

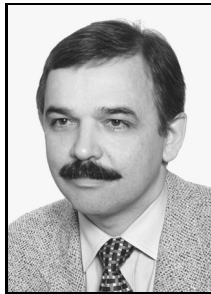
Eligiusz PAWŁOWSKI, Dariusz ŚWISULSKI

POLITECHNIKA LUBELSKA, WYDZIAŁ ELEKTROTECHNIKI I INFORMATYKI, Nadbystrzycka 38A, 20-618 Lublin
 POLITECHNIKA GDAŃSKA, WYDZIAŁ ELEKTROTECHNIKI I AUTOMATYKI, Narutowicza 11/12, 80-233 Gdańsk

Zastosowanie metody najmniejszych kwadratów do pomiaru częstotliwości średniej sygnałów o małej stromości zboczny w obecności zakłóceń

Dr inż. Eligiusz PAWŁOWSKI

Adiunkt w Katedrze Automatyki i Metrologii na Wydziale Elektrotechniki i Informatyki Politechniki Lubelskiej. Autor lub współautor ponad 60 publikacji w czasopiśmie naukowych oraz materiałach konferencyjnych. Obszar zainteresowań naukowych obejmuje metrologię wielkości elektrycznych i nieelektrycznych, w szczególności pomiary częstotliwości i czasu, przetwarzanie sygnałów pomiarowych, systemy pomiarowe z częstotliwościowym nośnikiem informacji.



e-mail: e.pawlowski@pollub.pl

Dr hab. inż. Dariusz ŚWISULSKI

Profesor w Katedrze Metrologii i Systemów Informatycznych na Wydziale Elektrotechniki i Automatyki Politechniki Gdańskiej. Autor lub współautor ponad stu pięćdziesięciu artykułów w czasopiśmie naukowych lub materiałach konferencyjnych oraz ponad dwudziestu wdrożeń w przemyśle. Obszar zainteresowań obejmuje metrologię, systemy pomiarowe, przetwarzanie sygnałów pomiarowych.



e-mail: d.swisulski@ely.pg.gda.pl

Streszczenie

Cyfrowe pomiary częstotliwości bazują na dwóch podstawowych metodach: zliczaniu okresów sygnału w zadanym czasie oraz wyznaczaniu czasu trwania jednego lub kilku okresów tego sygnału. Przy pomiarach małych częstotliwości stosuje się drugą z nich, a wtedy dla sygnałów o małej stromości zboczny w obecności zakłóceń istotnym problemem staje się błąd powstający w układach wejściowych, wynikający z niepewności wyznaczenia początku i końca okresu sygnału mierzonego. W referacie analizuje się możliwość zmniejszenia błędów pomiaru częstotliwości średniej sygnału o małej stromości zboczny w obecności zakłóceń poprzez zastosowanie metody najmniejszych kwadratów MNK do ograniczenia błędów wnoszonych przez wejściowe układy formujące. Przedstawia się proponowaną strukturę układu pomiarowego, wyprowadzone zależności analityczne i wyniki przeprowadzonych eksperymentów symulacyjnych.

Słowa kluczowe: częstotlicznik cyfrowy, pomiar częstotliwości średniej, metoda najmniejszych kwadratów.

Use of the least mean squares method for measuring the average frequency of signals with low slope steepness in the presence of noise

Abstract

Digital frequency measurements are usually performed using either of two methods: counting the signal periods in a given time or determining the duration of one (or more) signal period. There are also variations of these methods that ensure short measurement times and low error values. In order to ensure the correct operation of measuring systems, all such methods require a signal shape with steep slopes and a period identical to that of the measured signal. When measuring signals with low slope steepness in the presence of noise, an additional measurement error appears as a result of jittering of slopes that delimit the successive periods of the measured signal. This error is usually called the trigger error and is proportional to the effective value of noise and inversely proportional to the steepness of the signal slopes. This poses an essential problem when measuring the frequency of sinusoidal signals, for example the frequency of voltage in the electric grid. A known and widely used method for limiting this error is measurement of the duration of multiple periods, which allows decreasing the error proportionally to the number of the averaged periods. This paper analyses the possibility of further increasing the accuracy of measuring the frequency of signals with low slope steepness in the presence of noise by using the least mean squares method LMS to limit the trigger errors. A frequency is here defined as a derivative of the signal phase with respect to time. To determine the average frequency, one uses a simple regression slope which approximates the phase based on successive moments in which the signal passes through zero level for several periods. This paper presents the proposed measurement system layout, the derived analytical relationships and the results of conducted experiments.

Keywords: electronics counter, average frequency measurement, least mean square method.

1. Wstęp

Pomiary częstotlicznikiem cyfrowym mogą być realizowane na dwa sposoby: poprzez zliczanie okresów sygnału we wzorcowym przedziale czasu lub poprzez zliczanie impulsów o częstotliwości wzorcowej w czasie równym okresowi sygnału mierzonego [1]. W obu sposobach błąd pomiaru częstotliwości ma trzy składowe: błąd wzorca, kwantowania oraz wyzwalania. Błąd względny wzorca jest mały i zazwyczaj nie przekracza wartości 10^{-6} , dzięki czemu w praktyce może być pominięty. Błąd kwantowania również może być utrzymany na niskim poziomie poprzez zastosowanie odpowiedniego trybu pracy, zależnie od mierzonej częstotliwości. Przykładowo, pomiar częstotliwości energetycznej 50Hz poprzez zliczanie okresów w czasie 1s jest obciążony bardzo dużym błędem kwantowania 2%. Można go zmniejszyć wydłużając czasu trwania pomiaru lub realizując tryb pomiaru okresu. Przy typowej wartości częstotliwości wzorcowej współczesnych częstotliczników $f_w=10$ MHz, względny błąd kwantowania dla jednego okresu sygnału o częstotliwości 50Hz wyniesie tylko $5 \cdot 10^{-6}$, czyli również będzie pomijalnie mały. Jednak w tym przypadku istotny staje się błąd wyzwalania, związany z formowaniem sygnału sterującego główną bramką częstotlicznika. Błąd ten jest zależny od stosunku sygnału do szumu SNR oraz od szybkości narastania sygnału w punkcie przełączania komparatora układu kształtującego sygnał wejściowy częstotlicznika. Typowo błąd ten szacowany jest na 0,3% dla sygnału sinusoidalnego przy stosunku SNR=40 dB [2]. W wielu zastosowaniach jest to wartość zbyt duża [3] i dlatego opracowano różne sposoby jego ograniczenia. W artykule proponuje się zastosowanie metody najmniejszych kwadratów MNK do aproksymacji fazy sygnału w punktach jego przejścia przez poziom zerowy z tym samym znakiem pochodnej.

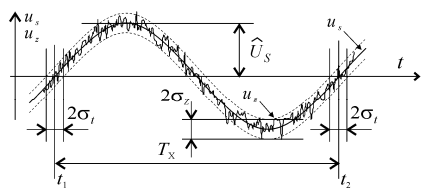
2. Pomiar okresu zaszumionego sygnału

Na rysunku 1 przedstawiono zasadę pośredniego pomiaru częstotliwości sygnału poprzez pomiar jego okresu. Sygnał sinusoidalny u_s o częstotliwości f_x :

$$u_s(t) = \hat{U}_s \sin(2\pi f_x t + \varphi_0) \quad (1)$$

posiada okres T_x wyznaczony przez dwie najbliższe sobie chwile t_1, t_2 , w których sygnał ten przekracza poziom zerowy z dodatnim znakiem pochodnej. Okres $T_x = t_2 - t_1$ mierzony jest metodą cyfrową poprzez wypełnienie go N_x impulsami o częstotliwości wzorcowej f_w . Częstotliwość f_x sygnału u_s wynosi więc:

$$f_x = 1/T_x = f_w/N_x \quad (2)$$



Rys. 1. Pomiar okresu sygnału w obecności zakłóceń
Fig. 1. Measurement of the signal period in the presence of noise

Dla sygnału z szumem dokładne wyznaczenie chwil t_1 , t_2 jest niemożliwe, a wynik pomiaru jest obarczony dodatkowo błędem wyzwalania. Jeśli mierzony jest okres sygnału u_z , będącego sumą sygnału sinusoidalnego u_s oraz szumu z o rozkładzie normalnym z zerową wartością oczekiwaną i odchyleniem standardowym σ_z :

$$u_z(t) = u_s(t) + z(t) = \hat{U}_s \sin(2\pi f_x t + \varphi_0) + z(t), \quad (3)$$

to chwile t_1 , t_2 są zmiennymi losowymi [4] o odchyleniu standardowym σ_t :

$$\sigma_t = \sigma_z / S, \quad (4)$$

gdzie S jest szybkością narastania sygnału u_s (stromością zbrocza) w punkcie jego przejścia przez poziom zerowy:

$$S = \left. \frac{du_s}{dt} \right|_{t=t_1, t_2} = 2\pi f_x \hat{U}_s \cos(2\pi f_x t + \varphi_0) \Big|_{t=t_1, t_2} = 2\pi f_x \hat{U}_s. \quad (5)$$

Dla wartości skutecznej sygnału równej \tilde{U}_s stosunek SNR wyniesie:

$$\text{SNR} = \tilde{U}_s / \sigma_z = \hat{U}_s / (\sqrt{2}\sigma_z) \quad (6)$$

i na podstawie (4), (5):

$$\sigma_t = 1 / (2\sqrt{2}\pi f_x \text{SNR}). \quad (7)$$

Odchylenie standardowe σ_T okresu T_x wynika z niepewności wyznaczenia jego początku t_1 i końca t_2 . Ponieważ okres T_x jest różnicą dwóch zmiennych losowych $t_2 - t_1$, to uwzględniając zależność na wariancję sumy zmiennych losowych, otrzymamy:

$$\sigma_T^2 = 2\sigma_t^2(1-r), \quad (8)$$

gdzie r jest współczynnikiem korelacji między chwilami t_1 , t_2 . Dla zakłócenia z w postaci szumu białego o nieograniczonym paśmie oraz dla szumu o paśmie ograniczonym do $f_g \geq 10f_x$ możemy w praktyce przyjąć $r=0$ [5] i odchylenie standardowe okresu T_x :

$$\sigma_T = \sqrt{2}\sigma_t = 1 / (2\pi f_x \text{SNR}), \quad (9)$$

a względny błąd średniokwadratowy pomiaru okresu wyniesie:

$$\delta_T = \sigma_T / T_x = 1 / (2\pi \text{SNR}). \quad (10)$$

Dla sygnałów sinusoidalnych błąd (10) nie zależy od mierzonej częstotliwości f_x , a jedynie od SNR. Przykładowo, dla SNR=100 (40dB) wyniesie on 0,16%. Błąd ten można zmniejszyć poprzez pomiar średniego okresu. Na podstawie n kolejnych chwil t_1, t_2, \dots, t_n przejścia sygnału u_z przez poziom zerowy można wyznaczyć wartość średnią okresu $T_x = (t_n - t_1) / (n - 1)$. Otrzymany wynik pomiaru będzie obarczony błędem średniokwadratowym δ_{AVG} o wartości $(n - 1)$ razy mniejszej od δ_T [2]:

$$\delta_{\text{AVG}} = \sigma_T / ((n - 1)T_x) = 1 / (2(n - 1)\pi \text{SNR}). \quad (11)$$

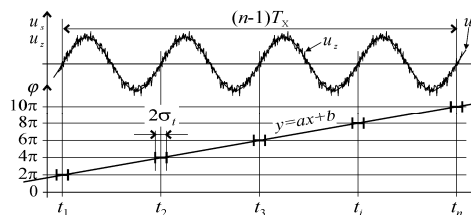
Inne metody wykorzystują cyfrowe przetwarzanie próbek wartości chwilowych sygnału u_z . Chwile przejścia sygnału przez poziom zerowy można interpolować z kilku sąsiednich próbek [3]. Splot sygnału z funkcją Walsh'a umożliwia wyznaczenie odchylenia częstotliwości od wartości znamionowej [6], podobnie jak korelacja z funkcjami sinus/cosinus i dekompozycja na składowe ortogonalne oraz metoda demodulacji [7]. Kolejne metody wykorzystują drugą pochodną funkcji sinus [8] oraz optymalizację rozwiązania równania różniczkowego drugiego rzędu [9]. Metody bazujące na FFT [10] wykorzystują efekt przecieku widma, przemieszczanie okna pomiarowego wzdłuż osi czasu oraz chwilową fazę wirującego wskaźnika napięcia [11] lub rozwinięcie funkcji sinus w szereg Taylora [12].

3. Zastosowanie MNK do aproksymacji fazy sygnału w obecności szumu

Dla sinusoidalnego sygnału u_s (1) jego faza φ jest liniową funkcją czasu przyrastającą z szybkością proporcjonalną do częstotliwości f_x , osiągając wartości równe wielokrotności kąta pełnego 2π w kolejnych chwilach t_1, t_2, \dots, t_n przejścia sygnału u_s przez poziom zerowy (rys.2). Częstotliwość f_x sygnału u_s można więc wyznaczyć na podstawie pochodnej [13]:

$$f_x = \frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{a}{2\pi}, \quad (12)$$

gdzie a jest współczynnikiem kierunkowym linii prostej opisującej zmienność fazy φ sygnału jako funkcji czasu przy założeniu, że częstotliwość f_x w czasie pomiaru nie uległa zmianie. W przeciwnym razie należy uwzględnić błędy dynamiczne [14].



Rys. 2. Pomiar średniej częstotliwości z aproksymacją fazy MNK
Fig. 2. Measurement of the average frequency with LMS phase interpolation

Dla sygnału u_z (3) zakłóconego szumem z chwil t_1, t_2, \dots, t_n są zmiennymi losowymi o odchyleniu standardowym σ_t (4), więc można zastosować metodę najmniejszych kwadratów do estymacji współczynnika kierunkowego a regresji liniowej. Ponieważ zmienna niezależna (czas t) jest zmienną losową, a zmienna zależna (faza φ) przyjmuje z góry założone wartości kąta $2\pi i$, to należy rozpatrzyć przypadek regresji odwrotnej, dla której współczynnik kierunkowy a jest opisany zależnością:

$$a = \frac{n \sum_{i=1}^n y_i^2 - (\sum_{i=1}^n y_i)^2}{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}, \quad (13)$$

a wyraz wolny b prostej regresji ze względu na postać pochodnej (12) jest nieistotny. Faza początkowa φ_0 sygnału u_s (1) nie wpływa na wartość współczynnika kierunkowego a prostej regresji, może być więc dowolna i dla wygody obliczeń przyjmujemy $\varphi(t_1) = 2\pi$. Wartości x_i odpowiadają kolejnym wartościom t_i , a wartości y_i są równe wielokrotnościom kąta pełnego 2π . Podstawiając więc do (13) odpowiednio:

$$x_i = t_i, y_i = 2\pi i \quad (14)$$

oraz uwzględniając wzory na sumy szeregów liczbowych:

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad (15)$$

po przekształceniach otrzymamy poszukiwaną zależność na częstotliwość f_x jako funkcję n kolejnych wartości czasów t_i :

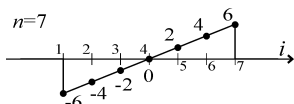
$$f_x = \frac{a}{2\pi} = \frac{n(n^2-1)}{6 \sum_{i=1}^n (2i-n-1)t_i} = \frac{k_n}{\sum_{i=1}^n c_i t_i}. \quad (16)$$

Współczynniki k_n i c_i są całkowite oraz jednoznacznie określone tylko poprzez liczbę punktów pomiarowych n uwzględnianych w obliczeniach. W tabeli 1 zestawiono wartości tych współczynników dla kilku przykładowych wartości n .

Tab. 1. Wartości współczynników k_n, c_i dla metody najmniejszych kwadratów (16)
Tab. 1. Values of the coefficients k_n, c_i for the least mean squares method (16)

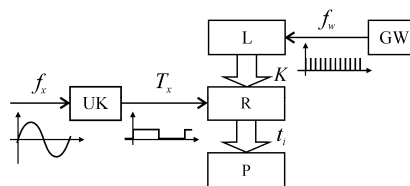
n	k_n	c_i															
4	10	-3	-1	1	3												
7	56	-6	-4	-2	0	2	4	6									
9	120	-8	-6	-4	-2	0	2	4	6	8							
10	165	-9	-7	-5	-3	-1	1	1	3	5	7	9					
15	560	-14	-12	-10	-8	-6	-4	-2	0	2	4	6	8	10	12	14	
16	680	-15	-13	-11	-9	-7	-5	-3	-1	1	3	5	7	9	11	13	15

Zależność (16) wskazuje, że w rozpatrywanym przypadku MNK wymaga wagowego uśredniania kolejnych wartości czasów t_i ze współczynnikami c_i . Przykładowy kształt funkcji wagowej dla $n=7$ przedstawiono na rysunku 3. Zastosowane funkcje wagowe są więc piłokształtne z zerową wartością średnią.



Rys. 3. Współczynniki funkcji wagowej realizującej MNK dla $n=7$
Fig. 3. Coefficients of the weighting function implementing LMS for $n=7$

Na rysunku 4 przedstawiono schemat układu pomiarowego umożliwiającego realizację rozpatrywanej metody. Sygnał wejściowy o częstotliwości f_x przetwarzany jest w układzie kształtującym UK na dwuwartościowy sygnał logiczny, którego kolejne zbocza są generowane w chwilach, w których sygnał wejściowy przekracza poziom zerowy. Układ kształtujący UK powinien posiadać histerezę o szerokości co najmniej równej $3\sigma_x$. Narastające zbocza sygnału logicznego wyznaczają kolejne przyrosty fazy φ sygnału o 2π i są podane na wejście zatraskujące w rejestrze R aktualny stan K licznika L, zliczającego impulsy o częstotliwości f_w z generatora wzorcowego GW. Licznik L generuje liniową skalę czasu, a kolejne uzyskiwane na wyjściu rejestru R wartości czasów t_i są zapamiętywane w pamięci P w celu dalszej ich obróbki zgodnie z zależnością (16). Układ może pracować cyklicznie, z zerowaniem licznika L po zapamiętaniu każdego kolejnych n wartości czasów t_i , lub w sposób ciągły po zastosowaniu licznika L o wystarczająco dużej pojemności i odpowiedniej programowej korekcie zatraskiwanych w rejestrze R wartości. Przedstawiony układ można zrealizować wykorzystując mikrokontroler jednocukładowy wyposażony w sprzętowe mechanizmy odczytu timerów/liczników "w locie". Odpowiednią strukturę posiadają również niektóre specjalizowane karty pomiarowe, np: CTM-PER firmy Keithley lub PCI-6602 National Instruments.



Rys. 4. Schemat blokowy układu pomiarowego
Fig. 4. Block diagram of the measurement system

4. Analiza właściwości proponowanej metody

Do oceny właściwości metrologicznych proponowanej metody zastosowano względy błąd średniokwadratowy δ_{RMS} , którego wartość jest taka sama dla pomiaru częstotliwości f_x i okresu T_x :

$$\delta_{\text{RMS}} = \frac{\sigma_f}{f_x} \cdot 100\% = \frac{\sigma_T}{T_x} \cdot 100\%. \quad (17)$$

Ze względu na postać (16) wygodniej jest analizować okres T_x :

$$T_x = \frac{6}{n(n^2-1)} \sum_{i=1}^n (2i-n-1)t_i = \frac{1}{k_n} \sum_{i=1}^n c_i t_i. \quad (18)$$

Uzyskany za pomocą MNK estymator okresu T_x (18) jest kombinacją liniową czasów t_i , które są zmienną losową o odchyleniu standardowym σ_i (4). Ponieważ wartości szumu $z(t)$ w kolejnych chwilach t_i są ze sobą nieskorelowane, to:

$$\text{Var}(T_x) = \text{Var}\left(\frac{1}{k_n} \sum_{i=1}^n c_i t_i\right) = \text{Var}(t_i) \frac{1}{k_n^2} \sum_{i=1}^n c_i^2. \quad (19)$$

Uwzględniając zależności na k_n i c_i wynikające z (16) oraz na σ_i (7), odchylenie standardowe σ_{LMS} okresu (18) wyznaczonego MNK wyniesie:

$$\sigma_{\text{LMS}} = \sigma_i \sqrt{\frac{12}{n(n^2-1)}} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi} f_x \text{SNR}} \sqrt{\frac{12}{n(n^2-1)}} \quad (20)$$

i ostatecznie:

$$\delta_{\text{LMS}} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi} \text{SNR}} \sqrt{\frac{12}{n(n^2-1)}}. \quad (21)$$

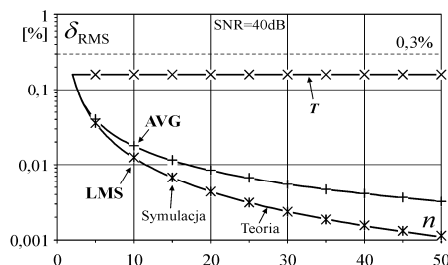
Na rysunku 5 przedstawiono wartości względnych błędów średniokwadratowych (21) obliczone dla $\text{SNR}=100$ (40 dB), w zależności od liczby n uwzględnionych w pomiarze chwil czasowych t_i (linia LMS) oraz dla porównania wartości błędów pomiaru pojedynczego okresu δ_T (10) oraz okresu średniego δ_{AVG} (11). Proponowana metoda zapewnia zmniejszenie wartości błędów względem pomiaru jednego okresu w stosunku zależnym od liczby n , co przedstawiono na rysunku 6 w postaci stosunków odchylen standardowych pojedynczego okresu σ_T (9), okresu średniego σ_{AVG} :

$$\sigma_{\text{AVG}} = \sigma_i \frac{\sqrt{2}}{n-1} \quad (22)$$

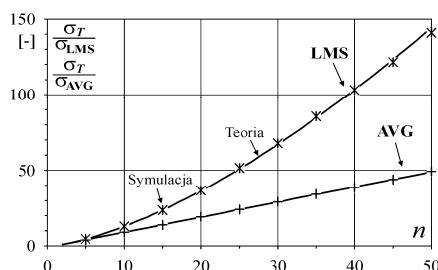
oraz okresu σ_{LMS} wyznaczonego za pomocą MNK (20). Zastosowanie MNK zapewnia więc, przy tym samym czasie pomiaru, dodatkowe zmniejszenie błędów względem pomiaru średniego okresu w stosunku równym:

$$\frac{\sigma_{AVG}}{\sigma_{LMS}} = \sqrt{\frac{n(n+1)}{6(n-1)}} \quad (23)$$

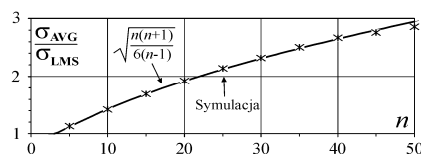
Zależność tą przedstawiono na rysunku 7.



Rys. 5. Względny błąd średniokwadratowy pomiaru okresu i częstotliwości
Fig. 5. The relative RMS period and the frequency measurement error



Rys. 6. Skuteczność tłumienia zakłóceń MNK i metody AVG
Fig. 6. The effectiveness in noise suppression of the LMS and AVG method



Rys. 7. Porównanie skuteczności MNK i metody AVG
Fig. 7. Comparison of the effectiveness of the LMS and AVG method

5. Symulacyjna weryfikacja metody

W celu weryfikacji wyprowadzonych zależności analitycznych oraz dla potwierdzenia właściwości przedstawionej metody przeprowadzono odpowiednie badania symulacyjne, zakładając sinusoidalny sygnał (1) o częstotliwości $f_x=50$ Hz zakłócony szumem o rozkładzie normalnym z zerową wartością oczekiwaną, przy SNR=40 dB (6). Wygenerowano 10000 wartości czasów t_i równo-odległych od siebie o 20 ms i dodano do nich zmienną losową symulującą szum o odchyleniu standardowym $\sigma_f=22,5$ μ s zgodnie z zależnością (7). Obliczono kolejne okresy $T_i = t_i - t_{i-1}$ tak zaszumionego sygnału i wyznaczono ich odchylenie standardowe $\sigma_T=32$ μ s, potwierdzające zależność (9). Następnie wyznaczono wartości częstotliwości metodą najmniejszych kwadratów (16) z każdego kolejnych n wartości czasów t_i , ($n=5, 10, 15, \dots, 50$) oraz dla porównania jako odwrotność pojedynczego okresu i odwrotność średniej $n-1$ okresów. Na rysunku 5 przedstawiono na tle zależności analitycznych uzyskane z eksperymentu wartości względnych błędów średniokwadratowych δ_{RMS} dla metody najmniejszych kwadratów (LMS), uśrednionego okresu (AVG) oraz pojedynczego okresu (T). Dla porównania dodatkowo zaznaczono wartość 0,3% błędu granicznego według [2]. Jak widać na rysun-

ku 5, uzyskano wysoką zgodność wyników eksperymentu z zależnościami teoretycznymi. Na rysunku 6 przedstawiono uzyskaną w eksperymencie skuteczność tłumienia zakłóceń metodą najmniejszych kwadratów (LMS) i średniego okresu (AVG), a na rysunku 7 stosunek (23) tych dwóch wartości również potwierdzający wprowadzone zależności teoretyczne.

6. Podsumowanie

W cyfrowych pomiarach częstotliwości sygnałów o małej stromości zboczy w obecności zakłóceń istotnym składnikiem błędów jest błąd wyzwalania wnoszony przez wejściowe układy kształtujące częstotliciomierza. Błąd ten można istotnie zmniejszyć wyznaczając częstotliczość (16) ze współczynnika kierunkowego regresji liniowej (13) wyznaczonego MNK na podstawie chwil przejścia sygnału przez poziom zerowy. Przedstawiono najważniejsze zależności analityczne, w tym na błąd średniokwadratowy (21) oraz przeprowadzono badania symulacyjne potwierdzające korzystne właściwości metody.

7. Literatura

- [1] Fundamentals of the electronic counters. Application Note 200, Hewlett Packard Co., 1997.
- [2] Fundamentals of time interval measurements. Application Note 200-3, Hewlett Packard Co., 1997.
- [3] Szafran J., Wiszniewski A.: Algorytmy pomiarowe i decyzyjne cyfrowej automatyki elektroenergetycznej. WNT, Warszawa 2001.
- [4] Sahner G.: Wstęp do miernictwa cyfrowego. WKiŁ, Warszawa 1982.
- [5] Sydenham P.H. (red.): Podręcznik metrologii, tom 1, podstawy teoretyczne. WKiŁ, Warszawa 1988.
- [6] Łobos T.: Nonrecursive methods for real-time determination of basic waveforms of voltages and currents. IEEE Proceedings, Vol. 136, November 1989, s. 347-351.
- [7] Akke M.: Frequency Estimation by Demodulation of Two Complex Signals. IEEE Transaction on Power Delivery, Vol. 12, No. 1, Jan. 1997, s. 157-163.
- [8] Begović M.M., Phadke A.G.: Frequency Tracking in Power Networks in the Presence of Harmonics. IEEE Transaction on Power Delivery, Vol. 8, No. 2, April 1993, s. 480-486.
- [9] Girgis A.A., Ham F.M.: A New FFT - Based Digital Frequency Relay for Load Shedding; IEEE Transaction on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-101 Feb. 1982, s. 433-439.
- [10] Sachdev M.S., Giray M.M.: A Least Error Squares Technique for Determining Power System Frequency. IEEE Transaction on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-104, No. 2, Feb. 1985, s. 437-443.
- [11] Phadke A.G., Thorp J.S., Adamiak M.G.: A new measuring technique for tracking voltage phasors, local system frequency and rate of change of frequency. IEEE Transaction on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-102, No. 5, May 1983, s. 1025-1033.
- [12] Pawłowski E.: Zastosowania algorytmów DSP do pomiarów częstotliwości sygnałów. Materiały. IV Szkoła-Konferencja Metrologia Wspomagana Komputerowo MWK '99, Wyd. BILGRAF S.C. Warszawa 1999, s. 123-130.
- [13] Boashash B.: Estimating and Interpreting The Instantaneous Frequency of a Signal-Part 1: Fundamentals. Proceedings of The IEEE, Vol. 80, No. 4, April 1992, s. 520-538.
- [14] Świsulski D.: Analiza dokładności cyfrowego pomiaru okresu zakłóconego napięcia sinusoidalnego w warunkach dynamicznych. Materiały. Krajowy Kongres Metrologii KKM 2001, Warszawa 24-27 czerwca 2001r., s. 497-500.

otrzymano / received: 29.01.2013

przyjęto do druku / accepted: 01.03.2013

artykuł recenzowany / revised paper