

SZTYWNE ELEMENTY SKOŃCZONE W MODELOWANIU DRGAŃ WIRUJĄCEJ BELKI NAPĘDZANEJ SILNIKIEM PRĄDU STAŁEGO ZASILANYM Z PROSTOWNIKA TYRYSTOROWEGO

KRZYSZTOF LIPIŃSKI

*Katedra Mechaniki i Wytrzymałości Materiałów, Politechnika Gdańska
e-mail: klipinsk@pg.gda.pl*

Streszczenie. Praca przedstawia analizę i metodę modelowania układu elektromechanicznego złożonego z odkształcalnego elementu mechanicznego oraz silnika prądu stałego zasilanego z sieci prądu przemiennego za pośrednictwem prostownika tyrystorowego. Praca ogranicza się do prezentacji wpływu okresów braku zasilania, typowych dla prostownika, na drgania elementu odkształcalnego. Badany jest też wpływ momentu hamującego silnik na drgania elementu i silnika.

1. WSTĘP

Praca przedstawia modelowanie układu elektromechanicznego złożonego z napędu elektrycznego i odkształcanego elementu mechanicznego. Napędem jest silnik prądu stałego zasilany z prostownika tyrystorowego. Elementem mechanicznym jest odkształcalna belka.

Dla mechanizmów, silniki prądu stałego to jedne z najczęściej stosowanych napędów. Posiadają prostą konstrukcję. Są proste w obsłudze i sterowaniu. Są stosunkowo tanie. Udostępniają szeroki zakres zmian prędkości obrotowych oraz szeroki zakres zmian momentu obrotowego. Niedogodnością jest konieczność posiadania sieci prądu stałego z możliwością aktywnej regulacji napięcia. Z konieczności silniki zasilane są z dostępniejszej sieci prądu przemiennego. Jest to możliwe po zastosowaniu układu prostującego, z opcją aktywnej modyfikacji napięcia wyjściowego. Cechę taką posiadają prostowniki tyrystorowe. Niestety, charakterystyka jego napięcia wyjściowego odbiega od przebiegu wzorcowego typowego dla stałego napięcia.

W pracy, natężenie prądu silnika elektrycznego wyznaczane jest za pomocą bilansu napięć obwodu twornika. Na bazie strumienia magnetycznego i wspomnianego natężenia prądu wyznaczana jest wartość momentu sił generowanego przez silnik. Z uwagi na zmienność wartości napięcia, moment sił generowany przez silnik jest zmienny. Odpowiada to za generowanie drgań zarówno w układzie elektrycznym jak i w układzie mechanicznym.

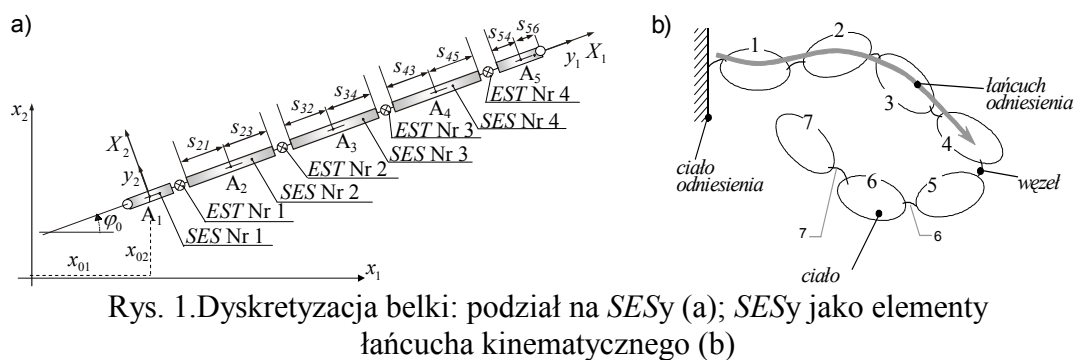
Ważnym zagadnieniem modelowania ciągłych układów odkształcalnych jest dyskretyzacja, czyli opis za pomocą skończonej liczby parametrów. Zastosowaną metodą jest metoda sztywnych elementów skończonych (SES). Stosowany tu model fizyczny składa się z nieodkształcalnych brył łączonych za pomocą nieważkich elementów sprężysto tłumiących (EST). Stworzona do analizy drgań struktur odkształcalnych [1] metoda szybko znalazła zastosowanie do analizy układów o zmiennej konfiguracji [2]. Może zostać wykorzystana do modelowania odkształceń mechanizmów [3]. W przypadku modelowania mechanizmów

rozdzielone są zmienne ruchu unoszenia i zmienne odkształcenia elementu. Inna modyfikacja eliminuje „nieistotne” odkształcenia względne. Eliminowane odkształcenia przyjmowane są jako zerowe (równania więzów). Równania dynamiki układu z więzami upraszczają się, gdy do opisu ruchu stosujemy przemieszczenia względne. Struktura układu zmienia się w łańcuchach SES połączonych parami kinematycznymi (rys. 1). W pracy proponuje się, aby równania dynamiki łańcucha wyznaczyć, korzystając z zasad dynamiki układów wieloczłonowych.

Literatura opisująca zagadnienia łącznego modelowania układu mechanicznego i elektrycznego preferuje analizy uproszczone. W analizach układu mechanicznego silnik traktowany jest jako źródło stałego momentu lub stałej prędkości obrotowej. Analizy układu elektrycznego redukują mechanizm do stałego momentu bezwładności i stałego obciążenia. Obecna praca wychodzi poza te uproszczenia. Koncentruje się na wspólnym elektromechanicznym modelu numerycznym. Badane są drgania układu. Analizowany jest wpływ obciążenia układu na wartości wspomnianych amplitud.

2. SZTYWNE ELEMENTY SKOŃCZONE

Dla przeprowadzenia dyskretyzacji dokonuje się wstępnego podziału belki. Dzieli się ją na segmenty o identycznej długości. Własności sprężyste segmentów koncentrowane są w ich środkach. Umieszcza się tam elementy EST, czyli rozcina się segmenty, a rozcięte fragmenty (połówki) łączone są za pomocą ESTów. Połówki traktowane są jako ciała idealnie sztywne, a własności ESTów dobierane są tak, aby odkształcenia statyczne skrajnych punktów segmentu ciągłych były identyczne z odkształceniami statycznymi punktów końcowych połówek. Stykające się połówki są łączone. Powstają w ten sposób sztywne elementy skończone (rys. 1a). Ich parametry bezwładnościowe wyznaczane są z geometrii belki ciągłej.



Rys. 1. Dyskretyzacja belki: podział na SESy (a); SESy jako elementy łańcucha kinematycznego (b)

3. ELEMENT SKOŃCZONY JAKO SKŁADNIK UKŁADU WIELOCZŁONOWEGO

W modelowanej belce dominującą rolę odgrywają odkształcenia gięte. Z tego powodu przemieszczenia translacyjne blokuje się na zerowej wartości. Dyskretyzowany układ modeluje się jako układ wieloczłonowy (rys. 1b). Składa się on z nieodkształcalnych ciał połączonych ESTami oraz parami kinematycznymi. W odróżnieniu od EST w parach kinematycznych, niektóre kierunki ruchów względnych są zablokowane. W pozostałych kierunkach ruch jest ograniczony własnościami sprężysto-tłumiącymi. Pary kinematyczne ogranicza się do pary postępowej i obrotowej. Pary takie nazwiemy węzłami. Pary złożone modeluje się jako sekwencje węzłów, bezmasowych ciał i równań więzów. Belkę wraz z

gdzie:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{c}}^{1,i} &= \sum_{l:i \leq l} \bar{\mathbf{B}}^{2,l} ; & \bar{\mathbf{D}}^{1,i} &= \sum_{l:i \leq l} m^l \cdot \ddot{\mathbf{x}}^{l,R} ; & \bar{\mathbf{E}}^{1,i} &= -\sum_{l:i \leq l} \bar{\mathbf{f}}^{z,l} ; & \bar{\mathbf{C}}^{2,i} &= \sum_{l:i \leq l} \left[\bar{\mathbf{B}}^{1,l} + \left(\sum_{k:i \leq k \leq l} \bar{\mathbf{T}}^{kl} \right) \times \bar{\mathbf{B}}^{2,l} \right] ; \\ \bar{\mathbf{D}}^{2,i} &= \sum_{l:i \leq l} \left[\bar{\omega}^l \times \left(\bar{\mathbf{T}}^l \cdot \bar{\omega}^l \right) + \bar{\mathbf{T}}^l \cdot \dot{\bar{\omega}}^{l,R} + m^l \cdot \left(\sum_{k:l \leq k \leq l} \bar{\mathbf{T}}^{kl} \right) \times \ddot{\mathbf{x}}^{l,R} \right] ; & \bar{\mathbf{E}}^{2,i} &= -\sum_{l:i \leq l} \left[\bar{\mathbf{T}}^{z,l} - \left(\sum_{k:i \leq k \leq l} \bar{\mathbf{T}}^{kl} \right) \times \bar{\mathbf{f}}^{z,l} \right] . \end{aligned} \quad (4b)$$

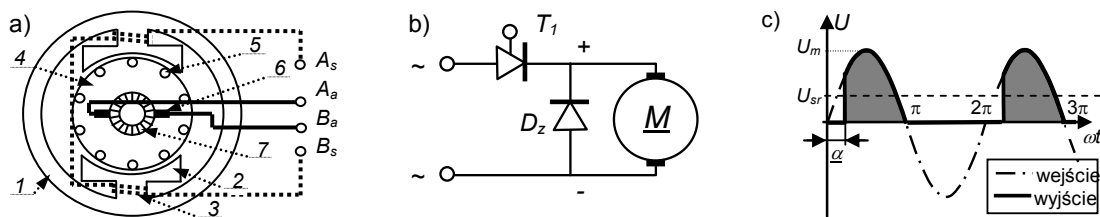
Tylko jedna ze składowych oddziaływań (4a) (siły lub pary sił) zawiera składową aktywną. Odnajduj się ją przez rzutowanie oddziaływania na kierunek przemieszczenia węzła poprzedzającego. Elementy otrzymanych równań grupuje się w macierzach. Uzyskuje się [4,5]

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{F}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) + \mathbf{Q}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, \mathbf{f}_e, \mathbf{t}_e, t) = 0, \quad (5)$$

gdzie: \mathbf{M} - macierz mas, \mathbf{F} - wektor zawierający efekty odśrodkowe, Coriolisa i żyroskopowe; \mathbf{Q} - wektor zawierający oddziaływania zewnętrzne.

4. UKŁAD ELEKTRYCZNY

Układ elektromechaniczny (rys. 4b) składa się z silnika prądu stałego (rys. 3a), jednofazowego prostownika tyrystorowego (rys. 3b) zasilanego prądem przemiennym oraz z belki. Regulacja napięcia (rys. 3c) odbywa się dzięki modyfikacji kąta wyzwolenia tyrystora.



Rys. 3. Silnik prądu stałego: najważniejsze elementy silnika (a); obwód zasilania silnika (b); napięcie na wyjściu z prostownika (c)

Nieruchomy stojan (1) odpowiada za wygenerowanie pola magnetycznego. Powstaje ono albo dzięki prądowi przepływającemu w uzwojeniu cewek wzbudzających (3), albo dzięki magnesom stałym. Powstający strumień magnetyczny Φ przepływa przez rdzeń bieguna (2), szczelinę powietrzną, rdzeń twornika (4), ponownie do rdzenia przeciwnego bieguna i zamyka się poprzez korpus stojana. W polu tym wiruje twornik. Zawiera on ułożone na nim uzwojenie (5) zwane uzwojeniem twornika. Przepływa przez nie prąd twornika I_t . Kierunek przepływu prądu sterowany jest za pomocą komutatora (7) i układu szczotek (6). W uzwojeniu twornika indukuje się siła elektromotoryczna E_t (napięcie), a wzajemne oddziaływanie prądu i strumienia magnetycznego wytwarza moment obrotowy. Ich wartości to [6]:

$$E_t = c_{el} \cdot \Phi \cdot \omega_t = k_{\Phi} \cdot \omega_t ; \quad t_{el} = c_{el} \cdot \Phi \cdot I_t = k_{\Phi} \cdot I_t \quad (6)$$

gdzie: ω_t - prędkość kątowna twornika, c_{el} - stała konstrukcyjna maszyny; $k_{\Phi} = c_{el} \cdot \Phi$

Przywołując II prawo Kirchhoffa (bilansu napięć w oczku), zbilansowano napięciami obwodu zbudowanego z: siły elektromotorycznej E_t ; oporności elektrycznej elementów twornika oraz komutatora; indukcyjności uzwojenia twornika. Zapisuje się to [6]

$$L_t \cdot \frac{dI_t}{dt} + R_t \cdot I_t + k_{\Phi} \cdot \omega_t = U \quad (7)$$



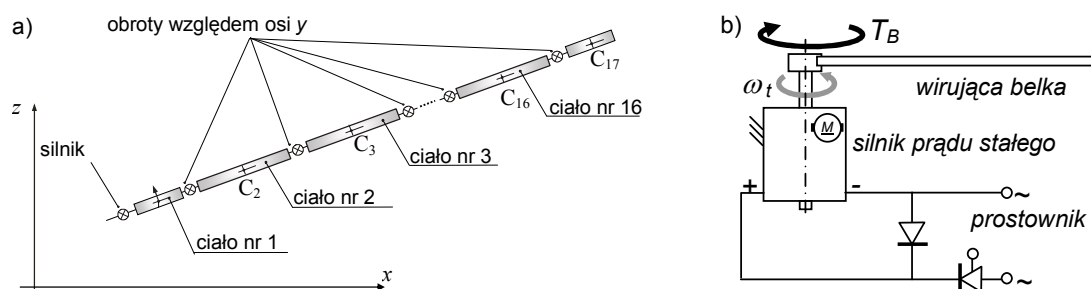
gdzie: L_t – całkowita indukcyjność obwodu uzwojenia twornika; R_t – całkowita oporność obwodu uzwojenia twornika; U – napięcie zasilania obwodu.

Silnik połączono z jednofazową siecią napięcia przemiennego. Elementem pośredniczącym jest prostownik zaopatrzonej w diodę zwrotną (rys. 3b). Kierunek polaryzacji wyjścia prostownika jest stały (przykłady obwodów niezachowujących kierunku polaryzacji omówiono w pracy [7]), gdyż tyrystor rozłącza obwód przy pojawieniu się przeciwnej polaryzacji wejścia (rys. 3c). Sterowanie napięciem skutecznym odbywa się poprzez określenie momentu podania napięcia bramki tyrystora. Jest ono niezbędne do przejścia tyrystora w stan przewodzenia. Tyrystor pozostaje w nim aż do zmiany kierunku polaryzacji. Rozłączenie obwodu zasilania nie prowadzi do gwałtownego spadku natężenia prądu silnika. Przepływ podtrzymywany przez indukcyjność elementów silnika odbywa się przez diodę zwrotną.

5. ANALIZOWANY UKŁAD ELEKTROMECHANICZNY

Parametry silnika zaczerpnięto z pracy [6]. Jest to silnik średniej wielkości (o mocy znacznie poniżej 1 kW). Współczynnik siły elektromotorycznej, k_ϕ , jest równy 0.047 V/s. Indukcyjność obwodu twornika to $L_t = 1.3$ mH. Całkowita oporność to, $R_t = 3.5$ Ω . Amplitudę napięcia zasilania ustalono na 200 V. Kąt wyzwolenia tyrystora $\varphi_t = 0.6 \cdot \pi$. Przełożenie pomiędzy silnikiem i belką wynosi $n = 0.01$.

Ruch belki, osadzonej prostopadle od pionowej osi silnika, odbywa się w płaszczyźnie horyzontalnej. Odkształcenia w kierunku pionowym przyjęto jako pomijalne. Belkę dyskretyzowano za pomocą 17 SES (Rys. 4.a). Wszystkie segmenty (poza dwoma skrajnymi), zamodelowane są jako jednorodne, belki o długości $\Delta l = 0.17$ m. Masa segmentu równa jest $m_\Delta = 0.3341$ kg. Jego moment bezwładności (względem środka masy segmentu) równy jest $I_{yy} = 0.0011388$ kg·m². Segmenty krańcowe (skrajne) są dwa razy krótsze. Ich parametry bezwładnościowe są odpowiednio mniejsze. Moment bezwładności segmentu #1 powiększono o połączoną bezwładność silnika i przekładni. Przyjęto $I_{yy} = 0.1020328$ kg·m². Segmenty połączono ESTami. Odkształcenia występujące w ESTach ograniczono do obrotu względem osi równoległych do osi twornika.



Rys. 4. Analizowany układ elektromechaniczny: układ wieloczłonowy modelujący belkę odkształcalną (b); struktura układu (a)

Łańcuch segmentów zamodelowano jako układ wieloczłonowy. Jego ruch opisano w kartezjańskim układzie współrzędnych związany z stojanem silnika. Oś obrotu twornika pokrywa się z osią y. Równania dynamiki (5) wygenerowano programem ROBOTRAN [5].

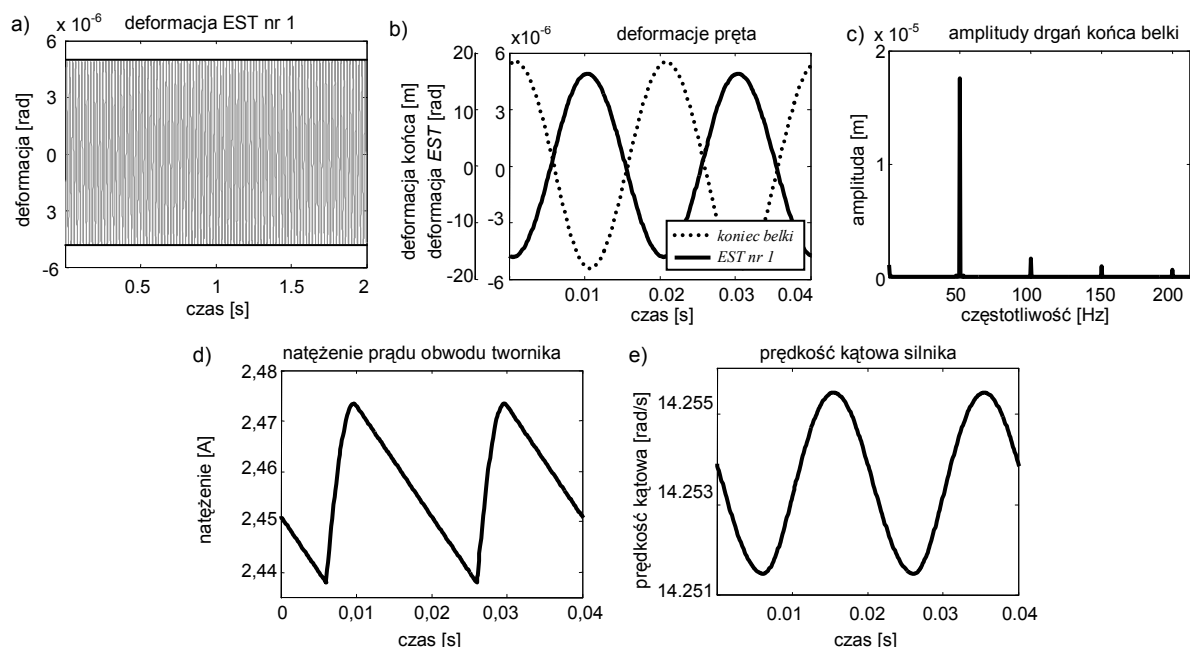
Wszystkie (poza pierwszym) węzły zawierają element sprężysty $k_\Delta = 10^4$ N·m/rad. W węzłach tych występują także elementy tłumiące $c_\Delta = 10^4$ N·m·s/rad. Pierwszy węzeł łańcucha modeluje oś obrotu silnika. Do węzła tego przyłożono moment generowany według

równań (6-7). Uzupełniono go o moment hamujący. Jego wartości zmieniają się od 0 do 3 Nm. Modeluje on sumaryczne obciążenie mechanizmu.

6. WYNIKI OBLICZEŃ

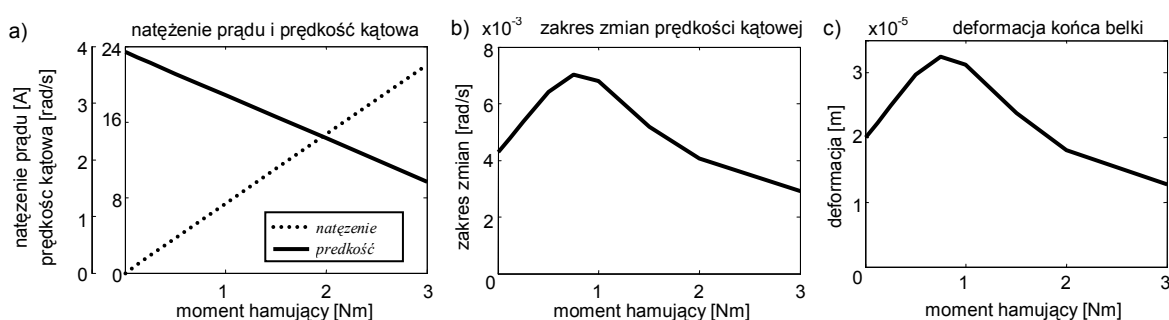
Model poddano testom numerycznym. Wykorzystano procedury programu MATLAB [8]. Droga całkowania numerycznego uzyskano przebiegi czasowe przedstawiające ruch ustalony układu. Do całkowania zastosowano klasyczny algorytm Rungego-Kutty [8]. Wielkość kroku całkowania ograniczono od góry do 10^{-4} s. Ograniczenie to zabezpiecza program przed „gubieniem” impulsów napięcia (gdy krok całkowania przekracza czas trwania impulsu).

W pracy poszukiwano relacji pomiędzy zmiennością napięcia zasilania i drganiami belki. Wpływ ten łatwo zaobserwować, analizując zachowanie układu w stanie ustalonym. Metoda polegająca na uruchomieniu całkowania i kontynuowaniu go aż do uzyskania cyklicznie powtarzalnych przebiegów okazała się nieskuteczna. Wymaga stosowania bardzo długich czasów całkowania. Zastąpiono ją alternatywną metodą łączącą całkowanie numeryczne z procedurą rozwiązywania układu równań nieliniowych. Przy wybranych warunkach początkowych całkowane są przebiegi odpowiadające pojedynczemu impulsowi napięcia (okres całkowania 0.02 s). Następnie wyznaczane są różnice pomiędzy wartościami początkowymi i końcowymi współrzędnych stanu. Przyjmując, że odpowiedź układu jest funkcją okresową o okresie wymuszenia, warunkiem opisującym stan ustalony jest tożsamość współrzędnych początkowych i końcowych. Prowadzi to do układu n warunków, zależnych od n zmiennych (warunków początkowych procesu całkowania). Miejsce zerowe tego układu wyznaczane jest numerycznie przy wykorzystaniu procedury Newtona-Raphsona. W procedurze tej jacobian wyznaczany jest numerycznie metodą różnic skończonych. Miejsce zerowe wyznaczane jest z dokładnością do 10^{-3} .



Rys. 5. Przebiegi czasowe dla $T_b=2$ N·m: odkształcenie EST #1 (najbliżej silnika) pełen czas całkowania (a); odkształcenie EST #1 oraz deformacja skrajnego punktu belki, skrócony czas całkowania (b); amplitudy składowych drgań końca belki (c); natężenie prądu obwodu twornika (d); prędkość kątowna silnika (e)

Wykonano serię obliczeń dla różnych wartości momentu hamującego działającego na silnik. Po wyznaczeniu stanu ustalonego symulowano dwusekundowe przebiegi czasowe. Wyznaczano prędkość kątową silnika, natężenie prądu obwodu silnika oraz przemieszczenia w ESTach. Wyniki uzyskane dla momentu hamującego $T_b=2 \text{ N}\cdot\text{m}$ przedstawiono na rys. 5. Uzyskane przebiegi czasowe (rys. 5a) potwierdzają prawidłowe wyznaczenie stanu ustalonego. Analiza wykresów (rys. 5b) potwierdza, iż zmienność napięcia zasilania wywołuje drgania belki. Przemieszczenia ESTów są niewielkie. Podobny wniosek dotyczy drgania całej belki. Przebieg drgań końca belki przedstawiono na rys. 5b. Nie mają one charakteru pojedynczego drgania harmonicznego. Transformacja Fouriera drgań końca belki (rys. 5c) potwierdza, iż wzbudzone są drgania zarówno w podstawowej częstotliwości wzbudzenia jak i w wielokrotnościach tej częstotliwości. Nieliniowy charakter wzbudzenia potwierdza rys. 5d przedstawiający przebieg natężenia prądu twornika. Jest on proporcjonalny do momentu generowanego przez silnik (wzbudzenia).



Rys. 6. Wpływ momentu hamującego silnik na ruch i drgania układu: natężenie prądu obwodu twornika oraz średnia prędkość kątowna twornika (a); zakres zmian prędkości kątowej twornika (b); maksymalne deformacje swobodnego końca belki (c)

Kolejny test dotyczył relacji występujących pomiędzy momentem hamującym i parametrami pracy układu. Rys. 6a potwierdza występowanie liniowej zależności pomiędzy wartościami momentu hamującego i prędkości obrotowej silnika. Linowa zależność opisuje także relację pomiędzy wartościami momentu hamującego i natężeniem prądu płynącego przez uzwojenie silnika. Rys. 6.b potwierdza, że moment hamujący wpływa także na wielkość drgań układu. Wynika to ze zmienności współczynników sztywności geometrycznej. Zmiana prędkości wirowania powoduje zmianę współczynnika oraz częstotliwości drgań własnych belki. Pojawienia się rezonans. Można go zaobserwować dla momentu $T_b = 0.75 \text{ N}\cdot\text{m}$. Opisywany wzrost drgań obserwuje się na wykresie zmienności prędkości obrotowej (rys. 6b) jak i na charakterystyce drgań swobodnego końca belki (rys.6c).

7. WNIOSKI

Przedstawione wyniki obliczeń pokazują jak ważne jest wspólne, elektromechaniczne modelowanie układów. Uzyskane przebiegi potwierdzają, że założenia o stałej wartości moment napędowy, jak też stała prędkość obrotowej nie są słuszne. Dyskretyzacja metodą sztywnych elementów skończonych sprawdza się podczas modelowania odkształcalnych, wirujących elementów. Przydatne i skuteczne jest także modelowanie wieloczołnowe struktury sztywnych elementów skończonych.

Przerwy zasilania układu wywołane pracą prostownika w istotny sposób wpływają na ruch układu. W stanie ustalonym występuje zmienność prędkości obrotowej silnika i drgania

elementu odkształcalnego. Drgania te opisane są funkcjami okresowymi. Nie jest to jednak funkcja harmoniczna. Analiza częstotliwościowa drgań wykazuje obecność składowych harmonicznnych o częstotliwościach będących wielokrotnościami częstotliwości sieci zasilającej. Zmienność prędkości obrotowej silnika w niewielkim stopniu przeniosła się na drgania elementu odkształcalnego. Drgania te są rzędu setnych części milimetra. Z uwagi na zależność pomiędzy prędkością kątową wirowania belki i współczynnikami sztywności geometrycznej wzrost obciążenia silnika (nie działający bezpośrednio na element odkształcalny) wpływa na częstotliwość drgań własnych belki, a co za tym idzie - także na amplitudy wywoływanych drgań.

LITERATURA

1. Kruszewski J., Gawroński W., Wittbrodt E., Najbar F., Grabowski F.: Metoda sztywnych elementów skończonych. Warszawa: Arkady, 1975.
2. Wittbrodt E.: Dynamika układów o zmiennej w czasie konfiguracji z zastosowaniem metody elementów skończonych. Zesz. Nauk. Polit. Gd. 1983, 364, Mechanika XLVI.
3. Lipiński K., Wittbrodt E.: Nelder-Mead optimization in dynamical balancing of planar four-bar mechanism and rigid finite elements' modeling in an analysis of its deformations. W: Proceedings of 7th World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization, WCSMO-7, Seul (Korea) 2007, p. 1908-1917.
4. Fiset P., Lipiński K., Samin J.C.: Symbolic modelling for the simulation, control and optimisation of multibody systems. W: Advances in multibody systems and mechatronics. Graz (Austria): Inst. f. Mech. u. Getriebelehre Tech. Univ. Graz, 1999, p. 139-174.
5. Fiset P., Samin J.C.: Symbolic modeling of multibody system. Kluwer Acad. Pub. 2003.
6. Taylan D.M., Canan D.L.: Mathematical modelling. Simulation and experimental verification of sacra robot. "Simulation Modeling Practice and Theory" 2005, 13, p.257-271.
7. Lipiński K.: Influences of the supply system's configuration on the behaviour of a mechatronic model: four bar/a DC-motor. W: Mechanika 2007, Gdańsk, Politechnika Gdańska, 2007, s. [1-18].
8. <http://www.mathworks.com/>

RIGID FINITE ELEMENTS' IN ANALYSES OF ELASTIC BAR VIBRATIONS FOR A BAR FIXED TO A DC-MOTOR SUPPLIED FROM A TYRISTOR RECTIFIER

Summary. The paper presents numerical modeling of an electromechanical system composed of a flexible beam and a DC-motor. The DC-motor is supplied via a thyristor rectifier. Then, the search is focused on correlations between the periodic decays in the supplying voltage (typical for the thyristor rectifiers) and vibrations of the flexible beam. It proofs that decays could indicate some vibrations. Their amplitudes vary if the DC-motor is used to equilibrate some external torques (braking torques) acting on the motor's axis.