XXVII Seminarium

ZASTOSOWANIE KOMPUTERÓW W NAUCE I TECHNICE 2017

Oddział Gdański PTETiS

ZASTOSOWANIE STATYSTYKI BAYESOWSKIEJ DO UZASADNIENIA ZMIANY SPOSOBU OBLICZANIA STANDARDOWEJ NIEPEWNOŚCI POMIARU

Wojciech TOCZEK

Politechnika Gdańska, Wydział Elektroniki, Telekomunikacji i Informatyki, Katedra Metrologii i Optoelektroniki
tel.: 583471657, e-mail: toczek@eti.pg.gda.pl

Streszczenie: Celem pracy jest wyjaśnienie powodu, dla którego Wspólny Komitet ds. Przewodników w Metrologii (JCGM) wprowadza zmianę sposobu obliczania standardowej niepewności pomiaru. Modyfikacja ma obowiązywać w nowej wersji przewodnika *Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement* (GUM). Rozważania w artykule są oparte na przykładzie oceny niepewności pomiaru metodą typu A, z zastosowaniem statystyki Bayesowskiej w formie eksperymentów numerycznych i w ujęciu analitycznym. Wyniki pracy będą wykorzystane w procesie dydaktycznym.

Słowa kluczowe: standardowa niepewność pomiaru, modyfikacja GUM, statystyka Bayesowska.

1. WPROWADZENIE

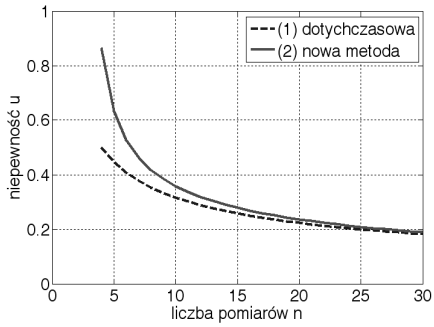
Niepewność pomiaru odgrywa ważną rolę w wyborze metody pomiarowej, podejmowaniu decyzji, zarządzaniu ryzykiem, określaniu tolerancji, określaniu zdatności wyrobów, uzyskiwaniu akredytacji laboratoriów, testowaniu hipotez i określaniu danych technicznych. Podstawową metodą oceny niepewności jest ocena typu A, opierająca się na statystycznej analizie zbioru wyników pomiaru powtarzanego n razy [1]. Przewodnik *Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement* (GUM) [2] zaleca aby przy obliczeniach standardowej niepewności pomiaru u stosować wzór

$$u = \frac{s}{\sqrt{n}}, \tag{1}$$

gdzie: s jest odchyleniem standardowym obliczonym ze zbioru wyników, n jest liczbą pomiarów. Nowy sposób [3,4,5] ma polegać na użyciu wzoru

$$u = \sqrt{\frac{n-1}{n-3}}\ \frac{s}{\sqrt{n}}\ . \tag{2}$$

Różnica pomiędzy wzorami (1) i (2) jest szczególnie wyraźna dla krótkich serii pomiarowych. Świadczą o tym wykresy zależności (1) i (2) dla s = 1 (Rys. 1). Nasuwa się refleksja, że dotychczasowe wyobrażenie o poprawie dokładności pomiaru, w wyniku wykonania serii pomiarów, było zbyt optymistyczne. Proces dydaktyczny wymaga wyjaśnienia studentom przyczyn wprowadzanej zmiany w sposobie obliczania niepewności. W celu znalezienia matematycznego uzasadnienia proponowanej modyfikacji zastosujemy Bayesowskie podejście do wyznaczania niepewności pomiaru, operujące na rozkładach gęstości prawdopodobieństwa, inne od popularnych dotychczas metod, bazujących na pierwszym i drugim momencie rozkładów.



Rys. 1. Poprawa dokładności pomiaru w wyniku wykonania serii pomiarów, oceniona za pomocą wzoru (1) i wzoru (2)

Statystyka w ujęciu Bayesowskim pozwala wyznaczyć rozkład, który bardziej dokładnie wyraża to, co wiemy o menzurandzie po uwzględnieniu wyników pomiarów.

2. BAYESOWSKA OCENA STANDARDOWEJ NIEPEWNOŚCI POMIARU

2.1. Eksperyment numeryczny

Bayesowską ocenę standardowej niepewności pomiaru przeprowadzimy na przykładzie zbioru wyników pomiarów pojemności C_p z równoległego modelu zastępczego rezystora SMD o wartości rezystancji 1 MΩ, wykonanych za pomocą precyzyjnego miernika LCR typu E4980A firmy Agilent (Tab.1). Pomiary wykonano dziesięciokrotnie $(n = 10)$, na częstotliwości pomiarowej 100 kHz.

Tabela 1. Zbiór wyników, powtórzonego 10 razy, pomiaru pojemności

Numer pomiaru i	Wynik y_i / fF
1	73,23935
2	73,22999
3	73,21835
4	73,24578
5	73,25024
6	73,24429
7	73,24355
8	73,23813
9	73,25133
10	73,23525

Wyniki pomiarów z Tab. 1 różnią się między sobą, co wynika z wielu niezależnych czynników. Stąd możemy przyjąć, że eksperyment pomiarowy jest opisany rozkładem normalnym, o nieznanych parametrach - wartości oczekiwanej Y i odchyleniu standardowym S. Możliwe wartości tych zmiennych losowych, to odpowiednio θ i σ. Z Bayesowskiego punktu widzenia Y i S są dwoma menzurandami, z których tylko pierwszy jest identyfikowany z wielkością fizyczną [6].
Formuła Bayesa w zastosowaniu do analizowanego przykładu ma postać

$$p(\theta,\sigma|y) = \frac{L(\theta,\sigma;y)p(\theta,\sigma)}{p(y)} \quad , \tag{3}$$

gdzie: $L(\theta,\sigma\,;y)$ jest funkcją likelihood (Bayesowską funkcją wiarygodności), rozkład $p(\theta,\sigma)$ nazywa się rozkładem a priori, rozkład z lewej strony wzoru (3) nazywa się rozkładem a posteriori (wynikowym). Rozkład $p(y)$ w mianowniku pełni rolę normalizującą.
Po wyeliminowaniu z (3) mianownika i zastąpieniu znaku równości znakiem proporcjonalności, otrzymujemy uproszczoną formułę Bayesa

$$p(\theta,\sigma|y) \propto L(\theta,\sigma;y)p(\theta,\sigma). \tag{4}$$

Załóżmy, że dla i-tego wyniku pomiaru funkcja likelihood jest funkcją Gaussa

$$L(\theta,\sigma;\ y_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} exp\left[-\frac{(\theta-y_i)^2}{2\sigma^2}\right], \tag{5}$$

gdzie: y_i nie jest traktowany jak zmienna losowa, lecz jest znanym wynikiem pomiaru.
Z twierdzenia Bayesa wynika, że łączny i jednocześnie warunkowy rozkład prawdopodobieństwa dla Y i S, opisany jako $p(\theta,\sigma|y_1)$, wyznaczamy po otrzymaniu pierwszego wyniku pomiaru y_1, mnożąc funkcję likelihood $L(\theta,\sigma;\ y_1)$ przez rozkład a priori dla Y i S, $p(\theta,\sigma)$, który jest rozkładem łącznym, niosącym zakodowaną informacją wstępną o zmiennych losowych Y i S

$$p(\theta,\sigma|y_1) \propto L(\theta,\sigma;\ y_1)p(\theta,\sigma). \tag{6}$$

Po wykonaniu drugiego pomiaru, możemy ponownie użyć twierdzenia Bayesa dla kolejnej aktualizacji rozkładu $p(\theta,\sigma|y_1)$ przez likelihood $L(\theta,\sigma;\ y_2)$, tak aby otrzymać rozkład bazujący na dwóch wynikach pomiarów

$$p(\theta,\sigma|y_1,y_2) \propto L(\theta,\sigma;\ y_2)p(\theta,\sigma|y_1). \tag{7}$$

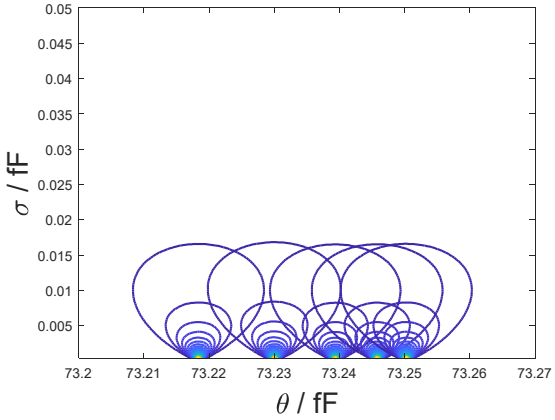
Postępując w ten sam sposób dalej, aż do wyczerpania wszystkich wyników pomiarów, otrzymujemy wyrażenie (8) z globalną funkcją likelihood, zapisaną z użyciem operatora mnożenia

$$p(\theta,\sigma|\boldsymbol{y}) \propto p(\theta,\sigma)\prod_{i=1}^{n} L(\theta,\sigma;\ y_i). \tag{8}$$

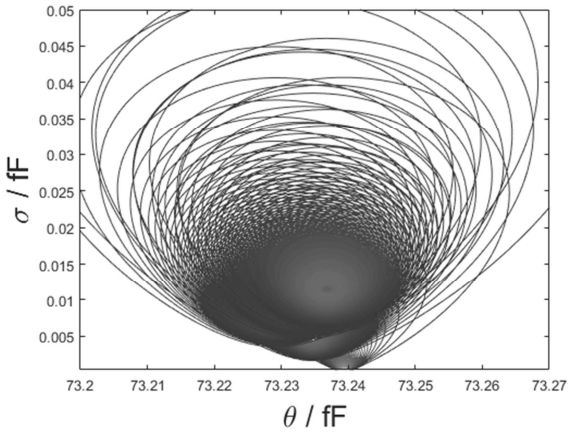
W rezultacie, w rozkładzie a posteriori (8) pojawia się wektor $\boldsymbol{y}$, złożony z wszystkich wyników wykonanych pomiarów.

Funkcja likelihood (5) ma postać jednakową w formie dla każdego wyniku pomiaru (Rys. 2). Wyniki pomiarów nie zmieniają jej kształtu, jedynie przesuwają w dziedzinie wielkości mierzonej tak, aby wartość oczekiwana funkcji była równa wynikowi pomiaru.

Wzajemne przemnażanie funkcji Gaussa daje w wyniku również funkcję Gaussa, która w miarę uwzględniania w obliczeniach kolejnych danych pomiarowych, staje się coraz bardziej wysmukła (Rys. 3). Wynik mnożenia, po normalizacji, jest rozkładem a posteriori.



Rys. 2. Kontury funkcji likelihood (5) dla pięciu wyników pomiarów



Rys. 3. Zmiany rozkładu a posteriori w trakcie uwzględniania w obliczeniach kolejnych pięciu wyników pomiarów

2.2. Podejście analityczne

Stosując równolegle z eksperymentem numerycznym analizę teoretyczną, przekształcamy globalną funkcję likelihood z iloczynu funkcji eksponencjalnych do eksponenty sumy

$$\prod_{i=1}^{n} L(\theta,\sigma;\ y_i) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} exp\left[-\frac{(\theta-y_i)^2}{2\sigma^2}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma^n} exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{(\theta-y_i)^2}{\sigma^2}\right]. \tag{9}$$

Dodając i odejmując średnią arytmetyczną $\bar{y}$ wyników pomiarów w liczniku (10) wyrażenia pod znakiem sumy, otrzymujemy możliwość wyeliminowania sumy z wzoru (9).

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i-\theta)^2 = \sum_{i=1}^{n}[(y_i-\bar{y})+(\bar{y}-\theta)]^2 = \sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2 + n\,(\bar{y}-\theta)^2\,, \tag{10}$$

gdzie: $\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$.

Eliminacja sumy jest realizowana poprzez podstawienie wariancji obliczanej według wzoru

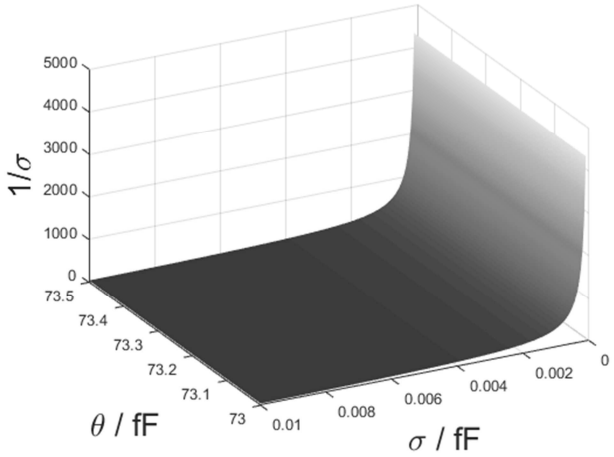
MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

$$s^2 = \nu^{-1} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2 \text{ , gdzie: } \nu = n - 1. \quad (11)$$

W ten sposób, globalną funkcję likelihood sprowadzamy do postaci

$$\prod_{i=1}^{n} L(\theta, \sigma;\ y_i) \propto \frac{1}{\sigma^n} exp\left[-\frac{\nu s^2 + n(\theta - \bar{y})^2}{2\sigma^2}\right]. \quad (12)$$

Właściwością podejścia Bayesowskiego do analizy niepewności jest możliwość wzięcia pod uwagę wiedzy a priori o menzurandzie. Twierdzenie Bayesa pozwala na łączenie danych pomiarowych z informacją o menzurandzie pochodzącą spoza pomiaru. Informacja ta przedstawiana jest w postaci funkcji gęstości prawdopodobieństwa. Mamy więc dwie możliwości - zastosowanie rozkładu a priori niosącego informację lub zastosowanie rozkładu a priori nieinformacyjnego. Załóżmy najpierw, że niczego nie wiemy o menzurandzie. W tym przypadku, jako rozkład a priori stosujemy iloczyn rozkładu równomiernego (dla nieznanej wartości oczekiwanej Y) i rozkładu apriorycznego zaproponowanego przez Sir Harolda Jeffreys'a o postaci σ^{-1} (dla nieznanej wartości odchylenia standardowego S), bazującego na minimalizacji informacji Fishera [7] (Rys. 4).



Rys. 4. Nieinformacyjny rozkład a priori

Po przemnożeniu dostajemy prawdopodobieństwo łączne, które jest licznikiem formuły Bayesa (3)

$$p(\theta, \sigma, \boldsymbol{y}) = \frac{1}{\sigma^{n+1}} exp\left[-\frac{\nu s^2 + n(\theta - \bar{y})^2}{2\sigma^2}\right]. \quad (13)$$

Odwrotność mianownika formuły Bayesa jest nazywana współczynnikiem normalizującym

$$k = \frac{1}{p(\boldsymbol{y})}. \quad (14)$$

Dla wyznaczenia $p(\boldsymbol{y})$ należy wyeliminować z prawdopodobieństwa łącznego $p(\theta, \sigma, \boldsymbol{y})$ niepotrzebne zmienne losowe. Statystyka Bayesowska ma na taki przypadek standardową procedurę, nazywaną marginalizacją, która polega na całkowaniu łącznego rozkładu prawdopodobieństwa po wszystkich możliwych wartościach niechcianych zmiennych losowych. Dla wyprowadzenia współczynnika k należy obliczyć całkę podwójną z prawdopodobieństwa łącznego $p(\theta, \sigma, \boldsymbol{y})$, ponieważ chcemy wyeliminować dwie zmienne losowe, pozostawiając tylko $\boldsymbol{y}$

$$k^{-1} = \int_0^\infty \int_{-\infty}^{\infty} p(\theta, \sigma, \boldsymbol{y}) d\theta d\sigma = \int_0^\infty \int_{-\infty}^{\infty} \sigma^{-(n+1)} exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}[\nu s^2 + n(\theta - \bar{y})^2]\right\} \ d\theta d\sigma \quad (15)$$

Po pierwszym całkowaniu wyrażenia (15) otrzymujemy

$$k^{-1} = \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \int_0^\infty \sigma^{-(\nu+1)} e^{-\frac{\nu s^2}{2}\sigma^{-2}} d\sigma \quad (16)$$

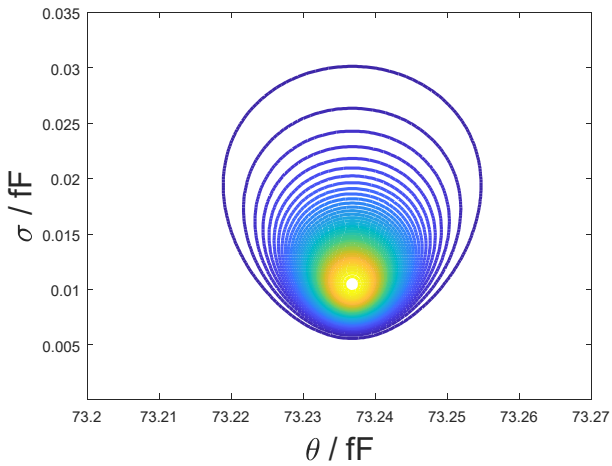
Po drugim całkowaniu współczynnik normalizujący uzyskuje ostateczną postać

$$k = \sqrt{\frac{n}{2\pi}} \left[\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\right]^{-1} \left(\frac{\nu s^2}{2}\right)^{\frac{\nu}{2}}. \quad (17)$$

Po normalizacji rozkładu (13), otrzymujemy łączny i zarazem warunkowy rozkład a posteriori

$$p(\theta, \sigma | \boldsymbol{y}) = k \frac{1}{\sigma^{n+1}} exp\left[-\frac{\nu s^2 + n(\theta - \bar{y})^2}{2\sigma^2}\right]. \quad (18)$$

Rozkłady a posteriori uzyskane numerycznie i analitycznie dokładnie się pokrywają (Rys. 5), co potwierdza, z jednej strony, poprawność programu opracowanego do obliczeń niepewności, a z drugiej strony, brak błędów w analizie teoretycznej.



Rys. 5. Uzyskane eksperymentalnie i analitycznie, pokrywające się kontury rozkładu a posteriori (18) dla serii złożonej z 5 pomiarów

Rozkład (18) stanowi podstawę do wyprowadzenia kolejnego wzoru. Traktując σ w (18) jako znaną wartość stałą, otrzymujemy warunkowy rozkład a posteriori o postaci

$$p(\theta | \sigma, \boldsymbol{y}) = \frac{\sqrt{n}}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left[-\frac{n}{2\sigma^2}(\theta - \bar{y})^2\right]. \quad (19)$$

Oznacza to, że dla konkretnej wartości σ, na przykład $\sigma = s$, θ posiada rozkład $N\left(\bar{y}, \frac{s^2}{n}\right)$.

Rozkład a posteriori (18) jest rozkładem łącznym dla dwóch zmiennych losowych - wartości oczekiwanej i odchylenia standardowego. Celem dalszej analizy jest otrzymanie funkcji gęstości prawdopodobieństwa a posteriori wyłącznie dla nieznanej wartości oczekiwanej θ. Zatem kolejny raz zastosujemy marginalizację, całkując (18) po wszystkich możliwych wartościach zmiennej losowej σ

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

$$p(\theta|\boldsymbol{y}) = \int_0^\infty p(\theta,\sigma|\boldsymbol{y})d\sigma = \int_0^\infty k\sigma^{-(n+1)} exp\left\{-\frac{1}{2}[\nu s^2 + n(\theta-\bar{y})^2]\sigma^{-2}\right\} d\sigma\,. \quad (20)$$

W wyniku całkowania dostajemy zmarginalizowaną postać rozkładu a posteriori

$$p(\theta|\boldsymbol{y}) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\sqrt{\frac{n}{(n-1)s^2\pi}}\left[1+\frac{n(\theta-\bar{y})^2}{(n-1)s^2}\right]^{-\frac{n}{2}}, \quad (21)$$

która jest rozkładem t-Studenta, o $\nu = n-1$ stopniach swobody, przesuniętym o $\bar{y}$ i przeskalowanym przez $\frac{s(\boldsymbol{y})}{\sqrt{n}}$.

W porównaniu z rozkładem (19), zmarginalizowany rozkład a posteriori (21) jest niezależny od σ.

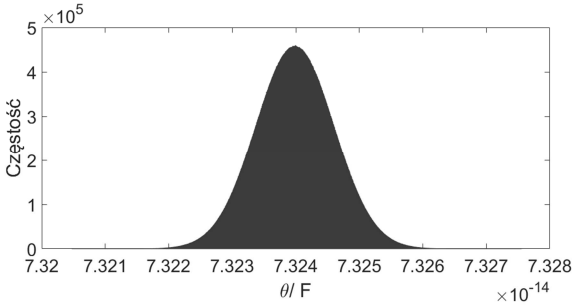
2.3. Metoda Monte Carlo i eksperyment numeryczny z rozkładem apriorycznym informacyjnym

W celu pozyskania dodatkowej wiedzy o menzurandzie zastosowano procedurę Monte Carlo zalecaną w [8]. Wykorzystano generator liczb losowych o standaryzowanym rozkładzie normalnym $N(0,1)$. Liczby losowe z posłużyły do symulowania populacji generalnej wyników eksperymentu pomiarowego, polegającego na wykonaniu wielu serii n pomiarów. Do obliczeń symulowanej wartości wyniku pomiaru w obrębie jednej serii posługiwano się wzorem

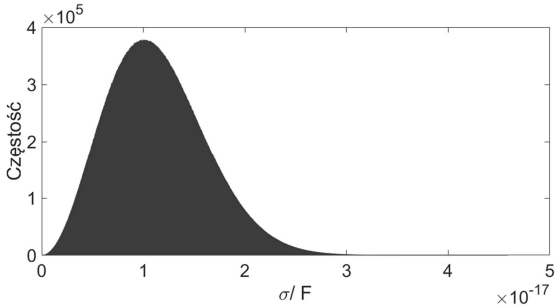
$$\xi = \theta_0 + \sigma_0\sqrt{\frac{n-1}{n-3}}z \quad (22)$$

Jako wartości początkowe θ_0 i σ_0 przyjęto parametry statystyczne wykonanej dodatkowo serii pomiarów, $\theta_0 = \bar{y}$ i $\sigma_0 = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(y_k-\bar{y})^2}$.

Dla wyników każdej serii otrzymanej z symulacji obliczono średnią arytmetyczną $\theta = \bar{\xi}$ i odchylenie standardowe σ. Po wykonaniu 10^8 losowań wykreślono histogramy dla wartości θ i σ rozpatrywanych oddzielnie (rys. 6, rys. 7) oraz histogram dla par tych wartości (rys. 8). Kształt histogramu z rys. 6 wskazuje na to, że wartości średnie z serii pomiarów podlegają rozkładowi normalnemu. Odchylenia standardowe tego rozkładu, obliczone dla liczby pomiarów od $n = 4$ do $n = 10$, pokrywają się z wartościami zamieszczonymi w kolumnie 6 Tabl. 2



Rys. 6. Histogram wartości średnich θ obliczonych z 10^8 serii pomiarów ($n = 5$)



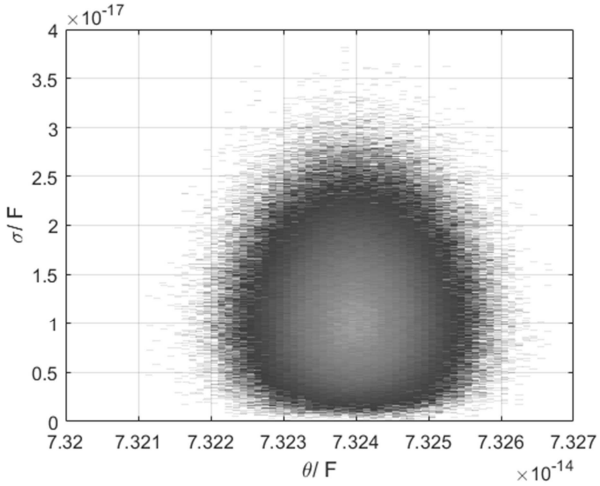
Rys. 7. Histogram odchyleń standardowych σ obliczonych z 10^8 serii pomiarów ($n = 5$)

Kształt histogramu z rys. 7 jest potwierdzeniem znanego faktu, że odchylenia standardowe serii pomiarów podlegają rozkładowi $Inv\,\chi$ [9], który może być opisany wzorem [10]

$$p(\chi^{-1}) = \frac{2\sqrt{2}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\left(\frac{1}{\sqrt{2}\chi^{-1}}\right)^n exp\left(-\frac{1}{2(\chi^{-1})^2}\right), \quad (23)$$

gdzie: $\chi^{-1} = \frac{\sigma}{s\sqrt{n-1}}$.

Histogram dwuwymiarowy (rys. 8), wykonany dla par wartości θ i σ reprezentuje łączny rozkład $p(\theta,\sigma)$, który może być wykorzystany jako informacyjny rozkład a priori.



Rys. 8. Histogram dla par wartości θ i σ obliczonych z 10^8 serii pomiarów ($n = 5$)

Rozkład (21) dobrze reprezentuje menzurand w sytuacji, gdy dane pomiarowe są próbkami z rozkładu Gaussa a w analizie Bayesowskiej, do wyrażenia braku wiedzy o menzurandzie, stosujemy iloczyn rozkładu równomiernego i rozkładu apriorycznego Jeffreys'a. Zdobyta za pomocą metody Monte Carlo dodatkowa wiedza o menzurandzie może być wykorzystana w procedurze Bayesowskiej po „zakodowaniu" do postaci rozkładu prawdopodobieństwa apriorycznego. Rozpisując rozkład łączny

$$p(\theta,\sigma) = p(\theta|\sigma)p(\sigma) \quad (24)$$

i wiedząc, że

$$\theta|\sigma \sim N\left(\theta_0, \frac{\sigma^2}{k_0}\right),$$

$$\sigma \sim Inv\,\chi(\nu_0, \sigma_0),$$

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

gdzie: σ_0, $\theta_0, \upsilon_0 = n-1$ parametry rozkładu a priori, $k_0 = \frac{\sigma^2}{\sigma_0^2}$,

otrzymujemy z (19), (23) i (24) tzw. rozkład aprioryczny sprzężony

$$p(\theta,\sigma) \propto \sigma^{-(n+1)} exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}[(n-1)\sigma_0^2 + k_0 n(\theta_0-\theta)^2]\right). \tag{25}$$

Wyniki oceny niepewności z zastosowaniem informacyjnego rozkładu a priori (25) przedstawiono w kolumnie 3 Tab. 2 i omówiono w punkcie 2.4.

2.4. Ocena niepewności pomiaru i porównanie metod

Rozkłady a posteriori, niosą kompletny stan wiedzy o menzurandzie. Wówczas możemy wyznaczyć estymatę wartości oczekiwanej $\hat{\theta}$ (26), którą podajemy jako wynik pomiaru, oraz odchylenie standardowe tej estymaty $u_{\hat{\theta}}$ (27), które może być oszacowaniem standardowej niepewności pomiaru

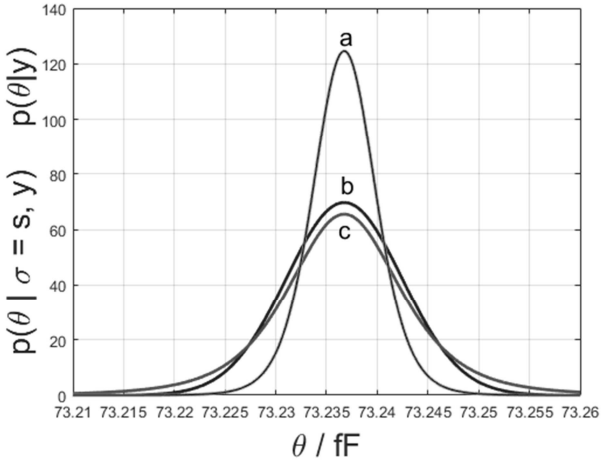
$$\hat{\theta} = \int_{-\infty}^{\infty} \theta p(\theta|\boldsymbol{y}) d\theta, \tag{26}$$

$$u_{\hat{\theta}} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \left(\theta - \hat{\theta}\right)^2 p(\theta|\boldsymbol{y}) d\theta}. \tag{27}$$

Tabela 2. Porównanie standardowych niepewności pomiaru obliczonych na podstawie wzorów (1) i (2) z niepewnościami estymatora $\hat{\theta}$ obliczonymi z rozkładów a posteriori, z użyciem definicji odchylenia standardowego (27), dla długości serii pomiarowych od $n = 4$ do $n = 10$.

n	Niepewności u_Y i $u_{\hat{\theta}}$ / aF					
	$\frac{s}{\sqrt{n}}$	Niepewność estymatora $\hat{\theta}$				$\sqrt{\frac{n-1}{n-3}}\frac{s}{\sqrt{n}}$
		$p(\theta\|\sigma,\boldsymbol{y})$	$p(\theta\|\boldsymbol{y})$			
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
4	3,56	3,56	1,98	6,07	6,07	6,17
5	5,72	5,72	3,53	8,08	8,08	8,09
6	4,68	4,68	3,02	6,04	6,04	6,04
7	3,71	3,71	2,44	4,54	4,54	4,54
8	3,67	3,67	2,50	4,34	4,34	4,35
9	3,26	3,26	1,98	3,77	3,77	3,77
10	3,15	3,15	2,32	3,57	3,57	3,57

W Tab. 2 przedstawiono wartości niepewności standardowych u_Y obliczone na podstawie danych pomiarowych według wzoru (1) – kolumna 1 i wzoru (2) – kolumna 6 oraz niepewności estymatora $\hat{\theta}$ obliczone z zastosowaniem wzoru (27) z rozkładów a posteriori, uzyskanych za pomocą statystyki Bayesowskiej.
Dla porównania, niepewności obliczono z dwóch rozkładów wynikowych, rozkładu $p(\theta|\sigma = s, \boldsymbol{y})$ uzyskanego analitycznie (19) – kolumna 2 i rozkładu $p(\theta|\boldsymbol{y})$ (21) – kolumny od 3 do 5. Kolumna 3 zawiera wyniki eksperymentu numerycznego, uzyskane z zastosowaniem informacyjnego rozkładu apriorycznego (25) dla $k_0 = \frac{n-1}{n-3}$. Kolumny 4 i 5 zawierają wyniki uzyskane z zastosowaniem nieinformacyjnego rozkładu apriorycznego Jeffreys'a, przy czym kolumna 4 to wyniki eksperymentu numerycznego, a kolumna 5, to wyniki obliczeń wykonanych na bazie wzoru analitycznego (21).



Rys. 9. Porównanie rozkładów a posteriori dla liczby pomiarów w serii n = 5: a) rozkład zmarginalizowany $p(\theta|\boldsymbol{y})$ uzyskany z zastosowaniem informacyjnego rozkładu a priori, b) rozkład warunkowy $p(\theta|\sigma,\boldsymbol{y})$ uzyskany z zastosowaniem nieinformacyjnego rozkładu a priori, c) rozkład zmarginalizowany $p(\theta|\boldsymbol{y})$ uzyskany z zastosowaniem nieinformacyjnego rozkładu a priori.

Tabela 2 pomaga w zrozumieniu proponowanej zmiany sposobu obliczania standardowej niepewności pomiaru. Jej analiza prowadzi do następujących wniosków:

a) Wartości niepewności są zgodne w kolumnach 1 i 2 oraz są porównywalne w kolumnach od 4 do 6 tabeli 2. Wynika stąd, że dotychczasowy sposób obliczeń niepewności pomiaru odpowiada analizie Bayesowskiej bazującej na rozkładzie $p(\theta|\sigma,\boldsymbol{y})$, zależnym od parametru σ, a zmodyfikowany sposób obliczeń odpowiada analizie z wykorzystaniem zmarginalizowanego rozkładu a posteriori $p(\theta|\boldsymbol{y})$, wyprowadzonego z zastosowaniem rozkładu a priori w postaci iloczynu rozkładu równomiernego i Jeffreys'a. W nowym podejściu analiza jest bardziej precyzyjna, ponieważ w rozkładzie (21) występuje tylko jedna zmienna losowa (θ), ta która jest identyfikowana z mierzoną wielkością fizyczną.

b) Niepewności standardowe w kolumnach 1 i 2 Tab. 2 są mniejsze od niepewności w kolumnach od 4 do 6. Wynika stąd, że dla krótkich serii pomiarowych niepewności standardowe, obliczone metodą zalecaną w obecnie obowiązującym GUMie, są niedoszacowane (są zbyt optymistyczne). W nowym GUMie ma być zalecone użycie wzoru (2), który daje większe wartości niepewności standardowych dla krótkich serii.

c) Wraz ze wzrostem liczby pomiarów różnice w wartościach niepewności w kolumnach Tab. 2 zmniejszają się. Jest to zgodne z przebiegiem obu krzywych na Rys. 1 i wynika z faktu, że w miarę wzrostu długości serii pomiarowej n rozkłady $p(\theta|\sigma,\boldsymbol{y})$ i $p(\theta|\boldsymbol{y})$ zbliżają się do siebie. Zatem proponowana modyfikacja obliczeń jest szczególnie ważna, gdy liczba pomiarów n jest mała.

d) Zastosowanie w Bayesowskiej procedurze oceny niepewności pomiaru dodatkowej informacji, w postaci rozkładu apriorycznego (25), prowadzi do mniejszych niepewności estymatora $\hat{\theta}$ (kolumna 3 Tab. 2). Powinna to być jednak informacja z innego źródła, różna od danych pomiarowych użytych do konstrukcji funkcji likelihood.

Rysunek 9 przedstawia zestawienie rozkładów a posteriori, z których wyznaczono standardowe niepewności pomiaru umieszczone w Tab. 2, w wierszu odpowiadającym liczbie pomiarów $n = 5$. Krzywa (b) przedstawia rozkład warunkowy (19), związany z niepewnością $u_{\hat{\theta}} = 5{,}72$ aF. Jest to wynik realizacji dotychczas stosowanej

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

nieprecyzyjnej metody oceny niepewności. Krzywa (c), to zmarginalizowany rozkład (21) uzyskany z zastosowaniem nieinformacyjnego rozkładu a priori. Jest to wykres o najbardziej „tłustych ogonach", co wiąże się z największą obliczoną niepewnością $u_{\hat{\theta}} = 8{,}08$ aF, wynik realizacji nowej metody. Krzywa (a), reprezentująca zmarginalizowany rozkład uzyskany z zastosowaniem informacyjnego rozkładu a priori (25), jest najwęższa, ponieważ dodatkowa informacja zmniejszyła standardową niepewność pomiaru do wartości $u_{\hat{\theta}} = 3{,}53$ aF.

3. PODSUMOWANIE

Wyniki opisanych w artykule eksperymentów numerycznych i analizy teoretycznej z użyciem statystyki Bayesowskiej pozwalają lepiej zrozumieć proponowaną zmianę sposobu obliczania standardowej niepewności pomiaru, polegającą na zastąpieniu wzoru (1) wzorem (2). Wzór (1) jest wynikiem mało precyzyjnej analizy matematycznej. Zastosowanie rachunku prawdopodobieństwa warunkowego i operowanie na rozkładach, zamiast na pierwszym i drugim momencie rozkładów, uzasadnia użycie wzoru (2) do oceny niepewności standardowej, zwłaszcza dla krótkich serii pomiarowych. Kluczową rolę w wyjaśnieniu przyczyny wprowadzania nowego sposobu obliczania niepewności standardowej odgrywa marginalizacja rozkładu a posteriori, wyznaczonego dla menzurandu, przeprowadzona w celu uniezależnienia rozkładu od wartości σ.

Wzór (2) jest konsekwencją przyjęcia do oceny niepewności dokładnych parametrów przesuniętego i przeskalowanego rozkładu t-Studenta, reprezentującego stan wiedzy o menzurandzie. W ten sposób rezygnujemy z obarczonej niepewnością estymaty parametru rozkładu Gaussa zależnego od σ. Nie będzie już konieczności wyznaczania efektywnej liczby stopni swobody dla niepewności, a więc formuła Welch-Satterthwaite'a straci swoją użyteczność [11].

4. BIBLIOGRAFIA

1. Zięba A.: Analiza danych w naukach ścisłych i technice, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2013.
2. BIPM, IEC, IFCC, ILAC, ISO, IUPAC, IUPAP, OIML 2008: Evaluation of measurement data – Guide to the expression of uncertainty in measurement, Joint Committee for Guides In Metrology, JCGM vol. 100.
3. Fotowicz P.: Modyfikacja sposobu obliczania niepewności pomiaru, Pomiary Automatyka Robotyka, Nr 3, 2016, s. 29-32.
4. Bich W., Cox M., Michotte C.: Towards a new GUM-an update, Metrologia, 53, 2016, s. 149-159.
5. Lira I.: The GUM revision: the Bayesian view toward the expression of measurement uncertainty, Institute of Physics Publishing, European Journal of Physics 37, 2016, s. 1-16.
6. Lira I.: Evaluating the measurement uncertainty: Fundamentals and practical guidance. Institute of Physics Publishing, Bristol, 2002.
7. Berger J.O.: Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis. Springer,1985.
8. BIPM, IEC, IFCC, ILAC, ISO, IUPAC, IUPAP, OIML 2008: Evaluation of measurement data – Supplement 1 to the „Guide to the expression of uncertainty in measurement" – Propagation of distributions using a Monte Carlo method, Joint Committee for Guides In Metrology, JCGM vol. 101.
9. Gelman A.,Carlin J.B., Stern H.S., Dunson D.B., Vehtari A., Rubin D.B.: Bayesian Data Analysis. CRC Press, Taylor & Francis Group, 2014.
10. Lee P.M.: Bayesian statistics: An introduction, Wiley, 2012.
11. Bich W.: Revision of the "Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement". Why and how. Metrologia, 51, 2014, s. 155-158.

BAYESIAN STATISTICS USING FOR EXPLANATION OF THE NEW APPROACH FOR MEASUREMENT UNCERTAINTY EVALUATION

The goal of this work is to explain the motivation for the changes of an approach for calculating the standard measurement uncertainty, proposed by the Joint Committee for Guides in Metrology (JCGM). The modification will be available in a revised version of the *Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement* (GUM). The paper is based on the example of the type A measurement uncertainty evaluation, by using the principles of Bayesian statistics in the form of numerical experiments and as an analytical approach.

Keywords: standard measurement uncertainty, the GUM revision, Bayesian statistics.

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl