

## ZASTOSOWANIE MACIERZY PSEUDO ODWROTNEJ W METODACH ALOKACJI PĘDNIKÓW UKŁADU DYNAMICZNEGO POZYCJONOWANIA STATKU

Anna WITKOWSKA

Politechnika Gdańska, Wydział Elektrotechniki i Automatyki, ul. G. Narutowicza 11/12, 80-233 Gdańsk  
tel: (58) 347 21 24, fax: (58) 347 24 87, e-mail: awitkowska@ely.pg.gda.pl

**Streszczenie:** Układy kontroli alokacji pędników stanowią ważną część systemów dynamicznego pozycjonowania na statku. Określają one sygnały sterujące nastawami pędników, na podstawie uogólnionego wektora sił wzdłużnej, poprzecznej i momentu skręcającego, uzyskiwanych z prawa sterowania. W artykule przedstawiono wybrane algorytmy kontroli alokacji pędników, różniące się sposobem wyznaczania macierzy pseudo odwrotnej oraz algorytm bezpośredniej alokacji. Omówiono wpływ zastosowanych metod na wydajność ekonomiczną oraz jakość regulacji układu dynamicznego pozycjonowania statkiem.

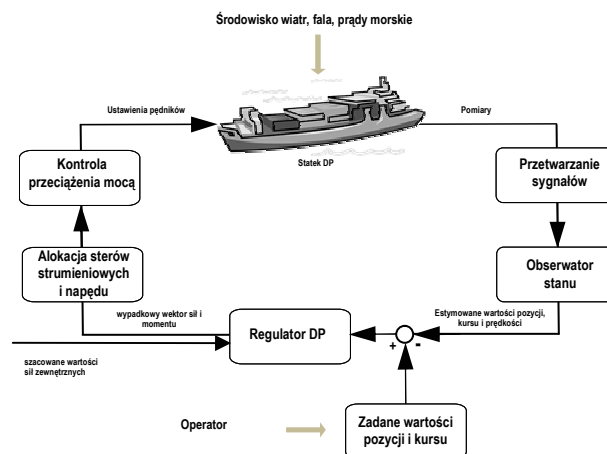
**Słowa kluczowe:** układ alokacja, dynamiczne pozycjonowanie, macierz pseudo odwrotna.

### 1. WPROWADZENIE

Systemy dynamicznego pozycjonowania DP (ang. Dynamic Positioning) są obecnie na wyposażeniu wielu jednostek pływających. Głównym zadaniem takich systemów jest utrzymywanie zadanej pozycji i kursu statku oraz manewrowanie przy niskiej prędkości ruchu (do 2 [m/s]), w obecności działających na kadłub statku zakłóceń środowiskowych. Zadanie to jest realizowane poprzez kontrolę ruchu statku w trzech stopniach swobody: wzdłużnym, poprzecznym i myszkowaniu. Celem sterowania jest kompensacja zakłóceń od wiatru, fali, prądów morskich, operując jedynie pędnikami: sterami i napędem.

Przepływ informacji w systemie DP został przedstawiony na rysunku 1 w postaci uproszczonej struktury. Zadane wartości pozycji i kursu są wprowadzane do układu za pomocą interfejsu użytkownika; na podstawie nawigacyjnego systemu referencyjnego oraz obserwatora stanu, uzyskiwane jest estymowane aktualne położenie jednostki, uchyb położenia będący różnicą pomiędzy położeniem zadanym a estymowanym położeniem aktualnym jest przekazywany na regulator DP; regulator DP wyznacza wymagane siły i moment minimalizujące odchylenia od wartości zadanych; wypadkowy wektor sił i momentu jest przekazywany do układu kontroli alokacji, gdzie dokonuje się rozdziału wartości zadanych sił i momentu na sygnały sterujące nastawami pędników, mianowicie prędkości obrotowe śrub napędu głównego, sterów azymutalnych i tunelowych, kąty wychylenia płetwy sterowej przy jednoczesnej minimalizacji wielkości energii koniecznej do zrealizowania zadania

sterowania. Ze względu na wymagania precyzji i bezpieczeństwa sterowania stawiane systemom DP liczba urządzeń wykonawczych jest z reguły większa od liczby sterowanych stopni swobody ruchu. Występująca nadmiarowość powoduje, że rozkład sił i momentu na sygnały sterujące nie musi być jednoznacznie określony. W takim przypadku może być on aproksymowany w procesie optymalizacji kwadratowej z ograniczeniami na maksymalną amplitudę i prędkość zmiany nastaw urządzeń wykonawczych, przy jednoczesnej minimalizacji strat ekonomicznych związanych z nadmierną aktywnością pędników i sterów.



Rys. 1. Schemat regulatora DP wraz z układem alokacji pędników

Problem alokacji sterowań był intensywnie badany w pracy [3]. Większość rozwiązań obecnie polega na wyznaczaniu macierzy pseudo odwrotnej za pomocą algorytmów numerycznych oraz zastosowaniu klasycznych metod optymalizacji, takich jak: najmniejszych kwadratów, metoda Lagrange'a. Zakładają one z reguły kwadratową funkcję celu minimalizującą zużycie urządzeń wykonawczych podczas realizacji nadrzędnego celu sterowania jakim jest dokładne pozycjonowanie statku.

W artykule przedstawiono wybrane algorytmy kontroli alokacji pędników, różniące się sposobem wyznaczania macierzy pseudo odwrotnej oraz algorytm bezpośredniej alokacji. Omówiono wpływ zastosowanych metod na jakość

regulacji układu dynamicznego pozycjonowania statkiem. W badaniach symulacyjnych przyjęto model matematyczny statku wraz z modelem zakłóceń od fali i modelem matematycznym pędników. Model pędników zależy od wartości prędkości statku. Zmiana prędkości statku decyduje o zastosowanym zestawie pędników.

## 2. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU ALOKACJI PĘDNIKÓW

Rozpatrzmy bezwymiarowy model matematyczny statku DP o długości  $L=76.2[m]$  i masie  $4000[t]$ , opisany następującym układem równań różniczkowych, w płaszczyźnie horyzontalnej [4]:

$$\eta' = R(\psi)v, \quad (1)$$

$$Mv' + Dv = \tau \quad (2)$$

gdzie:  $\tau = [\tau_x, \tau_y, \tau_n]^T$  - uogólniony wektor sił i momentu,  $\eta = [x, y, \psi]^T$  - wektor pozycji i kursu statku,  $v = [u, v, r]^T$  - wektor prędkości wzdłużnej poprzecznej i kątowej statku, macierze  $M \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $D \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  i  $R(\psi) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  definiują odpowiednio macierz inercji, tłumienia i macierz przejścia z układu nieinercyjnego do układu inercyjnego.

Model statku posiada zainstalowany zespół pięciu pędników, składający się z dwóch śrub napędowych, tunelowego steru strumieniowego i dwóch sterów głównych. Dla statku z nadmiarowym zestawem urządzeń wykonawczych, model pędników może być opisany równaniem (3) i (4), [4]:

$$\tau = Bu \quad (3)$$

$$B = TK(U) \quad (4)$$

gdzie:  $u \in \mathbb{R}^5$ ,  $u = [u_1|u_2|u_3|u_4|u_5]^T$  wektor zależny od sterowań odpowiednio prędkością obrotową śrub napędowych  $u_1$ ,  $u_2$ , steru strumieniowego  $u_3$  i kątów wychylenia płetw sterowych  $u_4, u_5$ ;  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 5}$  - macierz efektywności pędników;  $T \in \mathbb{R}^{3 \times 5}$  macierz zależna m.in. od rozmieszczenia pędników względem środka geometrycznego statku, i  $K(U) \in \mathbb{R}^{3 \times 5}$  macierz diagonalna zależna od prędkości statku i współczynników naporu, pochodzących od zainstalowanych pędników.

Klasyczny problem liniowej alokacji pędników w układzie sterowania statkiem polega na wyznaczeniu wektora sterowań  $u$ , spełniającego równanie (3) oraz ograniczenia na maksymalną amplitudę i prędkość zmiany sygnałów sterujących:

$$u_{\min} \leq u \leq u_{\max} \quad (5)$$

przy jednoczesnej minimalizacji poboru energii przez pędniki.

## 3. METODY KONTROLI ALOKACJI PĘDNIKÓW

Wartości wektora sterowań  $u$  mogą być aproksymowane w procesie optymalizacji kwadratowej

$$\min_u (u^T W u) \quad (6)$$

z ograniczeniami (3), (5). Macierz diagonalna wagowa  $W$ , umożliwia priorytetyzację pomiędzy poszczególnymi urządzeniami sterowymi.

Jeśli nie uwzględnimy nasycenia urządzeń wykonawczych (5) oraz założymy, że macierz  $B$  jest regularna, to równanie (3) posiada rozwiązanie postaci:

$$u = B^+ \tau \quad (7)$$

gdzie: macierz pseudo odwrotna  $B^+ = W^{-1} B^T (B W^{-1} B^T)^{-1}$  wyznacza jedno z nieskończenie wielu możliwych rozwiązań równania  $B u = \tau$  i jest zwana macierzą Moora Penrose.

Do wyznaczenia macierzy  $B^+$  korzysta się m. in. z metod dekompozycji takich jak rozkład QR, rozkład SVD lub stosując regularyzację. Środowisko programistyczne takie jak MATLAB udostępniają gotowe procedury obliczania macierzy pseudo odwrotnej, które automatycznie stosują metodę optymalną dla podanej macierzy (np. funkcje: pinv, linsolv, lscov).

W praktyce stosowane metody numeryczne kontroli alokacji opierają się na wyznaczeniu macierzy pseudo odwrotnej i różnią się sposobem uwzględnienia ograniczeń związanych z nasyceniem urządzeń wykonawczych. Do takich należy zaliczyć m.in. metody funkcji kary [1], bezpośredniej alokacji DA (ang. Direct Allocation), redystrybuowanych rozwiązań pseudo odwrotnych RPI (ang. Redistributed Pseudo Inverse) [3], kaskadowe metody uogólnionych rozwiązań odwrotnych CGI (ang. Cascading Generalized Inverse) [5], metody zbiorów aktywnych ASM (ang. Active Sets Method) i inne [2, 3].

### 3.1. Kaskadowe uogólnione rozwiązania odwrotne CGI

Metoda zakłada, że wszystkie rozwiązania pseudo odwrotne (7), które naruszają ograniczenia zostają nasycone i usuwane z procesu optymalizacji. Następnie problem alokacji pędników jest rozwiązywany tylko dla pozostałych tzw. swobodnych wejść sterujących, poprzez znalezienie rozwiązania pseudo odwrotnego. Usunięcie zmiennych nasyconych następuje poprzez wyzerowanie w macierzach  $W$  i  $B$ , odpowiadających im elementów. Algorytm jest zwany redystrybuowanym pseudo odwrotnym (ang. Redistributed Pseudo Inverse). Iteracyjna wersja algorytmu RPI zwana kaskadowym uogólnionym rozwiązaniem odwrotnym (ang. Cascaded Generalized Inverse) polega na powtarzaniu algorytmu dopóki wszystkie wejścia sterujące zostaną nasycone lub wszystkie rozwiązania pseudo odwrotne będą spełniały ograniczenia.

### 3.2. Metoda bezpośrednia DA

Bezpośrednia metoda alokacji (ang. Direct Allocation), pierwotnie wprowadzona przez Durham [3] polega na wyznaczeniu obrazu 5-wymiarowej przestrzeni  $u$  ograniczeń (5) do 3-wymiarowej przestrzeni  $\tau$  uogólnionych sił i momentu, względem macierzy  $B$  efektywności pędników, zgodnie z przekształceniem (3). Celem tego przekształcenia jest określenie maksymalnych możliwych do osiągnięcia wartości  $\tau^*$  - zapotrzebowania na moc sterowania. Algorytm polega na znalezieniu liczby rzeczywistej  $\rho = \left\| \frac{\tau^*}{\tau} \right\|$ , i wektora sterowań  $u^*$ , spełniających równanie  $B u^* = \rho \tau$ . Liczba rzeczywista  $\rho$ , fizycznie oznacza współczynnik skalujący, zależny od zapotrzebowania na moc sterowania. Jeśli zapotrzebowanie na moc sterowania jest zbyt duże, to  $\rho \leq 1$  i sygnał sterujący jest nasycony  $u = u^*$ . W przeciwnym przypadku pędniki dostarczają odpowiedniej mocy i sygnał jest przeskalowany  $u = \frac{u^*}{\rho}$ .

#### 4. BADANIA SYMULACYJNE

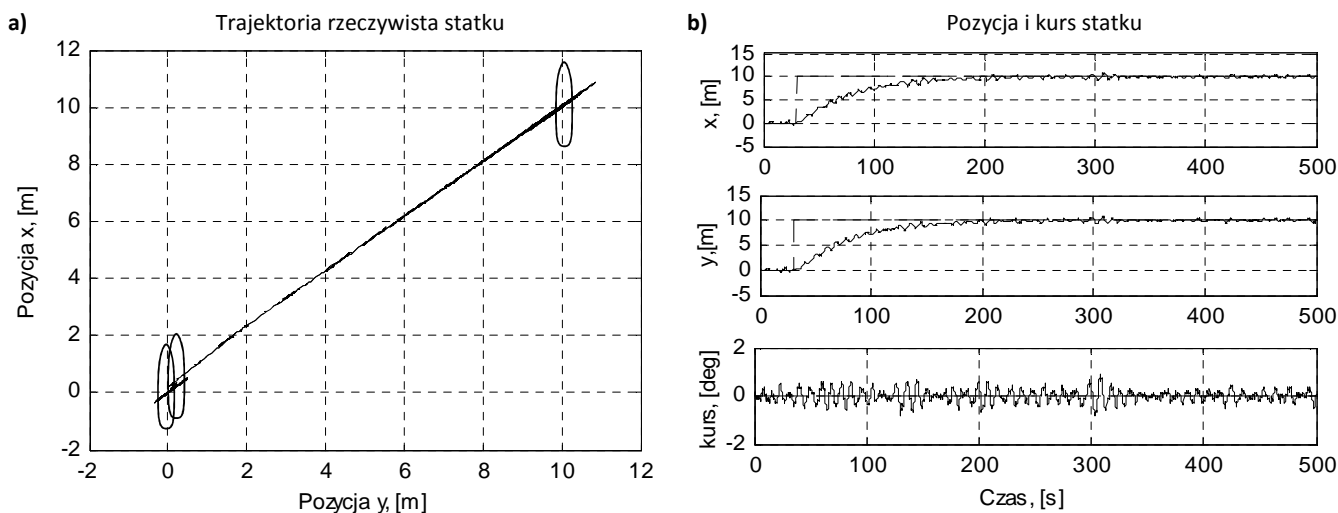
Badania symulacyjne zostały przeprowadzone w układzie przedstawionym na rysunku 1. Regulator DP zaprojektowany w oparciu o metodę backstepping [6] generuje uogólniony wektor sił i momentu w celu utrzymania zadanej pozycji i kursu statku, w obecności zakłóceń środowiskowych od fali. Parametry regulatora backstepping wyznaczono metodą najmniejszych kwadratów. Nieliniowy pasywny obserwator zaproponowany przez [5] wyznacza estymaty niemierzonych wartości pozycji i prędkości statku oraz filtruje wysokoczęstotliwościowe zakłócenia od fali [3]. W badaniach ustalono zerowe początkowe wartości pozycji, kursu oraz ich estymat jak również założono, zerowe wartości początkowe wektora prędkości statku. W pierwszej fazie manewru następuje stabilizacja pozycji i kursu na wartościach zerowych. Następnie po czasie 30 sekund, wykonano manewr zmiany pozycji o 10 [m] skokowo na prawą burtę, stabilizując przy tym tylko kurs. W ostatniej fazie manewru stabilizowana jest zarówno pozycja jak i kurs na wartościach zadanych. Badania przeprowadzono dla czterech metod alokacji pędników: bezpośredniej metody DA, metody kaskadowej uogólnionych rozwiązań odwrotnym CGI, z zastosowanym różnych sposobów generowania macierzy pseudo odwrotnej: rozkładu QR (CGI-QR), rozkładu SVD (CGI-SVD) oraz macierzy Moora Penrose (CGI-MP). Wyniki badań symulacyjnych zostały przedstawione na rysunkach 2-3. Analizując działanie układu DP podczas próby manewrowej, z wybranymi algorytmami alokacji, można zauważyć, że zarówno trajektorie statku (rys. 2a) jak i charakterystyki pozycji i kursu (rys. 2b) oraz prędkości (rys. 3a) pokrywają się a więc uzyskano zbliżony efekt sterowania. Natomiast analizując działanie układu kontroli alokacji pędników można zauważyć, że algorytmy CGI-QR, CGI-SVD, CGI-

MP, oparte o metodę macierzy pseudo odwrotnej i algorytm CGI, generują charakterystyki sygnałów sterujących nastawami pędników o zbliżonym kształcie. Algorytm DA wyznacza rozwiązanie o większej wartości prędkości obrotowych śrub napędowych, natomiast mniejszej wartości prędkości obrotowej steru strumieniowego niż ma to miejsce w przypadku pozostałych metod (rys. 3b). Efektywność płetw sterowych jest bardzo mała w porównaniu z pozostałymi urządzeniami sterowymi. Dotyczy to wszystkich rozpatrywanych algorytmów. W Tabelicy 1. przedstawiono wskaźniki jakości pracy algorytmów: maksymalny czas pracy Max\_time, średni czas pracy Mean\_time, wskaźnik błędów alokacji  $\|Bu - \tau\|_2$  i wskaźnik aktywności urządzeń napędowych  $\|u\|_2$ .

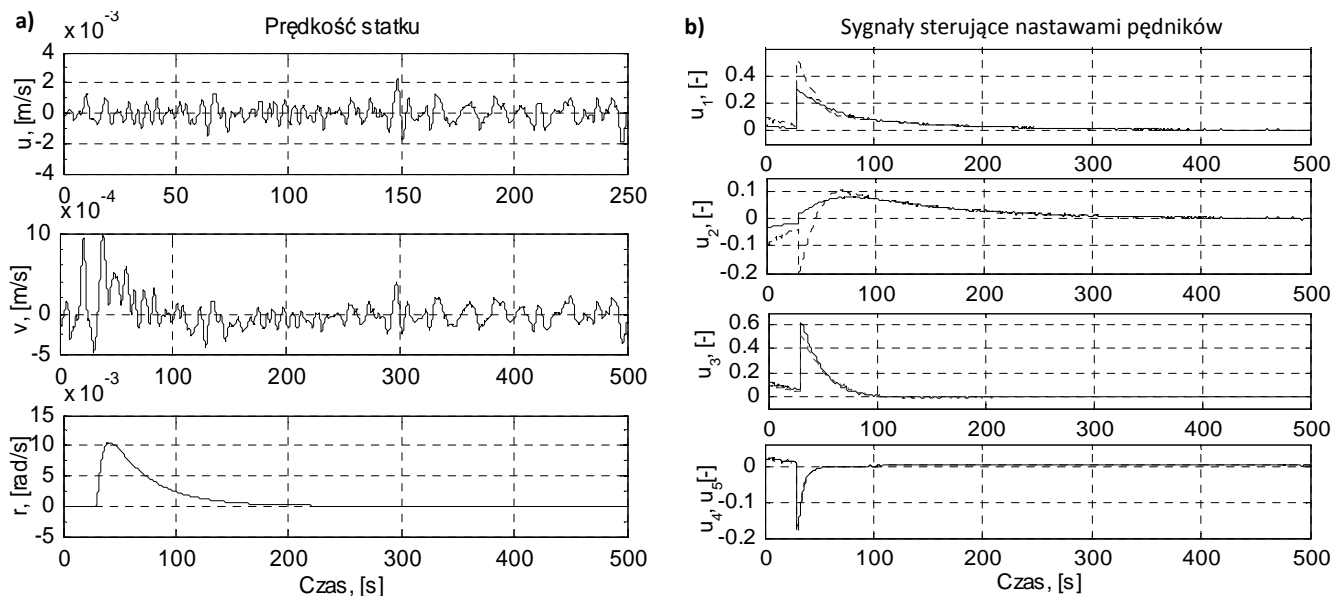
Tabela 1. Wskaźniki jakości pracy algorytmów.

Metoda	Max_time [ms]	Mean_time [ms]	$\ Bu - \tau\ _2$	$\ u\ _2$
CGI-QR	2.0986	0.15282	272.045	0.52932
CGI-MP	1.1065	0.14834	272.045	0.52932
CGI-SVD	1.2213	0.17082	272.045	0.52932
DA	198.052	8.036	272.045	0.64198

Na podstawie uzyskanych wyników można zauważyć, że metody pozwalają uzyskać taką samą wartość wskaźnika błędów alokacji. Największą wartość wskaźnika aktywności pędników uzyskano z uwzględnieniem w układzie sterowania metody DA bezpośredniej alokacji. Ponadto algorytm DA generuje rozwiązanie w czasie nawet kilkukrotnie dłuższym niż pozostałe algorytmy. Pozostałe algorytmy działają w czasie zbliżonym do rzeczywistego, dla statku ten czas nie powinien przekraczać 50 [ms].



Rys. 2. Charakterystyki : a) trajektorii rzeczywistej statku, b) pozycji i kursu statku, z różnymi algorytmami alokacji (DA - linia przerywana, CGI-QR - linia czarna, CGI-SVD - linia szara ciągła, CGI-MP - linia szara przerywana).



Rys. 3. Charakterystyki: a) składowych wektora prędkości statku, b) sygnałów sterujących nastawami pędników, z różnymi algorytmami alokacji ( DA - linia przerywana, CGI-QR - linia czarna, CGI-SVD - linia szara ciągła, CGI-MP - linia szara przerywana ).

## 5. WNIOSKI KOŃCOWE

Biorąc pod uwagę analizowane metody kontroli alokacji pędników CGI-QR, CGI-SVD, CGI-MP, DA, uzyskujemy ten sam efekt sterowania w rozpatrywanym układzie nie uwzględniającym dynamiki przestawiania urządzeń wykonawczych jednostki oraz ograniczeń na prędkość zmiany sygnałów sterujących. Mianowicie w każdym przypadku otrzymujemy ten sam wypadkowy wektor sił i momentu działający na kadłub statku i wywołujący jego ruch. Jednakże nie wszystkie algorytmy dają ten sam efekt ekonomiczny pracy układu. Pomimo tych samych wartości wypadkowego wektora sił i momentu, charakterystyki sygnałów sterowania mogą się różnić, co do wartości i aktywności, w zależności od zastosowanej metody alokacji. Ma to istotne znaczenie podczas stabilizacji statku i manewrowaniu przy niskiej prędkości ruchu, ponieważ sygnały sterujące wpływają na efektywność pracy urządzeń wykonawczych, zużycie paliwa. Należy również pamiętać, że koszt wychylenia płetwy sterowej jest minimalny w porównaniu z kosztami pracy napędu głównego i steru tunelowego. Nie jest to uwzględnione w niniejszej pracy.

## 6. BIBLIOGRAFIA

1. Bodson M., Evaluation of optimization methods for control allocation, *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 25, No. 4, pp. 703–711 (2002)
2. Durham W., Constrained Control Allocation, *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 16, No. 4 (1993)
3. Fossen, T.I., Strand, J.P., Passive nonlinear observer design for ships Using Lyapunov Methods: Experimental Results with a Supply vessel, *Automatica*, Vol. 35, No.1 (1999)
4. Godhavn J.M, Fossen T.I., Berge S.P., Non-linear and adaptive backstepping designs for tracking control of ships, *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, No.12 (8), pp. 649–670 (1998)
5. Shi X., Wei Y., Ning J., Fu M. Constrained Control Allocation using Cascading Generalized Inverse for Dynamic Positioning of Ships, *Proc. of the 2011 IEEE International Conference on Mechatronics and Automation*, pp. 1636–1640, Beijing, China (2011)
6. Witkowska A., Dynamic Positioning System with Vectorial Backstepping Controller, *Proc. of 18th International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics*, pp. 842–847 (2013)

## CONTROL ALLOCATION METHODS IN DYNAMIC POSITIONING SYSTEM USING PSEUDOINVERSE

**Key-words:** control allocation, dynamic positioning, pseudoinverse.

Control allocation systems are an important part of the dynamic positioning of ships. They define the control signals based on generalized vector of forces longitudinal, transverse and torque derived from the control law. The article presents selected control allocation algorithms, based on different ways of determining the pseudo inverse matrix to optimize the operation of these devices, and discusses the economic efficiency and control quality of the dynamic positioning system.