POLITECHNIKA GDAŃSKA
WYDZIAŁ FIZYKI TECHNICZNEJ
I MATEMATYKI STOSOWANEJ

Imię i Nazwisko autora rozprawy: ***Hanna Guze***

Dyscyplina naukowa: ***Matematyka***

ROZPRAWA DOKTORSKA

Tytuł rozprawy w języku polskim: ***Bifurkacje z łamaniem symetrii w zagadnieniu różniczkowo-funkcyjnym opisującym nieliniowe deformacje biologicznego klastra: metody wariacyjne.***

Tytuł rozprawy w języku angielskim: ***Symmetry-breaking bifurcation in a functional-differential problem describing nonlinear deformations of biological cluster: variational methods.***

Promotor Podpis
dr hab. Joanna Janczewska

Gdańsk, rok 2017

Spis treści

Wstęp **4**

Wykaz oznaczeń **9**

1 Wiadomości wstępne **12**

1.1 Przestrzenie metryczne i unormowane 12

1.2 Przestrzenie Banacha 15

1.3 Operatory i funkcjonały liniowe ciągłe 18

1.4 Rachunek różniczkowy w przestrzeniach Banacha 21

1.5 Odwzorowania liniowe typu Fredholma 24

2 Bifurkacje w równaniach nieliniowych z parametrem w przestrzeniach Banacha **30**

2.1 Klasyczne zagadnienie bifurkacji 31

2.2 Metody wyznaczania i badanie bifurkacji w zagadnieniach o naturze wariacyjnej 33

3 Nieliniowe deformacje biologicznego klastra **39**

3.1 Matematyczny model biologicznego klastra 40

3.2 Problem bifurkacji z łamaniem symetrii 44

3.3 Dokrytyczny typ bifurkacji z łamaniem symetrii 52

3.4 Graficzny obraz biologicznego klastra w otoczeniu punktów bifurkacji 54

Bibliografia **60**

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

Spis rysunków **64**

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

Wstęp

W niniejszej pracy doktorskiej badane są matematyczne własności obiektu o elastycznym, wolnym brzegu, który został nazwany biologicznym klastrem. Badania nad tematem rozpoczęły się od współpracy z profesorem A. Borisovichem i wstępnie dotyczyły próby opisu zachowania powłoki balonu.

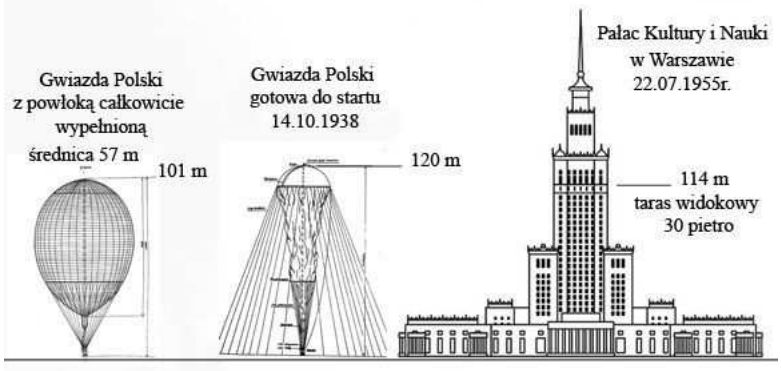
Balon jest statkiem powietrznym z grupy aerostatów, czyli unoszącym się w powietrzu dzięki działaniu siły wyporu - siły aerostatycznej (patrz Rys. 1) . Składa się z obszernej powłoki wykonanej z nieprzepuszczalnej, lekkiej, nagumowanej tkaniny o dużej wytrzymałości i zawieszonej pod nią gondoli (kosza). Zainteresowanie skierowane jest głównie na balony stratosferyczne i meteorologiczne.

Balon meteorologiczny jest rodzajem sondy na gaz lżejszy od powietrza

Rysunek 1: Balon na ciepłe powietrze, http://forum.gazeta.pl/

(najczęściej hel, czasem wodór). Zazwyczaj jest niewielki, o średnicy rzędu

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl



Rysunek 2: Rysunek Gwiazdy Polski porównywanej z wysokością Pałacu Kultury i Nauki, https://www.pb.pl/gwiazda-polski-804732

2 m i służy do dostarczania przyrządów badawczych w strefy zbyt wysokie dla samolotów.

Balon stratosferyczny, zwany też stratostatem, przeznaczony jest do lotów stratosferycznych na wysokość rzędu $20 - 40$ km. Powłoka stratostatów ma pojemność co najmniej 100 000 m^3 i jest elastyczna, a wysokość całego balonu może sięgać $100 - 120$ m. Na Rys. 2 przedstawiony został najbardziej znany polski balon stratosferyczny Gwiazda Polski. Powłokę Gwiazdy Polskiej wykonano z gumowanego jedwabiu. Dzięki temu, pomimo swojej wielkości, ważyła zaledwie 1403 kg. Stratostat napełniony jest helem lub wodorem. Balon po pełnym wypełnieniu ma kształt owoidu (wielkiego jaja) zwróconego szerszym biegunem ku górze. Z powodu różnicy ciśnień panującej pomiędzy poziomem ziemi, a planowaną wysokością wznoszenia, balon napełniony jest gazem do 1/10 swojej maksymalnej objętości. Wraz ze wzrostem wysokości i spadkiem zewnętrznego ciśnienia, gaz wypełnia całą powłokę. Rozprężający się gaz uchodzi przez specjalny rękaw zamontowany w powłoce i klapę zlokalizowaną na czubku aerostatu, co zapobiega rozerwaniu się balonu.

Cienka, elastyczna powłoka, zarówno w trakcie napełniania balonu gazem, jak i później w czasie lotu na różnych wysokościach, poddawana jest działaniu czynników wewnętrznych i zewnętrznych. Na deformacje szcze-

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

gólnie narażony jest szerszy biegun balonu i najwyżej położona jego część, tzw. spadochron. Wysokość spadochronu w porównaniu z jego średnicą jest tak mała, że możemy utworzyć dwuwymiarowy, matematyczny model opisujący zachowanie tej części powłoki. Dwuwymiarowy obiekt naszych badań, który pojawia się w miejsce spadochronu nazywamy biologicznym klastrem. Pojęcie to zostało wprowadzone przez nas w pracy [8]. Nazwa celowo nie nawiązuje do terminologii dotyczącej balonów. W ten sposób podkreślamy, że nasze rozważania mają teoretyczny charakter i nie opierają się na żadnych praktycznych doświadczeniach.

Badanie deformacji biologicznego klastra sprowadza się do badania bifurkacji z łamaniem symetrii w zbiorze rozwiązań radialnych równania różniczkowo - funkcyjnego postaci:

$$\frac{r^3(\theta) + 2r(\theta)r'^2(\theta) - r^2(\theta)r''(\theta)}{(r^2(\theta) + r'^2(\theta))^{3/2}} + \tau - \frac{\nu\omega}{S^{\nu+1}} r(\theta) = 0,$$

gdzie $r(\theta)$ jest funkcją klasy C^2 zmiennej $\theta \in [0, 2\pi]$, $S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2(\theta)d\theta$, a τ, ω, ν są parametrami rzeczywistymi o dodatnich wartościach. Powyższe równanie dla każdego multiparametru $\mu = (\tau, \omega, \nu)$ posiada rozwiązanie radialnie symetryczne określone wzorem

$$r_\mu = \left(\frac{\nu\omega}{\pi^{\nu+1}(1+\tau)}\right)^{\frac{1}{2\nu+1}}.$$

Pokażemy, że ze zbioru rozwiązań radialnie symetrycznych bifurkują rozwiązania, które nie są radialnie symetryczne. Udowodnimy, że występowanie bifurkacji z łamaniem symetrii zależy tylko od parametru τ oraz pierwsza krytyczna wartość τ wynosi 3. Następnie pokażemy, że bifurkacje mają charakter dokrytyczny.

Praca składa się z trzech rozdziałów. Pierwszy z nich ma charakter wprowadzający. Przypomniane są w nim pojęcia i fakty z zakresu analizy funkcjonalnej. Wprowadzone są definicje, twierdzenia i przykłady, z których korzystamy w kolejnych rozdziałach.

W rozdziale drugim opisaliśmy klasyczne zagadnienie bifurkacji w równaniach nieliniowych z parametrem oraz przedstawiliśmy podstawowe narzędzie, z którego korzystamy, t.j. twierdzenie Crandalla - Rabinowitza. W

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

dalszej części rozdziału omówione zostały redukcja Lyapunova - Schmidta oraz metoda funkcji kluczowej Sapronova, które stosujemy do określenia typu bifurkacji.

Rozdział trzeci stanowi zasadniczą część pracy doktorskiej i składa się z czterech podrozdziałów. W Podrozdziale 3.1 przedstawiamy matematyczny model biologicznego klastra, formułujemy problem bifurkacji z łamaniem symetrii oraz główne twierdzenie pracy (Twierdzenie 3.2). W Podrozdziale 3.2 sprowadzamy zagadnienie bifurkacji z łamaniem symetrii ze zbioru rozwiązań radialnie symetrycznych równania różniczkowo - funkcyjnego opisującego formy równowagi biologicznego klastra do klasycznego problemu bifurkacji ze zbioru rozwiązań trywialnych pewnego równania nieliniowego $\hat{F}(\varrho, \mu) = 0$ w odpowiednich przestrzeniach Banacha (Twierdzenie 3.3). Pokazujemy wybrane własności odwzorowania $\hat{F}$ (Lematy 3.4, 3.5 oraz 3.6), potrzebne do skorzystania z twierdzenia Crandalla - Rabinowitza. W Podrozdziale 3.3 badamy zachowanie rozwiązań radialnie niesymetrycznych. Wykazujemy, że mamy do czynienia ze zjawiskiem bifurkacji dokrytycznych i krzywą rozwiązań radialnie niesymetrycznych możemy sparametryzować parametrem bifurkacji τ. Natomiast w Podrozdziale 3.4 zostały przedstawione z wykorzystaniem programu Mathematica wizualizacje tego, jak w punktach krytycznych może zachować się brzeg biologicznego klastra.

Ostatni rozdział pracy doktorskiej powstał w oparciu o dwa artykuły [16] i [17], których współautorem jest moja pani promotor: dr hab. Joanna Janczewska. Poza fragmentem z pracy [17], którego nie ujęłam w rozprawie, dotyczącym badania stabilności punktów bifurkacji w zagadnieniu biologicznego klastra, przeprowadziłam obliczenia we wszystkich dowodach w obu artykułach stosując się do wskazówek i cennych uwag pani promotor.

W moim dorobku publikacyjnym znajduje się również praca [22]. Udowodniłam w niej twierdzenie o istnieniu bifurkacji $\mathbb{Z}_2$-symetrycznych ze zbioru rozwiazań trywialnych równań cząstkowych typu von Kármána dla kołowej płyty ściskanej koncentrycznie.

Zainteresowanie badaniem bifurkacji z łamaniem symetrii w zagadnie-

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

niach z wolnym brzegiem wzrosło z licznymi pracami A. Friedmana dotyczącymi tej problematyki [13, 14, 15]. Szczególną uwagę poświęciliśmy wspólnej pracy A. Friedmana z A. Borisovichem [7], w której autorzy stosują twierdzenie Crandalla - Rabinowitza. Naszą ciekawość wzbudziły też prace J. Eschera [11] z M. Ehrnströmem i B.-V. Matioc oraz [12] z A.-V. Matioc, gdzie twierdzenie Crandalla - Rabinowitza zastosowano do badania bifurkacji w zagadnieniach z medycyny i mechaniki płynów.

⋆⋆⋆

Pragnę serdecznie podziękować mojej pani promotor prof. Joannie Janczewskiej za opiekę merytoryczną, za cenne uwagi i sugestie, za zaangażowanie i wielką cierpliwość, dzięki którym możliwe było napisanie tej pracy.

Dziękuję dyrekcji CNMiKnO Politechniki Gdańskiej za wsparcie rozwoju naukowego. Szczególne podziękowania kieruję na ręce pani dr Anity Dąbrowicz-Tlałki, która do końca mnie dopingowała i nigdy nie zwątpiła, że ta praca doktorska powstanie.

Na koniec chcę podziękować mojemu mężowi Samborowi za cierpliwość i wsparcie.

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

Wykaz oznaczeń

Zbiory

$x \in X$	x jest elementem X
$A \subset B$	A zawiera się w B
$A \times B$	iloczyn kartezjański zbiorów A i B
(a, b)	przedział otwarty o końcach a i b
$[a, b]$	przedział domknięty o końcach a i b
$B_R(x_0)$	kula w przestrzeni X o środku w punkcie x_0 i promieniu $R > 0$
$\bar{B}_R(x_0)$	kula domknięta w przestrzeni X o środku w punkcie x_0 i promieniu $R > 0$
$S_R(x_0)$	sfera w przestrzeni X o promieniu $R > 0$ i środku w punkcie x_0
$\mathbb{R}_\delta(\lambda_0)$	$(\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta)$
$[a_{ij}]$	macierz wymiaru $m \times n$

Zbiory liczbowe

$\mathbb{N}$	zbiór liczb naturalnych
$\mathbb{R}$	zbiór liczb rzeczywistych
$\mathbb{R}_+$	zbiór liczb rzeczywistych dodatnich

Przestrzenie

$(X, +, \cdot)$	przestrzeń liniowa X z działaniami $+$ i $\cdot$
$(X, \|\cdot\|)$	przestrzeń unormowana X z normą $\|\cdot\|$
(X, ϱ)	przestrzeń metryczna X z metryką ϱ
$\dim X$	wymiar przestrzeni liniowej X
$\mathrm{codim} X$	kowymiar przestrzeni liniowej X
$(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$	przestrzeń X z iloczynem skalarnym

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

$X = X_1 \oplus X_2$	suma prosta podprzestrzeni X_1 i X_2
$\ker F$	jądro odwzorowania F
$\mathrm{im} F$	obraz odwzorowania F
$X_\delta(x_0)$	kula otwarta w przestrzeni Banacha X o środku w punkcie x_0 i promieniu δ

Przestrzenie funkcyjne

$C[a,b]$	przestrzeń funkcji ciągłych na odcinku $[a,b]$, z normą $\|x\|_{C[a,b]} = \max\limits_{a \leqslant t \leqslant b} \|x(t)\|$, zobacz str. 15
$L^p(a,b)$	przestrzeń funkcji całkowalnych z p-tą potęgą na przedziale (a,b) z normą $\|x\|_{L^p(a,b)} = \left(\int_a^b \|x(t)\|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$, zobacz str. 15
$C^m(2\pi)$	przestrzeń funkcji klasy C^m, 2π-okresowych, z normą $\|x\|_{C^m(2\pi)} = \sum\limits_{k=0}^{m} \max\limits_{t \in [0,2\pi]} \|x^{(k)}(t)\|$, zobacz str. 15
$C_e^m(2\pi)$	przestrzeń funkcji parzystych klasy C^m, 2π-okresowych, z normą $\|x\|_{C^m(2\pi)} = \sum\limits_{k=0}^{m} \max\limits_{t \in [0,2\pi]} \|x^{(k)}(t)\|$, zobacz str. 16
$L^2(2\pi)$	przestrzeń funkcji 2π-okresowych, całkowalnych z drugą potęgą na odcinku $[0,2\pi]$, z normą $\|x\|_{L^2(2\pi)} = \left(\int_0^{2\pi} \|x(t)\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$, zobacz str. 16
$L(X,Y)$	przestrzeń odwzorowań liniowych i ciągłych z przestrzeni Banacha X w przestrzeń Banacha Y, z normą $\|F\|_{L(X,Y)} := \max_{\|x\|_X \leqslant 1} \|Fx\|_Y$
$GL(X,Y)$	zbiór izomorfizmów w $L(X,Y)$
$\Phi(X,Y)$	zbiór odwzorowań liniowych typu Fredholma w $L(X,Y)$
$\Phi_i(X,Y)$	zbiór odwzorowań Fredholma indeksu i w $L(X,Y)$

Operatory, odwzorowania i funkcje

$\|\cdot\|$	moduł w $\mathbb{R}^n$
$\|\cdot\|_X$	norma w X
ϱ	metryka
$\langle\cdot,\cdot\rangle$	iloczyn skalarny
$f \circ g$	superpozycja (złożenie) odwzorowań f i g

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

Fx	wartość odwzorowania liniowego F w punkcie x
$F'(x_0)$	pochodna Frécheta odwzorowania F w punkcie x_0
$F'_x(x_0, \lambda_0)$	pochodna Frécheta odwzorowania F w punkcie (x_0, λ_0) względem zmiennej x,
$F'_G(x_0)$	pochodna w sensie Gâteaux odwzorowania F w punkcie x_0
$F'_G(x_0, \lambda_0)$	pochodna w sensie Gâteaux odwzorowania F w punkcie (x_0, λ_0) względem zmiennej x
$F''_{x\lambda}(x_0, \lambda_0)h$	$F''_{x\lambda}(x_0, \lambda_0)(h, 1)$
$\frac{d}{dt}F(x + th)\|_{t=0}$	pochodna odwzorowania F w punkcie X w kierunku wektora h
$E : X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$	funkcjonał energii,
Γ_0	trywialna rodzina (gałąź) rozwiązań równania typu $F(x, \lambda) = 0$, zobacz str. 31
$\Phi(\xi, \lambda)$	funkcja kluczowa, zobacz str. 35

Parametry i stałe

$\alpha, \beta > 0$	współczynniki elastyczności, zobacz str. 42
$\eta, \nu > 0$	parametry fizyczne, zobacz str. 42
$ind(F)$	indeks Fredholma odwzorowania F

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

Rozdział 1

Wiadomości wstępne

W poniższym rozdziale systematyzujemy podstawowe wiadomości o przestrzeniach metrycznych, unormowanych i unitarnych. Przypominamy standardowe definicje i wybrane twierdzenia oraz prezentujemy przykłady, z których będziemy korzystali w dalszej części pracy. Ustalamy notację i terminologię.

1.1 Przestrzenie metryczne i unormowane

Definicja 1.1 ([26])**.** Niech X będzie dowolnym zbiorem niepustym. Niech będą określone dwa działania: dodawanie $+ : X \times X \to X$ i mnożenie przez liczbę $\cdot : \mathbb{R} \times X \to X$, spełniające następujące warunki. Przy dowolnych $x, y, z \in X,\ a, b \in \mathbb{R}$:

1. $x + y = y + x$,
2. $x + (y + z) = (x + y) + z$,
3. istnieje element zerowy $\theta \in X$, taki że dla każdego $x \in X,\ x + \theta = x$,
4. jeśli θ spełnia warunek 3, to dla każdego $x \in X$ istnieje element przeciwny $-x \in X$ taki, że $x + (-x) = \theta$,
5. $a(x + y) = ax + ay$,

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

6. $(a+b)x = ax + bx$,

7. $a(bx) = (ab)x$,

8. $1 \cdot x = x$.

Zbiór X z działaniami $+$ i $\cdot$ nazywamy rzeczywistą przestrzenią liniową lub przestrzenią liniową nad ciałem liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ i oznaczamy $(X, +, \cdot)$. Ponieważ w pracy będziemy rozważać tylko rzeczywiste przestrzenie liniowe, więc będziemy pisali krótko: $(X, +, \cdot)$ jest przestrzenią liniową.

Jeżeli $(X, +, \cdot)$ jest przestrzenią liniową, to niepusty podzbiór $X_0 \subset X$ nazywamy jej podprzestrzenią liniową wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych $x, y \in X_0$ i $a \in \mathbb{R}$ mamy $x + y \in X_0$ oraz $a \cdot x \in X_0$.

Elementy $x_1, x_2, ..., x_n$ przestrzeni liniowej $(X, +, \cdot)$ nazywamy liniowo niezależnymi, gdy warunki $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = \theta$, $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}$, pociągają za sobą $a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$. Największą liczbę całkowitą nieujemną n o tej własności, że istnieje n elementów liniowo niezależnych w $(X, +, \cdot)$, nazywamy *wymiarem przestrzeni* $(X, +, \cdot)$ i oznaczamy $\dim X$. Jeżeli taka liczba n istnieje, to przestrzeń nazywamy *skończenie wymiarową*. Jeżeli nie istnieje, to przestrzeń nazywamy *nieskończenie wymiarową* i zapisujemy $\dim X = \infty$. Jeśli $\dim X = n$, to każdy zbiór n liniowo niezależnych elementów przestrzeni X nazywamy *bazą* przestrzeni liniowej $(X, +, \cdot)$.

Przypomnimy definicję przestrzeni metrycznej i unormowanej oraz podstawowe pojęcia z nimi związane.

Definicja 1.2 ([26])**.** Niech X będzie zbiorem niepustym i niech ϱ będzie funkcją określoną w $X \times X$ o wartościach nieujemnych, spełniającą następujące warunki:

1. $\varrho(x, y) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = y$,

2. $\varrho(x, y) = \varrho(y, x)$ dla każdych $x, y \in X$,

3. $\varrho(x, z) \leqslant \varrho(x, y) + \varrho(y, z)$ dla każdych $x, y, z \in X$.

Funkcję ϱ nazywamy odległością lub metryką w X, a parę (X, ϱ) nazywamy przestrzenią metryczną.

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

Definicja 1.3 ([4])**.** Ciąg $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ jest zbieżny do punktu $x_0 \in X$ w przestrzeni (X, ϱ), jeżeli

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_k\ \forall_{n>k}\ \varrho(x_n, x_0) < \varepsilon.$$

Definicja 1.4 ([4])**.** Ciąg $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ spełnia warunek Cauchy'ego w przestrzeni (X, ϱ), jeżeli

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_k\ \forall_{m,n>k}\ \varrho(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

Przestrzeń metryczna (X, ϱ) jest przestrzenią zupełną wtedy i tylko wtedy, gdy każdy ciąg $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ jej elementów spełniający warunek Cauchy'ego jest zbieżny w tej przestrzeni do pewnego elementu $x_0 \in X$.

Zbiór $B_R(x_0) = \{x \in X : \varrho(x, x_0) < R\}$ nazywamy kulą w przestrzeni (X, ϱ) o środku w punkcie $x_0 \in X$ i promieniu $R > 0$. Ponadto przez $\bar{B}_R(x_0)$ oznaczamy kulę domkniętą, a przez $S_R(x_0)$ sferę o promieniu $R > 0$ i środku w punkcie x_0, tzn.

$$\bar{B}_R(x_0) = \{x \in X : \varrho(x, x_0) \leqslant R\},$$
$$S_R(x_0) = \{x \in X : \varrho(x, x_0) = R\}.$$

Korzystając z powyższych definicji, zbiór $A \subset X$ nazywamy *zbiorem otwartym* w przestrzeni (X, ϱ), gdy dla każdego $x_0 \in A$ istnieje taka kula $B_R(x_0)$, że $B_R(x_0) \subset A$. Zbiór $Z \subset X$ jest *zbiorem ograniczonym* w przestrzeni (X, ϱ), jeżeli istnieje $R > 0$ takie, że $Z \subset B_R(0)$.

Mówimy, że zbiór $Z \subset X$ jest *zbiorem zwartym* w przestrzeni (X, ϱ), jeżeli z każdego ciągu $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset Z$ możemy wybrać podciąg $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ zbieżny do pewnego elementu $x_0 \in Z$.

Definicja 1.5 ([26])**.** Niech X będzie rzeczywistą przestrzenią liniową. Funkcję $x \to \|x\|$ odwzorowującą zbiór X w zbiór liczb nieujemnych nazywamy normą, gdy spełnia ona dla dowolnych $x, y \in X$ i dowolnego $a \in \mathbb{R}$ warunki:

1. $\|x\| = 0$ pociąga $x = 0$,

2. $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$,

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

3. $\|ax\| = |a| \cdot \|x\|$.

Przestrzeń liniową X wraz z określoną w niej normą $\|\cdot\|$, czyli parę $(X, \|\cdot\|)$, nazywamy *przestrzenią unormowaną*. Każda przestrzeń unormowana $(X, \|\cdot\|)$ jest przestrzenią metryczną ze względu na metrykę

$$\varrho(x, y) = \|x - y\|. \tag{1.1}$$

Aksjomaty metryki dla (1.1) wynikają bezpośrednio z definicji normy. Ponieważ przestrzeń unormowana jest przestrzenią metryczną, więc stosują się do niej pojęcia znane z teorii przestrzeni metrycznych.

1.2 Przestrzenie Banacha

Definicja 1.6 ([26])**.** Przestrzeń unormowaną zupełną $\langle X, \|\cdot\|\rangle$ nazywamy przestrzenią Banacha.

Podamy teraz kilka znanych przykładów przestrzeni Banacha ([4], [26]).

Przykład 1.1. Zbiór $C[a, b]$ wszystkich funkcji ciągłych określonych na przedziale $[a, b]$ z normą

$$\|x\|_{C[a,b]} = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t)|$$

jest przestrzenią Banacha.

Przykład 1.2. Przestrzeń $L^p(a, b)$ funkcji całkowalnych z p-tą potęgą ($p \geqslant 1$) na przedziale (a, b) z normą

$$\|x\|_{L^p(a,b)} = \Big(\int_a^b |x(t)|^p dt\Big)^{\frac{1}{p}}$$

jest przestrzenią Banacha.

Przykład 1.3. Niech $C^m(2\pi)$ oznacza zbiór funkcji klasy C^m ($m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$), 2π-okresowych z normą

$$\|x\|_{C^m(2\pi)} = \sum_{k=0}^{m} \max_{t \in [0,2\pi]} |x^{(k)}(t)|, \tag{1.2}$$

gdzie $x^{(k)}$ dla $k = 1, 2, ..., m$ jest k-tą pochodną funkcji x oraz $x^{(0)} = x$. Tak określona przestrzeń $C^m(2\pi)$ z normą (1.2) jest przestrzenią Banacha.

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

Dowód. Załóżmy, że ciąg $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C^m(2\pi)$ spełnia warunek Cauchy'ego,

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_N\ \forall_{p,n>N}\ \sum_{k=0}^{m} \max_{t\in[0,2\pi]} |x_n^{(k)}(t) - x_p^{(k)}(t)| < \varepsilon.$$

W szczególności,

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_N\ \forall_{p,n>N}\ \forall_{t\in[0,2\pi]}\ |x_n(t) - x_p(t)| < \varepsilon,$$

więc ciąg funkcji $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest jednostajnie zbieżny. Oznaczmy jego granicę $x(t) = \lim_{n\to\infty} x_n(t)$. Ponadto, x jest funkcją ciągłą jako granica jednostajnie zbieżnego ciągu funkcji ciągłych oraz 2π-okresową, gdyż $x(t+2\pi) = \lim_{n\to\infty} x_n(t+2\pi) = \lim_{n\to\infty} x_n(t) = x(t)$. To samo możemy pokazać dla ciągu pochodnych $\{x_n^{(k)}\}_{n=1}^{\infty}$ rzędu $k = 1, 2, ..., m$. Zatem ciąg $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny do funkcji x w $C^m(2\pi)$. $\square$

Przykład 1.4. Niech

$$C_e^m(2\pi) := \{x \in C^m(2\pi) : x(t) = x(-t) \text{ dla t} \in \mathbb{R}\}$$

będzie podprzestrzenią funkcji parzystych z normą określoną wzorem (1.2). Tak określona przestrzeń jest również przestrzenią Banacha.

Przykład 1.5. Przestrzeń $L^2(2\pi)$ funkcji 2π-okresowych, całkowalnych z drugą potęgą na odcinku $[0, 2\pi]$ z normą

$$\|x\|_{L^2(2\pi)} = \Big(\int_0^{2\pi} |x(t)|^2 dt\Big)^{\frac{1}{2}} \tag{1.3}$$

jest przestrzenią Banacha.

Przestrzeń Banacha X jest przestrzenią liniową, unormowaną oraz zupełną. Dodatkowo określmy odwzorowanie, nazywane *iloczynem skalarnym*, które parze $x, y \in X$ przyporządkowuje liczbę rzeczywistą $\langle x, y\rangle$, spełniające następujące warunki:

- $\langle x, x\rangle \geqslant 0$ oraz $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
- $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$ dla każdego $x, y \in X$,

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

- $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$ dla każdego $x, y \in X$ i $\alpha \in \mathbb{R}$,
- $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$ dla każdego $x, y, z \in X$.

Definicja 1.7 ([4], [26])**.** Przestrzeń Banacha $(X, \|\cdot\|)$ nazywamy przestrzenią Hilberta, jeżeli norma jest indukowana przez iloczyn skalarny, tzn.:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle},$$

gdzie $\langle\cdot,\cdot\rangle : X \times X \to \mathbb{R}$ iloczyn skalarny.

Przykład 1.6. Przestrzeń $L^2(a, b)$ z iloczynem skalarnym

$$\langle x, y\rangle = \int_a^b x(t)y(t)dt \text{ dla } x, y \in L^2(a, b)$$

jest przestrzenią Hilberta, a norma indukowana przez ten iloczyn pokrywa się z normą wprowadzoną w Przykładzie 1.2 dla $p = 2$.

Przykład 1.7. Przestrzeń $L^2(2\pi)$ opisana w Przykładzie 1.5 jest również przestrzenią Hilberta. Iloczyn skalarny elementów $x, y \in L^2(2\pi)$ dany wzorem

$$\Big\langle x, y\Big\rangle = \int_0^{2\pi} x(t)y(t)dt. \tag{1.4}$$

generuje normę (1.3).

Uwaga 1.8. Z Definicji 1.7 wynika, że każda przestrzeń Hilberta jest przestrzenią Banacha. Stwierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe.

Definicja 1.8 ([4])**.** Niech $(X, \|\cdot\|)$ będzie przestrzenią unormowaną.

Mówimy, że $(X_0, \|\cdot\|_0)$ jest podprzestrzenią unormowaną przestrzeni $(X, \|\cdot\|)$, jeżeli $X_0 \subset X$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni X oraz $\|x\|_0 = \|x\|$ dla każdego $x \in X_0$.

Natomiast, przestrzeń unormowaną $(X_0, \|\cdot\|_0)$ nazywamy podprzestrzenią zanurzoną w $(X, \|\cdot\|)$, jeżeli $X_0 \subset X$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni X oraz istnieje stała $C > 0$ taka, że $\|x\| \leqslant C \cdot \|x\|_0$ dla każdego $x \in X_0$.

Przykład 1.9. Przestrzeń $C^m(2\pi)$ jest podprzestrzenią zanurzoną w przestrzeni Hilberta $L^2(2\pi)$.

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

Dowód. Łatwo sprawdzić, że $C^m(2\pi)$ jest podprzestrzenią liniową $L^2(2\pi)$. Ponadto, dla każdego $x \in C^m(2\pi)$,

$$\|x\|_{L^2(2\pi)} = \Big(\int_0^{2\pi} |x(t)|^2 dt\Big)^{\frac{1}{2}} \leqslant \Big[\int_0^{2\pi} (\max_{s\in[0,2\pi]} |x(s)|)^2 dt\Big]^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \Big[(\max_{s\in[0,2\pi]} |x(s)|)^2 \cdot \int_0^{2\pi} dt\Big]^{\frac{1}{2}} \leqslant \sqrt{2\pi}\|x\|_{C^m(2\pi)}.$$

Otrzymujemy

$$\|x\|_{L^2(2\pi)} \leqslant \sqrt{2\pi}\|x\|_{C^m(2\pi)},$$

zatem $C^m(2\pi)$ jest podprzestrzenią zanurzoną w $L^2(2\pi)$. □

Na koniec tego podrozdziału podamy definicję sumy prostej.

Definicja 1.9 ([4], [23])**.** Niech $X_1,\ X_2$ będą (domkniętymi) podprzestrzeniami przestrzeni unormowanej X. Mówimy, że X jest (topologiczną) sumą prostą podprzestrzeni X_1 i X_2, co zapisujemy $X = X_1 \oplus X_2$, jeżeli dla każdego $x \in X$ istnieją dokładnie jeden $x_1 \in X_1$ i dokładnie jeden $x_2 \in X_2$ takie, że $x = x_1 + x_2$.

Podprzestrzenie X_1 i X_2 nazywane są podprzestrzeniami *komplementarnymi*. Podprzestrzeń X_2 nazywamy *dopełnieniem algebraicznym* przestrzeni X_1. Jeżeli $\dim X_2 < \infty$, to każde inne dopełnienie algebraiczne przestrzeni X_1 też ma ten sam skończony wymiar. Wymiar przestrzeni X_2 nazywamy *kowymiarem* przestrzeni X_1 i oznaczamy

$$\operatorname{codim} X_1 := \dim X_2.$$

W przypadku, gdy X jest przestrzenią Hilberta, to dla każdej jej domkniętej podprzestrzeni X_1 istnieje domknięte dopełnienie algebraiczne X_2.

1.3 Operatory i funkcjonały liniowe ciągłe

Definicja 1.10 ([26])**.** Niech $X,\ Y$ będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$. Odwzorowanie $F : X \to Y$ nazywamy operatorem liniowym, gdy

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

- $F(x_1 + x_2) = F(x_1) + F(x_2)$,
- $F(\alpha x) = \alpha F(x)$

dla dowolnych $x,\ x_1,\ x_2 \in X$ i $\alpha \in \mathbb{R}$. Jeżeli $Y = \mathbb{R}$, to $F : X \to \mathbb{R}$ nazywamy funkcjonałem liniowym.

Niech $F : X \to Y$ będzie odwzorowaniem liniowym. Zamiast pisać $F(x)$ często będziemy pisali Fx. Zbiór

$$\ker F := \{x \in X : Fx = 0\}$$

nazywamy jądrem odwzorowania F, a zbiór

$$\mathrm{im}F := \{Fx : x \in X\}$$

nazywamy obrazem odwzorowania F.
Wprost z Definicji 1.10 wynika, że $\ker F \subset X$ i $\mathrm{im}F \subset Y$ są podprzestrzeniami liniowymi odpowiednio w X i Y.

Definicja 1.11 ([26])**.** Niech $(X, \|\cdot\|_X)$ i $(Y, \|\cdot\|_Y)$ będą przestrzeniami unormowanymi. Mówimy, że odwzorowanie $F : X \to Y$ jest ciągłe w punkcie $x_0 \in X$, jeżeli

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{x\in X}\|x - x_0\|_X < \delta \Rightarrow \|F(x) - F(x_0)\|_Y < \varepsilon.$$

Odwzorowanie $F : X \to Y$ jest ciągłe wtedy i tylko wtedy, gdy jest ciągłe w każdym punkcie zbioru X.

Definicja 1.12 ([4])**.** Niech $(X, \|\cdot\|_X)$ i $(Y, \|\cdot\|_Y)$ będę przestrzeniami unormowanymi. Mówimy, że $F : X \to Y$ jest ograniczone, jeżeli zbiory ograniczone w X przeprowadza na zbiory ograniczone w Y.

W klasie odwzorowań liniowych warunek ten jest równoważny z

$$\exists_{M>0}\forall_{x\in X}\ \|Fx\|_Y \leqslant M\|x\|_X.$$

Twierdzenie 1.10 (Tw. Banacha, [26])**.** *Operator liniowy $F : X \to Y$, gdzie X i Y są przestrzeniami unormowanymi, jest ciągły wtedy i tylko wtedy, gdy jest ograniczony.*

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

Niech $(X, \|\cdot\|_X)$ i $(Y, \|\cdot\|_Y)$ będą przestrzeniami unormowanymi. Zbiór wszystkich odwzorowań liniowych i ciągłych z X w Y oznaczać będziemy symbolem $L(X, Y)$. Zbiór ten wraz z normą

$$\|F\|_{L(X,Y)} := \max_{\|x\|_X \leqslant 1} \|Fx\|_Y$$

jest przestrzenią unormowaną.

Twierdzenie 1.11 ([26])**.** *Zbiór $L(X, Y)$ z normą $\|\cdot\|_{L(X,Y)}$ jest przestrzenią Banacha wtedy i tylko wtedy, gdy $(Y, \|\cdot\|_Y)$ jest przestrzenią Banacha.*

Definicja 1.13 ([4])**.** Niech X, Y będą przestrzeniami Banacha. Odwzorowanie $F : X \to Y$ nazywamy zwartym, gdy zbiory ograniczone w X przeprowadza na zbiory relatywnie (warunkowo) zwarte w Y.

Inaczej mówiąc dla każdego ciągu ograniczonego $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ w X z ciągu $\{F(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ można wybrać podciąg zbieżny w Y.

Definicja 1.14 ([4])**.** Niech X, Y będą przestrzeniami Banacha. Odwzorowanie $F : X \to Y$ nazywamy pełnociągłym, jeżeli jest ono jednocześnie odwzorowaniem ciągłym i zwartym.

Stwierdzenie 1.12 ([4])**.** Niech X, Y będą przestrzeniami Banacha. W klasie odwzorowań liniowych z X w Y, pojęcie zwartości jest równoważne pojęciu pełnociągłości.

Powyższe stwierdzenie wynika z faktu, że jeżeli odwzorowanie zwarte $F : X \to Y$ jest również odwzorowaniem liniowym, to jest odwzorowaniem ograniczonym. Zatem na mocy Twierdzenia 1.10, $F : X \to Y$ jest odwzorowaniem ciągłym.

Do wykazania pełnociągłości niektórych odwzorowań przydatne będę następujące własności:

(i) Kombinacja liniowa odwzorowań pełnociągłych jest odwzorowaniem pełnociągłym, tzn. wszystkie odwzorowania pełnociągłe tworzą podprzestrzeń liniową przestrzeni Banacha $L(X, Y)$.

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

(ii) Jeżeli odwzorowanie A jest pełnociągłe oraz B jest ciągłe i jeśli wykonalne są złożenia $A \circ B$ i $B \circ A$, to oba są pełnociągłe.

Definicja 1.15 ([4])**.** Zbiór $Z \subset C[a,b]$ nazywamy zbiorem funkcji wspólnie ograniczonych, jeżeli istnieje liczba $K > 0$ taka, że

$$\forall_{h \in Z} \ \forall_{t \in [a,b]} \ |h(t)| \leqslant K.$$

Definicja 1.16 ([4])**.** Zbiór $Z \subset C[a,b]$ nazywamy zbiorem funkcji jednakowo ciągłych, jeżeli

$$\forall_{\varepsilon > 0} \ \exists_{\delta > 0} \ \forall_{h \in Z} \ \forall_{t, \bar{t} \in [a,b]} |t - \bar{t}| < \delta \Rightarrow |h(t) - h(\bar{t})| < \varepsilon.$$

Lemat 1.13 (Lemat Arzeli-Ascoli, [4])**.** Zbiór $Z \subset C[a,b]$ jest warunkowo zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jest zbiorem funkcji jednakowo ciągłych i wspólnie ograniczonych.

Na koniec wyjaśnijmy, że symbolem $|\,.\,|$ oznaczamy moduł w $\mathbb{R}^n$, t.j.

$$|x| = \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\Big)^{\frac{1}{2}}, \text{ gdzie } x = (x_1, ..., x_n).$$

Oczywiście dla $n = 1$ mamy zwykłą wartość bezwzględną.

1.4 Rachunek różniczkowy w przestrzeniach Banacha

Ponieważ rachunek różniczkowy będzie podstawowym narzędziem w badaniu bifurkacji, dlatego przypomnimy teraz pojęcie pochodnej w sensie Frécheta i Gâteaux. Omówimy również podstawowe własności tych pochodnych.

Definicja pochodnej w sensie Frécheta jest naturalnym uogólnieniem na przestrzenie Banacha pojęcia pochodnej funkcji zmiennej rzeczywistej.

Niech $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ będą przestrzeniami Banacha oraz U będzie otwartym podzbiorem X. Rozważamy odwzorowanie $F : U \to Y$.

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

Definicja 1.17 ([1])**.** Mówimy, że $F : U \to Y$ jest różniczkowalne w sensie Frécheta w punkcie $x_0 \in U$, jeżeli istnieje odwzorowanie $A \in L(X, Y)$ takie, że zachodzi warunek:

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{h\in X}\ 0 < \|h\|_X < \delta \Rightarrow \|F(x_0 + h) - F(x_0) - Ah\|_Y < \varepsilon \cdot \|h\|_X.$$

Odwzorowanie A jest wyznaczone jednoznacznie. Nazywamy je pochodną Frécheta odwzorowania F w punkcie x_0 i oznaczamy $F'(x_0) := A$.

Uwaga 1.14. Odwzorowanie $A \in L(X, Y)$ nazywamy pochodną Frécheta przekształcenia F w punkcie x_0, jeżeli istnieje granica

$$\lim_{\|h\|_X \to 0} \frac{\|F(x_0 + h) - F(x_0) - Ah\|_Y}{\|h\|_X} = 0.$$

Jest to równoważny warunek z Definicją 1.17.

Stwierdzenie 1.15 ([1])**.** Jeżeli $F : U \to Y$ jest przekształceniem różniczkowalnym w sensie Frécheta w punkcie x_0, to F jest przekształceniem ciągłym w tym punkcie.

Jeżeli $F : U \to Y$ jest różniczkowalne w sensie Frécheta dla każdego $x_0 \in U$, to mówimy, że F jest różniczkowalne w sensie Frécheta.
Od teraz, używając pojęcia różniczkowalności będziemy odnosić się do pojęcia różniczkowalności w sensie Frécheta.

Definicja 1.18 ([1])**.** Niech $F : U \to Y$ będzie różniczkowalne. Odwzorowanie $F' : U \to L(X, Y)$, $x_0 \to F'(x_0)$ nazywamy pochodną w sensie Frécheta odwzorowania F. Jeżeli F' jest ciągłym odwzorowaniem z U w $L(X, Y)$, to mówimy, że F jest klasy C^1 i piszemy $F \in C^1(U, Y)$.

Wprowadzimy teraz definicję pochodnej w sensie Gâteaux.

Definicja 1.19 ([1])**.** Niech $F : U \to Y$ oraz $x_0 \in U$. Mówimy, że odwzorowanie F jest różniczkowalne w sensie Gâteaux w punkcie x_0, jeśli istnieje odwzorowanie $A \in L(X, Y)$ takie, że dla każdego $h \in X$ zachodzi

$$\lim_{t\to 0} \frac{F(x_0 + th) - F(x_0)}{t} = Ah.$$

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

Odwzorowanie liniowe i ciągłe $A : X \to Y$ jest wyznaczone jednoznacznie i nazywamy je pochodną w sensie Gâteaux odwzorowania F w punkcie x_0 oraz oznaczamy $F'_G(x_0) := A$.

Jeżeli odwzorowanie $F : U \to Y$ jest odwzorowaniem różniczkowalnym w sensie Frécheta w punkcie x_0, to F jest również różniczkowalne w sensie Gâteaux w tym punkcie. Jednakże, różniczkowalność w sensie Gâteaux w punkcie x_0 nie implikuje ciągłości odwzorowania F w tym punkcie. Rozważmy na przykład odwzorowanie $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dane wzorem

$$F(s,t) = \begin{cases} \left(\frac{s^2 t}{s^4+t^2}\right)^2, & \text{dla} \quad t \neq 0, \\ 0, & \text{dla} \quad t = 0. \end{cases}$$

Weźmy $x_0 = (0,0)$ oraz dowolny $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$. Wtedy $F(0,0) = 0$ oraz

$$F(x_0 + \varepsilon h) = F(\varepsilon h_1, \varepsilon h_2) = \frac{\varepsilon^2 h_1^4 h_2^2}{(\varepsilon^2 h_1^4 + h_2^2)^2},$$

gdy $h_2 \neq 0$ oraz $F(x_0 + \varepsilon h) = 0$, gdy $h_2 = 0$. Dla odwzorowania F istnieje pochodna Gâteaux $F'_G(0,0) = 0$, ponieważ

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F(\varepsilon h_1, \varepsilon h_2) - F(0,0)}{\varepsilon} = \begin{cases} \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{\varepsilon h_1^4 h_2^2}{(\varepsilon^2 h_1^4 + h_2^2)^2} = 0, & \text{dla} \quad h_2 \neq 0, \\ \\ 0, & \text{dla} \quad h_2 = 0 \end{cases}$$

dla każdego $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$.

Rozpatrzmy teraz dwa ciągi $x_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ oraz $\hat{x}_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2})$. Łatwo pokazać, że $\lim\limits_{n\to\infty} F(x_n) = 0$ i $\lim\limits_{n\to\infty} F(\hat{x}_n) = \dfrac{1}{4}$. Zatem odwzorowanie F w punkcie $(0,0)$ nie jest jednak odwzorowaniem ciągłym.

Jeżeli $F : U \to Y$ jest różniczkowalne w sensie Gâteaux w każdym punkcie $x_0 \in U$, to mówimy, że F jest różniczkowalne w sensie Gâteaux. Wówczas odwzorowanie $F'_G : U \to L(X,Y)$, $x_0 \to F'_G(x_0)$ nazywamy pochodną w sensie Gâteaux odwzorowania F.

Podamy teraz twierdzenie, które ustala zależność między pochodną w sensie Frécheta i pochodną w sensie Gâteaux.

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

Twierdzenie 1.16 ([1]). *Niech $F : U \to Y$ będzie odwzorowaniem różniczkowalnym w sensie Gâteaux i niech $F'_G : U \to L(X, Y)$ będzie odwzorowaniem ciągłym w punkcie x_0. Wtedy F jest odwzorowaniem różniczkowalnym w sensie Frécheta w x_0 oraz $F'(x_0) = F'_G(x_0)$.*

Z powyższego twierdzenia wynika, że do wyznaczenia pochodnej w sensie Frécheta odwzorowania F wystarczy znaleźć pochodną w sensie Gâteaux F'_G i wykazać, że jest ona odwzorowaniem ciągłym.

Definicja 1.20 ([1]). Niech X, Y będą przestrzeniami Banacha zanurzonymi w przestrzeni Hilberta H. Niech $U \subset X$ będzie zbiorem otwartym i $E : U \to \mathbb{R}$ będzie różniczkowalnym funkcjonałem. Gradientem wariacyjnym funkcjonału E nazywamy odwzorowanie $F : U \to Y$ takie, że

$$E'(x_0)h = \langle F(x_0), h \rangle$$

dla każdego $h \in X$ i $x_0 \in U$.

1.5 Odwzorowania liniowe typu Fredholma

Definicja 1.21 ([4]). Niech X, Y będą przestrzeniami Banacha. Odwzorowanie liniowe i ciągłe $A : X \to Y$ nazywamy odwzorowaniem Fredholma, jeżeli jego jądro $\ker A$ ma skończony wymiar oraz jego obraz $\mathrm{im}A$ jest podprzestrzenią skończonego kowymiaru w Y.

Uwaga 1.17. Jeżeli $A : X \to Y$ jest odwzorowaniem Fredholma, to $\mathrm{im}A$ jest podprzestrzenią domkniętą w Y ($\mathrm{im}A = \overline{\mathrm{im}A}$).

Ponadto, jeżeli $\dim \ker A = n$ i $\mathrm{codim}\, \mathrm{im}A = m$, to liczbę

$$ind(A) = n - m$$

nazywamy indeksem Fredholma odwzorowania F.

Oznaczamy przez $\Phi(X, Y)$ zbiór wszystkich odwzorowań liniowych typu Fredholma oraz $\Phi_i(X, Y) = \{A \in \Phi(X, Y) : ind(A) = i\}$.

Oto kilka przykładów odwzorowań, które spełniają warunki powyższej definicji.

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

Przykład 1.18. Niech X, Y będą przestrzeniami Banacha.
Połóżmy

$$GL(X,Y) := \{A \in L(X,Y) : \ker A = \{0\} \ \wedge \ \mathrm{im} A = Y\}.$$

Odwzorowanie $A \in GL(X,Y)$ nazywamy *izomorfizmem.*
Jeżeli $A \in GL(X,Y)$, to $\dim \ker A = 0$ i $\mathrm{codim}\, \mathrm{im} A = 0$. Stąd $ind(A) = 0$ i w rezultacie, $A \in \Phi_0(X,Y)$. Wobec powyższego prawdziwa jest inkluzja

$$GL(X,Y) \subset \Phi_0(X,Y).$$

W kolejnym przykładzie skorzystamy z dwóch znanych twierdzeń z algebry liniowej.

Twierdzenie 1.19 ([28])**.** *Zbiór rozwiązań układu jednorodnego*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n & = & 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots & & \\ a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n & = & 0 \end{cases} \tag{1.5}$$

o współczynnikach $a_{ij} \in \mathbb{R}$ tworzy w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ podprzestrzeń wymiaru $n-r$, gdzie r oznacza rząd macierzy $A = [a_{ij}]$, $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$ układu (1.5).

Twierdzenie 1.20 ([28])**.** *Niech V będzie dowolną n-wymiarową przestrzenią liniową nad $\mathbb{R}$. Wtedy dla przekształcenia liniowego F z V do przestrzeni liniowej W nad $\mathbb{R}$ zachodzi równość:*

$$n = \dim \ker F + \dim \mathrm{im} F.$$

Przykład 1.21. Odwzorowanie liniowe $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ jest odwzorowaniem Fredholma indeksu $n - m$.

Dowód. Niech odwzorowanie $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ będzie reprezentowane przez macierz $A = [a_{ij}]$ dla $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$. Z Twierdzenia 1.19 otrzymujemy

$$\dim \ker F = n - r, \tag{1.6}$$

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

gdzie r oznacza rząd macierzy A. Natomiast z Twierdzenia 1.20 i zależności (1.6) mamy $\dim \mathrm{im} F = r$, czyli $\mathrm{codim}\, \mathrm{im} F = m - r$. Zatem $F \in \Phi(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ oraz $ind(F) = n - m$. $\square$

Przykład 1.22. Rozważamy $X = C^1[0,1]$ i $Y = C[0,1]$ ze standardowymi normami

$$\|x\|_{C^1[0,1]} = \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |x(t)| + \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |x'(t)|, \qquad \|x\|_{C[0,1]} = \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |x(t)|.$$

Niech odwzorowanie $A : X \to Y$ będzie dane wzorem:

$$Ax(t) = x'(t). \tag{1.7}$$

Z własności pochodnych wynika liniowość odwzorowania (1.7). Zauważmy również, że dla każdego $x \in X$,

$$\|Ax\|_{C[0,1]} = \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |Ax(t)| = \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |x'(t)| \leqslant \|x\|_{C^1[0,1]}.$$

Stąd odwzorowanie A jest ograniczone, czyli na mocy Twierdzenia 1.10 jest ciągłe. Ponadto, $\ker A = \{x \equiv C : C \in \mathbb{R}\}$, więc $\dim \ker A = 1$. Co więcej, z twierdzenia Leibniza wynika, że dla każdego $y \in C[0,1]$ istnieje $x \in C^1[0,1]$ dane wzorem

$$x(t) = \int_0^t y(s)ds + C,$$

takie, że $Ax(t) = y(t)$. Wobec czego $\mathrm{im} A = C[0,1]$ i $\mathrm{codim}\, \mathrm{im} A = 0$. Oznacza to, że $A \in \Phi_1(X, Y)$.

Przykład 1.23. Rozważmy teraz odwzorowanie dane wzorem (1.7) z przestrzeni Banacha $X = C^1(2\pi)$ w przestrzeń Banacha $Y = C(2\pi)$ ze standardowymi normami. Pokażemy, że $A \in \Phi_0(X, Y)$.

Liniowość i ciągłość A oraz własność $\dim \ker A = 1$ argumentujemy analogicznie jak w Przykładzie 1.22. Wyznaczmy $\mathrm{im} A$.

Niech $y \in \mathrm{im} A$. Istnieje $x \in X$ takie, że $x'(t) = y(t)$. Zatem

$$x(t) = \int_0^t y(s)ds + C.$$

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

Korzystając z 2π-okresowości funkcji x, dla każdego $t \in \mathbb{R}$ mamy

$$x(t) = x(t+2\pi) = \int_0^{t+2\pi} y(s)ds + C = \int_0^t y(s)ds + C + \int_0^{2\pi} y(s)ds =$$

$$= x(t) + \int_0^{2\pi} y(s)ds,$$

co oznacza, że

$$\mathrm{im}A = \{y \in C(2\pi) : \int_0^{2\pi} y(s)ds = 0\}.$$

Zauważmy, że przestrzeń Y możemy zapisać jako $Y = Y_1 \oplus Y_2$, gdzie $Y_1 = \mathrm{im}A$ oraz $Y_2 = \{y \equiv C : C \in \mathbb{R}\}$. Ponieważ $\dim Y_2 = 1$, więc $\mathrm{codim}\,\mathrm{im}A = 1$. Zatem rzeczywiście odwzorowanie (1.7) w tych przestrzeniach jest odwzorowaniem typu Fredholma indeksu 0.

Istotna jest następująca uwaga.

Uwaga 1.24. Rozważmy jeszcze raz odwzorowanie A dane wzorem (1.7) oraz przestrzenie $X = C^1(2\pi)$ i $Y = C(2\pi)$ ze standardowymi normami. Przestrzenie X i Y możemy zapisać jako $X = X_1 \oplus X_2$, gdzie $X_1 = \{x \equiv C : C \in \mathbb{R}\}$ i $X_2 = \{x \in C^1(2\pi) : \int_0^{2\pi} x(t)dt = 0\}$ oraz $Y = Y_1 \oplus Y_2$, gdzie $Y_1 = \mathrm{im}A$ i $Y_2 = \{y \equiv C : C \in \mathbb{R}\}$. Wówczas możemy zauważyć, co następuje.

- Jeśli $A : X_2 \to Y$, to $A \in \Phi_{-1}(X_2, Y)$,
- Jeśli $A : X \to Y_1$, to $A \in \Phi_1(X, Y_1)$,
- Jeśli $A : X_2 \to Y_1$, to $A \in GL(X_2, Y_1)$.

Przykład 1.25. Rozważmy $X = C_e^{m+2}(2\pi)$ oraz $Y = C_e^m(2\pi)$ ze standardowymi normami (porównaj Przykłady 1.3 i 1.4). Niech odwzorowanie $A : X \to Y$ będzie dane wzorem

$$Ax(t) = x''(t).$$

Pokażemy, że $A \in \Phi_0(X, Y)$.

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

Dowód. Z własności pochodnych drugiego rzędu wynika liniowość odwzorowania A. Ponadto, dla każdego $x \in X$ mamy

$$\|Ax\|_Y = \|x''\|_Y = \sum_{k=0}^{m} \max_{t\in[0,2\pi]} |x^{(k+2)}(t)| = \sum_{k=2}^{m+2} \max_{t\in[0,2\pi]} |x^{(k)}(t)|$$
$$\leqslant \sum_{k=0}^{m+2} \max_{t\in[0,2\pi]} |x^{(k)}(t)| = \|x\|_X.$$

Wobec tego A jest odwzorowaniem ograniczonym. Z Twierdzenia 1.10 wynika, że A jest odwzorowaniem ciągłym.

Łatwo widać, że

$$\ker A = \{x \equiv C : C \in \mathbb{R}\}.$$

Zatem $\dim \ker A = 1$.

Rozłóżmy Y na sumę prostą $Y = Y_1 \oplus Y_2$, gdzie

$$Y_1 = \{y \equiv C : C \in \mathbb{R}\} \text{ i } Y_2 = \{y \in Y : \int_0^{2\pi} y(s)ds = 0\}.$$

Weźmy $y \in Y_2$. Połóżmy

$$Y(t) := \int_0^t y(s)ds.$$

Z tw. Leibniza wiemy, że Y jest klasy C^{m+1} oraz $Y' = y$. Dla $t \in \mathbb{R}$ otrzymujemy

$$Y(-t) = \int_0^{-t} y(s)ds = -\int_0^t y(-\tau)d\tau = -\int_0^t y(\tau)d\tau = -Y(t),$$

czyli Y jest funkcją nieparzystą. Ponadto, dla $t \in \mathbb{R}$ mamy też

$$Y(t+2\pi) = \int_0^{t+2\pi} y(s)ds = \int_0^t y(s)ds + \int_t^{t+2\pi} y(s)ds$$
$$= \int_0^t y(s)ds + \int_0^{2\pi} y(s)ds = \int_0^t y(s)ds = Y(t),$$

zatem Y jest funkcją 2π-okresową. Ponieważ Y jest 2π-okresową i nieparzystą funkcją, więc

$$\int_0^{2\pi} Y(\tau)d\tau = 0.$$

Przyjmijmy

$$x(t) = x(0) + \int_0^t \Big(\int_0^\tau y(s)ds\Big)d\tau = x(0) + \int_0^t Y(\tau)d\tau.$$

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

Z tw. Leibniza wynika, że x jest klasy C^{m+2} oraz $x'' = y$. Otrzymujemy

$$x(-t) = x(0) + \int_0^{-t} Y(\tau)d\tau = x(0) - \int_0^t Y(-w)dw =$$

$$= x(0) + \int_0^t Y(w)dw = x(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

czyli x jest funkcją parzystą. Co więcej, dla $t \in \mathbb{R}$,

$$x(t+2\pi) = x(0) + \int_0^{t+2\pi} Y(\tau)d\tau = x(0) + \int_0^t Y(\tau)d\tau + \int_t^{t+2\pi} Y(\tau)d\tau =$$

$$= x(0) + \int_0^t Y(\tau)d\tau + \int_0^{2\pi} Y(\tau)d\tau = x(0) + \int_0^t Y(\tau)d\tau = x(t).$$

W konsekwencji, $x \in X$ oraz $Ax = y$.

Wobec powyższego $\mathrm{im}A = Y_2$, czyli $\mathrm{codim}\,\mathrm{im}A = \dim Y_1 = 1$. Stąd $ind(A) = 1 - 1 = 0$. $\square$

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

Rozdział 2

Bifurkacje w równaniach nieliniowych z parametrem w przestrzeniach Banacha

Teoria bifurkacji jest stosowana do badania sprężystych prętów, płyt i powłok w celu zredukowania występowania deformacji w elastycznych konstrukcjach. Matematyczne podejście do zagadnień mechaniki ciał sprężystych sprowadza się najczęściej do wyznaczenia zbioru rozwiązań nieliniowych równań funkcyjnych, który może być bardzo skomplikowany. Łatwiej jest wziąć znane rozwiązanie i próbować ustalić, kiedy wokół niego pojawiają się inne.

W ogólności, rozważamy równanie postaci $F(x, \lambda) = 0$ z parametrem λ w przestrzeniach Banacha, które posiada ustalone rozwiązanie dla każdej wartości parametru. Interesujące jest pytanie, kiedy pojawia się nowe rozwiązanie równania $F(x, \lambda) = 0$ w zależności od zmian parametru λ. Tak postawionym problemem, mówiąc w najprostszy sposób, zajmuje się teoria bifurkacji, którą dokładnie przedstawimy w poniższym rozdziale.

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

2.1 Klasyczne zagadnienie bifurkacji

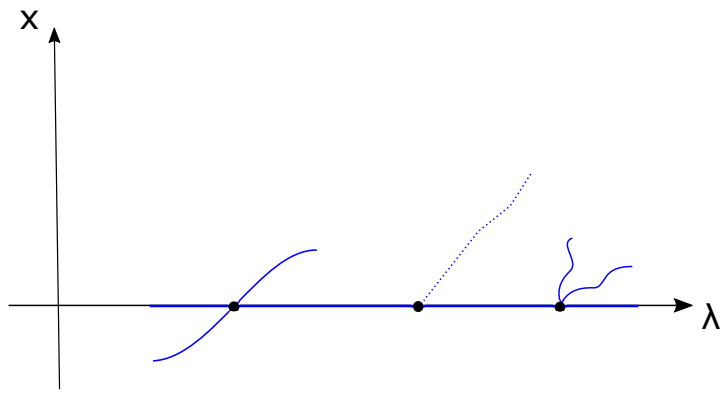
Niech X, Y będą przestrzeniami Banacha oraz $F : X_\delta(0) \times \mathbb{R}_\delta(\lambda_0) \to Y$ będzie odwzorowaniem klasy C^1, gdzie $X_\delta(0)$ i $\mathbb{R}_\delta(\lambda_0)$ oznaczają kule otwarte w przestrzeniach X i $\mathbb{R}$, o środkach w punktach 0 i λ_0, o promieniu δ. Rozważmy równanie postaci

$$F(x, \lambda) = 0. \tag{2.1}$$

Załóżmy, że $F(0, \lambda) = 0$ dla każdego parametru $|\lambda - \lambda_0| < \delta$. Wtedy zbiór

$$\Gamma_0 = \{(0, \lambda) \in X \times \mathbb{R} : |\lambda - \lambda_0| < \delta\}$$

nazywamy *trywialną rodziną (gałęzią)* rozwiązań równania (2.1). Natomiast punkt $(x, \lambda) \in X_\delta(0) \times \mathbb{R}_\delta(\lambda_0)$ taki, że $F(x, \lambda) = 0$ oraz $x \neq 0$ będziemy nazywali *nietrywialnym rozwiązaniem* równania (2.1).



Rysunek 2.1: Przykładowe diagramy w punktach bifurkacji ([1])

Definicja 2.1 ([4])**.** Punkt $(0, \lambda_0) \in X \times \mathbb{R}$ jest punktem bifurkacji równania (2.1), jeżeli istnieje ciąg punktów $\{(x_n, \lambda_n)\}_{n=1}^{\infty} \subset X \times \mathbb{R}$ taki, że $\lim_{n\to\infty}(x_n, \lambda_n) = (0, \lambda_0)$ w $X \times \mathbb{R}$, $x_n \neq 0$ oraz $F(x_n, \lambda_n) = 0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Inaczej, w równoważny sposób możemy powiedzieć, że $(0, \lambda_0)$ jest punktem bifurkacji równania (2.1), jeżeli każde otoczenie tego punktu zawiera nietrywialne rozwiązanie równania (2.1) (porównaj Rys. 2.1).

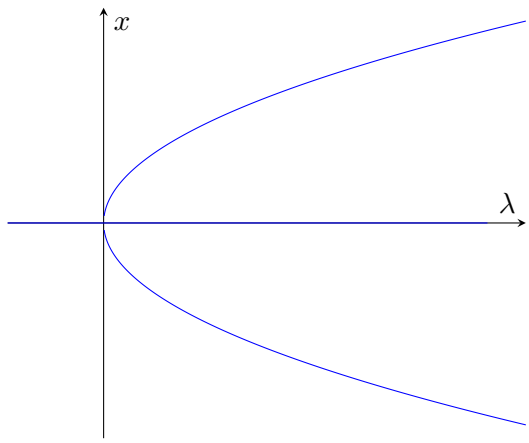
MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

Uwaga 2.1. Jeżeli w punkcie $(0, \lambda_0)$ istnieje nietrywialna gałąź rozwiązań $\Gamma = \{(x(t), \lambda(t)) : |t| < \varepsilon\}$, gdzie $x(t),\ y(t)$ są ciągłymi funkcjami zmiennej rzeczywistej t spełniającymi warunek $x(0) = 0,\ \lambda(0) = \lambda_0$ i $x(t) \neq 0$ dla $0 < |t| < \varepsilon$, wtedy mówimy, że $(0, \lambda_0)$ jest punktem rozgałęzienia równania (2.1).

Przykład 2.2. Rozważmy równanie

$$x^3 - \lambda x = 0,\ \lambda \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}. \tag{2.2}$$

Zauważmy, że dla każdego $\lambda \in \mathbb{R}$ rozwiązaniem tego równania jest $x = 0$. Wobec tego $\Gamma_0 = \{(0, \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \lambda \in \mathbb{R}\}$ jest trywialną gałęzią rozwiązań tego równania. Ponadto, łatwo zauważyć, że dla $\lambda \leqslant 0$ jest to jedyne rozwiązanie równania (2.2). Jeżeli $\lambda > 0$, to równanie posiada nietrywialną gałąź rozwiązań $\Gamma = \{(x, \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x^2 = \lambda\}$, która przecina się z Γ_0 w dokładnie jednym punkcie $(0, 0)$. Zatem punkt $(0, 0)$ jest punktem bifurkacji równania (2.2). Graficznie punkt $(0, 0)$ jest punktem rozgałęzienia w kształcie widelca (porównaj Rys. 2.2).



Rysunek 2.2: Bifurkacja w kształcie widelca

Przy wprowadzonych założeniach na odwzorowanie F, z twierdzenia o funkcji uwikłanej wynika następujący warunek konieczny na to, aby $(0, \lambda_0) \in X \times \mathbb{R}$ był puktem bifurkacji równania (2.1).

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

Stwierdzenie 2.3 ([4]). Jeżeli punkt $(0, \lambda_0) \in X \times \mathbb{R}$ jest punktem bifurkacji równania (2.1), to $F'_x(0, \lambda_0) : X \to Y$ nie jest izomorfizmem.

Załóżymy dodatkowo, że $F'_x(0, \lambda_0) : X \to Y$ jest odwzorowaniem Fredholma o indeksie 0. Wówczas $F'_x(0, \lambda_0)$ jest izomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy $\dim \ker F'_x(0, \lambda_0) = 0$. Korzystając z tej własności możemy sformułować następujący warunek konieczny bifurkacji.

Stwierdzenie 2.4 ([4]). Jeżeli $(0, \lambda_0) \in X \times \mathbb{R}$ jest punktem bifurkacji równania (2.1) oraz $F'_x(0, \lambda_0) : X \to Y$ jest odwzorowaniem Fredholma indeksu 0, to $\dim \ker F'_x(0, \lambda_0) \neq 0$.

2.2 Metody wyznaczania i badanie bifurkacji w zagadnieniach o naturze wariacyjnej

Stwierdzenie 2.3 oraz Stwierdzenie 2.4 stanowią tylko warunki konieczne na istnienie bifurkacji. W celu dokładnego zbadania problemu zastosujemy twierdzenie Crandalla-Rabinowitza oraz redukcję skończenie wymiarową typu Lyapunova-Schmidta. Zastosowanie tych narzędzi znacznie uprości skomplikowane obliczenia w zagadnieniach z teorii elastyczności, ponieważ zredukuje je głównie do ustalenia, że operator F jest odwzorowaniem Fredholma o odpowiednim indeksie oraz, że jest gradientem wariacyjnym pewnego funkcjonału E. Twierdzenie Crandalla-Rabinowitza, podane poniżej, jest jednym z wariantów tego twierdzenia stosowanym przy założeniu wariacyjności badanego zagadnienia.

Twierdzenie 2.5 (Tw.Crandalla-Rabinowitza, [20], [3], [4]). *Niech H będzie przestrzenią Hilberta z iloczynem skalarnym $(.,.)_H$. Załóżmy, że X, Y są przestrzeniami Banacha zanurzonymi w przestrzeni Hilberta H. Załóżmy ponadto,że operator $F : X_\delta(0) \times \mathbb{R}_\delta(\lambda_0) \to Y$ klasy C^r oraz funkcjonał $E : X_\delta(0) \times \mathbb{R}_\delta(\lambda_0) \to \mathbb{R}$ klasy C^{r+1} dla $r \geqslant 2$ spełniają następujące warunki:*

1. *$F(0, \lambda) = 0$ dla $\lambda \in \mathbb{R}_\delta(\lambda_0)$,*

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

2. $\dim\ker F'_x(0,\lambda_0) = 1,\ F'_x(0,\lambda_0)e = 0,\ (e,e)_H = 1,$

3. $\operatorname{codim}\operatorname{im} F'_x(0,\lambda_0) = 1,$

4. $E'_x(x,\lambda)h = (F(x,\lambda),h)_H$ *dla* $(x,\lambda) \in X_\delta(0)\times\mathbb{R}_\delta(\lambda_0)$ *oraz dla* $h \in X,$

5. $E'''_{xx\lambda}(0,\lambda_0)ee \neq 0.$

Wtedy $(0,\lambda_0)$ *jest punktem bifurkacji równania*

$$F(x,\lambda) = 0 \tag{2.3}$$

oraz w małym otoczeniu tego punktu zbiór rozwiązań równania (2.3) jest sumą gałęzi trywialnej $\Gamma_0 = \{(0,\lambda) : \lambda \in \mathbb{R}_\delta(\lambda_0)\}$ *oraz krzywej* Γ *klasy* C^{r-2}*, przecinających się tylko w* $(0,\lambda_0)$*. Ponadto, jeśli* $r \geqslant 3$*,to krzywa* Γ *może być sparametryzowana zmienną* $|t| < \varepsilon$ *w następujący sposób:*

$$\Gamma = \{(x(t),\lambda(t)) : t \in \mathbb{R}_\varepsilon(0)\},$$

gdzie $x(0) = 0,\ \lambda(0) = \lambda_0$ *oraz* $x'(0) = e.$

Powyższe twierdzenie jest pierwszym krokiem w ogólnym schemacie badania bifurkacji w zagadnieniach o charakterze wariacyjnym. Dostarcza nam warunek wystarczający istnienia bifurkacji w punkcie $(0,\lambda_0)$, ale nie daje informacji o kierunku krzywej Γ w otoczeniu punktu bifurkacji oraz jej asymptotycznym zachowaniu w zależności od parametru λ. W tym celu zastosujemy redukcję skończenie-wymiarową typu Lyapunova-Schmidta i metodę funkcji kluczowej według Sapronova.

Przyjmijmy, w ogólności, że przestrzenie H, X i Y są określone zgodnie z założeniami przyjętymi w Twierdzeniu 2.5 oraz odwzorowanie $F : X_\delta(0)\times\mathbb{R}_\delta(\lambda_0) \to Y$ i funkcjonał $E : X_\delta(0)\times\mathbb{R}_\delta(\lambda_0) \to \mathbb{R}$ spełniają również założenia tego twierdzenia. Rozważmy równanie postaci

$$F(x,\lambda) + (\xi - (x,e)_H)e = 0, \tag{2.4}$$

gdzie e jest generatorem podprzestrzeni $\ker F'_x(0,\lambda_0)$ spełniającym warunek $(e,e)_H = 1$ oraz $x \in X_\delta(0),\ \lambda \in \mathbb{R}_\delta(\lambda_0)$ i $\xi \in \mathbb{R}$. Z twierdzenia o funkcji

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

uwikłanej istnieją zbiory otwarte $S \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}_\delta(\lambda_0)$ i $U \subset X_\delta(0)$ oraz odwzorowanie klasy C^r, $\hat{x} : S \to U$ takie, że zbiór rozwiązań równania (2.4) w otoczeniu punktu $(0, 0, \lambda_0) \in X_\delta(0) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_\delta(\lambda_0)$ jest wykresem odwzorowania $\hat{x}$ i $\hat{x}(0, \lambda_0) = 0$.

Niech $\varphi : S \to \mathbb{R}$ i $\Phi : S \to \mathbb{R}$ określone będą wzorami

$$\varphi(\xi, \lambda) = \xi - (\hat{x}(\xi, \lambda), e)_H$$

oraz

$$\Phi(\xi, \lambda) = -E(\hat{x}(\xi, \lambda), \lambda) + \frac{1}{2}\varphi^2(\xi, \lambda).$$

Wtedy

$$\Phi'_\xi(\xi, \lambda) = \varphi(\xi, \lambda)$$

dla każdego $(\xi, \lambda) \in S$. Funkcję $\Phi(\xi, \lambda)$ nazywamy *funkcją kluczową*. Łatwo wykazać, że prawdziwe jest następujące stwierdzenie.

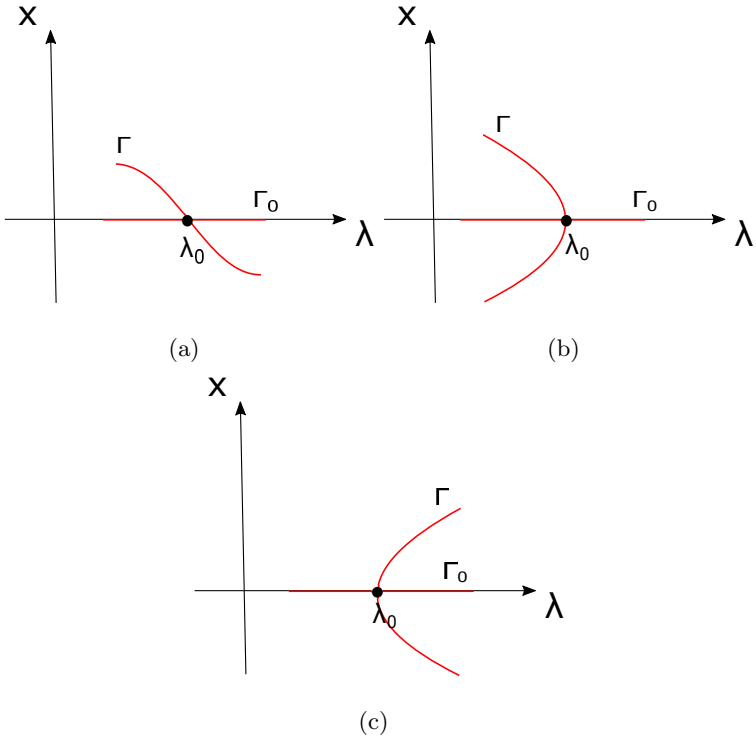
Stwierdzenie 2.6 ([20])**.** Punkt $(0, \lambda_0) \in X \times \mathbb{R}$ jest punktem bifurkacji równania (2.3) wtedy i tylko wtedy, gdy $(0, \lambda_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ jest punktem bifurkacji równania $\varphi(\xi, \lambda) = 0$.

Metoda funkcji kluczowej pozwala na sparametryzowanie nietrywialnych rozwiązań równania (2.3) w otoczeniu punktu $(0, \lambda_0)$ w zależności od parametru bifurkacji λ. Możliwe są trzy schematy zachowania krzywej Γ w otoczeniu punktu bifurkacji: transkrytyczny (Rys. 2.3(a)), dokrytyczny (Rys. 2.3(b)) oraz pokrytyczny typ bifurkacji (Rys. 2.3(c)).

Aby ustalić typ bifurkacji, musimy dokładniej przeprowadzić analizę równania rozgałęzienia $\varphi(\xi, \lambda) = 0$. W rezultacie, otrzymujemy następujące stwierdzenie opisujące zależności między funkcją kluczową $\Phi(\xi, \lambda)$, a funkcjonałem $E(x, \lambda)$.

Stwierdzenie 2.7. ([21], [3], [4]) Kilka pierwszych współczynników szeregu Taylora funkcji kluczowej $\Phi(\xi, \lambda)$ w punkcie $(0, \lambda_0)$ możemy wyznaczyć

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl



Rysunek 2.3: Transkrytyczny, dokrytyczny i pokrytyczny schematy bifurkacji

z następujących wzorów:

$$
\begin{aligned}
\Phi(0,\lambda_0) &= -E(0,\lambda_0),\\
\Phi'_{\xi}(0,\lambda_0) &= 0,\\
\Phi''_{\xi\xi}(0,\lambda_0) &= 0,\\
\Phi^{(1+k)}_{\xi\lambda\ldots\lambda}(0,\lambda_0) &= 0 \quad \text{dla wszystkich } k=1,2,\ldots,\\
\Phi'''_{\xi\xi\lambda}(0,\lambda_0) &= -E'''_{xx\lambda}(0,\lambda_0)ee,\\
\Phi'''_{\xi\xi\xi}(0,\lambda_0) &= -E'''_{xxx}(0,\lambda_0)eee,\\
\Phi^{(4)}_{\xi\xi\xi\xi}(0,\lambda_0) &= -E^{(4)}_{xxxx}(0,\lambda_0)eeee - 3E'''_{xxx}(0,\lambda_0)eeh,
\end{aligned}
$$

gdzie h jest jedynym rozwiązaniem następującego liniowego równania operatorowego

$$F'_x(0,\lambda_0)h - (h,e)_H e = -F''_{xx}(0,\lambda_0)ee. \tag{2.5}$$

Przyjmując założenia i własności wypisane powyżej, prawdziwe jest na-

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

stępujące twierdzenie

Twierdzenie 2.8 (Metoda funkcji kluczowej, [30], [20])**.**

(i) Jeśli $\Phi'''_{\xi\xi\lambda}(0,\lambda_0) \neq 0$*, wtedy* $(0,\lambda_0) \in X \times \mathbb{R}$ *jest punktem bifurkacji równania (2.3) oraz w małym otoczeniu tego punktu zbiór rozwiązań jest sumą gałęzi trywialnej* Γ_0 *oraz krzywej* Γ *klasy* C^{r-2}*, przecinających się tylko w* $(0,\lambda_0)$*.*

(ii) Jeśli $\Phi'''_{\xi\xi\lambda}(0,\lambda_0) \neq 0$ *i* $\Phi'''_{\xi\xi\xi}(0,\lambda_0) \neq 0$*, wtedy* $(0,\lambda_0) \in X \times \mathbb{R}$ *nazywamy transkrytycznym punktem bifurkacji równania (2.3) i krzywą* Γ *możemy sparametryzować następująco*

$$\Gamma: \ x(\lambda) = C(\lambda - \lambda_0)e + o(|\lambda - \lambda_0|), \quad \lambda \in (\lambda_0 - \eta, \lambda_0 + \eta),$$

gdzie stałą C *wyznaczamy ze wzoru*

$$C = -2\frac{\Phi'''_{\xi\xi\lambda}(0,\lambda_0)}{\Phi'''_{\xi\xi\xi}(0,\lambda_0)}$$

oraz $0 < \eta \leqslant \delta$ *(patrz Rys. 2.3(a)).*

(iii) Niech

$$\Phi'''_{\xi\xi\lambda}(0,\lambda_0) \quad \neq 0, \tag{2.6}$$

$$\Phi'''_{\xi\xi\xi}(0,\lambda_0) \quad = 0, \tag{2.7}$$

$$\Phi^{(4)}_{\xi\xi\xi\xi}(0,\lambda_0) \quad \neq 0. \tag{2.8}$$

Wyznaczamy stałą D *ze wzoru*

$$D = -6\frac{\Phi'''_{\xi\xi\lambda}(0,\lambda_0)}{\Phi^{(4)}_{\xi\xi\xi\xi}(0,\lambda_0)}.$$

Jeżeli $D < 0$*, wtedy* $(0,\lambda_0) \in X \times \mathbb{R}$ *nazywamy dokrytycznym punktem bifurkacji równania (2.3) i krzywą* Γ *możemy sparametryzować następująco*

$$\Gamma: \ x^{\pm}(\lambda) = \pm\sqrt{|D|}(\lambda_0 - \lambda)^{\frac{1}{2}}e + o(|\lambda - \lambda_0|^{\frac{1}{2}}), \ \lambda \in (\lambda_0 - \eta, \lambda_0],$$

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

gdzie $0 < \eta \leqslant \delta$ *(patrz Rys. 2.3(b)).*

Jeżeli $D > 0$*, wtedy* $(0, \lambda_0) \in X \times \mathbb{R}$ *nazywamy pokrytycznym punktem bifurkacji równania (2.3) i krzywa* Γ *może być sparametryzowana następująco*

$$\Gamma: \ x^{\pm}(\lambda) = \pm\sqrt{D}(\lambda - \lambda_0)^{\frac{1}{2}} e + o(|\lambda - \lambda_0|^{\frac{1}{2}}), \ \lambda \in [\lambda_0, \lambda_0 + \eta),$$

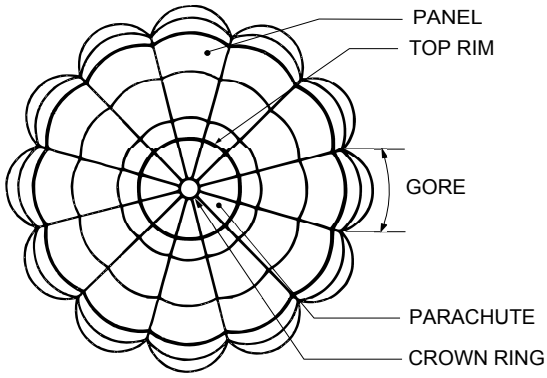
gdzie $0 < \eta \leqslant \delta$ *(patrz Rys. 2.3(c)).*

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

Rozdział 3

Nieliniowe deformacje biologicznego klastra

W Rozdziale 1. przypomniane zostały wiadomości o przestrzeniach metrycznych, unormowanych i unitarnych oraz o ich przekształceniach liniowych i nieliniowych. W Rozdziale 2. przedstawiliśmy wybrane metody z teorii bifurkacji. Celem tego rozdziału będzie zastosowanie wprowadzonych wcześniej narzędzi matematycznych do badania nieliniowych zagadnień mechaniki ciał sprężystych, a dokładnie do opisania nieliniowych deformacji biologicznego klastra.



Rysunek 3.1: Powłoka balonu: widok z góry

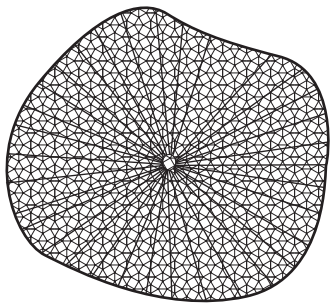
MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

Badania opisujące deformacje biologicznego klastra rozpoczęły się od obserwacji i próby opisu zachowania elastycznej powłoki balonu wypełnionego gazem. Elastyczna powłoka balonu składa się z brytów (klinów), a te z mniejszych kawałków materiału nazywanych panelami. W języku angielskim są to odpowiednio: *gores* i *panels* (Rys. 3.1). Połączone one są ze sobą za pomocą taśm, które jakościowo przypominają pasy bezpieczeństwa w samochodzie. Najwyżej położoną częścią balonu jest spadochron (ang. *parachute*). W samym jego centrum jest otwór (ang. *crown ring*), przez który można opróżniać balon z gazu. Wysokość spadochronu w porównaniu z długością otaczającej go taśmy (ang. *top rim*) jest znacznie mniejsza, co pozwala na opisywanie zachownia tej części powłoki za pomocą modelu dwuwymiarowego.

Wprowadzone przez nas pojęcie biologicznego klastra, traktujemy jako dwuwymiarowe uogólnienie pojęcia spadochronu w balonie.

3.1 Matematyczny model biologicznego klastra

Rozważmy dwuwymiarowy model biologicznego klastra (Rys. 3.2), na który składa się elastyczny brzeg (powłoka) połączony z jądrem klastra elastycznymi linkami oraz gaz zgromadzony w środku klastra (analogicznie jak we wspomnianym wcześniej spadochronie).



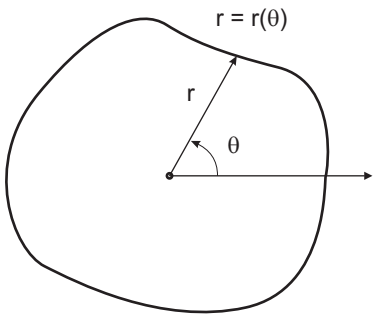
Rysunek 3.2: Klaster biologiczny

Stosowanie metod matematycznych do badania zagadnień mechaniki konstrukcji sprężystych wymaga przede wszystkim ścisłego określenia klasy funk-

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

cji, wśród których będziemy szukać rozwiązania naszego problemu.

Stan równowagi biologicznego klastra będziemy opisywać przez funkcję $r(\theta)$: 2π-okresową, o wartościach dodatnich oraz klasy C^{m+2}, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ (Rys. 3.3).



Rysunek 3.3: Matematyczny model biologicznego klastra

Jak wiemy z rozdziału pierwszego (Przykład 1.3) przestrzeń $C^m(2\pi)$ jest przestrzenią Banacha z normą (1.2) oraz jest zanurzona w przestrzeni Hilberta $L^2(2\pi)$ z iloczynem skalarnym (1.4), (Przykład 1.9).

Energię całkowitą klastra możemy zapisać w postaci sumy:

$$E = E_1 + E_2 + E_3,$$

gdzie

- E_1 - energia potencjalna elastycznego brzegu klastra,
- E_2 - energia potencjalna elastycznych łączeń brzegu z jądrem,
- E_3 - energia skompresowanego gazu w środku klastra.

Energia E_1 jest proporcjonalna do długości brzegu klastra i wyraża się wzorem

$$E_1(r, \alpha) = \alpha \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)} d\theta,$$

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

gdzie $\alpha > 0$ oznacza współczynnik elastyczności brzegu. Energia E_2 jest proporcjonalna do długości łączeń brzegu z jądrem i określona jest wzorem

$$E_2(r,\beta) = \beta \int_0^{2\pi} r(\theta) d\theta,$$

gdzie $\beta > 0$ jest współczynnikiem elastyczności łączeń. Ostatni składnik E_3 dany jest wzorem

$$E_3(r,\eta,\nu) = \eta S^{-\nu},$$

gdzie

$$S = S(r) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2(\theta) d\theta$$

jest powierzchnią klastra, z odpowiednimi parametrami fizycznymi $\eta,\ \nu > 0$ opisującymi własności gazu w środku.

Wobec powyższego, całkowitą energię klastra biologicznego możemy zapisać następująco

$$E(r,p) = \int_0^{2\pi} \left(\alpha\sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)} + \beta r(\theta)\right) d\theta + \eta S^{-\nu},$$

gdzie $p = (\alpha,\beta,\eta,\nu) \in \mathbb{R}^4_+$, $r \in C^{m+2}(2\pi)$ oraz $r(\theta) > 0$ dla $\theta \in [0, 2\pi]$. Obliczając pochodną Frécheta funkcjonału E względem zmiennej r otrzymujemy

$$\begin{aligned} E'_r(r,p)h &= \int_0^{2\pi} \alpha \frac{r^3(\theta) + 2r(\theta)r'^2(\theta) - r^2(\theta)r''(\theta)}{(r^2(\theta) + r'^2(\theta))^{3/2}} h(\theta) d\theta + \\ &+ \int_0^{2\pi} \left(\beta - \frac{\nu\eta}{S^{\nu+1}} r(\theta)\right) h(\theta) d\theta, \end{aligned}$$

gdzie $p = (\alpha,\beta,\eta,\nu) \in \mathbb{R}^4_+$, $r, h \in C^{m+2}(2\pi)$ oraz $r(\theta) > 0$ dla $\theta \in [0, 2\pi]$.[1] Zatem punkty krytyczne funkcjonału energii $E(r,p)$ to 2π-okresowe funkcje klasy C^{m+2} o wartościach dodatnich, które są rozwiązaniami następującego równania różniczkowo-funkcyjnego

$$\alpha \frac{r^3(\theta) + 2r(\theta)r'^2(\theta) - r^2(\theta)r''(\theta)}{(r^2(\theta) + r'^2(\theta))^{3/2}} + \beta - \frac{\nu\eta}{S^{\nu+1}} r(\theta) = 0. \tag{3.1}$$

Podstawiając za $r(\theta) \equiv r$ równanie (3.1) sprowadzimy do prostego równania algebraicznego postaci

$$\alpha + \beta - \frac{\nu\eta}{\pi^{\nu+1} r^{2\nu+1}} = 0.$$

[1] Szczegółowe obliczenia znajdują się na stronach 45 i 46.

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

Dla każdej wartości multiparametru $p = (\alpha, \beta, \eta, \nu)$ rozwiązaniem powyższego równania jest

$$r_p = \left(\frac{\nu\eta}{\pi^{\nu+1}(\alpha+\beta)} \right)^{\frac{1}{2\nu+1}}.$$

Rozwiązania r_p będziemy nazywać *radialnie symetrycznymi* rozwiązaniami równania (3.1). Odpowiadają one brzegowi klastra w kształcie okręgów o promieniach r_p.

Zauważmy, że wraz ze wzrostem wartości współczynników elastyczności α, β maleje wartość symetrycznego rozwiązania r_p. Wprowadźmy oznaczenia $\tau = \frac{\beta}{\alpha}$, $\omega = \frac{\eta}{\alpha}$ oraz multiparametr $\mu = (\tau, \omega, \nu)$. W nowych parametrach funkcjonał energii biologicznego klastra ma postać[2]

$$E(r, \mu) = \int_0^{2\pi} \left(\sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)} + \tau r(\theta) \right) d\theta + \omega S^{-\nu}. \tag{3.2}$$

Wtedy równanie różniczkowo-funkcyjne (3.1) jest równoważne z równaniem

$$\frac{r^3(\theta) + 2r(\theta)r'^2(\theta) - r^2(\theta)r''(\theta)}{(r^2(\theta) + r'^2(\theta))^{3/2}} + \tau - \frac{\nu\omega}{S^{\nu+1}} r(\theta) = 0 \tag{3.3}$$

oraz

$$r_\mu = \left(\frac{\nu\omega}{\pi^{\nu+1}(1+\tau)} \right)^{\frac{1}{2\nu+1}} \tag{3.4}$$

jest radialnie symetrycznym rozwiązaniem równania (3.3) odpowiadającym multiparametrowi μ.

Podsumowując, z powyższego opisu problemu deformacji biologicznego klastra wynika następujące stwierdzenie.

Stwierdzenie 3.1. Dla każdego $(\omega, \nu) \in \mathbb{R}_+^2$ równanie (3.3) posiada rodzinę radialnie symetrycznych rozwiązań

$$\Gamma^{\omega,\nu} = \{(r_\mu, \tau) \colon \mu = (\tau, \omega, \nu), \tau \in \mathbb{R}_+\}, \tag{3.5}$$

gdzie r_μ dane jest wzorem (3.4).

[2]Faktycznie $E(r, p) = \alpha E(r, \mu)$. Pominięcie w formule (3.2) współczynnika $\frac{1}{\alpha}$ nie wpływa na dalsze rozważania.

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

3.2 Problem bifurkacji z łamaniem symetrii

Na początku wyjaśnijmy, po co wprowadziliśmy parametr τ wyrażający stosunek współczynnika elastyczności brzegu α do współczynnika elastyczności linek β. Mianowicie, będziemy badać deformacje biologicznego klastra właśnie ze względu na ten parametr.

W języku teorii bifurkacji, przy ustalonym $(\omega, \nu) \in \mathbb{R}^2_+$ będziemy badać zjawisko bifurkacji ze zbioru rozwiązań $\Gamma^{\omega,\nu}$ równania (3.1). Ze wzoru (3.4) wynika, że wzrost parametru τ powoduje, że r_μ maleje. Można zatem przypuszczać, że oprócz rozwiązań radialnie symetrycznych r_μ istnieją inne, nieradialnie symetryczne rozwiązania równania (3.1).

Definicja 3.1. Rozwiązanie $(r_\mu, \tau) \in \Gamma^{\omega,\nu}$ nazywamy punktem bifurkacji z łamaniem symetrii równania (3.3), jeżeli istnieje inna rodzina rozwiązań $(r(t), \tau(t))$ tego równania, zależna od parametru $|t| < \varepsilon$ oraz spełniająca warunki $r(0) = r_\mu,\ \tau(0) = \tau$ i $r(t) \neq r_\mu$ dla $0 < |t| < \varepsilon$.

Niech

$$\tau_k = k^2 - 1,\ k \geqslant 2,\ k \in \mathbb{N}.$$

Twierdzenie 3.2. *Dla każdego $k \geqslant 2$ istnieje rodzina radialnie niesymetrycznych rozwiązań równania (3.3)*

$$\Gamma^k = \{(r(t), \tau(t)) \colon |t| < \varepsilon\},$$

spełniająca warunki $r(0) = r_{(\tau_k,\omega,\nu)},\ \tau(0) = \tau_k$ oraz

$$r(t)(\theta) = r_{(\tau(t),\omega,\nu)} + t \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(k\theta) + o(|t|).$$

Zatem $(r_{(\tau_k,\omega,\nu)}, \tau_k) \in \Gamma^{\omega,\nu}$ jest punktem bifurkacji z łamaniem symetrii równania (3.3).

Aby udowodnić powyższe twierdzenie, sprowadzimy problem bifurkacji z łamaniem symetrii do klasycznego zagadnienia bifurkacji opisywanego w rozdziale drugim .

Wprowadźmy oznaczenia

$$X = C_e^{m+2}(2\pi) \quad \text{i} \quad Y = C_e^m(2\pi) \qquad (m \in \mathbb{N} \cup \{0\}). \tag{3.6}$$

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

Ustalmy $(\omega,\nu)\in\mathbb{R}^2_+$. Dla dowolnego $\tau_0\in\mathbb{R}_+$ mamy $(r_{(\tau_0,\omega,\nu)},\tau_0)\in\Gamma^{\omega,\nu}$. Niech $X_\delta(0)$ oraz $(\mathbb{R}_+)_\delta(\tau_0)$ oznaczają odpowiednio kule otwarte w przestrzeniach metrycznych X i $\mathbb{R}_+$ o środkach w punktach 0 i τ_0, o dostatecznie małym promieniu δ. Dla $\varrho\in X_\delta(0)$ i $\tau\in(\mathbb{R}_+)_\delta(\tau_0)$ definiujemy

$$r(\theta)=r_\mu+\varrho(\theta), \tag{3.7}$$

gdzie $\mu=(\tau,\omega,\nu)$ rozpatrujemy jako funkcję zależną od parametru τ oraz r_μ jest określone wzorem (3.4).

Podstawiając (3.7) do (3.2), otrzymujemy wzór na funkcjonał energii $\hat{E}$

$$\hat{E}(\varrho,\mu)=\int_0^{2\pi}\left(\sqrt{(r_\mu+\varrho)^2+\varrho'^2}+\tau(r_\mu+\varrho)\right)d\theta+\omega\hat{S}^{-\nu}, \tag{3.8}$$

gdzie $\varrho\in X_\delta(0)$, $\tau\in(\mathbb{R}_+)_\delta(\tau_0)$ i $\mu=(\tau,\omega,\nu)$ oraz

$$\hat{S}=\hat{S}(\varrho,\mu)=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(r_\mu+\varrho)^2d\theta.$$

Chcemy znaleźć wzór na pochodną Frécheta funkcjonału $\hat{E}$ względem zmiennej przestrzennej ϱ w punkcie (ϱ,μ). Skorzystamy z Twierdzenia 1.16 i wyznaczymy pochodną Gâteaux. W tym celu zapisujemy $\hat{E}$ w postaci:

$$\begin{aligned}\hat{E}(\varrho,\mu) &= \int_0^{2\pi}\sqrt{(r_\mu+\varrho)^2+\varrho'^2}d\theta\\ &+ \int_0^{2\pi}\tau(r_\mu+\varrho)d\theta\\ &+ \omega\hat{S}^{-\nu}\end{aligned}$$

i różniczkujemy kolejne składniki. Dla $h\in X$ otrzymujemy,

$$\frac{d}{dt}\left(\int_0^{2\pi}\sqrt{(r_\mu+\varrho+th)^2+(\varrho'+th')^2}d\theta\right)|_{t=0}=\int_0^{2\pi}\frac{(r_\mu+\varrho)h+\varrho'h'}{\sqrt{(r_\mu+\varrho)^2+\varrho'^2}}d\theta,$$

$$\frac{d}{dt}\Big(\tau(r_\mu+\varrho+th)d\theta\Big)|_{t=0}=\int_0^{2\pi}\tau hd\theta,$$

oraz

$$\frac{d}{dt}\Big(\omega\hat{S}^{-\nu}\Big)|_{t=0}=-\frac{\omega\nu}{\hat{S}^{\nu+1}}\int_0^{2\pi}(r_\mu+\varrho)hd\theta.$$

W konsekwencji,

$$\begin{aligned}\hat{E}'_\varrho(\varrho,\mu)h &= \int_0^{2\pi}\left(\frac{(r_\mu+\varrho)h+\varrho'h'}{\sqrt{(r_\mu+\varrho)^2+\varrho'^2}}+\tau h\right)d\theta\\ &- \frac{\omega\nu}{\hat{S}^{\nu+1}}\int_0^{2\pi}(r_\mu+\varrho)hd\theta.\end{aligned}$$

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

Stosując twierdzenie o całkowaniu przez części, pochodną Frécheta[3] funkcjonału $\hat{E}$ względem zmiennej ϱ zapisujemy w postaci

$$\begin{aligned}\hat{E}'_\varrho(\varrho,\mu)h &= \int_0^{2\pi} \frac{(r_\mu+\varrho)^3 + 2(r_\mu+\varrho)\varrho'^2 - (r_\mu+\varrho)^2\varrho''}{[(r_\mu+\varrho)^2+\varrho'^2]^{3/2}} h d\theta + \\ &+ \int_0^{2\pi} \left(\tau - \frac{\nu\omega}{\hat{S}^{\nu+1}}(r_\mu+\varrho)\right) h d\theta. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Definiujemy odwzorowanie $\hat{F}\colon X_\delta(0)\times(\mathbb{R}_+)_\delta(\tau_0)\to Y$ wzorem

$$\begin{aligned}\hat{F}(\varrho,\mu) &= \frac{(r_\mu+\varrho)^3 + 2(r_\mu+\varrho)\varrho'^2 - (r_\mu+\varrho)^2\varrho''}{[(r_\mu+\varrho)^2+\varrho'^2]^{3/2}} + \\ &+ \tau - \frac{\nu\omega}{\hat{S}^{\nu+1}}(r_\mu+\varrho). \end{aligned} \tag{3.10}$$

Rozważmy równanie postaci

$$\hat{F}(\varrho,\tau,\omega,\nu) = 0. \tag{3.11}$$

Równanie (3.11) posiada trywialną rodzinę rozwiązań

$$\hat{\Gamma}^{\omega,\nu} = \{(0,\tau)\in X\times\mathbb{R}_+ \colon \tau\in(\mathbb{R}_+)_\delta(\tau_0)\}.$$

Badamy bifurkacje ze zbioru rozwiązań trywialnych $\hat{\Gamma}^{\omega,\nu}$ równania (3.11).

Twierdzenie 3.3. *Jeżeli za τ_0 przyjmiemy $\tau_k = k^2-1$ dla $k\geqslant 2$, wtedy $(0,\tau_k)$ jest punktem bifurkacji równania (3.11) i zbiór rozwiązań tego równania w otoczeniu punktu bifurkacji jest sumą krzywej $\hat{\Gamma}^{\omega,\nu}$ oraz gładkiej krzywej $(\varrho(t),\tau(t))$, $|t|<\varepsilon$, gdzie $\varrho(0)=0$, $\tau(0)=\tau_k$ (patrz Rys. 3.4) oraz*

$$\varrho(t)(\theta) = t\cdot\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(k\theta) + o(|t|).$$

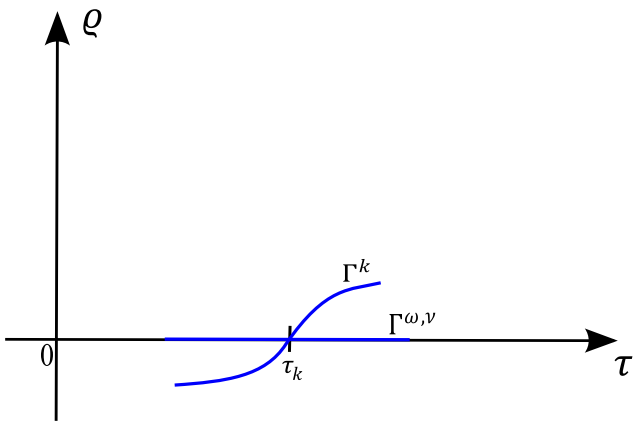
Problem bifurkacji z łamaniem symetrii (Twierdzenie 3.2) sprowadziliśmy do problemu klasycznego zagadnienia bifurkacji ze zbioru rozwiązań trywialnych. Zatem aby udowodnić Twierdzenie 3.2 wystarczy przeprowadzić dowód powyższego twierdzenia.

Twierdzenie 3.3 dowodzimy korzystając z Twierdzenia 2.5. Dla wygody Czytelnika dowód podzieliliśmy na cztery lematy.

Zauważmy, że bezpośrednio ze wzoru (3.9) wynika poniższa zależność.

[3]Ponieważ odwzorowanie $\hat{E}'_\varrho(\cdot,\mu) : X_\delta(0)\to L(X,\mathbb{R})$ jest ciągłe, więc na mocy Twierdzenia 1.16 pochodna Gâteaux i pochodna Frècheta w dowolnym punkcie $\varrho\in X_\delta(0)$ są równe.

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl



Rysunek 3.4: Punkt bifurkacji równania (3.11)

Lemat 3.4. Dla każdego $\tau \in (\mathbb{R}_+)_\delta(\tau_0)$, odwzorowanie $\hat{F}(.,\mu)\colon X_\delta(0) \to Y$ jest gradientem wariacyjnym funkcjonału $\hat{E}(.,\mu)\colon X_\delta(0) \to \mathbb{R}$ ze względu na iloczyn skalarny w przestrzeni Hilberta $L^2(2\pi)$, t.j.:

$$\hat{E}'_\varrho(\varrho,\mu)h = \left\langle \hat{F}(\varrho,\mu), h \right\rangle \tag{3.12}$$

dla każdego $h \in X$.

Lemat 3.5. Odwzorowanie $\hat{F} : X_\delta(0) \times (\mathbb{R}_+)_\delta(\tau_0) \to Y$ dane wzorem (3.10) jest klasy C^∞. Ponadto,

$$\begin{aligned}
\hat{F}'_\varrho(\varrho,\mu)h = {} & \frac{[3(r_\mu+\varrho)^2 h + 2h\varrho'^2 + 4(r_\mu+\varrho)\varrho' h'][(r_\mu+\varrho)^2+\varrho'^2]^{3/2}}{[(r_\mu+\varrho)^2+\varrho'^2]^3} + \\
& + \frac{[-2(r_\mu+\varrho)\varrho'' h - (r_\mu+\varrho)^2 h''][(r_\mu+\varrho)^2+\varrho'^2]^{3/2}}{[(r_\mu+\varrho)^2+\varrho'^2]^3} + \\
& - \frac{3[(r_\mu+\varrho)^3 + 2(r_\mu+\varrho)\varrho'^2]\sqrt{(r_\mu+\varrho)^2+\varrho'^2}[(r_\mu+\varrho)h+\varrho' h']}{[(r_\mu+\varrho)^2+\varrho'^2]^3} + \\
& + \frac{3(r_\mu+\varrho)^2\varrho''\sqrt{(r_\mu+\varrho)^2+\varrho'^2}[(r_\mu+\varrho)h+\varrho' h']}{[(r_\mu+\varrho)^2+\varrho'^2]^3} + \\
& + \frac{\nu\omega(\nu+1)}{\hat{S}^{\nu+2}}(r_\mu+\varrho)\int_0^{2\pi}(r_\mu+\varrho)h\,d\theta - \frac{\nu\omega}{\hat{S}^{\nu+1}}h
\end{aligned} \tag{3.13}$$

dla $\varrho \in X_\delta(0)$, $\tau \in (\mathbb{R}_+)_\delta(\tau_0)$ i $h \in X$.

Dowód. Ponownie skorzystamy z Twierdzenia 1.16 i wyznaczymy pochodną

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

Gâteaux odwzorowania F. Dla $h \in X$ otrzymujemy

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{(r_\mu+\varrho+th)^3+2(r_\mu+\varrho+th)(\varrho'+th')^2-(r_\mu+\varrho+th)^2(\varrho''+th'')}{[(r_\mu+\varrho+th)^2+(\varrho'+th')^2]^{3/2}}\right)|_{t=0}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{[3(r_\mu+\varrho)^2h+2h\varrho'^2+4(r_\mu+\varrho)\varrho'h'][(r_\mu+\varrho)^2+\varrho'^2]^{3/2}}{[(r_\mu+\varrho)^2+\varrho'^2]^3}+\\
&+\frac{[-2(r_\mu+\varrho)\varrho''h-(r_\mu+\varrho)^2h''][(r_\mu+\varrho)^2+\varrho'^2]^{3/2}}{[(r_\mu+\varrho)^2+\varrho'^2]^3}+\\
&-\frac{3[(r_\mu+\varrho)^3+2(r_\mu+\varrho)\varrho'^2]\sqrt{(r_\mu+\varrho)^2+\varrho'^2}[(r_\mu+\varrho)h+\varrho'h']}{[(r_\mu+\varrho)^2+\varrho'^2]^3}+\\
&+\frac{3(r_\mu+\varrho)^2\varrho''\sqrt{(r_\mu+\varrho)^2+\varrho'^2}[(r_\mu+\varrho)h+\varrho'h']}{[(r_\mu+\varrho)^2+\varrho'^2]^3}
\end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(\tau-\frac{\nu\omega}{\hat{S}^{\nu+1}}(r_\mu+\varrho+th)\right)|_{t=0}=\\
&=\frac{\nu\omega(\nu+1)}{\hat{S}^{\nu+2}}(r_\mu+\varrho)\int_0^{2\pi}(r_\mu+\varrho)hd\theta-\frac{\nu\omega}{\hat{S}^{\nu+1}}h.
\end{aligned}$$

Stąd i (3.10) wynika (3.13). □

Lemat 3.6. Dla każdego parametru $\tau \in (\mathbb{R}_+)_\delta(\tau_0)$, $\hat{F}'_\varrho(0,\mu)\colon X \to Y$ jest odwzorowaniem Fredholma indeksu zero.

Dowód. Niech $\tau \in (\mathbb{R}_+)_\delta(\tau_0)$. Podstawiając $\varrho \equiv 0$ do wzoru (3.13) otrzymujemy

$$\hat{F}'_\varrho(0,\mu)h=-\frac{1}{r_\mu}h''-\frac{\nu\omega}{\pi^{\nu+1}{r_\mu}^{2\nu+2}}\left(h-\frac{\nu+1}{\pi}\int_0^{2\pi}h(\theta)d\theta\right) \tag{3.14}$$

dla każdego $h \in X$. Odwzorowanie $\hat{F}'_\varrho(0,\mu)\colon X \to Y$ możemy zapisać jako sumę

$$\hat{F}'_\varrho(0,\mu)=A+B, \tag{3.15}$$

gdzie

$$A(h)=-\frac{1}{r_\mu}h''$$

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

oraz

$$B(h) = -\frac{\nu\omega}{\pi^{\nu+1}{r_\mu}^{2\nu+2}}\left(h - \frac{\nu+1}{\pi}\int_0^{2\pi} h(\theta)d\theta\right).$$

Z Przykładu 1.25 wiemy, że A jest odwzorowaniem Fredholma indeksu 0. Aby zakończyć dowód, wystarczy pokazać, że $B\colon X \to Y$ jest odwzorowaniem pełnociągłym (patrz Twierdzenie A4(i), str. 316, [29] lub Stwierdzenie 3.2.2, str. 35, [4]).

W tym celu rozpatrzmy operator B jako złożenie $B = B_1 \circ B_2$, gdzie $B_2\colon X \to X$ określone jest wzorem

$$B_2(h) = -\frac{\nu\omega}{\pi^{\nu+1}{r_\mu}^{2\nu+2}}\left(h - \frac{\nu+1}{\pi}\int_0^{2\pi} h(\theta)d\theta\right)$$

i $B_1\colon X \to Y$ jest *naturalnym zanurzeniem* przestrzeni X w Y, tj.

$$B_1(h) = h.$$

Pokażemy, że odwzorowanie B_1 jest pełnociągłe. Ponieważ B_1 jest liniowe, więc wystarczy wykazać, że zbiory ograniczone w X przeprowadza na zbiory relatywnie zwarte w Y.

Niech $Z \subset X$ będzie zbiorem ograniczonym w X. Wówczas istnieje $M > 0$ takie, że $\|f\|_X \leqslant M$ dla każdego $f \in Z$.
Weźmy ciąg $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset Z$. Z definicji normy w X wynika, że dla $k = 0, 1, ..., m+2$, $\{f_n^{(k)}\}_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem funkcji wspólnie ograniczonych.
Niech $k = 0, 1, ..., m$. Z tw. Lagrange'a dla każdego $n \in \mathbb{N}$ i dowolnych $t, s \in [0, 2\pi]$ $(t < s)$ istnieje punkt pośredni $c_{t,s}^{n,k} \in (t, s)$ taki, że

$$|f_n^{(k)}(t) - f_n^{(k)}(s)| = |f_n^{(k+1)}(c_{t,s}^{n,k})|\,|t - s|.$$

Zatem dla każdego $n \in \mathbb{N}$ i $t, s \in [0, 2\pi]$,

$$|f_n^{(k)}(t) - f_n^{(k)}(s)| \leqslant M|t - s|,$$

co implikuje, że $\{f_n^{(k)}\}_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem funkcji jednakowo ciągłych.
Z tw. Arzeli-Ascoli, ponieważ $m < \infty$, z ciągu $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ można wybrać podciąg $\{f_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ taki, że dla każdego $k = 0, 1, ..., m$ ciąg $\{f_{n_j}^{(k)}\}_{j=1}^{\infty}$ jest zbieżny jednostajnie na odcinku $[0, 2\pi]$ do funkcji ciągłej. Z okresowości $\{f_{n_j}^{(k)}\}_{j=1}^{\infty}$

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

wynika okresowość jego jednostajnej granicy. Ponadto, z tw. o różniczkowalności funkcji granicznej jednostajnie zbieżnego ciągu funkcji wynika, że funkcja graniczna podciągu $\{f_{n_j}^{(k)}\}_{j=1}^{\infty}$ jest pochodną funkcji granicznej podciągu $\{f_{n_j}^{(k-1)}\}_{j=1}^{\infty}$. Zatem $\{f_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ jest zbieżny w Y. W rezultacie, zbiór Z jest relatywnie zwarty w Y.

Natomiast odwzorowanie $B_2 : X \to X$ jest ciągłe. Ponieważ jest liniowe, wystarczy pokazać, że jest ograniczone. Ze wzoru wynika, że istnieje $C_1 > 0$ takie, że

$$\max_{t\in[0,2\pi]} |B_2(h)(t)| \leqslant C_1 \max_{t\in[0,2\pi]} |h(t)|$$

dla $h \in X$. Ponadto, dla $k = 1, ..., m + 2$ mamy

$$\Big(B_2(h)\Big)^{(k)} = -\frac{\nu\omega}{\pi^{\nu+1} r_\mu^{2\nu+2}} h^{(k)}, \quad h \in X.$$

Wobec czego, dla każdego $h \in X$,

$$\max_{t\in[0,2\pi]} \Big|\Big(B_2(h)\Big)^{(k)}(t)\Big| \leqslant \frac{\nu\omega}{\pi^{\nu+1} r_\mu^{2\nu+2}} \max_{t\in[0,2\pi]} |h^{(k)}(t)|.$$

Widzimy zatem, że istnieje $C_2 > 0$ takie, że

$$\|B_2(h)\|_X \leqslant C_2 \|h\|_X$$

dla $h \in X$. Wystarczy przyjąć $C_2 = \max\left\{C_1, \frac{\nu\omega}{\pi^{\nu+1} r_\mu^{2\nu+2}}\right\}$.
Ponieważ B_2 jest odwzorowaniem ciągłym oraz B_1 jest odwzorowaniem pełnociągłym, to ich złożenie B jest również odwzorowaniem pełnociągłym (porównaj (ii) str. 21), co kończy dowód lematu. □

Na mocy Lematu 3.6 oraz twierdzenia o funkcji uwikłanej, warunkiem koniecznym na to, aby $(0, \tau_0)$ był punktem bifurkacji równania (3.11) jest

$$\dim \ker \hat{F}'_\varrho(0, \tau_0, \omega, \nu) > 0. \tag{3.16}$$

Liczbę $\tau_0 > 0$, dla której zachodzi warunek konieczny bifurkacji (3.16) nazywamy *krytyczną wartością parametru bifurkacji.*
Aby znaleźć krytyczne wartości parametru bifurkacji, wystarczy rozwiązać równanie

$$\hat{F}'_\varrho(0, \tau, \omega, \nu)h = 0 \tag{3.17}$$

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

z następującymi warunkami:

$$\int_0^{2\pi} h(\theta)\cos\theta d\theta = 0 \tag{3.18}$$

oraz

$$\int_0^{2\pi} h(\theta)d\theta = 0. \tag{3.19}$$

Założenie (3.19) implikuje istnienie rozwiązania z łamaniem symetrii. Parzystość funkcji $h(\theta)$ oraz warunek (3.18) wykluczają przesunięcie środka masy biologicznego klastra. Warunki (3.18) oraz (3.19) eliminują z rodziny rozwiązań $h(\theta) = \cos(\theta)$ i $h(\theta) = const \neq 0$. Co więcej, założenie (3.19) upraszcza równanie (3.17) do postaci

$$-\frac{1}{r_\mu}h'' - \frac{\nu\omega}{\pi^{\nu+1}{r_\mu}^{2\nu+2}}h = 0. \tag{3.20}$$

Korzystając ze wzoru (3.4) otrzymujemy

$$r_\mu^{2\nu+1} = \frac{\nu\omega}{\pi^{\nu+1}(1+\tau)}.$$

Zatem rozwiązaniem równania (3.20) jest

$$\tau = \tau_k = k^2 - 1, \quad k \geqslant 2,$$

$$e_k(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(k\theta).$$

Do zakończenia dowodu Twierdzenia 3.3 wystarczy pokazać poniższy lemat.

Lemat 3.7. Funkcjonał energii $\hat{E}\colon X_\delta(0) \times (\mathbb{R}_+)_\delta(\tau_0) \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ dla $\tau_0 = \tau_k = k^2 - 1,\ k \geqslant 2$ spełnia warunek

$$\hat{E}'''_{\varrho\varrho\tau}(0, \tau_k, \omega, \nu)e_k e_k \neq 0.$$

Dowód. Z Lematu 3.4

$$\hat{E}''_{\varrho\varrho}(0,\mu)hg = \left\langle \hat{F}'_\varrho(0,\mu)h, g\right\rangle.$$

Stosując wzór (3.14) otrzymujemy

$$\begin{aligned}\hat{E}''_{\varrho\varrho}(0,\mu)hg \quad &= \int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{r_\mu}h''(\theta) - \frac{\nu\omega}{\pi^{\nu+1}{r_\mu}^{2\nu+2}}h(\theta)\right)g(\theta)d\theta + \\ &+ \int_0^{2\pi}\left(\frac{\nu(\nu+1)\omega}{\pi^{\nu+2}{r_\mu}^{2\nu+2}}\int_0^{2\pi} h(\bar{\theta})d\bar{\theta}\right)g(\theta)d\theta. \end{aligned} \tag{3.21}$$

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

Podstawiając do powyższego wzoru $h = g = e_k$ mamy

$$\hat{E}''_{\varrho\varrho}(0,\mu)e_k e_k = \frac{1}{r_\mu}(k^2 - 1 - \tau). \tag{3.22}$$

Różniczkując (3.22) względem parametru τ otrzymujemy

$$\hat{E}'''_{\varrho\varrho\tau}(0,\mu)e_k e_k = \left(\frac{\pi^{\nu+1}(1+\tau)}{\nu\omega}\right)^{\frac{1}{2\nu+1}} \left(\frac{k^2}{(2\nu+1)(1+\tau)} - \frac{1}{2\nu+1} - 1\right).$$

Ostatecznie, podstawiając wartości krytyczne parametru τ

$$\hat{E}'''_{\varrho\varrho\tau}(0,\tau_k,\omega,\nu)e_k e_k = -\sqrt[2\nu+1]{\frac{\pi^{\nu+1}k^2}{\nu\omega}} < 0, \quad k \geqslant 2,$$

co kończy dowód Lematu 3.7. □

Z Lematów 3.4-3.7 wynika, że operator $\hat{F}$ oraz funkcjonał $\hat{E}$ spełniają założenia twierdzenia Crandalla-Rabinowitza przy ustalonym $(\omega,\nu) \in \mathbb{R}^2_+$ ze względu na parametr $\tau \in \mathbb{R}_+$, a więc $(0,\tau_k)$ jest punktem bifurkacji równania $\hat{F}(\varrho,\tau,\omega,\nu) = 0$ i w otoczeniu tego punktu istnieje rodzina rozwiązań trywialnych oraz gładka krzywa rozwiązań nietrywialnych, co kończy dowód Twierdzenia 3.3.

Ponieważ problem istnienia bifurkacji z łamaniem symetrii dla równania (3.3) sprowadziliśmy do klasycznego zagadnienia bifurkacji ze zbioru rozwiązań trywialnych równania (3.11), więc dowód Twierdzenia 3.2 został ukończony.

3.3 Dokrytyczny typ bifurkacji z łamaniem symetrii

Za pomocą twierdzenia Crandalla-Rabinowitza udowodniliśmy istnienie rodziny radialnie niesymetrycznych rozwiązań równania (3.3) w punktach (r_μ,τ_k), gdzie $\mu = (\tau_k,\omega,\nu)$, sparametryzowanej rzeczywistym parametrem $t \in (-\varepsilon,\varepsilon)$. W kolejnym kroku naszym celem będzie sparametryzować radialnie niesymetryczne gałęzie rozwiązań równania (3.3) za pomocą parametru bifurkacji τ. Zastosujemy do tego redukcję skończenie-wymiarową Lyapunova-Schmidta oraz metodę funkcji kluczowej Sapronova, które zostały opisane w Rozdziale 2.

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

Twierdzenie 3.8. *Niech $\tau_k = k^2 - 1$, $k \geqslant 2$ będzie wartością krytyczną parametru bifurkacji $\tau \in \mathbb{R}$. Wtedy przy ustalonym $(\omega, \nu) \in \mathbb{R}^2_+$, punkt $(0, \tau_k) \in X \times \mathbb{R}_+$ jest dokrytycznym punktem bifurkacji równania (3.11).*

Dowód. Ustalamy $k \geqslant 2$. Zgodnie z Twierdzeniem 2.8 musimy pokazać, że $\Phi'''_{\xi\xi\xi}(0, \tau_k) = 0$ oraz $\Phi'''_{\xi\xi\tau}(0, \tau_k) \cdot \Phi^{(4)}_{\xi\xi\xi\xi}(0, \tau_k) > 0$.
Z dowodu Lematu 3.7 wiemy, że

$$\hat{E}'''_{\varrho\varrho\tau}(0, \tau_k, \omega, \nu) e_k e_k = -\sqrt[2\nu+1]{\frac{\pi^{\nu+1} k^2}{\nu\omega}} < 0.$$

Korzystając więc ze Stwierdzenia 2.7, które opisuje kilka pierwszych współczynników szeregu Taylora funkcji kluczowej $\Phi(\xi, \tau)$, mamy

$$\Phi'''_{\xi\xi\tau}(0, \tau_k) = \sqrt[2\nu+1]{\frac{\pi^{\nu+1} k^2}{\nu\omega}} > 0.$$

Łatwo wykazać, że

$$\hat{F}''_{\varrho\varrho}(0, \tau_k, \omega, \nu) e_k e_k = \frac{k^2}{r^2_{(\tau_k, \omega, \nu)}} \Big[\frac{1}{\pi} \sin^2(k\theta) - \frac{2}{\pi} \cos^2(k\theta) + \frac{\nu + 1}{\pi} \Big].$$

Z Lematu 3.4 mamy

$$\hat{E}'''_{\varrho\varrho\varrho}(0, \tau_k, \omega, \nu) e_k e_k e_k = \Big\langle \hat{F}''_{\varrho\varrho}(0, \tau_k, \omega, \nu) e_k e_k, e_k \Big\rangle = 0,$$

co w połączeniu z własnościami funkcji kluczowej ze Stwierdzenia 2.7 daje $\Phi'''_{\xi\xi\xi}(0, \tau_k) = 0$.

Przeprowadzając proste obliczenia łatwo pokazać, że funkcja

$$h_k(\theta) = \frac{1}{r_{(\tau_k, \omega, \nu)} \pi} \cos^2(k\theta) - \frac{1}{r_{(\tau_k, \omega, \nu)} \pi}$$

jest jednoznacznym rozwiązaniem równania

$$\hat{F}'_{\varrho}(0, \tau_k, \omega, \nu) h - \langle h, e_k \rangle e_k = -\hat{F}''_{\varrho\varrho}(0, \tau_k, \omega, \nu) e_k e_k.$$

Wiemy z Lematu 3.4, że $\hat{E}'_{\varrho}(\varrho, \mu) h = \Big\langle \hat{F}(\varrho, \mu), h \Big\rangle$, dlatego

$$\hat{E}'''_{\varrho\varrho\varrho}(0, \tau_k, \omega, \nu) e_k e_k h_k = \Big\langle \hat{F}''_{\varrho\varrho}(0, \tau_k, \omega, \nu) e_k e_k, h_k \Big\rangle = -\frac{k^2}{r^3_{(\tau_k, \omega, \nu)} \pi} \Big(\frac{5}{4} + \nu \Big).$$

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

W ostatecznym kroku otrzymujemy

$$\hat{E}^{(4)}_{\varrho\varrho\varrho\varrho}(0,\tau_k,\omega,\nu)e_k e_k e_k e_k = \frac{3}{r^3_{(\tau_k,\omega,\nu)}\pi}\Big[(\nu+2)k^2 - \frac{3}{4}k^4\Big]$$

i ze Stwierdzenia 2.7

$$\Phi^{(4)}_{\xi\xi\xi\xi}(0,\tau_k) = \frac{9}{4r^3_{(\tau_k,\omega,\nu)}\pi}(k^2-1) > 0.$$

Stąd

$$D = -6\frac{\Phi_{\xi\xi\tau}(0,\tau_k)}{\Phi_{\xi\xi\xi\xi}(0,\tau_k)} < 0.$$

Na podstawie Twierdzenia 2.8 oznacza to, że $(0,\tau_k)$ jest dokrytycznym punktem bifurkacji równania (3.11). □

Z tezy Twierdzenia 2.8 o metodzie funkcji kluczowej, wiemy również, że krzywą rozwiązań nietrywialnych $\hat{\Gamma}_2^{\omega,\nu}$ możemy sparametryzować parametrem bifurkacji τ w następujący sposób

$$\hat{\Gamma}_2^{\omega,\nu}:\ \varrho^{\pm}(\tau) = \pm\sqrt{|D|}(\tau_k-\tau)^{\frac{1}{2}}e_k + o(|\tau-\tau_k|^{\frac{1}{2}}) \quad \text{dla } \tau\in(\tau_k-\eta,\tau_k],$$

gdzie $0<\eta\leqslant\delta$, co kończy problem parametryzacji radialnie niesymetrycznej gałęzi rozwiązań równania (3.3) w otoczeniu punktu $(r_{(\tau_k,\omega,\nu)},\tau_k)$ parametrem τ.

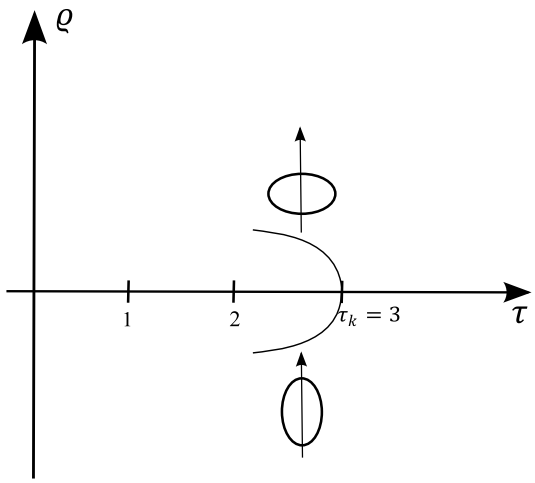
Poniższy rysunek (Rys. 3.5) przedstawia gałąź rozwiązań nietrywialnych w punkcie bifurkacji $(0,\tau_3)$. W praktyce, z kształtu krzywej bifurkacji możemy odczytać, że dla wartości parametru elastyczności $\tau\in[\tau_k,\tau_k+\delta)$ nie powinniśmy spodziewać się zmian w powłoce klastra biologicznego.

3.4 Graficzny obraz biologicznego klastra w otoczeniu punktów bifurkacji

Wykazaliśmy, że dla wartości parametru elastyczności $\tau_k = k^2-1,\ k\geqslant 2$ pojawiają się radialnie niesymetryczne rozwiązania $(r(t),\tau(t))$ naszego problemu. Korzystając z uproszczonego wzoru

$$r(t)(\theta) \approx r_{(\tau_k,\omega,\nu)} + t\cdot\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(k\theta)$$

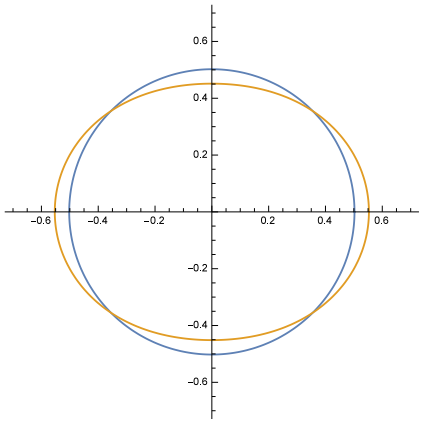
MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl



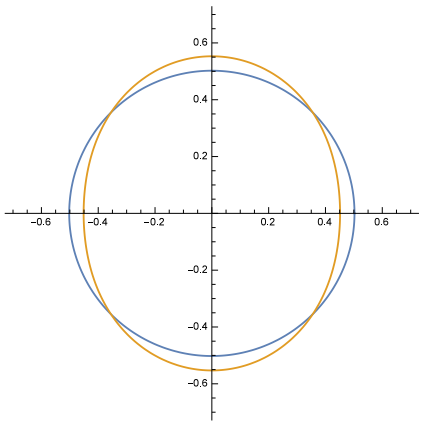
Rysunek 3.5: Bifurkacje dla pierwszej wartości krytycznej parametru τ.

oraz programu Mathematica przedstawiamy poniżej jak może zachowywać się powłoka biologicznego klastra dla $k = 2, 3, 4, 5$.

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

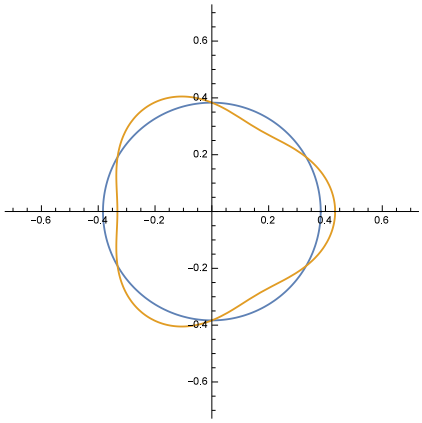


Rysunek 3.6: $k = 2,\ \tau_k = 3,\ \nu = 1,\ \omega = 5,\ t = 0.09$

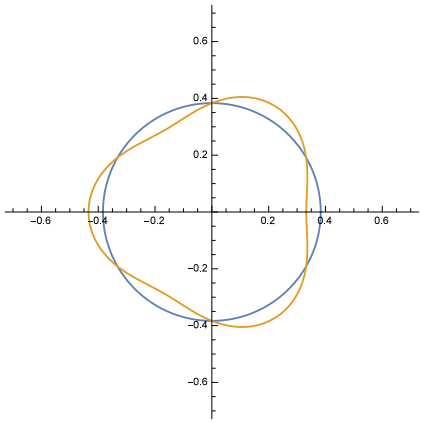


Rysunek 3.7: $k = 2,\ \tau_k = 3,\ \nu = 1,\ \omega = 5,\ t = -0.09$

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

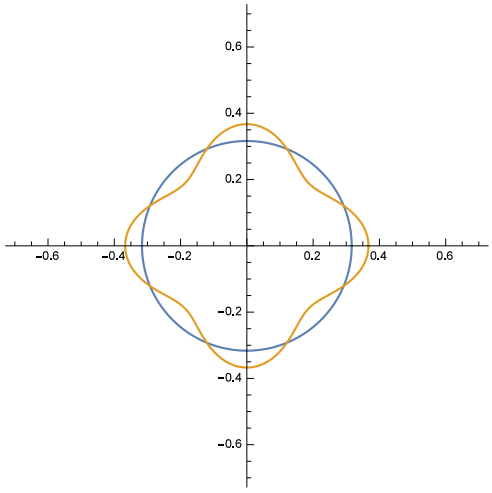


Rysunek 3.8: $k = 3,\ \tau_k = 8,\ \nu = 1,\ \omega = 5,\ t = 0.09$

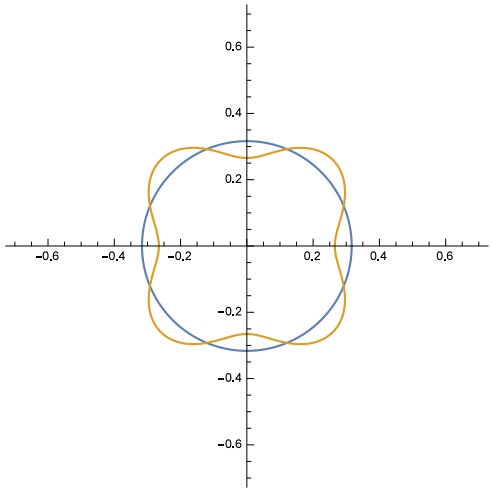


Rysunek 3.9: $k = 3,\ \tau_k = 8,\ \nu = 1,\ \omega = 5,\ t = -0.09$

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

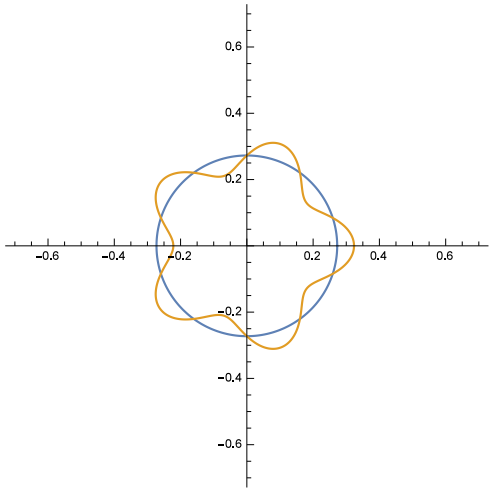


Rysunek 3.10: $k = 4,\ \tau_k = 15,\ \nu = 1,\ \omega = 5,\ t = 0.09$

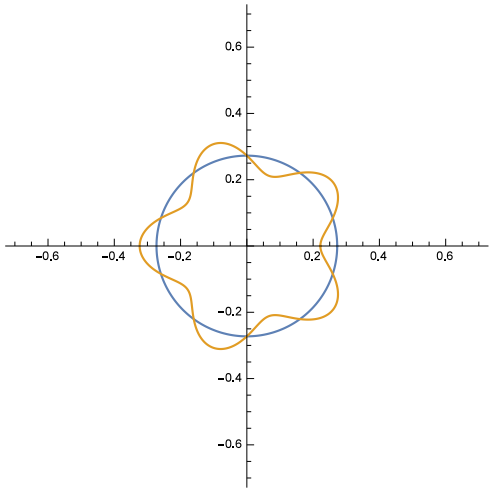


Rysunek 3.11: $k = 4,\ \tau_k = 15,\ \nu = 1,\ \omega = 5,\ t = -0.09$

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl



Rysunek 3.12: $k = 5,\ \tau_k = 24,\ \nu = 1,\ \omega = 5,\ t = 0.09$



Rysunek 3.13: $k = 5,\ \tau_k = 24,\ \nu = 1,\ \omega = 5,\ t = -0.09$

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

Bibliografia

[1] A. Ambrosetti, G. Prodi, A primer of nonlinear analysis, Cambridge University Press, 1993.

[2] S.S. Antman, Nonlinear Problems of Elasticity, Appl. Math. Sci. 107, Springer-Verlag, New York, 1995.

[3] A.Yu. Borisovich, Some scheme of applications of Crandall-Rabinowitz bifurcation theorem in variational problems of mechanics, UG, Preprint No. 135, 2000.

[4] A. Borisovich, J. Dymkowska, Elementy analizy funkcjonalnej z zastosowaniem w mechanice ciał sprężystych, CURE, Gdańsk 2003.

[5] A.Yu. Borisovich, J. Dymkowska, Cz. Szymczak, Buckling and postcritical behaviour of the elastic infinite plate strip resting on linear elastic foundation, J. Math. Anal. Appl. 307 (2005), no. 2, 480–495.

[6] A.Yu. Borisovich, J. Janczewska, Stable and unstable bifurcation in the von Kármán problem for a circular plate, Abstr. Appl. Anal. 2005, no. 8, 889–899.

[7] A.Yu. Borisovich, A. Friedman, Symmetry-breaking bifurcations for free boundary problems, Indiana Univ. Math. J. 54 (2005), no. 3, 927–947.

[8] A.Yu. Borisovich, H. Treder (H. Guze), Symmetry-breaking bifurcations for free elastic shell of biological cluster, AIP Conference Proceedings 936 (2007), 90–92.

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

[9] S.N. Chow, J.K. Hale, Methods of Bifurcation Theory, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.

[10] M.G. Crandall, P.H. Rabinowitz, Bifurcation from simple eigenvalues, J. Funct. Anal. 8 (1971), 321–340.

[11] M. Ehrnström, J. Escher, B.-V. Matioc, Steady - state fingering patterns for a periodic Muskat problem, Methods Appl. Anal. 20 (2013), no. 1, 33–46.

[12] J. Escher, A.-V. Matioc, Bifurcation analysis for a free boundary problem modeling tumor growth, Arch. Math. 97 (2011), no. 1, 79–90.

[13] M.A. Fontelos, A. Friedman, Symmetry-breaking bifurcations of free boundary problems in three dimensions, Asymptot. Anal. 35 (2003), no. 3-4, 187–206.

[14] A. Friedman, F. Reitich, Symmetry-breaking bifurcation of analytic solutions to free boundary problems: an application to a model of tumor growth, Trans. Amer. Math. Soc. 353 (2001), no. 4, 1587–1634.

[15] A. Friedman, B. Hu, J.L. Velázquez, A Stefan problem for a protocell model with symmetry-breaking bifurcations of analytic solutions, Interfaces Free Bound. 3 (2001), no. 2, 143–199.

[16] H. Guze, J. Janczewska, Symmetry-breaking bifurcation for free elastic shell of biological cluster, part 2, Milan J. Math. 82, (2014), no. 2, 331–342.

[17] H. Guze, J. Janczewska, Subcritical bifurcation of free elastic shell of biological cluster, Nonlinear Analysis: Real World Applications 24 (2015), 61–72.

[18] J. Janczewska, Bifurcation in the solution set of the von Kármán equations of an elastic disk lying on an elastic foundation, Ann. Polon. Math. 77 (2001), no. 1, 53–68.

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

[19] J. Janczewska, The necessary and sufficient condition for bifurcation in the von Kármán equations, NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl. 10 (2003), no. 1, 73–94.

[20] J. Janczewska, Local properties of the solution set of the operator equation in Banach spaces in a neighbourhood of a bifurcation point, Cent. Eur. J. Math. 2 (2004), no. 4, 561–572.

[21] J. Janczewska, Multiple bifurcation in the solution set of the von Kármán equations with S^1-symmetries, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin 15 (2008), no. 1, 109–126.

[22] J. Janczewska, A. Zgorzelska, H. Guze, On von Kármán equations and the buckling of a thin circular elastic plate, Advanced Nonlinear Studies 15 (2015), 613–628.

[23] K. Maurin, Analiza, część I: Elementy, Biblioteka Matematyczna 69, PWN, Warszawa, 1991.

[24] N.F. Morozov, Selected Two-Dimensional Problems of Elasticity Theory, Univ. Press, Leningrad, 1978, in Russian.

[25] Yu. Morozov, The study of the nonlinear model which desribes the equilibrum forms, fundamental frequencies and modes of oscillations of a finite beam on an elastic foundation, Ph. D. Thesis, Appl. Math. Department, Voronezh University, 1998 (in Russian).

[26] J. Musielak, Wstęp do analizy funkcjonalnej, PWN, Warszawa 1976.

[27] L. Nirenberg, Topics in Nonlinear Functional Analysis, Courant Inst. Math. Sci., 1974.

[28] A. Romanowski, Algebra liniowa, Wydawnictwo Politechniki Gdańskiej, Gdańsk 2007.

[29] D. Salamon, Spin geometry and Seiberg-Witten invariants, University of Warwick, 1996.

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

[30] Yu.I. Sapronov, Branching of Solutions of Smooth Fredholm Equations, Equations on Manifolds, 60–82, Novoe Global. Anal.,Voronezh. Gos. Univ., Voronezh, 1982.

[31] V.A. Trenogin, M.M. Vainberg, Theory of Branching of Solutions of Non-linear Equations, Noordhoff International Publishing, Leyden, 1974.

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

Spis rysunków

1 Balon na ciepłe powietrze, http://forum.gazeta.pl/ 4

2 Rysunek Gwiazdy Polski porównywanej z wysokością Pałacu Kultury i Nauki, https://www.pb.pl/gwiazda-polski-804732 . 5

2.1 Przykładowe diagramy w punktach bifurkacji ([1]) 31

2.2 Bifurkacja w kształcie widelca 32

2.3 Transkrytyczny, dokrytyczny i pokrytyczny schematy bifurkacji 36

3.1 Powłoka balonu: widok z góry 39

3.2 Klaster biologiczny 40

3.3 Matematyczny model biologicznego klastra 41

3.4 Punkt bifurkacji równania (3.11) 47

3.5 Bifurkacje dla pierwszej wartości krytycznej parametru τ. . . 55

3.6 $k = 2,\ \tau_k = 3,\ \nu = 1,\ \omega = 5,\ t = 0.09$ 56

3.7 $k = 2,\ \tau_k = 3,\ \nu = 1,\ \omega = 5,\ t = -0.09$ 56

3.8 $k = 3,\ \tau_k = 8,\ \nu = 1,\ \omega = 5,\ t = 0.09$ 57

3.9 $k = 3,\ \tau_k = 8,\ \nu = 1,\ \omega = 5,\ t = -0.09$ 57

3.10 $k = 4,\ \tau_k = 15,\ \nu = 1,\ \omega = 5,\ t = 0.09$ 58

3.11 $k = 4,\ \tau_k = 15,\ \nu = 1,\ \omega = 5,\ t = -0.09$ 58

3.12 $k = 5,\ \tau_k = 24,\ \nu = 1,\ \omega = 5,\ t = 0.09$ 59

3.13 $k = 5,\ \tau_k = 24,\ \nu = 1,\ \omega = 5,\ t = -0.09$ 59

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl