

# Zastosowanie odcinków nieliniowej krzywizny w torze zwrotnym rozjazdu kolejowego

## The application of nonlinear curvature sections in the turnout diverging track



Władysław Koc

Prof. dr hab. inż.

Politechnika Gdańska

wladyslaw.koc@pg.gda.pl

**Streszczenie:** W pracy została przedstawiona analityczna metoda kształtowania toru zwrotnego rozjazdu kolejowego posiadającego na swojej długości odcinki nieliniowej krzywizny. Odcinki te służą łagodzeniu wykresu krzywizny w skrajnych strefach rozjazdu. W omawianej metodzie dokonano identyfikacji problemu rozkładu krzywizny za pomocą równań różniczkowych. Uzyskane rozwiązania mają charakter uniwersalny; m. in. pozwalają na przyjmowanie dowolnych wartości krzywizny na początku i na końcu rozjazdu. Analizie porównawczej poddano dwa przypadki zastosowania krzywizny nieliniowej oraz odpowiadające przypadki z krzywizną liniową. Analiza wybranych wariantów wskazała na korzystny przebieg krzywizny w wariancie nieliniowym, który oprócz łagodnego przejścia w rejonach skrajnych łuku kołowego cechuje zerowa krzywizna na obydwu końcach układu geometrycznego.

**Słowa kluczowe:** Rozjazdy kolejowe; Modelowanie krzywizny; Analiza rzędnych poziomych

**Abstract:** Relationship marketing involves negotiated service promise, which is characterized by: the reliability of trip in the desired direction, using of suitable means of transport at a certain price, expected conditions of trip in right time. The universality of the principles of customer service determined the adoption of marketing orientation by the Public Transport Authority in Gdynia. It's made by marketing research and forming of public transport services based on its results. PTA in Gdynia planning services, takes into account not only the needs of existing customers (passengers), but also the needs of people using private cars. This makes possible to increase quality of PT services. The rule: "right the first time" is the main determinant of Public Transport Authority in Gdynia.

**Keywords:** Railway turnouts; Curvature modelling; Analysis of horizontal ordinates

W typowym ukształtowaniu geometrycznym toru zwrotnego w rozjeździe kolejowym (zwyczajnym) stosuje się pojedynczy łuk kołowy bez krzywych przejściowych. Takie rozwiązanie nie jest stosowane na szlakach kolejowych i oznacza konieczność ograniczenia prędkości jazdy pociągów. Wynika to z występowania miejsc gwałtownej, skokowej zmiany rzędnych wykresu krzywizny na początku i końcu rozjazdu. W ostatnim okresie w niektórych krajach, w szczególności na kolejach dużych prędkości, dąży się do wyłączenia wykresu krzywizny w tych rejonach. Uzyskuje się to przez wprowadzenie tzw. „odcinków kłotojdy” po obu stronach łuku kołowego, na których krzywizna zmienia się w sposób liniowy, często jednak nie osiągając w punktach skrajnych wartości zerowych [2, 8, 9, 10].

W przypadku standardowych rozjazdów zmiana eksploatowanego rozjazdu na rozjazd o większym promieniu w torze zwrotnym prowadzi najczęściej do konieczności zwiększenia rozstawu torów. W przypadku rozjazdów o zmiennej krzywiznie – ze względu na indywidualny charakter ich projektowania – możliwe jest zastosowanie danego rozjazdu do wymagań lokalnych. Jest to szczególnie istotne w połączeniach torów równoległych, gdzie podstawową kwestię stanowi zachowanie odpowiedniego rozstawu torów.

Długość toru zwrotnego zostaje tutaj podzielona na trzy strefy (rys. 1):

- strefę początkową o długości  $l_1$ , posiadającą krzywiznę liniową,
- strefę środkową o długości  $l_2$ , posiadającą krzywiznę ustaloną,
- strefę końcową o długości  $l_3$ , po-

siadającą krzywiznę liniową.

Oczywiście, możliwe są tutaj różne warianty, związane z wartościami krzywizny oraz długościami poszczególnych stref.

W strefie początkowej, dla  $l \in \langle 0, l_1 \rangle$ , krzywizna narasta w sposób liniowy od  $k_1 = 1/R_1$  (lub  $k_1 = 0$ ) do  $k_2 = 1/R_2$ , w strefie środkowej, dla  $l \in \langle l_1, l_1 + l_2 \rangle$ , jest stała i równa  $k_2 = 1/R_2$ , zaś w strefie końcowej, dla  $l \in \langle l_1 + l_2, l_1 + l_2 + l_3 \rangle$ , linio-wo maleje od  $k_2 = 1/R_2$  do  $k_3 = 1/R_3$  (lub  $k_3 = 0$ ).

Modelowanie krzywizny na długości toru zwrotnego rozjazdu pozwala stworzyć jej zapis analityczny w postaci funkcji  $k(l)$ , gdzie parametr  $l$  określa położenie danego punktu na długości krzywej. Równania współrzędnych szukanego połączenia możemy zapisać w postaci parametrycznej [3]:

$$x(l) = \int \cos \theta(l) dl \quad (1)$$

$$y(l) = \int \sin \theta(l) dl \quad (2)$$

Funkcję kąta nachylenia stycznej  $\theta(l)$  określamy na podstawie wzoru

$$\theta(l) = \int k(l) dl \quad (3)$$

Powszechnie stosowanym (m. in. w komercyjnych programach wspomagających projektowanie [1, 7]) sposobem wyznaczania współrzędnych  $x(l)$  i  $y(l)$  jest całkowanie numeryczne funkcji  $\cos\theta(l)$  i  $\sin\theta(l)$ . Z praktycznego punktu widzenia daje ono wystarczającą dokładność. Metoda ta ma jednak jedną podstawową słabość - każdy przypadek geometryczny musi być rozpatrywany odrębnie i wprowadzanie jakichkolwiek uogólnień jest tutaj bardzo utrudnione. Jeśli chcemy uzyskać możliwość szerszego spojrzenia na problem, powinniśmy dysponować metodą analityczną, która z założenia posiada charakter ogólny i pełny.

Analityczne rozwiązanie problemu dla przypadku stosowania odcinków krzywizny liniowej (czyli tzw. „odcinków kłotoidy”) zostało przedstawione w pracy [4]. Warto by jeszcze rozpa-

tryć zastosowanie odcinków nieliniowej krzywizny i temu właśnie zagadnieniu zostało poświęcone niniejsze opracowanie. Znajomość odpowiednich wzorów analitycznych umożliwiła przeprowadzenie w końcowej części pracy analizy porównawczej wybranych wariantów – zarówno z odcinkami krzywizny liniowej, jak i nieliniowej.

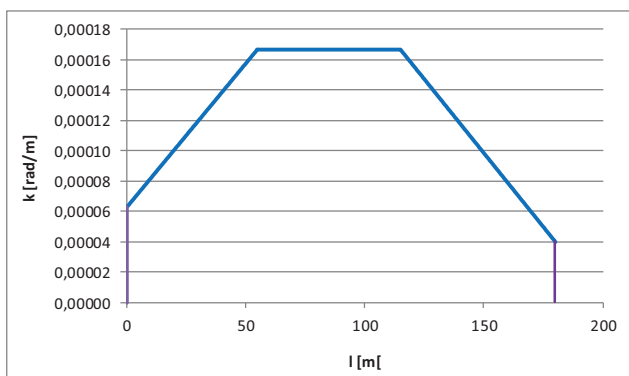
## Rozwiązanie analityczne przy łagodzeniu krzywizny w skrajnych strefach rozjazdu

Przebieg krzywizny pokazany na rysunku 1 nie jest, oczywiście, rozwiązaniem idealnym. Warto by jeszcze rozpatrzyć możliwości wyłagodzenia wejścia w łuk rozjazdu (po jego obydwu stronach) oraz – dodatkowo – wyzerowania wartości krzywizny w punktach skrajnych układu geometrycznego.

## Rozwiązanie problemu dla strefy początkowej

Przyjmujemy warunki brzegowe

$$\begin{cases} k(0) = k_1 & k(l_1) = k_2 \\ k'(0) = C \frac{k_2 - k_1}{l_1} & k'(l_1) = 0 \end{cases} \quad (4)$$



1. Wykres krzywizny z odcinkami krzywizny liniowej na długości toru zwrotnego rozjazdu ( $R_1=16000$  m,  $l_1=55$  m,  $R_2=6000$  m,  $l_2=60$  m,  $l_3=65$  m,  $R_3=25000$  m)

i równanie różniczkowe

$$k^{(4)}(l) = 0 \quad (5)$$

zakładając, że współczynnik liczbowy  $C \geq 0$ .

W wyniku rozwiązania problemu różniczkowego (4), (5) otrzymujemy równanie krzywizny

$$k(l) = k_1 + \frac{C}{l_1} (k_2 - k_1) l - \frac{2C-3}{l_1^2} (k_2 - k_1) l^2 + \frac{C-2}{4l_1^3} (k_2 - k_1) l^3 \quad (6)$$

Funkcja kąta nachylenia stycznej  $\theta(l)$  jest opisana zależnością

$$\theta(l) = k_1 l + \frac{C}{2l_1} (k_2 - k_1) l^2 - \frac{2C-3}{3l_1^2} (k_2 - k_1) l^3 + \frac{C-2}{4l_1^3} (k_2 - k_1) l^4 \quad (7)$$

Jeśli chcemy uzyskać monotoniczny przebieg krzywizny  $k(l)$  na całej długości krzywej, wówczas pochodna  $k'(l)$  musi być dodatnia i jednocześnie druga pochodna  $k''(l)$  ujemna dla  $l \in (0, l_1)$ : (7a).

Jak widać, przebieg funkcji  $k''(l)$  ma charakter liniowy, zatem spełnienie postawionego warunku oznacza, że obowiązuje on na obu końcach przedziału, tj.  $k''(0) \leq 0$  i  $k''(l_1) \leq 0$ . Wynika stąd, że parametr  $C$  musi przyjmować wartości z przedziału  $C \in (1,5; 3)$ .

Z uwagi na relację długości krzywej parametrycznej do długości krzywej o krzywiznie liniowej (tj. uogólnionej kłotoidy) najkorzystniejszym rozwiązaniem wydaje się być parametryczna krzywa przejściowa dla wartości  $C = 1,5$ . Z zależności (6) i (7) otrzymujemy (8) i (9). Na końcu strefy, dla  $l=l_1$ , wartość kąta

$$\theta(l_1) = \frac{3k_1 + 5k_2}{8} l_1$$

Do wyznaczenia równań parametrycznych  $x(l)$  i  $y(l)$  wykorzystuje się procedurę przedstawioną w pracy [3]. Zapisujemy funkcję  $\theta(l)$  w postaci

$$\theta(l) = A_{11} l + A_{12} l^2 + A_{13} l^4$$

gdzie

$$A_{11} = k_1, A_{12} = \frac{3(k_2 - k_1)}{4l_1}, A_{13} = -\frac{k_2 - k_1}{8l_1^3}$$

$$k'(l) = \frac{C}{l_1} (k_2 - k_1) - \frac{4C-6}{l_1^2} (k_2 - k_1) l + \frac{3(C-2)}{l_1^3} (k_2 - k_1) l^2 \geq 0 \quad (7a)$$

$$k''(l) = -\frac{4C-6}{l_1^2} (k_2 - k_1) + \frac{6(C-2)}{l_1^3} (k_2 - k_1) l \leq 0$$

$$k(l) = k_1 + \frac{3}{2l_1} (k_2 - k_1) l - \frac{1}{2l_1^3} (k_2 - k_1) l^3 \quad (8)$$

$$\theta(l) = k_1 l + \frac{3}{4l_1} (k_2 - k_1) l^2 - \frac{1}{8l_1^3} (k_2 - k_1) l^4 \quad (9)$$



i rozwijamy  $\cos\theta(l)$  i  $\sin\theta(l)$  w szereg Maclaurina z wykorzystaniem programu Maxima [6]. Jak się okazuje, w praktyce otrzymane równanie  $x(l)$  można znacznie uprościć, gdyż większość jego wyrazów jest nieistotna. Otrzymujemy następujące równania parametryczne:

$$x(l) = l \quad (10)$$

$$y(l) = \frac{1}{2}A_{11}l^2 + \frac{1}{3}A_{12}l^3 - \frac{1}{24}A_{11}^3l^4 - \frac{1}{10}(A_{11}^2A_{12} - 2A_{13})l^5 \quad (11)$$

## Rozwiązanie problemu dla strefy środkowej

W strefie łuku kołowego, tj. dla  $l \in \langle l_1, l_1 + l_2 \rangle$ , występuje stała krzywizna

$$k(l) = k_2 \quad (12)$$

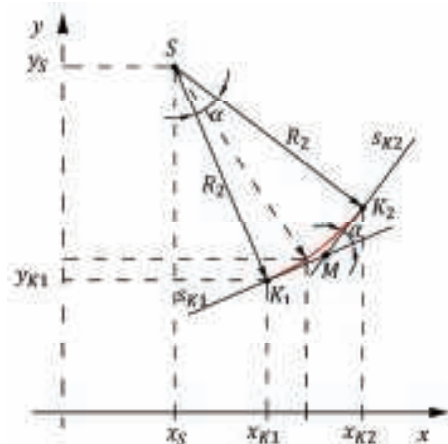
Funkcja  $\theta(l)$  – dla przyjętego  $C = 1,5$  – jest opisana zależnością

$$\theta(l) = -\frac{3k}{8}l_1 + k_2 l \quad (13)$$

Na końcu łuku kołowego, dla  $l = l_1 + l_2$ , kąt

$$\theta(l_1 + l_2) = \frac{3k_1 + 5k_2}{8}l_1 + k_2 l_2$$

Równanie łuku kołowego można zapisać w postaci funkcji jawnej  $y(x)$ . Schemat obrazujący położenie łuku kołowego pokazano na rysunku 2. Przyjmujemy długość łuku kołowego  $l_2$  (mierzoną po samym łuku). Jego promień wynosi  $R_2$ , a nachylenie stycznej w punkcie początkowym  $s_1 = \tan\theta(l_1)$ . Wyznaczamy współrzędne środka łuku – punktu  $S(x_S, y_S)$ .



2. Schemat obrazujący położenie łuku kołowego

$$x_S = x(l_1) - \frac{s_1}{\sqrt{1+s_1^2}}R_2 \quad (14)$$

$$y_S = y(l_1) + \frac{1}{\sqrt{1+s_1^2}}R_2 \quad (15)$$

Równanie łuku kołowego jest następujące:

$$y(x) = y_S - [R_2^2 - (x_S - x)^2]^{\frac{1}{2}} \quad (16)$$

Kąt zwrotu stycznych wynosi  $\alpha = l_2/R_2$ . Kąt nachylenia stycznej do łuku na jego końcu, tj. dla  $x(l_1 + l_2)$ , wynosi  $\theta(l_1 + l_2) = \theta(l_1) + \alpha$ , skąd wynika wartość nachylenia stycznej w tym punkcie.

$$s_2 = \tan[\theta(l_1) + \alpha] \quad (17)$$

Żeby określić współrzędne końca łuku kołowego, należy najpierw wyznaczyć współrzędne punktu  $M$  (rys. 2); otrzymuje się ostatecznie

$$x(l_1 + l_2) = x(l_1) + \tan\frac{\alpha}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{1+s_1^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+s_2^2}} \right) R_2 \quad (16)$$

$$y(l_1 + l_2) = y(l_1) + \tan\frac{\alpha}{2} \left( \frac{s_1}{\sqrt{1+s_1^2}} + \frac{s_2}{\sqrt{1+s_2^2}} \right) R_2 \quad (17)$$

## Rozwiązanie problemu dla strefy końcowej

Przyjmujemy warunki brzegowe

$$\begin{cases} k(l_1 + l_2) = k_2 & k(l_1 + l_2 + l_3) = k_3 \\ k'(l_1 + l_2) = 0 & k'(l_1 + l_2 + l_3) = C \frac{k_3 - k_2}{l_3} \end{cases} \quad (18)$$

i równanie różniczkowe (5). Zakładamy, że współczynnik liczbowy  $C \geq 0$ . Rozwiązanie problemu różniczkowego (5), (18) jest następujące:

$$k(l) = c_1 + c_2 l + c_3 l^2 + c_4 l^3 \quad (19)$$

gdzie: (19a)

Dla  $C = 1,5$  wartości tych współczynników wynoszą: (19b)

a równanie kąta nachylenia stycznej ma postać

$$\theta(l) = c_0 + c_1 l + \frac{1}{2}c_2 l^2 + \frac{1}{3}c_3 l^3 + \frac{1}{4}c_4 l^4 \quad (20)$$

gdzie

gdzie

$$c_0 = \frac{3(k_1 - k_2)}{8}l_1 - \left[ \frac{1}{2l_1^3}(l_1 + l_2)^3 + \frac{1}{8l_1^3}(l_1 + l_2)^4 \right] (k_3 - k_2)$$

Na rysunkach 3 i 4 przedstawiono wykresy krzywizny oraz kąta nachylenia stycznej dla wartości  $C = 1,5$  na długości toru zwrotnego rozjazdu posiadającego odcinki krzywizny nieliniowej, a charakterystyki liczbowe odpowiadające rozjazdowi z rysunku 1.

$$c_1 = k_2 + \left[ \frac{3-C}{l_1^2}(l_1 + l_2)^2 + \frac{2-C}{l_1^3}(l_1 + l_2)^3 \right] (k_3 - k_2)$$

$$c_2 = - \left[ \frac{2(3-C)}{l_1^3}(l_1 + l_2) + \frac{3(2-C)}{l_1^3}(l_1 + l_2)^2 \right] (k_3 - k_2) \quad (19a)$$

$$c_3 = \left[ \frac{3-C}{l_1^3} + \frac{3(2-C)}{l_1^3}(l_1 + l_2) \right] (k_3 - k_2)$$

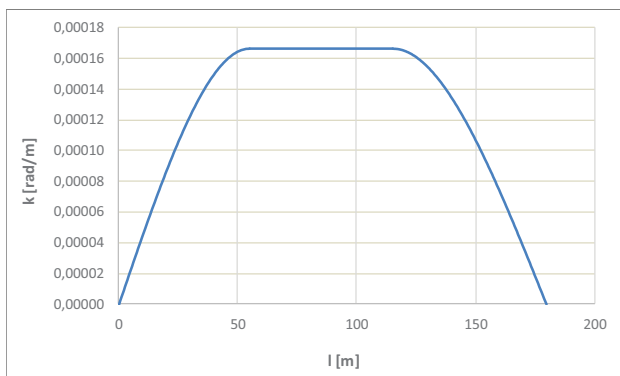
$$c_4 = - \frac{2-C}{l_1^3} (k_3 - k_2)$$

$$c_1 = k_2 + \left[ \frac{3}{2l_1^2}(l_1 + l_2)^2 + \frac{1}{2l_1^3}(l_1 + l_2)^3 \right] (k_3 - k_2)$$

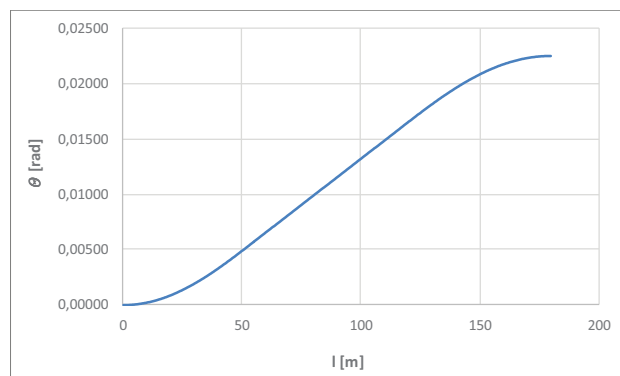
$$c_2 = - \left[ \frac{3}{l_1^3}(l_1 + l_2) + \frac{3}{2l_1^3}(l_1 + l_2)^2 \right] (k_3 - k_2) \quad (19b)$$

$$c_3 = \left[ \frac{3}{2l_1^3} + \frac{3}{2l_1^3}(l_1 + l_2) \right] (k_3 - k_2)$$

$$c_4 = - \frac{1}{2l_1^3} (k_3 - k_2)$$



3. Wykres krzywizny z odcinkami krzywizny nieliniowej dla  $C=1,5$  na długości toru zwrotnego rozjazdu ( $R_1=16000$  m,  $l_1=55$  m,  $R_2=6000$  m,  $l_2=60$  m,  $l_3=65$  m,  $R_3=25000$  m)



4. Wykres kąta nachylenia stycznej dla  $C=1,5$  na długości toru zwrotnego rozjazdu ( $R_1=16000$  m,  $l_1=55$  m,  $R_2=6000$  m,  $l_2=60$  m,  $l_3=65$  m,  $R_3=25000$  m)

Równania parametryczne  $x(l)$  i  $y(l)$  dla tej strefy, po przyjęciu  $C=1,5$ , wyznacza się wykorzystując się procedurę przedstawioną w pracy [3]. Zapisujemy funkcję  $\theta(l)$  w postaci

$$\theta(l) = A_{31} + A_{32}l + A_{33}l^2 + A_{34}l^3 + A_{35}l^4$$

gdzie: (20a).

Po rozwinięciu funkcji  $\cos\theta(l)$  i  $\sin\theta(l)$  w szereg Taylora z wykorzystaniem programu Maxima [6] i scałkowaniu otrzymujemy następujące równania parametryczne (21) i (22):

$$x(l) = x(l_0) + \cos\theta_0(l - l_0) - \frac{1}{2}(A_{32} + 4A_{35}l_0^3 + 3A_{34}l_0^2 + 2A_{33}l_0)\sin\theta_0(l - l_0)^2 \quad (21)$$

gdzie:  $l_0=l_1+l_2$ ,  $\theta_0=\theta(l_1+l_2)$

## Analiza wybranych wariantów

Rozpatrywane w pracy warianty powstały w wyniku wprowadzenia trzech stref rozkładu krzywizny na długości toru zwrotnego rozjazdu. W strefie środkowej krzywizna jest stała, czyli stosowany jest tutaj łuk kołowy. Natomiast w strefach skrajnych krzywizna jest zmienna, tak jak ma to miejsce na krzywej przejściowej. Przebieg krzywizny może mieć charakter liniowy (i rozwiązanie problemu ma wtedy charakter jednoznaczny [4]) lub nieliniowy (gdzie możliwe są różne rozwiązania). W niniejszej pracy zaproponowano dla tego drugiego przypadku rozwiązanie wielomianowe. Oczywiście, zarówno dla odcinków krzywizny liniowej jak też nieliniowej możliwe są różne przypadki szczegółowe, związane z wartościami krzywizny oraz długościami poszczególnych stref.

Podane w tej pracy oraz w pracy [4] zależności teoretyczne mają charakter uniwersalny, tj. pozwalają na przyjmowanie dowolnych wartości krzywizny na początku i na końcu układu geometrycznego. Szczególne zainteresowanie mogą przy tym budzić wartości zerowe.

Analizie porównawczej poddano przypadki ogólne występujące na rysunkach 1 i 2 oraz odpowiadające przypadki z krzywizną zerową po obu stronach układu, powstałe po przyjęciu  $k_1=k_3=0$ .

- Rozjazd I (z odcinkami krzywizny liniowej):  $R_1=16000$  m,  $l_1=55$  m,  $R_2=6000$  m,  $l_2=60$  m,  $l_3=65$  m,  $R_3=25000$  m
- Rozjazd II (z odcinkami krzywizny liniowej):  $R_1=\infty$ ,  $l_1=55$  m,  $R_2=6000$  m,  $l_2=60$  m,  $l_3=65$  m,  $R_3=\infty$
- Rozjazd III (z odcinkami krzywizny nieliniowej):  $R_1=16000$  m,  $l_1=55$  m,  $R_2=6000$  m,  $l_2=60$  m,  $l_3=65$  m,  $R_3=25000$  m
- Rozjazd IV (z odcinkami krzywizny nieliniowej):  $R_1=\infty$ ,  $l_1=55$  m,  $R_2=6000$  m,  $l_2=60$  m,  $l_3=65$  m,  $R_3=\infty$

Wyniki obliczeń wielkości charakterystycznych toru zwrotnego wymienionych rozjazdów przedstawiono w tabelicy 1. Zbiorcze wykresy krzywizny na długości pokazano na rysunku 5.

Obecnie najbardziej rozpowszechnionym typem rozjazdu z odcinkami zmiennej (liniowej) krzywizny jest rozjazd I. Liniowa krzywizna na całej długości stref skrajnych (w rozjeździe II) najbardziej odbiega od pozostałych przypadków. Rozjazd III jest najbliższy rozjazdowi I, a jego podstawową zaletę stanowi brak załomów na wykresie

$$A_{31} = \frac{3(k_1-k_2)}{8}l_1 - \left[ \frac{1}{2l_1^2}(l_1+l_2)^3 + \frac{1}{8l_1^3}(l_1+l_2)^4 \right] (k_3 - k_2)$$

$$A_{32} = c_1 = k_2 + \left[ \frac{3}{2l_1^2}(l_1+l_2)^2 + \frac{1}{2l_1^3}(l_1+l_2)^3 \right] (k_3 - k_2)$$

$$A_{33} = \frac{1}{2}c_2 = - \left[ \frac{3}{2l_1^2}(l_1+l_2) + \frac{3}{4l_1^3}(l_1+l_2)^2 \right] (k_3 - k_2) \quad (20a)$$

$$A_{34} = \frac{1}{3}c_3 = \left[ \frac{1}{2l_1^2} + \frac{1}{2l_1^3}(l_1+l_2) \right] (k_3 - k_2)$$

$$A_{35} = \frac{1}{4}c_4 = - \frac{1}{8l_1^3}(k_3 - k_2)$$

$$y(l) = y(l_0) + \sin\theta_0(l - l_0) + \frac{1}{2}(A_{32} + 4A_{35}l_0^3 + 3A_{34}l_0^2 + 2A_{33}l_0)\cos\theta_0(l - l_0)^2 - \frac{1}{6}(A_{32}^2 + 8A_{32}A_{35}l_0^3 + 6A_{32}A_{34}l_0^2 + 4A_{32}A_{33}l_0 + 16A_{35}^2l_0^6 + 24A_{34}A_{35}l_0^5 + 16A_{33}A_{35}l_0^4 + 9A_{34}^2l_0^4 + 12A_{33}A_{34}l_0^3 + 4A_{33}^2l_0^2)\sin\theta_0(l - l_0)^3 - \frac{1}{24}(A_{32}^3 + 12A_{32}^2A_{35}l_0^3 + 9A_{32}^2A_{34}l_0^2 + 6A_{32}^2A_{33}l_0 + 48A_{32}A_{35}^2l_0^6 + 72A_{32}A_{34}A_{35}l_0^5 + 48A_{32}A_{33}A_{35}l_0^4 + 27A_{32}A_{34}^2l_0^4 + 36A_{32}A_{33}A_{34}l_0^3 + 12A_{32}A_{33}^2l_0^2 + 64A_{35}^3l_0^9 + 144A_{34}A_{35}^2l_0^8 + 96A_{33}A_{35}^2l_0^7 + 108A_{34}^2A_{35}l_0^7 + 144A_{33}A_{34}A_{35}l_0^6 + 27A_{34}^3l_0^6 + 48A_{33}^2A_{35}l_0^5 + 54A_{33}A_{34}^2l_0^5 + 36A_{33}^2A_{34}l_0^4 + 8A_{33}^3l_0^3 - 24A_{35}l_0 - 6A_{34})\cos\theta_0(l - l_0)^4 \quad (22)$$

krzywizny na początku i na końcu łuku kołowego. Na szczególną uwagę zasługuje rozjazd IV. Oprócz łagodnego przejścia w rejonach skrajnych łuku kołowego cechuje go zerowa krzywizna na obydwu końcach układu geometrycznego. Być może takie właśnie rozwiązanie powinno zastąpić stosowanie „odcinków klotoidy”. Na korzyści wynikające z jego zastosowania wskazuje analiza dynamiczna przedstawiona w pracy [5]. Wymaga to jednak dalszych analiz, natomiast nie ulega wątpliwości, że przedstawiona w niniejszej pracy metoda pozwala tworzyć wiele różnorodnych rozwiązań. Na rysunku 6 pokazano wykresy rzędnych poziomych na długości analizowanych rozjazdów.

## Podsumowanie

W torze zwrotnym typowego rozjazdu kolejowego (zwyčajnego) stosuje się pojedynczy łuk kołowy bez krzywych przejściowych. Wskutek tego występują miejsca gwałtownej, skokowej zmiany rzędnych wykresu krzywizny na początku i końcu rozjazdu. W ostatnim okresie w niektórych krajach, dążąc do wygładzenia wykresu krzywizny w tych rejonach, wprowadza się tzw. „odcinki klotoidy” po obu stronach łuku kołowego, na których krzywizna zmienia się w sposób liniowy. W przypadku rozjazdów o zmiennej krzywiznie – ze względu na indywidualny charakter ich projektowania – możliwe jest dostosowanie danego rozjazdu do wymagań lokalnych. Jest to szczególnie istotne w połączeniach torów równoległych, gdzie podstawową kwestię stanowi zachowanie odpowiedniego rozstawu torów. Decydującą rolę odgrywa tutaj rzędna końcowa toru zwrotnego, którą w rozjazdach o zmiennej krzywiznie można

Tab. 1. Zestawienie wielkości charakterystycznych dla porównywanych rozjazdów

	$l=l_1$			$l=l_1+l_2$			$l=l_1+l_2+l_3$		
	$x(l)$ [m]	$y(l)$ [m]	$Q(l)$ [rad]	$x(l)$ [m]	$y(l)$ [m]	$Q(l)$ [rad]	$x(l)$ [m]	$y(l)$ [m]	$Q(l)$ [rad]
I	54,9993	0,147	0,00630	114,995	0,825	0,01630	179,982	2,148	0,02302
II	54,9999	0,084	0,00458	114,997	0,659	0,01458	179,986	1,842	0,02000
III	54,9996	0,165	0,00702	114,995	0,887	0,01702	179,979	2,291	0,02476
IV	54,9997	0,113	0,00573	114,996	0,757	0,01573	179,983	2,061	0,02250

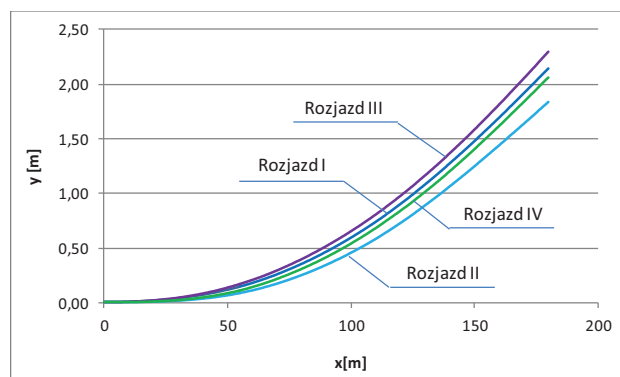
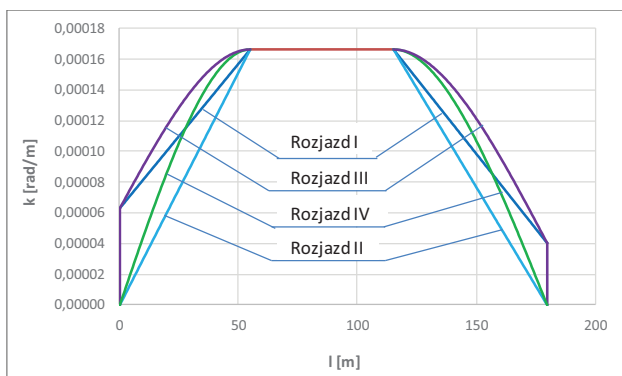
kształtować manipulując skosem i promieniem rozjazdu.

Powszechnie stosowanym sposobem wyznaczania współrzędnych  $x(l)$  i  $y(l)$  w stosowanych rozjazdach ze zmienną krzywizną jest całkowanie numeryczne funkcji  $\cos\Theta(l)$  i  $\sin\Theta(l)$ . Każdy przypadek geometryczny musi więc być rozpatrywany odrębnie i wprowadzanie jakichkolwiek uogólnień jest tutaj bardzo utrudnione. W niniejszej pracy została przedstawiona analityczna metoda rozwiązania problemu, mająca charakter ogólny i pełny. Zostały wyznaczone odpowiednie równania dla przypadku zaproponowanych odcinków krzywizny nieliniowej; w przeprowadzonej analizie porównawczej wybranych wariantów wykorzystano również przedstawione w pracy [4] zależności dla odcinków krzywizny liniowej.

Podane zależności teoretyczne mają charakter uniwersalny, tj. pozwalają na przyjmowanie dowolnych wartości krzywizny na początku i na końcu układu geometrycznego. Szczególne zainteresowanie mogą przy tym budzić wartości zerowe. Analiza porównawcza wybranych wariantów wskazała na korzystny przebieg krzywizny w wariancie nieliniowym, który oprócz łagodnego przejścia w rejonach skrajnych łuku kołowego cechuje zerowa krzywizna na obydwu końcach układu geometrycznego. Być może takie właśnie rozwiązanie powinno zastąpić stosowanie tzw. „odcinków klotoidy”. ◀

## Materiały źródłowe

- [1] AutoCAD, <http://www.autodesk.pl>
- [2] Fei Weizhu: Major technical characteristics of high-speed turnout in France. Journal of Railway Engineering Society, vol. 26, no. 9, pp. 18-35, 2009.
- [3] Koc W.: Analytical method of modelling the geometric system of communication route. Mathematical Problems in Engineering, vol. 2014, Article ID 679817, 2014.
- [4] Koc W.: Kształtowanie toru zwrotnego rozjazdu z odcinkami krzywizny liniowej (artykuł złożony w redakcji czasopisma naukowego)
- [5] Koc W., Palikowska K.: Dynamic analysis of the turnout diverging track for HSR with variable curvature sections. World Journal of Engineering and Technology, vol. 5, pp. 42-57, 2017.
- [6] Maxima package, <http://maksima.sourceforge.net>
- [7] MicroStation, <http://www.bentley.com>
- [8] Plank B.: Linie dużych prędkości realizowane przez VAE. Prezentacja firmy Voestalpine GmbH, 2007.
- [9] Technical Memorandum: Alignment design standards for high-speed train operation. Prepared by Parsons Brinckerhoff for the California High-Speed Rail Authority, USA, 2009.
- [10] Wang P.: Design of high-speed railway turnouts. Theory and Applications. Elsevier Science & Technology, Oxford, United Kingdom, 2015.



5. Wykresy krzywizny na długości toru zwrotnego porównywanych rozjazdów ( $R_1 = 16000 \text{ m}/\infty$ ,  $l_1 = 55 \text{ m}$ ,  $R_2 = 6000 \text{ m}$ ,  $l_2 = 60 \text{ m}$ ,  $l_3 = 65 \text{ m}$ ,  $R_3 = 25000 \text{ m}/\infty$ )

6. Wykresy rzędnych poziomych na długości toru zwrotnego porównywanych rozjazdów ( $R_1 = 16000 \text{ m}/\infty$ ,  $l_1 = 55 \text{ m}$ ,  $R_2 = 6000 \text{ m}$ ,  $l_2 = 60 \text{ m}$ ,  $l_3 = 65 \text{ m}$ ,  $R_3 = 25000 \text{ m}/\infty$ )