrednie operowanie na zbiorach ciągów, takich jak dyskretne charakterystyki częstotliwościowe. Wymaga jedynie sformułowania procesu poszukiwania rozwiązania optymalnego jako szeregu powtarzanych iteracyjnie operacji rzutowania. W [6] pokazano, że korzystając z metody POCS, wykonując naprzemienne rzutowania w dziedzinie czasu i w dziedzinie częstotliwości, można projektować filtry FD optymalne w sensie pasmowego kryterium LS. W tym konkretnie zastosowaniu metoda POCS, którą cechuje bardzo wolna zbieżność, przy dostępności alternatywnych szybszych rozwiązań nie ma istotnego znaczenia praktycznego. W tej pracy zajmujemy się jednak poszukiwaniem optymalnych współczynników  $\alpha$ , dla których nie znane jest obecnie inne szybsze rozwiązanie gwarantujące zbieżność. Aby osiągnąć nasz cel proponujemy uzupełnić rozwiązanie zaproponowane w [6] o dodatkowe rzutowanie w dziedzinie częstotliwości dyskretnych, ograniczające zbiór rozwiązań do filtrów FD, których dyskretna charakterystyka częstotliwościowa jest jednoznacznie identyfikowana przez współczynniki  $\alpha$  i zależność (3).

W rezultacie proponujemy iteracyjne powtarzanie trzech operacji rzutowania (rys. 1) operujących na  $N$ -punktowej odpowiedzi impulsowej oraz jej  $N$  i  $K$ -

punktowej ( $K \gg N$ ) dyskretnej charakterystyce częstotliwościowej.



Rys. 1. Schemat blokowy algorytmu projektowania

Pierwsza operacja rzutowania, interwencja w  $N$ -punktowej dziedzinie częstotliwości (dziedzinie częstotliwości dyskretnej (DFT)), rzutuje  $N$ -punktową zespoloną charakterystykę częstotliwościową filtra o  $N$ -punktowej odpowiedzi impulsowej  $h_N[n]$

$$H_N[k] = \text{DFT}_N(h_N[n]) \text{ dla } k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (9)$$

na zbiór rozpatrywanych charakterystyk (3). Uzyskujemy to zerując błąd aproksymacji charakterystyki  $H[k]$  (3) podzielonej przez ciąg  $W_d^{N-2k}$  dla wszystkich próbek jej składowej rzeczywistej

$$\text{Re}\{\hat{H}_N[k]/W_d^{N-2k}\} = c_d \quad (10a)$$

oraz składowej urojonej

$$\text{Im}\{\hat{H}_N[k]/W_d^{N-2k}\} = -s_d \quad (10b)$$

dla  $0 \leq k \leq \frac{N}{2} - p$ . Z kolei dla  $\frac{N}{2} - p < k \leq \frac{N}{2}$  zachowujemy wartości rzutowanej charakterystyki  $H_N[k]$

$$\text{Im}\{\hat{H}_N[k]/W_d^{N-2k}\} = \text{Im}\{H_N[k]/W_d^{N-2k}\} \quad (10c)$$

Z (10c) otrzymujemy zestaw  $p$  współczynników  $\alpha$  dla bieżącej iteracji

$$\alpha_{\frac{N}{2}-k} = -\frac{\text{Im}\{H_N[k]/W_d^{N-2k}\}}{s_d}, \quad \frac{N}{2} - p < k \leq \frac{N}{2} \quad (11)$$

W efekcie rzutowania otrzymane współczynniki nie reprezentują już wyjściowej odpowiedzi impulsowej  $h_N[n]$ . Dlatego wymagana jest weryfikacja parametrów otrzymanego rozwiązania, którą realizujemy w  $K$ -punktowej dziedzinie częstotliwości. W tej samej dziedzinie realizowana jest również druga operacja rzutowania.

Drugie rzutowanie (rys. 1), to operacja rzutowania w  $K$ -punktowej dziedzinie częstotliwości. W tym przypadku operujemy na  $K$ -punktowej zespolonej charakterystyce częstotliwościowej filtra reprezentowanego przez współczynniki  $\alpha$  uzyskane w poprzednim kroku. Obliczmy ją na podstawie odpowiedzi impulsowej wyznaczonej ze zmodyfikowanej charakterystyki  $\hat{H}_N[k]$  (10)

$$H_K[l] = \text{FFT}_K(\text{IDFT}_N(\hat{H}_N[k])) \quad (12)$$

dla  $l = 0, 1, \dots, K-1$ . Jeżeli parametr  $K = 2^m \gg N$  dobierzemy jako potęgę dwójki, to możliwe jest użycie szybkiej transformaty Fouriera (FFT).



Dysponując charakterystyką  $H_K[l]$  możemy oszacować błąd  $LSE(f_a)$  (7) i, jeżeli uznamy, że osiągnął on zadaną wartość, bądź przestał się zmniejszać, możemy przerwać algorytm uznając, że znaleźliśmy poszukiwane rozwiązanie.

W przeciwnym przypadku wykonujemy rzutowanie, w którym wymuszamy na charakterystyce  $H_K[l]$  zerowy błąd aproksymacji charakterystyki w paśmie aproksymacji  $(0, f_a)$ .

$$\hat{H}_K[l] = \begin{cases} H_{id}(l/K), & 0 \leq l/K \leq f_a \\ H_K[l], & f_a < l/K \leq 0,5 \\ \hat{H}_K^*[K-l], & 0,5 < l/K < 1 \end{cases} \quad (13)$$

Ta interwencja wymusza zerowy błąd w paśmie aproksymacji, ale jednocześnie skutkuje uzyskaniem charakterystyki częstotliwościowej odpowiadającej filtrowi o odpowiedzi impulsowej o długości  $K$  zamiast  $N$ . Stąd konieczność przeprowadzenia kolejnego rzutowania.

Trzecie rzutowanie realizujemy w dziedzinie czasu. Operujemy w nim na  $K$ -próbkowej odpowiedzi impulsowej filtru o charakterystyce częstotliwościowej  $\hat{H}_K[l]$

$$h_K[n] = \text{IFFT}_N(\hat{H}_K[l]) \text{ dla } n = 0, 1, \dots, K-1 \quad (14)$$

którą rzutujemy na zbiór odpowiedzi impulsowych o długości  $N$  o zerowych wartościach poza chwilami  $n \in \{0, 1, \dots, N-1\}$

$$\hat{h}_N[n] = \begin{cases} h_K[n], & n = 0, 1, \dots, N-1 \\ 0, & n = N, N+1, \dots, K-1 \end{cases} \quad (15)$$

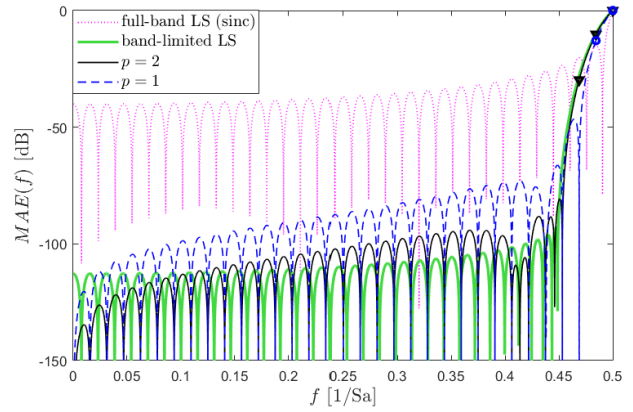
Otrzymujemy w ten sposób  $N$ -próbkową odpowiedź impulsową, którą możemy użyć w pierwszym rzutowaniu (w  $N$ -punktowej dziedzinie częstotliwości) kolejnej iteracji.

### 3. PRZYKŁADY PROJEKTOWANIA

Na rys. 2 przedstawiono przykładowe przebiegi modułu zespolonego błędu aproksymacji dla filtru FD zaprojektowanego dla różnych wartości parametru  $p$  (różnej liczby współczynników  $\alpha$ ). Dodatkowo dla porównania pokazano tam analogiczne przebiegi dla dwóch filtrów optymalnych w sensie kryterium  $LS$  (least square – najmniejszych kwadratów). Pierwszy, to filtr minimalizujący błąd  $LS$  w pełnym paśmie ( $f_a = 0,5$ ), który otrzymujemy przez proste obcięcie odpowiedzi impulsowej filtru idealnego (2), cechujący się szerokim pasmem aproksymacji i dużym błędem w tym paśmie. Drugi, to filtr optymalny w sensie kryterium  $LS$  w zadanym paśmie aproksymacji  $(0, f_a)$  [7].

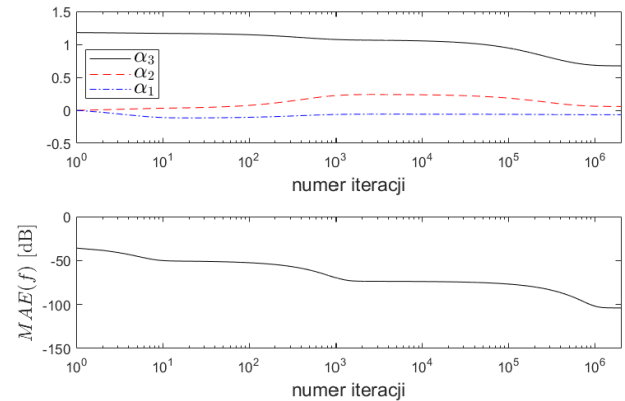
Jak można było przewidzieć zwiększenie parametru  $p$  pozwala na uzyskanie filtru oferującego większą dokładność. Wiąże się to z większą liczbą współczynników  $\alpha_i$  zapewniających lepsze odwzorowanie charakterystyki w paśmie specyfikowanym ( $f_a, 0,5$ ), w którym zezwalamy na swobodne kształtowanie się błędu aproksymacji aby uzyskać mniejszy błąd w paśmie aproksymacji  $(0, f_a)$ . Zauważmy przy tym, że rzutowanie w  $N$ -punktowej dziedzinie częstotliwości oraz rzutowanie w  $K$ -punktowej dziedzinie częstotliwości różni się górną

granica przedziału częstotliwości, w którym wymuszamy zerowy błąd. W praktyce w ramach założeń projektowych określana jest częstotliwość  $f_a$  wykorzystywana w ramach rzutowania w  $K$ -punktowej dziedzinie częstotliwości. Z kolei, parametr  $p$  jest parametrem dodatkowym, który najlepiej dobrać tak, żeby przy pierwszym rzutowaniu wszystkie punkty zerowania błędu aproksymacji znajdowały się wewnątrz przedziału dobrej aproksymacji  $(0, f_a)$ , czyli tutaj  $p \geq \frac{0,5-f_a}{N}$ .



Rys. 2. Moduł zespolonego błędu aproksymacji filtrów FD o  $N=64$ ,  $f_a=0,45$  i  $d=0,5$  zaprojektowanych dla  $p=1$  i 2 oraz filtrów optymalnych (typu obcięty sinc oraz pasmowy LS)

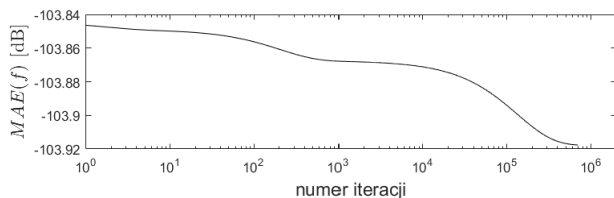
Jak wspomniano wcześniej zaproponowany algorytm gwarantuje zbieżność. Na rys. 3 pokazano uzyskiwane w kolejnych iteracjach przyrosty współczynników  $\alpha_i$  oraz błąd  $LSE(f_a)$  bieżącego rozwiązania. Jako rozwiązanie początkowe użyto tu przyciętej do  $N$  próbek odpowiedzi idealnego filtru FD (2) (filtru minimalizującego pełnopasmowe kryterium LS). Jak widać, w takim przypadku uzyskanie rozwiązania wymaga co najmniej miliona iteracji.



Rys. 3. Współczynniki  $\alpha_i$  oraz błąd  $LSE(f_a)$  w funkcji numeru iteracji dla projektowania filtru FD o  $N=32$ ,  $f_a=0,4$  i  $d=0,5$  oraz  $p=3$

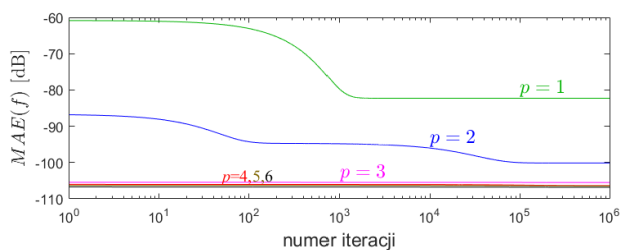
Zwróćmy jednak uwagę na to, że przebieg charakterystyki błędu aproksymacji w zakładanym paśmie niespecyfikowanym uzyskanego rozwiązania znacznie odbiega od błędu filtru typu obcięty sinc (rys. 2). Jednocześnie jest on zbliżony do błędu filtru FD optymalnego w sensie pasmowego kryterium LS. Stąd proponujemy jako początkowe rozwiązanie brać odpowiedź impulsową filtru optymalnego w sensie pasmowego kryterium

LS. Jak można zauważyć na rys. 4 dla takiego rozwiązania od razu uzyskujemy rozwiązanie bliskie optymalnemu, które w poprzednim przypadku uzyskuje się dopiero po około milionie iteracji. Jednocześnie zaproponowany algorytm pozwala na dalsze zmniejszenie błędu aproksymacji. Około pół miliona iteracji pozwala na otrzymanie błędu na poziomie  $-103,92$  dB, który w poprzednim przypadku uzyskuje się dopiero po około 2.5 milionach iteracji.



Rys. 4. Błąd  $LSE(f_a)$  w funkcji numeru iteracji dla filtru z rys. 3 oraz użycia jako rozwiązanie początkowe optymalnego pasmowego filtru LS

Na rys. 5 pokazano zmiany błędu  $LSE(f_a)$  w funkcji numeru iteracji, dla projektowania filtru o tych samych parametrach dla różnych wartości parametru  $p$  a w tab. 1 pokazano otrzymane współczynniki  $\alpha$  oraz błąd dla  $p = 1, 2, \dots, 4$ . Widać tu, że im większe  $p$  tym lepszą uzyskujemy jakość projektowanego filtru. Jednocześnie widać, że inicjując algorytm filtrem optymalnym w sensie pasmowego kryterium LS dla większych wartości parametru  $p$  (tutaj  $p = 3$ ) rozwiązanie docelowe uzyskujemy prawie natychmiast. Widać też, że zwiększanie tego parametru powyżej 3 skutkuje niedużą poprawą uzyskiwanej dokładności projektowania. Jest to istotna zaleta, reprezentacji filtru FD poprzez charakterystykę (3), która identyfikuje filtr poprzez zaledwie kilka współczynników  $\alpha$ . Przykładowo tutaj filtr o 64 współczynnikach odpowiedzi impulsowej można reprezentować za pomocą jedynie 3 współczynników  $\alpha$ .



Rys. 5. Błąd  $LSE(f_a)$  w funkcji numeru iteracji dla projektowania filtru FD o  $N=64$ ,  $f_a=0,4$  i  $d=0,5$  oraz różnych parametrów  $p=1, 2, \dots, 6$

Tab. 1. Współczynniki  $\alpha$  oraz wartość błędu dla filtrów FD z rys. 5 dla różnych  $p$

$p$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_4$	$LSE(f_a)$
1	0.77274	-	-	-	-82.28
2	0.68918	0.96730	-	-	-100.13
3	0.67153	0.95850	0.99946	-	-105.50
4	0.66976	0.95776	0.99944	0.99999	-106.34

#### 4. PODSUMOWANIE

W pracy zaproponowano metodę projektowania filtrów FD reprezentowanych poprzez kilka współczynników ich dyskretnej charakterystyki częstotliwościowej.

Istotną zaletą charakterystyki, której współczynniki projektujemy jest to, że odpowiada ona filtrom FD projektowanym oknami przesuwanymi, co pozwala na prostą manipulację szerokością pasma filtru zbiorczego algorytmu zmiany szybkości próbkowania realizowanego z użyciem takich filtrów. Dotychczas istotną wadą tego rozwiązania był brak metody gwarantującej zbieżność projektowania współczynników tej charakterystyki. Jak pokazano, zaproponowana w pracy metoda bazująca na iteracyjnej metodzie POCS, pozwala na skuteczne projektowanie tego typu filtrów.

#### LITERATURA

- [1] Blok Marek. 2016. „Zmiana szybkości próbkowania z użyciem filtru ułamkowoopóźniającego o zmiennej szerokości pasma”, Przegląd Telekomunikacyjny i Wiadomości Telekomunikacyjne, 7: 662-667.
- [2] Blok Marek, 2015, „Filtr cyfrowy ułamkowoopóźniający - projektowanie metodą okien”, Wydawnictwo Politechniki Gdańskiej.
- [3] Blok Marek. 2013, „Filtr ułamkowoopóźniający o przestrajanej szerokości pasma realizowany w dziedzinie DFT”, Przegląd Telekomunikacyjny i Wiadomości Telekomunikacyjne, 9: 1141-1150.
- [4] Blok Marek. 2013, “Comments on “Closed Form Variable Fractional Time Delay Using FFT””, IEEE Signal Processing Letters, 20 (8): 747-750.
- [5] Blok Marek, Drózda Piotr. 2014, “Variable Ratio Sample Rate Conversion Based on Fractional Delay Filter”, Archives of Acoustics, 39 (2): 231-242.
- [6] Hermanowicz Ewa, Blok Marek. 2000, “Iterative technique for approximate minimax design of complex digital FIR filters”, The 7<sup>th</sup> IEEE International Conference on Electronics, Circuits and Systems, ICECS 2000, 83-86.
- [7] Laakso Timo I., Välimäki Vesa, Karjalainen Matti, Laine Unto K.. 1996. “Splitting the unit delay – tools for fractional delay filter design,” IEEE Signal Processing Magazine, 13(1): 30–60.
- [8] Parekh Sanjeel, Shah Pratik. 2014, “Nyquist filter design using POCS methods: Including constraints in design”, 2014 IEEE International Symposium on Signal Processing and Information Technology (ISSPIT), 000370-000375.
- [9] Rzepka Dominik, Kościelnik Dariusz, Miśkiewicz Marek, Thao Nguyen T.. 2016, “Signal recovery from level-crossing samples using projections onto convex sets”, IEEE Second International Conference on Event-based Control, Communication, and Signal Processing (EBCCSP), 1-6.
- [10] Mousa W.A., McLernon D.C., Boussakta S.. 2006, “The design of multi-dimensional complex-valued FIR digital filters by Projections onto Convex Sets”, 14th European Signal Processing Conference, 1-4.