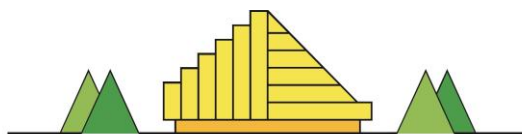




BESKIDY



XXXVII OGÓLNOPOLSKIE WARSZTATY  
PRACY PROJEKTANTA KONSTRUKCJI

WISŁA, 28+31 marca 2023 roku



GLIWICE



**Maciej  
NIEDOSTATKIEWICZ\***



**Tomasz  
MAJEWSKI\*\***

## **DIAGNOSTYKA, NAPRAWY I WZMACNIANIE ELEMENTÓW ŻELBETOWYCH USZKODZONYCH W NASTĘPSTWIE SKURCZU**

### **1. Wprowadzenie**

W artykule opisano wpływ zjawisk reologicznych: skurczu i pełzania na wyężenie oraz zarysowanie żelbetowych elementów konstrukcyjnych. Za uszkodzenia powstałe po zabetonowaniu, w okresie twardnienia młodego betonu odpowiadają napężenia wywołane skurczem i działaniem temperatury. W późniejszym okresie eksploatacji wpływ skurczu na powstawanie nowych uszkodzeń maleje, z zaczyna dominować wpływ pełzania betonu. Wpływ zjawisk reologicznych na wyężenie i trwałość elementów żelbetowych w powszechnej praktyce inżynierskiej zwyczajowo jest pomijany. Celem Autorów jest wskazanie zasadności i istotności uwzględniania zjawisk reologicznych w analizie elementów żelbetowych, w szczególności skurczu betonu.

---

\* dr hab. inż., prof. PG, Politechnika Gdańska, Wydział Inżynierii Lądowej i Środowiska, Katedra Konstrukcji Inżynierskich, mniedost@pg.edu.pl

\*\* mgr inż., Pracownia Projektowo-Inżynierska Tomasz Majewski; Politechnika Gdańska, Szkoła Doktorska Wdrożeniowa, ppi.tomimaj@gmail.com / tomimaj@pg.edu.pl

## 2. Zjawiska skurczu i pęcznienia betonu

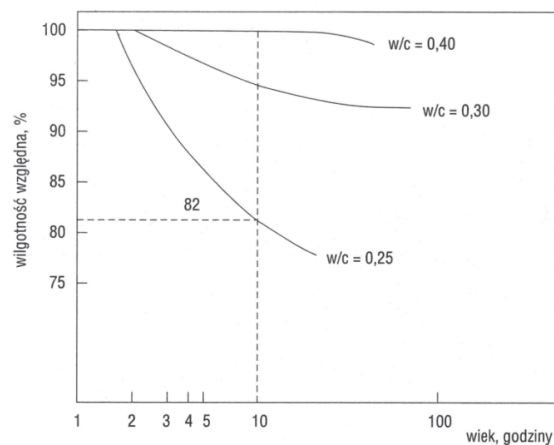
Zjawisko skurczu betonu związane jest z samoistną zmianą jego objętości na skutek procesów fizykochemicznych zachodzących w okresie twardnienia i późniejszej eksploatacji. W trakcie hydratacji cementu następują zmiany objętości zaczynu cementowego, które powodują skurcz betonu. Aktualnie w betonie identyfikuje się 4 rodzaje skurczu: chemiczny, plastyczny, autogeniczny oraz skurcz od wysychania [15], [16], [28].

Skurcz chemiczny związany jest ze zmniejszeniem objętości zaczynu cementowego w procesie hydratacji cementu (po zmieszaniu cementu z wodą zarobową) i zachodzi w plastycznym zaczynie. Skurcz chemiczny zależy od składu fazowego cementu a właściwie od zawartości glinianu trójwapiowego w cemencie. Odkształcenia wywołane skurczem chemicznym są niewielkie w porównaniu do wywołanych pozostałymi rodzajami skurczu i z inżynierskiego punktu widzenia mogą być pominięte. Skurcz chemiczny powinien być uwzględniany przez producentów mieszanki betonowej w procesie projektowania jej składu.

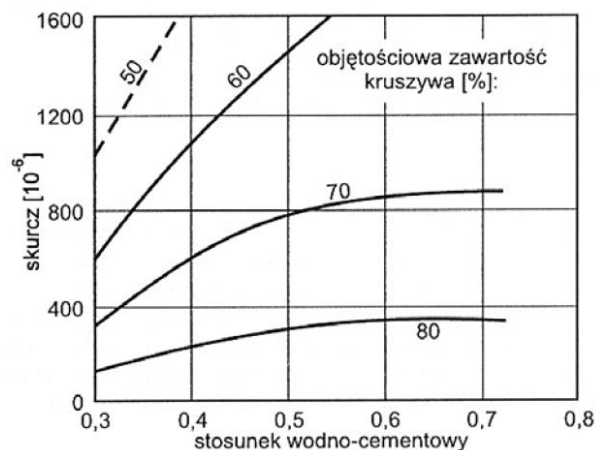
Skurcz plastyczny spowodowany jest parowaniem wody z powierzchni mieszanki betonowej, w początkowym okresie po jej ułożeniu. Po ułożeniu i zagęszczeniu mieszanki betonowej w szalunku na powierzchni betonu zbiera się warstewka wody zarobowej tzw. mlecza cementowego. W przypadku gdy szybkość odparowania mlecza z powierzchni jest większa niż jego „wydzielanie się” z mieszanki następuje szybkie wysuszenie warstw przypowierzchniowych, ich twardnienie któremu towarzyszą zmiany objętości oraz powstanie rys nazywanych rysami od skurczu plastycznego. Z reguły rysy wywołane skurczem plastycznym są wzajemnie równoległe, często występują nad prętami zbrojenia przypowierzchniowego, mogą mieć grubość równą grubości zabetonowanego elementu i nie przebiegają od wolnych krawędzi elementu [12],[13], [30], [31], [42].

Skurcz autogeniczny często w literaturze nazywany jest skurczem samorzutnym, i powstaje w związku z migracją wody między porami w betonie, również stwardniałego. Woda z porów kapilarnych jest niejako „odsysana” przez niezhydratyzowane ziarna cementu w wyniku czego w betonie powstają wewnętrzne naprężenia powodujące jego zarysowanie. Wielkość skurczu autogenicznego w betonie w istotny sposób zależy od stosunku W/C. Dla mieszanek o niskich wskaźnikach W/C odkształcenia skurczu autogenicznego są większe – Rys. 1 [30]. Odkształcenia wywołane skurczem autogenicznym są znacznie mniejsze niż odkształcenia od skurczu wywołanego wysychaniem. Odkształcenia skurczu autogenicznego mają istotny wpływ w elementach masywnych wykonanych z betonów wysokich klas wytrzymałości. Możliwe jest ograniczenie negatywnego wpływu odkształceń wywołanych skurczem autogenicznym przez zastosowanie cementów z dodatkami np. granulowanego żużla wielkopieczowego lub popiołów lotnych.

Skurcz spowodowany wysychaniem ma największe znaczenie i wpływ na wartości odkształceń skurczowych w betonie, ponieważ skutkuje największymi odkształceniami w stosunku do pozostałych rodzajów skurczu. Nie można go całkowicie wyeliminować ale można ograniczyć jego negatywny wpływ na wyężenie i zarysowanie betonu. W czasie dojrzewania młodego betonu następuje odparowanie wody z powierzchni, której towarzyszy migracja wody z wnętrza elementu do warstw zewnętrznych. Wewnątrz elementu powstają niestacjonarne, nieliniowe pola wilgotności i temperatury wywołujące naprężenia wewnętrzne. Proces wysychania trwa do uzyskania równowagi wilgotnościowej z otoczeniem a szybkość wysychania (wymiany wilgotności z otoczeniem) zależy od porowatości betonu.



Rys. 1. Wpływ stosunku W/C na wielkość skurczu autogenicznego wg Kurdowskiego [28]



Rys. 2. Wpływ stosunku W/C i zawartości kruszywa na skurcz betonu wg Nevillea [30]

Do głównych czynników mających wpływ na wielkość odkształceń wywołanych skurczem betonu należą:

- stosunek W/C,
- rodzaj i ilość cementu,
- ilość zaczynu cementowego,
- ilość i rodzaj kruszywa,
- klasa betonu,
- wiek betonu,
- warunki otoczenia (wilgotność i temperatura),
- wymiary elementu,
- więzy wewnętrzne (obecność wkładek zbrojenia),
- więzy zewnętrzne (warunki podparcia elementu).

Pełzanie betonu jest zjawiskiem wzrostu odkształceń w czasie przy stałym naprężeniu [3], [33]. W praktyce w elementach żelbetowych reologii betonu towarzyszy często



zjawisko relaksacji, tzn. spadku naprężeń w czasie przy stałych odkształceniach. Reologia opisuje całość procesów zmiany składowych naprężenia i odkształcenia wywołanymi zjawiskami reologii i relaksacji w analizowanych elementach.

Do głównych czynników mających wpływ na wielkość odkształceń wywołanych pełzaniem betonu należą [3]:

- względna wilgotność otoczenia (RH%),
- wymiary elementu,
- skład betonu,
- wiek w chwili obciążenia,
- czas działania obciążenia,
- poziom naprężeń ściskających w betonie.

W rzeczywistości pełzanie i relaksacja są zjawiskami niezależnymi, jednak w konstrukcjach żelbetowych najczęściej występują razem, dlatego w literaturze opisywaną są łącznie.

### **3. Wpływ czynników materiałowo – technologicznych na zjawisko skurczu w elementach żelbetowych**

#### **3.1. Uwarunkowania materiałowe**

##### ***Wpływ kruszywa***

Rodzaj i jakość stosowanego kruszywa mają istotny wpływ na właściwości stwardniałego betonu. Kruszywo stanowi „szkielet” nośny betonu, którego zadaniem jest jak najbardziej efektywne przeniesienie działających obciążeń, natomiast zadaniem zaczynu cementowego jest „sklejenie” kruszywa i wypełnienie pustek między ziarnami. Zadaniem technologa jest takie zaprojektowanie składu betonu aby osiągnąć najbardziej efektywne wypełnienie jego objętości kruszywem przy minimalizacji zużycia zaczynu (spoiwa). Odpowiednio zaprojektowany stos okruszowy oraz niska zawartość pyłów pozwala na otrzymanie betonu o wymaganych parametrach wytrzymałościowych i niskim skurczu. Ze względów technologicznych, uwzględniając uwarunkowania realizacyjne najbardziej korzystne jest stosowanie kruszyw o wysokich współczynnikach przewodności i pojemności cieplnej, przy jednoczesnej niskiej rozszerzalności cieplnej [15],[30], [33], [34], [36]. Betony wykonane na bazie kruszywa żwirowego, piaskowca oraz kamienia wapiennego charakteryzują się najwyższą przewodnością cieplną czyli beton wykonany z ich zastosowaniem będzie lepiej odprowadzał ciepło z wnętrza konstrukcji niż beton z kruszywem bazaltowym czy granitowym. Natomiast betony wykonane właśnie na kruszywie bazaltowym lub granitowym charakteryzują się najniższym współczynnikiem rozszerzalności cieplnej. Na właściwości termiczne poszczególnych kruszyw ma istotny wpływ również miejsce ich wydobycia.

Prawidłowo zaprojektowany stos okruszowy zapewni niewielki skurcz betonu. O wielkości skurczu decyduje ilość frakcji pylastych ( $d \leq 0,125$  mm) w stosie, przy wysokiej zawartości pyłów skurcz betonu będzie większy niż przy mniejszych. Ilość frakcji pylastych ma wpływ na urabialność mieszanki i wodożądność kruszywa. Należy dodać uwagę, że szkodliwość pyłów zależy przede wszystkim od ich składu i czasami nie ich obecność w betonie nie bywa negatywna.



### ***Wpływ rodzaju i ilości cementu***

Powszechnie wiadomo, że ilość i rodzaj zastosowanego cementu istotnie wpływa na tempo wydzielania ciepła w procesie jego hydratacji. Przyjmuje się, że 100 kg cementu powoduje wzrost temperatury twardniejącego betonu o około  $10\pm 12$  °C w warunkach adyabatycznych, w procesie tzw. samoociepnięcia betonu. W praktyce wzrost ten jest mniejszy i zależy od masywności elementu oraz zastosowanych zabiegów pielęgnacyjnych. Za ilość wydzielanego ciepła odpowiada skład mineralny cementu oraz jego stan zmielenia (miałkość). Umownie rozróżnia się trzy podstawowe klasy cementu z uwagi na ilość wydzielonego ciepła w ciągu pierwszych 7 dni twardnienia (lub 41 godzinach): LH - o niskim cieple hydratacji do 270 J/g (klasa S), NH - o typowym cieple hydratacji w granicach 270-350 J/g (klasa N) i VH - o wysokim cieple hydratacji (klasy R) dla których ilość wydzielonego ciepła hydratacji  $> 350$  J/g. Cementy dla których ciepło hydratacji  $< 220$  J/g określane są jako cementy o bardzo niskim cieple hydratacji (VLH) [1], [14], [15], [16], [19], [22], [26], [36], [37].

Powszechnie stosowanym zabiegiem obniżającym ilość wydzielonego ciepła w okresie dojrzewania młodego betonu jest stosowanie do betonu dodatków pucolanowych w postaci popiołów lotnych lub żużla wielkopieczowego.

Zaczyn cementowy zapewnia spójność składników betonu i w głównej mierze odpowiada za wytrzymałość oraz trwałość stwardniałego betonu. Parametrem decydującym o wytrzymałości betonu jest stosunek wody do cementu (W/C) w zaczynie cementowym. Wysoka wartość W/C skutkuje niską wytrzymałością betonu i dużym skurczem, większą porowatością, większą nasiąkliwością, niższą mrozoodpornością i trwałością. Obniżenie wskaźnika W/C skutkuje wzrostem wytrzymałości, ograniczeniem skurczu ale równocześnie spadkiem urabialności mieszanki betonowej. Wartość wskaźnika W/C w mieszance nie powinna być również zbyt niska, z uwagi na wymaganą minimalną ilość wody niezbędną do hydratacji cementu [16], [30], [32], [34]. Obecnie przyjmuje się, że minimalny W/C  $\geq 0,29$ .

### ***Dodatki i domieszki chemiczne***

W celu otrzymania betonu o założonych parametrach mechanicznych (wytrzymałościowych), wysokiej trwałości lub modyfikacji parametrów mieszanki betonowej stosuje się różnego rodzaju dodatki i domieszki do betonu. Dodatki to materiały lub związki chemiczne dodawane do betonu w procesie produkcji mieszanki betonowej w ilości większej niż 5% masy cementu, gdy ilość dodatków jest mniejsza (do 5%) materiały te nazywamy domieszkami.

Głównym celem stosowania dodatków do betonu jest redukcja wymaganej ilości cementu oraz pośrednio zmiana dynamiki oraz końcowej ilości wydzielanego ciepła hydratacji. Obecnie do głównych dodatków zalicza się żużel wielkopieczowy i popioły lotne.

Celem stosowanie domieszek jest z reguły modyfikacja mieszanki betonowej, przez poprawę jej urabialności, skrócenie lub wydłużenie początku wiązania lub jej napowietrzenie w celu poprawy mrozoodporności betonu.

Wpływ dodatków i domieszek na skurcz beton stwardniałego jest różny i należy go rozpatrywać indywidualnie dla każdego analizowanego przypadku.

## 5.2. Uwarunkowania technologiczne

### ***Temperatura otoczenia***

W okresie twardnienia, w trakcie hydratacji cementu następuje wydzielanie ciepła w zabetonowanym elemencie, które skutkuje wzrostem temperatury dojrzewającego betonu. Wpływ na wysokość osiągniętej temperatury, poza rodzajem i ilością zastosowanego cementu oraz stosunkiem W/C ma początkowa temperatura mieszanki jak również temperatura powietrza [4], [8], [9], [17], [22], [35], [40]. Wpływ temperatury na rozkład naprężeń termiczno-skurczowych w elemencie wzrasta wraz z masywnością elementu. Dla elementów niemasywnych wpływ naprężeń termiczno-skurczowych jest mniejszy i rośnie wraz ze wzrostem masywności. W elementach masywnych naprężeń termiczno-skurczowych nie wolno pominąć w analizie wyężenia elementu [5]-[11], [18]-[20], [25], [40], [41].

Obniżenie początkowej temperatury mieszanki betonowej o 10°C poniżej temperatury otoczenia daje taki sam efekt jak zastosowanie cementu o cieple hydratacji niższym o 100 J/g [16], [28], [30]. Jest to wynikiem spowolnienia reakcji hydratacji cementu czyli spowolnienia szybkości wydzielania ciepła. W [S2], [S21], zamieszczono wykresy przedstawiono wyniki badań wskazujące, że zamiana okresu betonowania z letniego, przy temperaturze powietrza atmosferycznego 25°C, na zimowy charakteryzujący się temperaturą powietrza 5°C zmniejsza o ~20% wyężenie twardniejącego betonu.

### ***Betonowanie etapowe***

Działaniem ograniczającym temperaturę twardnienia mieszanki betonowej jest prowadzenie prac betoniarskich z zastosowaniem tzw. betonowania etapowego polegającego na układaniu betonu blokami lub warstwami, jak również łączeniu różnych technologii betonowania [11], [12], [13], [16], [24], [29], [30]. Zaletą tej metody jest duża zdolność do ograniczenia temperatury twardnienia, natomiast główną wadą ryzyko powstania rys w miejscu połączeń poszczególnych fragmentów elementów konstrukcji betonowanych w różnym czasie. Podział na etapy betonowania zmniejsza poziom naprężeń wymuszonych [44]-[48].

### ***Chłodzenie wewnętrzne***

Chłodzenie wnętrza twardniejącego elementu wymagane jest w przypadku, gdy istnieje prawdopodobieństwo samoociepnięcia betonu powyżej temperatury ~65-70°C. Dla wyższych temperatur w twardniejącym betonie następuje zaburzenie procesu hydratacji cementu i szereg zjawisk fizyko-chemicznych które mają negatywny wpływ parametry wytrzymałościowe betonu. W celu obniżenia temperatury betonu w środku elementu, w elemencie montuje się system rur (szczelny rurociąg), przez które po zabetonowaniu w okresie twardnienia przepływa chłodna woda. Zadaniem wody jest odprowadzenie ciepła z wnętrza elementu. Parametry wody w zakresie jej temperatury i prędkości przepływu oraz długości okresu chłodzenia są monitorowane. Zaleca się aby w elemencie maksymalny gradient temperatury między dowolnymi punktami nie był większy niż 20 °C. [16], [30], [44]-[48].

### ***Ochrona cieplno-wilgotnościowa (zabezpieczenie izolacyjne)***

W początkowym okresie po zabetonowaniu z niezabezpieczonej powierzchni betonu odparowuje woda. Szybki ubytek wody z powierzchni elementu skutkuje z reguły powstawaniem rys skurczowych tej powierzchni. W celu minimalizacji negatywnego wpływu parowania, zaleca zabezpieczenie powierzchni warstwą hydro i termo izolacji.

Tablica 1. Wpływ czynników materiałowo – technologicznych na zjawisko skurczu

Czynnik		Zmiana	Wpływ na maksymalną temperaturę samoociepłenia	Wpływ na gradient temperatury	Wpływ na naprężenia i ryzyko zarysowania
Rodzaj kruszywa	Współczynnik rozszerzalności termicznej	↑	↔	↔	↑↑
	Pojemność cieplna	↑	↓	↔ <sup>1)</sup>	↓
	Współczynnik przewodnictwa ciepła	↑	↑	↓ <sup>1)</sup>	↓
	Rozmiar ziaren kruszywa	↑	↓	↓	↓
Rodzaj cementu	CEM I	-	↑↑	↑↑	↑↑
	CEM II÷CEM V	-	↓↓	↓	↓↓
Ilość cementu		↑	↑↑	↑↑	↑↑
Współczynnik w/c		↑	↑	↑	↑
Dodatki do betonu	Popiół lotny krzemionkowy	↑	↓↓	↓↓	↓↓
	Mielony granulowany żużel wielkopiecowy	↑	↓	↓	↓
	Mączka wapienna <sup>2)</sup>	↑	↓	↓	↓
Domieszki chemiczne <sup>3)</sup>	opóźniające	-	↓	↓	↓
	uplastyczniające, upłynniające	-	↓	↓	↓
Temperatura początkowa betonu		↑	↑↑	↑↑	↑↑
Betonowanie etapami		-	↓	↓	↓
Betonowanie ciągłe <sup>4)</sup>		-	↑	↑	↑
Chłodzenie mieszanki betonowej		-	↓↓	↓↓	↓↓
Wewnętrzne chłodzenie konstrukcji		-	↓	↓	↓
Zabezpieczenie izolacyjne		↑	↑	↓	↓ <sup>5)</sup>
Wymiary konstrukcji (grubość)		↑	↑↑	↑↑	↑↑
↑↑- bardzo duży wzrost, ↑- wzrost, ↔- brak wpływu, ↓- spadek, ↓↓- bardzo duży spadek 1) istotna w elementach o większej grubości, 2) obniża właściwości mechaniczne i trwałościowe wraz ze wzrostem ilości w składzie betonu 3) zależy od rodzaju domieszki 4) w stosunku do betonowania etapowego 5) pod warunkiem odpowiedniego doboru czasu usunięcia izolacji, dotyczy głównie płyt, gdzie istotna jest różnica temperatury wewnątrz-powierzchnia					

Celem zastosowania powierzchniowej izolacji termicznej jest ograniczenie wymiany ciepła z otoczeniem (minimalizacja gradientu temperatury między środkiem elementu i jego powierzchnią zewnętrzną, a celem zastosowania hydroizolacji jest ograniczenie parowania. W praktyce inżynierskiej zazwyczaj przyjmuje się 7-21 dniowy okres pielęgnacji termicznej elementu. Dla elementów niemasywnych okres ten jest krótszy i wydłuża się wraz ze zwiększeniem masywności elementu. Dla elementów masywnych o dużych wymiarach, np. wielkie fundamenty pod maszyny lub tamy hydrotechniczne, okres wymaganej pielęgnacji termiczno-skurczowej może być dłuższy niż 21 dni. Dobór optymalnego czasu ochrony zabetonowanej konstrukcji powinien być przedmiotem indywidualnej analizy [4], [10], [16].

W artykule dotyczącym żelbetowych konstrukcji masywnych [21] Klemczak zaproponowała tabelaryczne zestawienie (podział) wpływu poszczególnych parametrów materiałowych i technologicznych na wielkość uzyskiwanych odkształceń skurczowych w betonie. W Tabl.1 zamieszczono zestawienie czynników materiałowo – technologicznych wpływających w sposób istotny na skurcz betonu.

#### 4. Odkształcenia swobodne betonu wywołane skurczem wg PN-EN 1992-1-1

W normie PN-EN 1992-1-1 [N1] (potocznie nazywaną EC2) do wyznaczenia sumarycznych odkształceń swobodnych betonu wywołanych skurczem ( $\epsilon_{cs}$ ) uwzględnia się tylko dwa z czterech opisanych wcześniej rodzajów skurczu, mianowicie są to:  $\epsilon_{cd}$  - odkształcenia wywołane skurczem od wysychania oraz  $\epsilon_{ca}$  - odkształcenia od skurczu autogenicznego, pomijając wpływ odkształceń wywołanych skurczem chemicznym i skurczem od plastycznym.

Wpływ skurczu chemicznego na odkształcenia betonu nie jest istotny i może zostać pominięty w analizie, jednak wpływ skurczu plastycznego w pewnych warunkach może być istotny i zdaniem autorów nie powinien być pomijany w analizie zarysowania elementów. Producenci mieszanek betonowych oraz wykonawcy robót mają wpływ na możliwość powstawania rys wywołanych skurczem plastycznym, np. przed odpowiedni dobór składników mieszanki betonowej (producenci) jak również warunki pielęgnacji (wykonawcy).

Sumaryczne odkształcenie swobodne betonu wywołane skurczem oblicza się następująco:

**PN-EN  
1992-1-1**

(3.8)

gdzie:

- $\epsilon_{cs}$  – całkowite odkształcenie wywołane skurczem,
- $\epsilon_{cd}$  – odkształcenie skurczowe wywołane wysychaniem,
- $\epsilon_{ca}$  – odkształcenie skurczu autogenicznego.

$$\epsilon_{cs} = \epsilon_{cd} + \epsilon_{ca} \quad (1)$$





### 3.1. Odształcenia skurczowe wywołane wysychaniem – $\varepsilon_{cd}(t)$

Współczynnik  $\beta_{ds}(t, t_s)$  uwzględniający wpływ czasu wysychania  $(t-t_s)$  [-]:

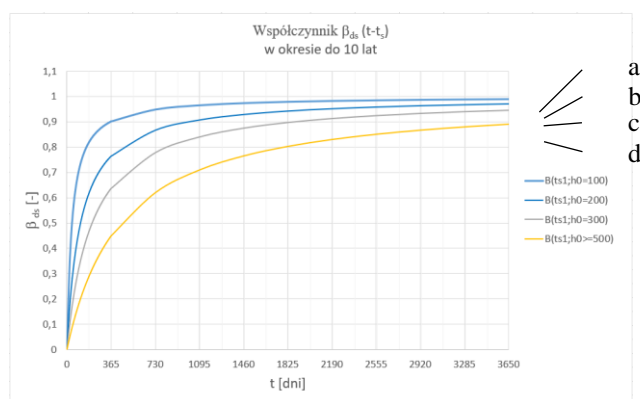
PN-EN  
1992-1-1

$$\beta_{ds}(t, t_s) = \frac{t - t_s}{t - t_s + 0,04 \sqrt{h_0^3}} \quad (2)$$

(3.10) gdzie:

$t$  – wiek betonu w rozważanej chwili [w dniach],

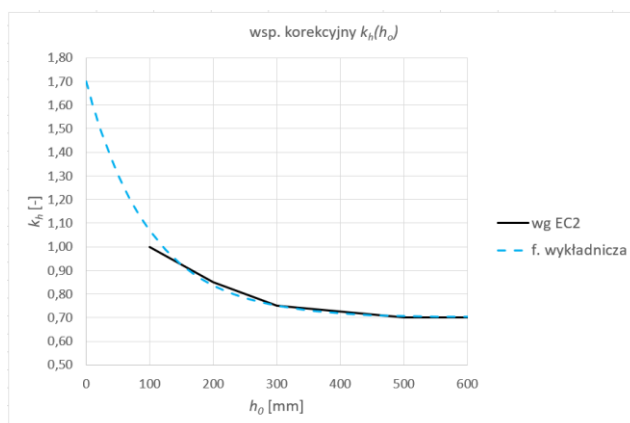
$t_s$  – wiek betonu w chwili zakończenia pielęgnacji [w dniach]:



Rys. 3. Wykresy  $\beta_{ds}(t, t_s)$  dla  $t_s=1$  [dzień] i różnych wartości wymiaru  $h_0$  [mm] wg [N1]: a)  $h_0=100$ , b)  $h_0=200$ , c)  $h_0=300$ , d)  $h_0 > 500$

Współczynnik  $k_h(h_0)$  uwzględniający wpływ miarodajnego wymiaru elementu [-]:

$$k_h(h_0) = 0,7 + \exp\left(-\frac{h_0}{100}\right) \quad (3)$$



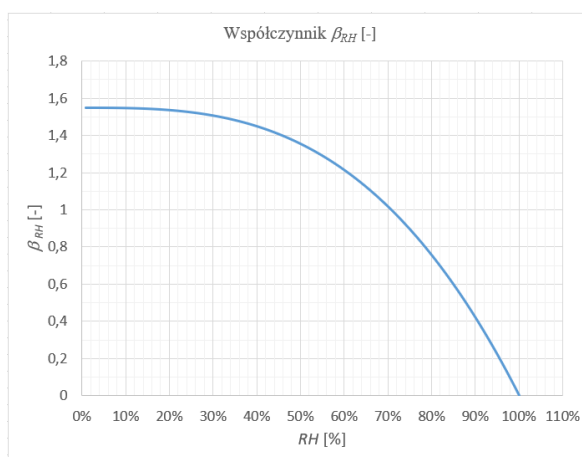
Rys. 4. Wartości współczynnika  $k(h_0)$ : a) wg [N1], b) funkcja wykładnicza

Współczynnik  $\beta_{RH}$  uwzględniający wpływ wilgotności otoczenia (środowiska) [-]:

**PN-EN  
1992-1-1**

$$\beta_{RH} = 1,55 \left[ 1 - \left( \frac{RH}{RH_0} \right)^3 \right] \quad (4)$$

(B.12) gdzie:  
 $RH_0 = 100\%$ .



Rys. 5. Wartości współczynnika  $\beta_{RH}$  wg [N1]

Nominalne odkształcenie skurczu przy wysychaniu  $\varepsilon_{cd,0}$  [-]:

**PN-EN  
1992-1-1**

$$\varepsilon_{cd,0} = 0,85(220 + 110 \alpha_{ds1}) \cdot \exp\left(-\alpha_{ds2} \frac{f_{cm}}{f_{cm0}}\right) \cdot \beta_{RH} \cdot 10^{-6} \quad (5)$$

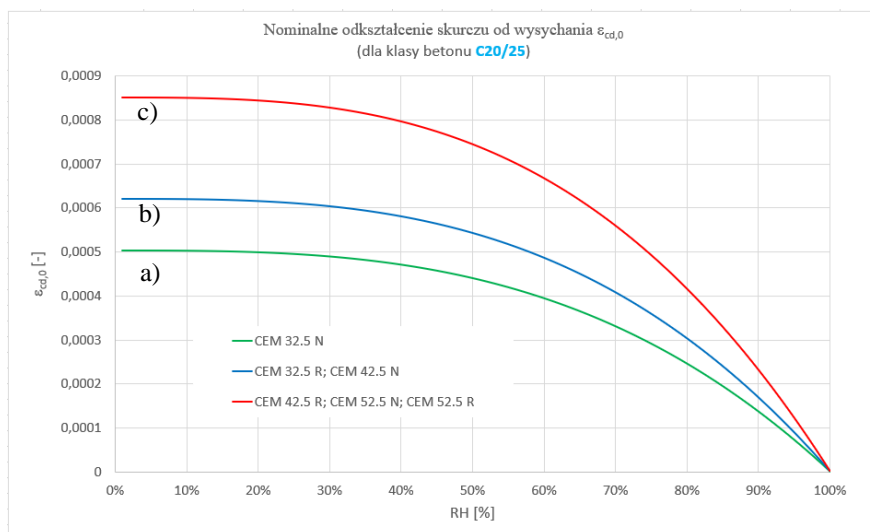
(B.12)

gdzie:

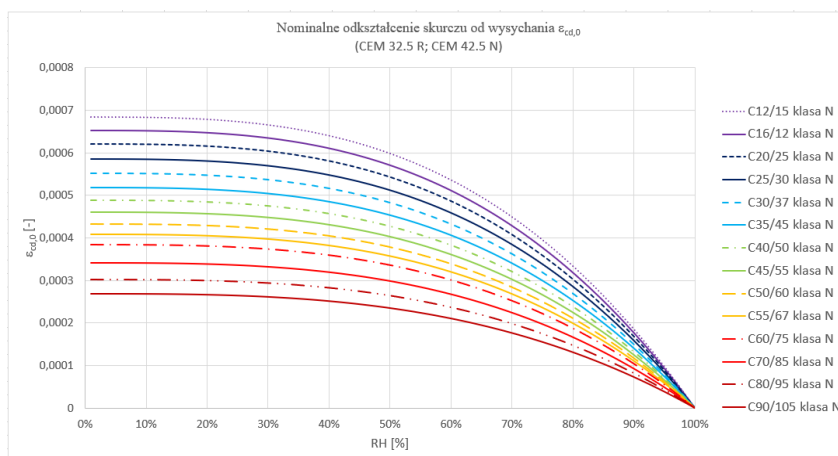
$f_{cm0} = 10$  MPa,

$$\alpha_{ds1}(CEM) = \begin{cases} \text{klasa S} \\ \text{klasa N} \\ \text{klasa R} \end{cases} \rightarrow \alpha_{ds1} = \begin{cases} 3 \\ 4 \\ 6 \end{cases}$$

$$\alpha_{ds2}(CEM) = \begin{cases} \text{klasa S} \\ \text{klasa N} \\ \text{klasa R} \end{cases} \rightarrow \alpha_{ds2} = \begin{cases} 0,13 \\ 0,12 \\ 0,11 \end{cases}$$



Rys. 6. Nominalne odkształcenia skurczowe od wysychania  $\varepsilon_{cd,0}$  dla wybranej klasy betonu (C20/25), wykonanego z różnych klas cementu wg [N1]:  
a) klasy S, b) klasy N, c) klasy R



Rys. 7. Nominalne odkształcenia skurczowe betonu wywołane wysychaniem  $\varepsilon_{cd,0}$  dla wybranej klasy S cementu (CEM 32.5 R, 42.5 N), dla różnych klas wytrzymałości betonu wg [N1]

Odształcenie skurczowe w zależności od czasu wysychania [-]:

*PN-EN*  
*1992-1-1*  
(3.9)

$$\varepsilon_{cd}(t) = \beta_{ds}(t, t_s) \cdot k_h(h_0) \cdot \varepsilon_{cd,0} \quad (6)$$

Końcowa wartość odształcenia skurczowego spowodowanego wysychaniem [-]:

*PN-EN*  
*1992-1-1*  
pkt. 3.1.4  
(6)

$$\varepsilon_{cd}(\infty) = \varepsilon_{cd,\infty} = k_h(h_0) \cdot \varepsilon_{cd,0} \quad (7)$$

### 3.2. Odształcenia skurczowe wywołane skurczem autogenicznym – $\varepsilon_{ca}(t)$

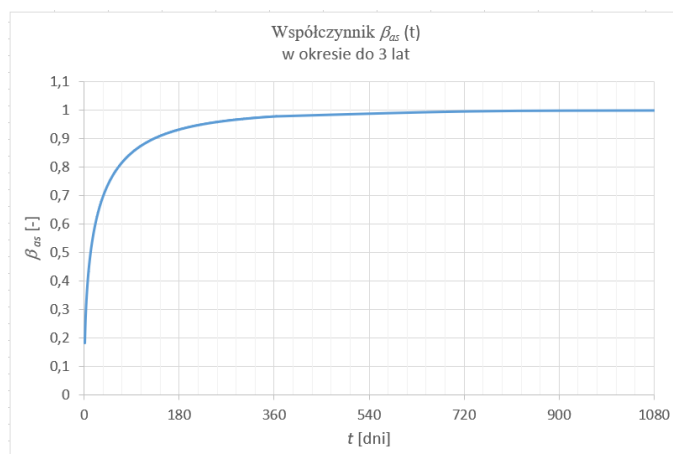
Współczynnik  $\beta_{as}(t, t_s)$  uwzględniający wpływ czasu [-]:

*PN-EN*  
*1992-1-1*  
(3.13)

$$\beta_{as}(t) = 1 - \exp(-0,2\sqrt{t}) \quad (8)$$

gdzie:

t – wiek betonu w rozważanej chwili [w dniach].



Rys. 8. Wartości współczynnika  $\beta_{as}(t)$  wg [N1]

Końcowa wartość odkształcenia skurczu autogenicznego  $\varepsilon_{ca}(h)$  [-]:

**PN-EN  
1992-1-1  
(3.12)**

$$\varepsilon_{ca}(\infty) = 2,5(f_{ck} - 10) \cdot 10^{-6} \quad (9)$$

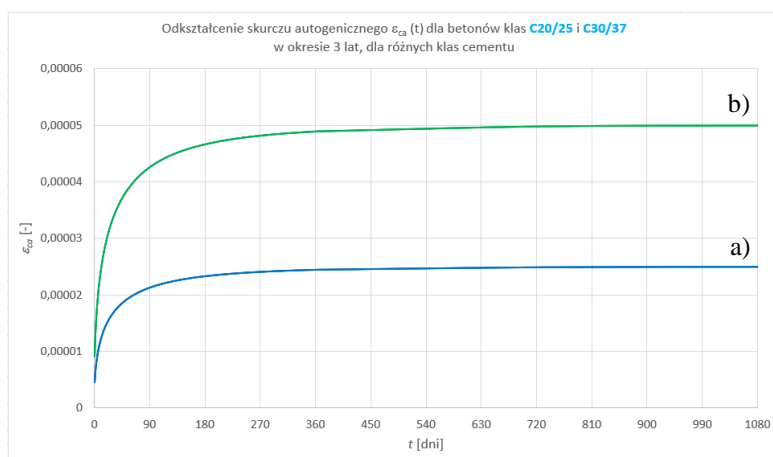
gdzie:

$f_{ck}$  – charakterystyczna wytrzymałość walcząca betonu na ściskanie [MPa]

Odształcenie skurczu autogenicznego w zależności od okresu wysychania [-]:

**PN-EN  
1992-1-1  
(3.12)**

$$\varepsilon_{ca}(t) = \beta_{as}(t) \cdot \varepsilon_{ca}(\infty) \quad (10)$$



Rys. 9. Odształcenia skurczu autogenicznego  $\varepsilon_{ca}(t)$  dla wybranych klas betonu wg [N1]: a) C20/25, b) C30/37

Jak widać wg [N1] skurcz autogeniczny nie zależy od rodzaju i klasy zastosowanego cementu, zależy jedynie od klasy wytrzymałości betonu, co nie jest do końca zgodne z wynikami na badań.

## 5. Odształcenia betonu skrępowanego więzami wewnętrznymi (wkładkami zbrojenia)

Więzy wewnętrzne w postaci wkładek zbrojenia powodują zmniejszenie odkształceń betonu w elementach zbrojonych. Na wielkość odkształceń wpływ ma rozstaw, średnica i lokalizacja wkładek zbrojenia w przekroju. Wartość odkształcenia betonu w elementach zbrojonych można wyznaczyć ze wzorów:

Współczynnik  $\alpha_e$  [-]:

$$\alpha_e = \frac{E_s}{E_{cm}} \quad (12)$$

Całkowity stopień zbrojenia elementu w przekroju  $\rho_s$  [-]

$$\rho_s = \frac{A_{s1} + A_{s2}}{A_c} \quad (13)$$

Odształcenie elementu żelbetowego, bez uwzględnienia relaksacji betonu z uwagi na pełzanie [-]:

$$\varepsilon_{cs}^{RC}(t) = \frac{\varepsilon_{cs}}{1 + \alpha_e \cdot \rho_s} \quad (14)$$

Odształcenie elementu żelbetowego, z uwzględnieniem relaksacji betonu z uwagi na pełzanie [-]:

$$\varepsilon_{cs}^{RC}(\infty) = \frac{\varepsilon_{cs}}{1 + \alpha_{e,\infty} \cdot \rho_s} \quad (16)$$

Współczynnik relaksacji naprężeń skurczowych w wyniku pełzania betonu ( $k$ ), dla której wpływ czasu uwzględniony został współczynnikiem  $\beta$ , którego wartość od skurczu wg między innymi Flagi można przyjmować równą 0,8:

$$\alpha = \frac{\alpha_e \cdot \rho_s}{1 + \alpha_e \cdot \rho_s} \quad (17)$$

$$\beta \cong 0,8 ; \varphi(\infty, t_0) \quad (18)$$

$$k = \frac{1}{1 + \beta \cdot \alpha \cdot \varphi(\infty, t_0)} \leq 1,0 \quad (19)$$

Wówczas odształcenie elementu żelbetowego, z uwzględnieniem relaksacji betonu i pełzania  $\varepsilon_{cs}^{RC}(h)$  [-]:

$$\varepsilon_{cs}^{RC}(\infty) = \varepsilon_{cs}(1 - \alpha)k \quad (20)$$

## 6. Odształcenia betonu wywołane temperaturą - $\varepsilon_T$

W warunkach adiabatycznych (bez strat ciepła) wzrost temperatury twardniejącego betonu, w okresie intensywnego wydzielania ciepła hydratacji można wyznaczyć ze wzoru:

$$\Delta T^{adiab} = \frac{C \cdot Q(t)}{c \cdot \gamma_{bet}} \quad (21)$$

gdzie:

$C$  [kg/m<sup>3</sup>]

– oznacza ilość cementu w 1 m<sup>3</sup> betonu,

$$\begin{aligned}
 c &= 0,96 \text{ [kJ/(kg}\cdot\text{K)]} && \text{– ciepło właściwe betonu,} \\
 \gamma_{bet} &= 2400 \text{ kg/m}^3 && \text{– gęstość objętościowa betonu,} \\
 Q_{\infty} &= 300 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}, && \text{– końcowa ilość ciepła hydratacji cementu}
 \end{aligned}$$

Odształcenia termiczne  $\varepsilon_T$  wyznaczmy natomiast ze wzoru:

$$\varepsilon_T = \alpha_T \cdot \Delta T \quad (22)$$

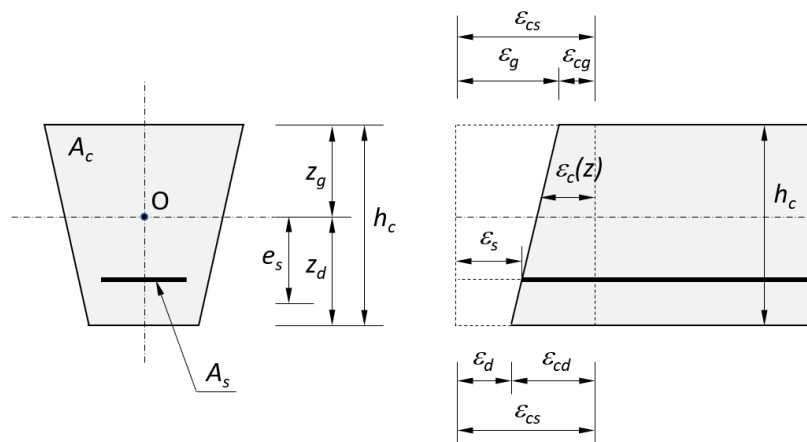
gdzie:

$\varepsilon_T$  – odkształcenie wywołane działaniem temperatury np. pochodzącej od ciepła hydratacji cementu, w trakcie dojrzewania młodego betonu,

$\alpha_T$  – liniowy współczynnik rozszerzalności cieplnej betonu [ $\text{K}^{-1}$ ], dla betonu można przyjmować  $\alpha_T = 0,00001 = 10^{-6} \text{ [K}^{-1}\text{]}$

## 7. Naprężenia w przekroju wywołane więzami wewnętrznymi i zewnętrznymi

Dla przekroju prostokątnego możemy wyznaczyć wartości naprężeń skurczowych stosując prosty model prętowe. Zakładając zasadę płaskich przekrojów, dla elementu prętowego pojedynczo zbrojonego naprężenia wywołane więzami wewnętrznymi (wkładkami zbrojenia) obliczymy z warunków równowagi sił wewnętrznych  $N_s$  i  $M_s$ .



Rys. 10. Odształcenia w pręcie pojedynczo, niesymetrycznie zbrojonym

Współczynniki pomocnicze:

$$\eta = 1 + 12 \left( \frac{e_s}{h_c} \right)^2 \quad (23)$$

$$\alpha' = \frac{\alpha_g \cdot \rho_s \cdot \eta}{1 + \alpha_g \cdot \rho_s \cdot \eta} \quad (24)$$

$$a'' = a' \cdot \frac{1 + 6 \frac{e_s}{h_c}}{\eta} \quad (25)$$

$$a''' = a' \cdot \frac{1 - 6 \frac{e_s}{h_c}}{\eta} \quad (26)$$

$$k = \frac{1}{1 + \beta \cdot a' \cdot \varphi_p(\infty, t)} \quad (27)$$

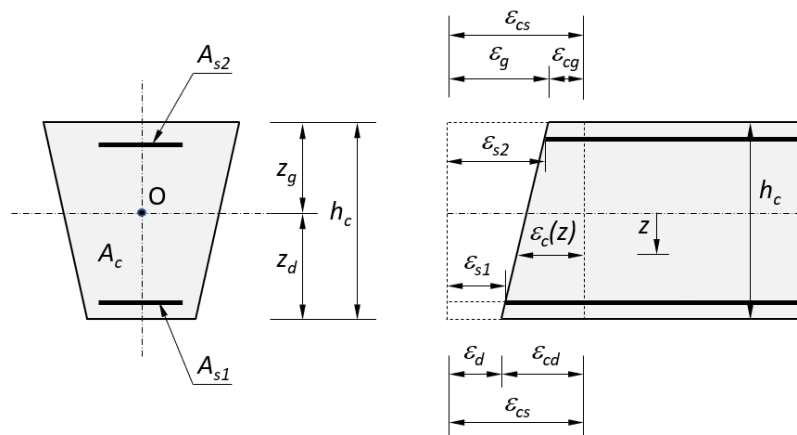
Naprężenia w betonie [MPa]:

$$\sigma_c^I = \varepsilon_{cs} \cdot E_{cm} \cdot a''' \cdot k \quad (28)$$

Naprężenia w stali [MPa]:

$$\sigma_s^I = -\varepsilon_{cs} \cdot E_s \cdot (1 - a') \cdot k \quad (29)$$

Dla elementu prętowego, symetrycznie zbrojonego, naprężenia wyznaczymy analogicznie.



Rys. 11. Odształcenia w przekroju podwójnie, niesymetrycznie zbrojonym

Współczynniki pomocnicze ( $\eta=1,0$ ):

$$a' = \frac{\alpha_e \cdot \rho_s}{1 + \alpha_e \cdot \rho_s}$$

Naprężenia rozciągające w betonie (28):

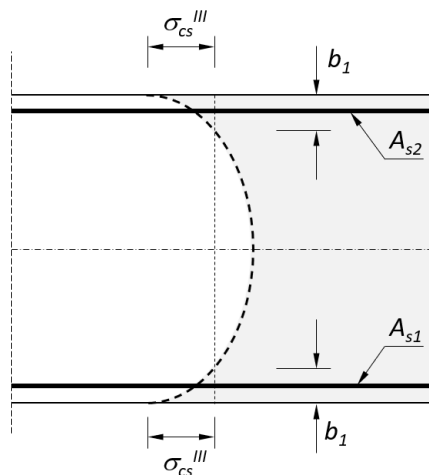
$$\sigma_c^I = \varepsilon_{cs} \cdot E_{cm} \cdot a' \cdot k$$

Naprężenia ściskające w stali (29):

$$\sigma_s^I = -\varepsilon_{cs} \cdot E_s \cdot (1 - a') \cdot k$$



Naprężenia w elemencie wywołane więzami zewnętrznymi, np. sztywnymi lub podatnymi podporami) -  $\sigma_c^{II}$  i  $\sigma_s^{II}$ , należy każdorazowo wyznaczyć stosując zasady statyki.



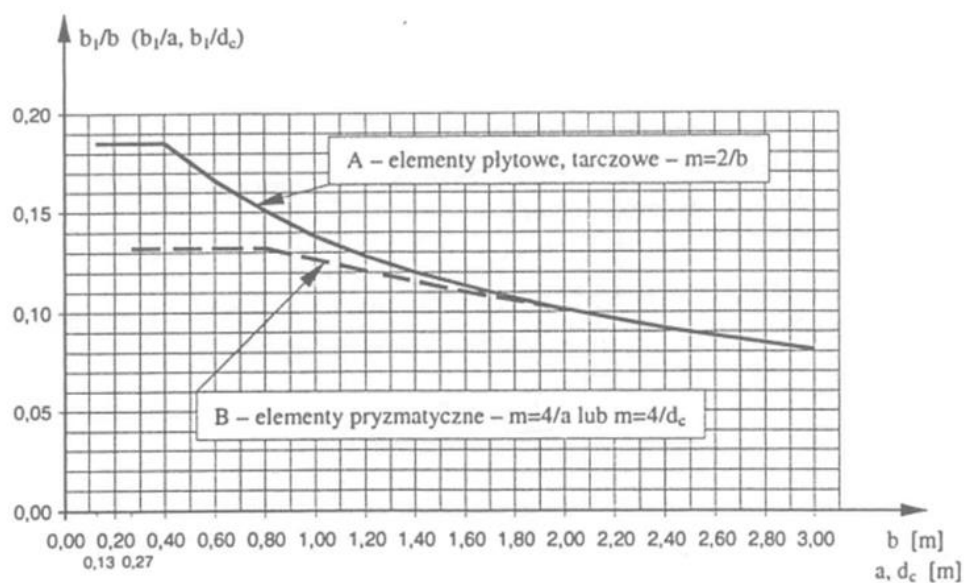
Rys. 12. Wykres naprężeń własnych w przekroju prostokątnym

Kolejnym, trzecim rodzajem naprężenia występujących w elementach betonowych są naprężenia własne wywołane zjawiskami termiczno-skurczowymi. Naprężenia własne  $\sigma_c^{III}$  powstają w elemencie w procesie tężenia (twardnienia) mieszanki betonowej. W okresie twardnienia betonu powstają w betonie nieliniowe i niestacjonarne pola wilgotności, które generują powstawanie w elemencie naprężeń skurczowych  $\sigma_c^{III}$ . Naprężenia te samorównoważą się w przekroju, zmieniając swoją wartość i znak wraz z upływem czasu. Po zakończeniu twardnienia (dla dojrzałego betonu) w strefie przypowierzchniowej występują naprężenia rozciągające a w środku ściskające – Rys. 12. Wyznaczenie dokładnej wartości naprężeń własnych  $\sigma_c^{III}$  w elemencie jest stosunkowo trudne, a ich rozkład w przekroju ściśle zależy od masywności elementu i parametrów technologicznych (receptury mieszanki oraz warunków pielęgnacji i innych). W elementach niemasywnych ( $m \geq 15$ ) wpływ naprężeń własnych na zarysowanie jest niewielki (praktycznie pomijalny z inżynierskiego punktu widzenia) i rośnie wraz ze wzrostem masywności elementu. Dla elementów masywnych wpływ naprężeń własnych dominuje i nie może być pomijany w analizie stanu zarysowania i wyężenia elementu.

Grubość strefy przypowierzchniowej wg Flagi [6] wynoszą (Tabl. 2):

- elementy niemasywne ( $m \geq 15$ ):  $b_1 = 0,185b$  (30)
- elementy i średnio masywne i masywne ( $m < 15$ ):  $b_1 = (0,05 \div 0,15)b$  (31)

Na Rys. 13 pokazano zmiany szerokości strefy przypowierzchniowej w zależności od masywności elementu (wymiarów elementu).



Rys. 13. Grubość strefy przypowierzchniowej dla elementów: A- płytowych i tarczowych, B – przyzmatycznych o boku a lub średnicy d – wg Flagi [6].

Tablica 2. Grubość strefy przypowierzchniowej wg Flagi [6]

Grubość elementu $b$	Moduł powierzchniowy elementu $m$	Stosunek $b_1/b$	Grubość warstwy $b_1 (h_{ct,eff})$
[m]	[m <sup>-1</sup> ]	[-]	[m]
0,20	10,00	0,185	3,7
0,40	5,00	0,185	7,4
0,60	3,33	0,166	10,0
0,80	2,50	0,151	12,0
1,00	2,00	0,138	13,8
1,20	1,67	0,128	15,4
1,40	1,43	0,120	16,8
1,60	1,25	0,113	18,1
1,80	1,11	0,107	19,3
2,00	1,00	0,101	20,2
3,00	0,50	0,068	27,2
4,00	0,40	0,060	30,0
5,00	0,33	0,053	31,8
6,00	0,67	0,041	24,3

Naprężenia przyczepności betonu do powierzchni stali zbrojeniowej [MPa]:

$$\tau_m = 0,15 f_{ctm} \quad (32)$$

Obliczeniowa średnica prętów zbrojenia przy założeniu ograniczenia szerokości rysy ( $w_{lim}$ ) [mm]:

$$\phi_s \leq \frac{3 \cdot \tau_m \cdot w_{lim} \cdot E_s}{f_{yk}^2} \quad (33)$$

Obliczeniowa (zredukowana) wartość naprężeń dopuszczalnych w stali z uwagi na ograniczenie szerokości rys [MPa]:

$$\sigma_{s,lim} = f_{yk} \sqrt{\frac{\phi_s}{\phi}} \quad (34)$$

Wymagany stopień zbrojenia w strefie przypowierzchniowej  $b_1$  z uwagi na dopuszczalną szerokość rys  $w_{lim}$ , dla przyjętej średnicy prętów zbrojenia  $\phi_s$  [-]:

$$\rho_s = \frac{f_{yk}}{\sigma_{s,lim}} \rho \quad (35)$$

Wymagane pole zbrojenia w strefie przypowierzchniowej  $b_1$  z uwagi na dopuszczalną szerokość rys  $w_{lim}$ , dla przyjętej średnicy prętów zbrojenia  $\phi_s$  [-]:

$$A_s = \rho_s A_c = \rho_s \cdot (b_1 \cdot 1,0 \text{ m}) \quad (36)$$

## 7. Wymagania konstrukcyjne dotyczące minimalnego pola zbrojenia z uwagi na skurcz wg [N1]

Efektywna grubość strefy przypowierzchniowej [m]:

$$h_{c,eff} = \min \left\{ \begin{array}{l} 2,5(h-d) \\ h/2 \end{array} \right. \quad (37)$$

Efektywne pole przekroju strefy rozciąganej betonu [m<sup>2</sup>]:

$$A_{c,eff} = b \cdot h_{ct,eff} = A_{ct} \quad (38)$$

Średnia wytrzymałość betonu na rozciąganie, w chwili zarysowania  $t$  [MPa]:

$$f_{ct,eff} = f_{ctm}(t)$$

Przy braku dokładnych danych można przyjmować  $f_{ct,eff} = f_{ctm}(t=28)$

Współczynniki  $k_c$  i  $k$  zależne od wymiarów, kształtu i rozkładu naprężeń w przekroju wg przyjmowane wg zaleceń zawartych w pkt. 7.3.2 normy [N1]:

- $k = 0,65 \div 1,0$
- $k_c = 1,0$  (przy czystym rozciąganiu).



Obliczeniowa (zredukowana) wartość naprężeń dopuszczalnych w stali z uwagi na ograniczenie szerokości rys Tabl. 7.2. N wg [N1]:

Tablica 7.2N: Ograniczenie rys – maksymalne średnice prętów  $\phi_s^*$  [N1]

$\sigma_{s,lim}$ [MPa]	Maksymalna średnica prętów $\phi$ [mm]		
	$w_k=0,4$ mm	$w_k=0,3$ mm	$w_k=0,2$ mm
160	40	32	25
200	32	25	16
240	20	16	12
280	16	12	8
320	12	10	6
360	10	8	5
400	8	6	4
450	6	5	-

Przykładowo naprężenia w stali  $\sigma_{s,lim}$  dla dopuszczalnej szerokości rozwarcia rys  $w_k=0,2$ mm i  $0,3$ mm odczytane z tablicy wynoszą:

$$\sigma_{s,lim}(w_k=0,2; \phi 8) = 280 \text{ MPa},$$

$$\sigma_{s,lim}(w_k=0,3; \phi 8) = 360 \text{ MPa}.$$

Minimalne pole przekroju zbrojenia z uwagi na skurcz [m<sup>2</sup>] wyznaczamy ze wzoru:

PN-EN  
1992-1-1  
(7.1)

$$A_{s,min} = k_c \cdot k \cdot f_{ct,eff} \cdot \frac{A_{ct}}{\sigma_{s,lim}} \quad (39)$$

## 6. Przykłady analizy wpływu skurczu na konstrukcje betonowe i żelbetowe

### Obliczeniowe parametry betonu

Dane materiałowe ( $f_{ck}$ ,  $f_{cm}$ ,  $f_{ctk}$ ,  $f_{ctm}$ ,  $E_{cm}$ ) dla typowych klas betonu podane zostały w normie PN-EN 1992-1-1 [N1]. W uzasadnionych przypadkach wartości tych parametrów mogą zostać wyznaczone na podstawie wyników badań próbek laboratoryjnych (walcowych lub kostkowych) lub badań próbek betonu pobranych z konstrukcji (odwiertów rdzeniowych) lub opcjonalnie przy znanej wytrzymałości betonu na ściskanie ( $f_{ck}$  lub  $f_{ck,cube}$ ) obliczone na podstawie zależności podanych w normie [N1].

Wartości podane w Tabl. 3.1. [N1] dotyczą parametrów betonu stwardniałego po 28 dniach dojrzewania:  $f_{ck}$  – charakterystyczna wytrzymałość walcowa na ściskanie [MPa],  $f_{cm}$  – średnia wytrzymałość na ściskanie [MPa],  $f_{ctm}$  – średnia wytrzymałość na rozciąganie osiowe [MPa],  $E_{cm}$  – moduł sprężystości [GPa],  $\alpha_t$  – współczynnik liniowej rozszerzalności termicznej betonu [°K<sup>-1</sup>].

W przypadku, gdy dostępne są wyniki badań próbek betonu, na których oznaczono wytrzymałość walcową na ściskanie  $f_{ck}$  [MPa], wyznaczyć możemy wytrzymałość średnią na ściskanie  $f_{cm}$  oraz wartość modułu  $E_{cm}$ :

$$f_{cm} = f_{ck} + 8 \text{ MPa} \quad (40)$$

$$E_{cm} = 22(0,1f_{cm})^{0,2} \quad (41)$$



Jeżeli potrzebne jest określenie wytrzymałości betonu w okresie  $t$  innymi niż 28 dni, wartości podane w normie [N1] należy zmodyfikować stosując odpowiednie współczynniki korygujące. Współczynnik korygujący wytrzymałość betonu z uwagi na czas  $\beta_{cc}(t)$  [-]:

$$\beta_{cc}(t) = \exp \left[ s \left( 1 - \sqrt{\frac{28}{t}} \right) \right] \quad (42)$$

PN-EN  
1992-1-1

(3.2)

gdzie:

$t$  – wiek betonu [w dniach],

$s$  - współczynnik zależny od klasy zastosowanego cementu,

$$s(CEM) = \begin{cases} \text{klasa S} & \rightarrow s = 0,38 \\ \text{klasa N} & \rightarrow s = 0,25 \\ \text{klasa R} & \rightarrow s = 0,2 \end{cases} \quad (43)$$

Szacunkowa wytrzymałość średnia betonu na ściskanie w chwili  $t$  [MPa]:

$$f_{cm}(t) = \beta_{cc}(t) \cdot f_{cm}(t = 28) \quad (44)$$

Szacunkowy moduł sprężystości betonu w chwili  $t$  [GPa]:

$$E_{cm}(t) = \left( \frac{f_{cm}(t)}{f_{cm}(t = 28)} \right)^{0,3} \cdot E_{cm}(t = 28) \quad (45)$$

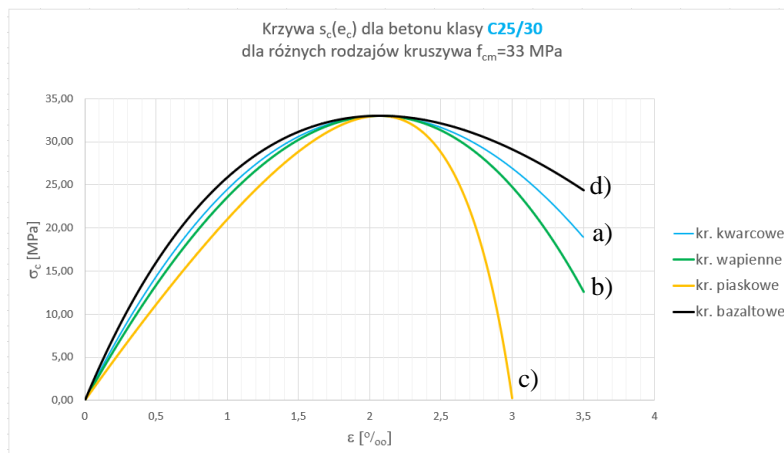
PN-EN  
1992-1-1

(3.5)

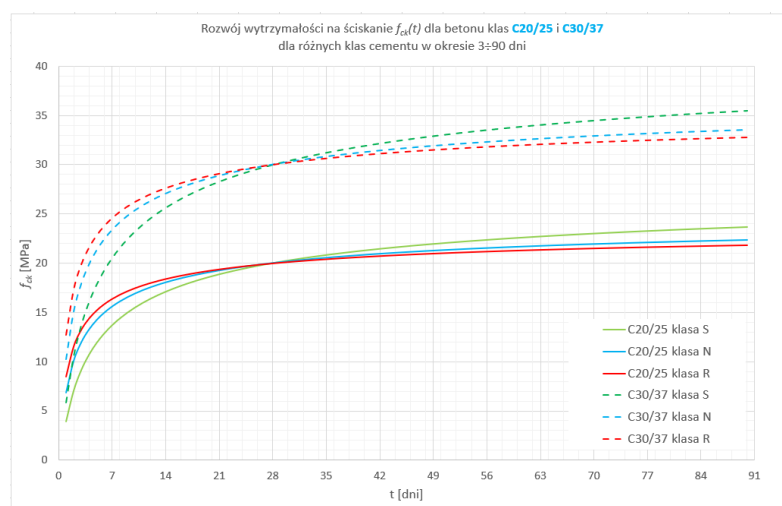
Podane w Tabl. 3.1 normy [N1] normy, wartości modułu sprężystości  $E_{cm}$  dotyczą betonu na kruszywie kwarcowym, dla betonów wykonanych na innych rodzajach kruszywa wartości modułu  $E_{cm}$  należy skorygować:

- dla kruszyw wapiennych:  $E_{cm\_wapiennych} = 0,9 \cdot E_{cm}$ ,
- dla kruszyw piaskowych:  $E_{cm\_piaskowych} = 0,8 \cdot E_{cm}$ ,
- dla kruszyw bazaltowych:  $E_{cm\_bazaltowych} = 1,2 \cdot E_{cm}$ .

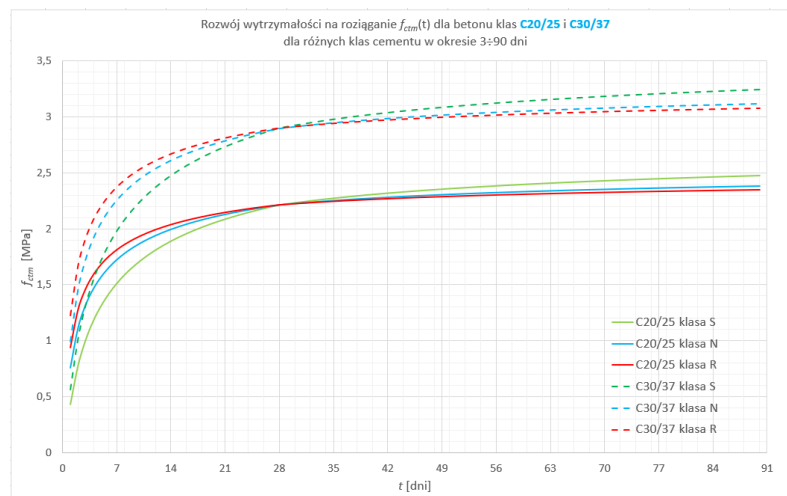
Na Rys. 14 pokazano normowe krzywe  $\sigma_c(\varepsilon)$  dla różnych rodzajów kruszywa i tej samej klasy wytrzymałości.



Rys. 14. Obliczeniowy (normowy wg [N1]) wykres zależności  $\sigma_c(\varepsilon)$  dla różnych rodzajów kruszywa: a) kwarcowego, b) wapiennego, c) piaskowego, d) bazaltowego

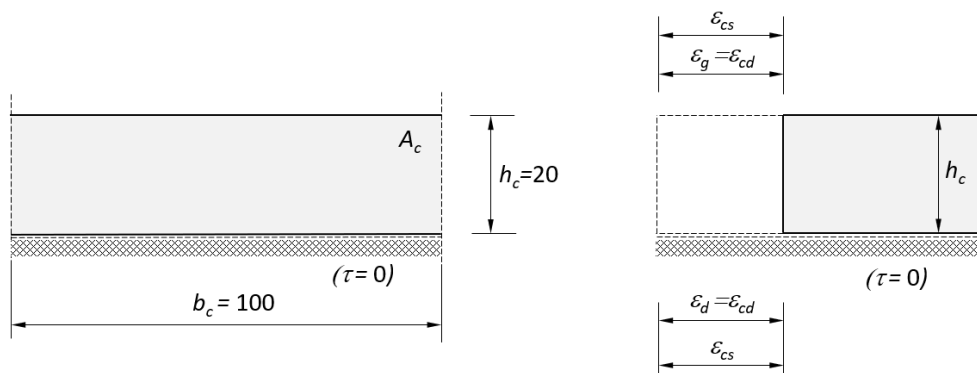


Rys. 15. Obliczeniowy (normowy wg [N1]) rozwój wytrzymałości betonu na ściskanie  $f_{ck}(t)$ , dla dwóch wybranych klas wytrzymałości betonu i różnych klas cementu: a) klasy S, b) klasy N, c) klasy R



Rys. 16. Obliczeniowy (normowy wg [N1]) rozwój średniej wytrzymałości betonu na rozciąganie  $f_{cm}(t)$ , dla dwóch wybranych klas wytrzymałości betonu i różnych klas cementu: a) klasy S, b) klasy N, c) klasy R

### Przykład 1 – posadzka betonowa na gruncie



Rys. 17. Przekrój obliczeniowy

#### Dane geometryczne:

Szerokość  $b = 1,0$  m; grubość  $h_c = 0,2$  m; rozstaw szczelin dylatacyjnych  $L = 6,0$ .

#### Dane materiałowe:

Beton klasy C25/30  $f_{ck} = 25$  MPa,  $f_{cm} = 33$  MPa,  $f_{ctm} = 2,6$  MPa,  $E_{cm} = 31$  GPa

#### Warunki środowiskowe:

Wilgotność otoczenia: RH=60%

#### Więzy:

- wewnętrzne: brak (płyta niezbrojona)
- zewnętrzne: brak (brak tarcia na dolnej powierzchni płyty  $\tau=0$  MPa). Płyta posadzki ułożona na warstwie poślizgowej np. 2x folia PE, gr. 0,5 mm.

Pole przekroju betonu:

$$A_c = 1,0 \times 0,2 = 0,2 \text{ m}^2,$$

Objętość betonu:

$$V_c = 1,0 \times 0,2 \times 6,0 = 1,2 \text{ m}^3,$$

Pole powierzchni poddanej wysychaniu:

$$A_{out} = 1,0 \times 6,0 = 6,0 \text{ m}^2,$$

Miarodajny wymiar przekroju:

$$h_0 = \frac{2V_c}{A_{out}} = \frac{2 \cdot 1,2}{6} = 0,4 \text{ m} = 400 \text{ mm} \quad (46)$$

Moduł powierzchniowy elementu [ $\text{m}^{-1}$ ]:

$$m = \frac{A_{out}}{V_c} = \frac{6}{1,2} = 5 \quad (47)$$

Płyta posadzki jest elementem średnio masywnym. Wartości współczynników:  $k_h(h_0)$  wyznaczono ze wzoru (3) a  $\beta_{RH}$  ze wzoru (4).

$$k_h(h_0) = 0,72$$



$$\beta_{RH} = 1,55 \left[ 1 - \left( \frac{RH}{100} \right)^3 \right] = 1,55 \left[ 1 - \left( \frac{60}{100} \right)^3 \right] = 1,22$$

Ze wzoru (5) obliczono nominalne odkształcenie wywołane skurczem  $\varepsilon_{cd,0}$  od wysychania, a z (7) jego wartość końcową:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{cd,0} &= 0,85(220 + 110 \alpha_{ds1}) \cdot \exp\left(-\alpha_{ds2} \frac{f_{cm}}{f_{cm0}}\right) \cdot \beta_{RH} \cdot 10^{-6} = \\ &= 0,85(220 + 110 \cdot 4) \cdot \exp\left(-0,12 \frac{33}{10}\right) 1,22 \cdot 10^{-6} = 4,6 \cdot 10^{-4} \\ \varepsilon_{cd}(\infty) &= k_h(h_0) \cdot \varepsilon_{cd,0} = 0,72 \cdot 4,6 \cdot 10^{-4} = 3,31 \cdot 10^{-4} \end{aligned}$$

Odształcenie skurczem autogenicznym obliczono ze wzoru (9):

$$\varepsilon_{ca}(\infty) = 2,5(f_{ck} - 10) \cdot 10^{-6} = 2,5(25 - 10) \cdot 10^{-6} = 3,75 \cdot 10^{-5}$$

Sumaryczna wartość odkształcenia wywołanego skurczem betonu:

$$\varepsilon_{cs} = \varepsilon_{cd} + \varepsilon_{ca} = 3,31 \cdot 10^{-4} + 3,75 \cdot 10^{-5} = 3,69 \cdot 10^{-4}$$

Odształceniom skurczowym betonu, nie towarzyszy powstanie w płycie naprężeń, jest ona w stanie bez naprężeniowym. Skrócenie płyty między dylatacjami, na długości  $L=6,0$  m) wynosi:

$$\Delta L = \varepsilon_{cs} \cdot L = 3,69 \cdot 10^{-4} \cdot 6,0 = 0,0022 \text{ m} = 2,2 \text{ mm} \quad (48)$$

W rzeczywistości wymiana wilgoci z otoczeniem (wysychanie betonu), odbywa się głównie przez górną powierzchnię płyty, w związku z tym odkształcenia betonu wywołane skurczem na grubości płyty nie są równe. Płyta posadzki ulega deformacji w wyniku szybszego wysychania górnych warstw betonu. Różnica między górną i dolną krawędzią płyty powoduje jej odkształcenie, objawiające się podnoszeniem narożników. Wygięcie płyty można obliczyć ze wzoru:

$$f_s = \frac{\Delta \varepsilon_{cd}}{h_c} \cdot \frac{L^2}{8} \quad (49)$$

gdzie:

$\Delta \varepsilon_{cd}$  – oznacza różnicę odkształceń wywołanych skurczem między dolną i górną krawędzią płyty.

$L$  - odległość między szczelinami dylatacyjnymi [m],

$h_c$  – grubość płyty [m].

Przy założeniu końcowej wilgotności podłoża ( $RH=90\%$ ), odkształcenia betonu od wysychania na dolnej krawędzi wynoszą  $\varepsilon_{cd,d}(\infty) = 1,14 \cdot 10^{-4}$  (gdzie:  $\beta_{RH}=0,42 \rightarrow \varepsilon_{cd,0}=1,59 \cdot 10^{-4}$ ).

Obliczeniowa różnica odkształceń na górnej i dolnej krawędzi płyty wynosi:

$$\Delta \varepsilon_{cd} = \varepsilon_{cd,g}(\infty) - \varepsilon_{cd,d}(\infty) = (3,69 - 1,14) \cdot 10^{-4} = 2,55 \cdot 10^{-4}$$

Hipotetyczne ugięcie płyty bez uwzględnienia ciężaru własnego:

$$f_s = \frac{\Delta \varepsilon_{cd}}{h_c} \cdot \frac{L^2}{8} = \frac{2,55 \cdot 10^{-4}}{0,2} \cdot \frac{6^2}{8} = 5,74 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 5,7 \text{ mm} \quad (50)$$

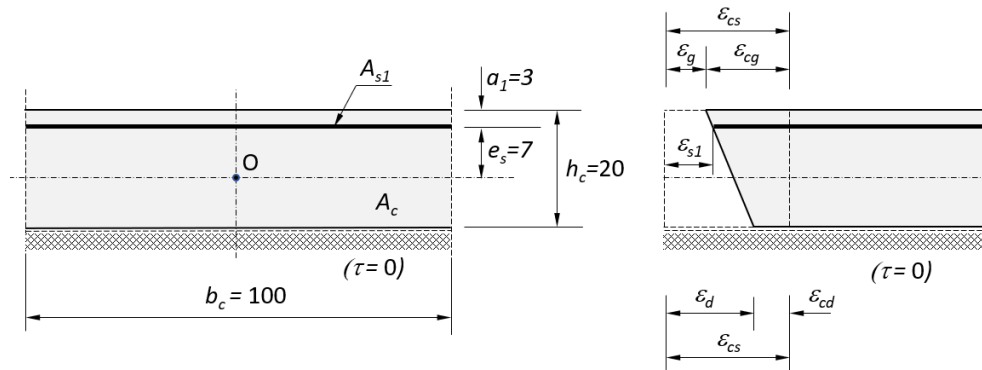
Ugięcie wywołane ciężarem własnym:

$$I_c = \frac{h_c^3 b}{12} = \frac{0,2^3 \cdot 1,0}{12} = 6,67 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4 \quad (51)$$
$$f_g = \frac{1}{8} \cdot \frac{g \cdot \left(\frac{L}{2}\right)^4}{E_{cm} I_c} = \frac{1}{8} \cdot \frac{(0,2 \cdot 24) \cdot 3^4}{31000000 \cdot 6,67 \cdot 10^{-4}} = 2,4 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 2,4 \text{ mm}$$

Rzeczywiste ugięcie płyty (podniesienie narożników) wynosi:

$$w_{max} = f_s - f_r = 4,9 - 2,4 = 2,5 \text{ mm} \quad (52)$$

## Przykład P2 – posadzka żelbetowa na gruncie



Rys. 18. Przekrój obliczeniowy

### Dane geometryczne:

Szerokość  $b = 1,0$  m; grubość  $h_c = 0,2$  m, rozstaw szczelin dylatacyjnych,  $L = 6,0$  m, zbrojenie siatką prętów  $\phi 12$  w rozstawie co 100 mm w obu kierunkach. Pole przekroju zbrojenia w jednym kierunku, dla pasma obliczeniowego o szeroko  $b$ :  $A_{s1}(\phi 12/100) = 11,31$   $\text{cm}^2/\text{m}$ , promień otulenia prętów  $a_l = 3,0$  cm, mimośród zbrojenia względem środka grubości płyty  $e_s = 7,0$  cm.

### Dane materiałowe:

Beton klasy C25/30  $f_{ck} = 25$  MPa,  $f_{cm} = 33$  MPa,  $f_{ctm} = 2,6$  MPa,  $E_{cm} = 31$  GPa  
 Stal klasy AIII-N  $f_{yk} = 500$  MPa,  $E_s = 200$  GPa,

**Warunki środowiskowe:** wilgotność otoczenia RH=60%

### Więzy:

- wewnętrzne: zbrojenie w górnej części przekroju,
- zewnętrzne: brak (brak tarcia na dolnej powierzchni płyty  $\tau=0$  MPa). Płyta posadzki ułożona na warstwie poslizgowej np. 2x folia PE, gr. 0,5 mm.

Pole przekroju betonu:

$$A_c = 1,0 \times 0,2 = 0,2 \text{ m}^2,$$

Objętość betonu:

$$V_c = 1,0 \times 0,2 \times 6,0 = 1,2 \text{ m}^3,$$

Pole powierzchni poddanej wysychaniu:

$$A_{out} = 1,0 \times 6,0 = 6,0 \text{ m}^2,$$

Miarodajny wymiar przekroju (29):

$$h_0 = 400 \text{ mm}$$

Moduł powierzchniowy elementu (30):

$$m = 5 \text{ m}^{-1},$$

Sumaryczny skurcz swobodny betonu:

$$\varepsilon_{cs} = 3,69 \cdot 10^{-4},$$

Z uwagi na obecność wkładek zbrojenia (więzów wewnętrznych) ograniczających odkształcenia swobodne płyty  $\varepsilon_{cs}$ , w betonie oraz prętach zbrojenia powstaną dodatkowe naprężenia.

Współczynnik  $\alpha_e$  (12):

$$\alpha_e = \frac{E_s}{E_{cm}} = \frac{200}{31} = 6,45$$

Całkowity stopień zbrojenia płyty (13):

$$\rho_s = \frac{A_{s1}}{A_r} = \frac{11,31}{2000} = 0,00566 = 0,56 \text{ ‰} \quad (53)$$

Odształcenie elementu żelbetowego, bez uwzględnienia relaksacji betonu z uwagi na pełzanie (14):

$$\varepsilon_{cs}^{RC} = \frac{\varepsilon_{cs}}{1 + \alpha_e \cdot \rho_s} = \frac{0,000369}{1 + 6,45 \cdot 0,00566} = 0,000356 = 3,56 \cdot 10^{-4} \quad (54)$$

Odształcenia i naprężenia wywołane więzami wewnętrznymi:  $\sigma_c^I, \sigma_s^I$   
Współczynniki pomocnicze uwzględniające mimośród zbrojenia:

$$\eta = 1 + 12 \left( \frac{e_s}{h_c} \right)^2 = 1 + 12 \left( \frac{0,07}{0,2} \right)^2 = 2,47 \quad (55)$$

$$\alpha' = \frac{\alpha_e \cdot \rho_s \cdot \eta}{1 + \alpha_e \cdot \rho_s \cdot \eta} = \frac{6,45 \cdot 0,00566 \cdot 2,47}{1 + 6,45 \cdot 0,00566 \cdot 2,47} = 0,083 \quad (56)$$

Współczynnik relaksacji naprężeń skurczowych  $k$  (19):

$$k = \frac{1}{1 + \beta \cdot \alpha' \cdot \varphi_p(\infty, t)} = \frac{1}{1 + 0,8 \cdot 0,083 \cdot 2,4} = 0,86 \quad (57)$$

Odształcenia płyty żelbetowej mimośrodowo zbrojonej na jej górnej i dolej krawędzi (58a) (58b):

$$\varepsilon_{cg} = \frac{\alpha'}{\eta} \left( 1 + \frac{6e_s}{h_c} \right) \varepsilon_{cs} = \frac{0,083}{2,47} \left( 1 + \frac{6 \cdot 0,07}{0,2} \right) \cdot 0,000369 = 0,0000384 = 3,84 \cdot 10^{-5}$$

$$\varepsilon_{cd} = \frac{\alpha'}{\eta} \left( 1 - \frac{6e_s}{h_c} \right) \varepsilon_{cs} = \frac{0,083}{2,47} \left( 1 - \frac{6 \cdot 0,07}{0,2} \right) \cdot 0,000369 = -0,0000136 = -1,36 \cdot 10^{-5}$$

Wykorzystując założenie płaskich przekrojów, do wyznaczenia odkształceń w stali ( $\varepsilon_s$ ) skorzystamy z proporcji:

$$\frac{\varepsilon_{cg} + \varepsilon_{cd}}{h_c} = \frac{\varepsilon_s + \varepsilon_{cd}}{h_c - a_1} \rightarrow \varepsilon_s = \left( 1 - \frac{a_1}{h_c} \right) (\varepsilon_{cg} + \varepsilon_{cd}) - \varepsilon_{cd} \quad (59)$$

$$\varepsilon_s = \left( 1 - \frac{0,03}{0,2} \right) (0,0000384 + 0,0000136) - 0,0000136 = 0,0000306$$

$$= 3,06 \cdot 10^{-5}$$

Naprężenia w betonie wynoszą:

- na górnej krawędzi:

$$\sigma_{cg}^I = \varepsilon_{cg} \cdot E_{cm} \cdot k = 0,0000384 \cdot 31000 \cdot 0,86 = 1,02 \text{ MPa} \quad (60)$$

- na dolnej krawędzi:

$$\sigma_{cd}^I = \varepsilon_{cd} \cdot E_{cm} \cdot k = -0,0000136 \cdot 31000 \cdot 0,86 = -0,36 \text{ MPa} \quad (61)$$

Naprężenia w stali:

$$\sigma_s^I = -\varepsilon_s \cdot E_s \cdot k = 0,0000306 \cdot 200000 \cdot 0,86 = -52,63 \text{ MPa} \quad (62)$$



Odształcenia i naprężenia wywołane więzami zewnętrznymi:  $\sigma_c^II, \sigma_s^II$

Brak więzów zewnętrznych (możliwość poślizgu płyty na podłożu) nie powoduje powstania w płycie dodatkowych naprężeń.

$$\sigma_c^II = 0 \text{ MPa}$$

$$\sigma_s^II = 0 \text{ MPa}$$

Sumaryczne naprężenia w przekroju płyty  $\sigma_c, \sigma_s$  wynoszą:

- w betonie na górnej krawędzi płyty (rozciąganie):

$$\sigma_{cg} = \sigma_{cg}^I + \sigma_c^II = 1,02 + 0 = 1,02 \text{ MPa} \leq f_{ctm} = 2,6 \text{ MPa},$$

- w betonie na dolnej krawędzi płyty (ściskanie):

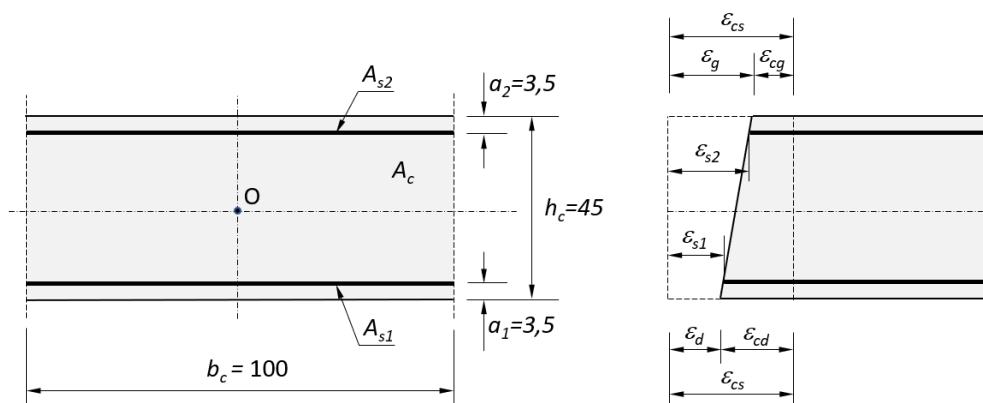
$$\sigma_{cd} = \sigma_{cd}^I + \sigma_c^II = -0,36 + 0 = -0,36 \text{ MPa} \leq f_{ck} = 25 \text{ MPa},$$

- w stali (ściskanie):

$$\sigma_s = \sigma_s^I + \sigma_s^II = -52,63 + 0 = -52,63 \text{ MPa} \leq f_{yk} = 500 \text{ MPa}.$$

Zastosowana ilość zbrojenia jest wystarczająca do przeniesienia przez beton naprężeń rozciągających. Na górnej krawędzi płyty nie powinno nastąpić zarysowanie betonu wywołane skurczem.

### Przykład P3 – żelbetowa płyta stropowa, symetrycznie zbrojona



Rys. 19. Przekrój obliczeniowy

#### Dane geometryczne:

Szerokość pasma obliczeniowego płyty  $b = 1,0$  m, grubość  $h_c = 0,45$  m, rozpiętość w świetle ścian  $L = 6,0$  m. Płyta zbrojona dołem i górną siatką prętów  $\phi 12$  w rozstawie co 200 mm w obu prostopadłych kierunkach. Pole przekroju zbrojenia dolnego:  $A_{s1}(\phi 12/200) = 5,655$  cm<sup>2</sup>/m, zbrojenia górnego  $A_{s2}(\phi 12/200) = 5,655$  cm<sup>2</sup>/m. Promień otulenia prętów zbrojenia (dolnego i górnego) wynosi  $a_1 = a_2 = 3,5$  cm. Wypadkowy mimośród zbrojenia wynosi  $e_s = 0,0$  cm (zbrojenie symetryczne).

#### Dane materiałowe:

Beton klasy C35/45

$f_{ck} = 35$  MPa,  $f_{cm} = 43$  MPa,  $f_{ctm} = 3,2$  MPa,  $E_{cm} = 34$  GPa

Stal klasy AIII-N

$f_{yk} = 500$  MPa,  $E_s = 200$  GPa,

#### Warunki środowiskowe:

Wilgotność otoczenia:

RH=60%

Dopuszczalna szerokość rysy:

$w_c = 0,3$  mm

Zredukowane naprężenia w stali:

$\sigma_{s,lim}(w_c=0,3$  mm;  $\phi 12) = 280$  MPa

#### Więzy:

- wewnętrzne: wkładki zbrojenia (płyta zbrojona symetrycznie górną i dolną),
- zewnętrzne: brak, płyta wolnopodparta na podporach.

#### Parametry mieszanki betonowej:

- Beton zwykły klasy C35/45
- rozwój wytrzymałości: umiarkowany,
- cement CEM II A-V 42,5 R:  $C = 360$  kg/m<sup>3</sup>,
- stosunek W/S = 0.43,
- gęstość objętościowa mieszanki: 2375 kg/m<sup>3</sup>,
- ciepło właściwe betonu  $c = 0,96$  kJ/(kg·K),
- całkowite ciepło hydratacji cementu:  $Q_{oo} = 300$  kJ/kg.

Pole przekroju betonu:  $A_c = 1,0 \times 0,45 = 0,45 \text{ m}^2$ ,  
 Objętość betonu:  $V_c = 1,0 \times 0,45 \times 6,0 = 2,7 \text{ m}^3$ ,  
 Pole powierzchni poddanej wysychaniu:  $A_{out} = 2 \times 1,0 \times 6,0 = 12,0 \text{ m}^2$ ,  
 Miarodajny wymiar przekroju (46):

$$h_0 = \frac{2V_c}{A_{out}} = \frac{2 \cdot 2,7}{12} = 0,45 \text{ m} = 450 \text{ mm}$$

Moduł powierzchniowy elementu (47):

$$m = \frac{A_{out}}{V_c} = \frac{12}{2,7} = 4,44 \text{ m}^{-1}$$

Płyta jest elementem średnio masywnym. Wartości współczynników:  $k_h(h_0)$  wyznaczono ze wzoru (3) a  $\beta_{RH}$  ze wzoru (4).

$$k_h(h_0) = 0,71$$

$$\beta_{RH} = 1,55 \left[ 1 - \left( \frac{RH}{100} \right)^3 \right] = 1,55 \left[ 1 - \left( \frac{60}{100} \right)^3 \right] = 1,22$$

Ze wzoru (5) obliczono nominalne odkształcenie wywołane skurczem  $\varepsilon_{cd,0}$  od wysychania, a z (7) jego wartość końcową:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{cd,0} &= 0,85(220 + 110 \alpha_{ds1}) \cdot \exp\left(-\alpha_{ds2} \frac{f_{cm}}{f_{cm0}}\right) \cdot \beta_{RH} \cdot 10^{-6} = \\ &= 0,85(220 + 110 \cdot 6) \cdot \exp\left(-0,11 \frac{43}{10}\right) 1,22 \cdot 10^{-6} = 5,69 \cdot 10^{-4} \\ \varepsilon_{cd}(\infty) &= k_h(h_0) \cdot \varepsilon_{cd,0} = 0,71 \cdot 5,69 \cdot 10^{-4} = 4,04 \cdot 10^{-4} \end{aligned}$$

Odkształcenie skurczem autogenicznym obliczono ze wzoru (9):

$$\varepsilon_{ca}(\infty) = 2,5(f_{ck} - 10) \cdot 10^{-6} = 2,5(35 - 10) \cdot 10^{-6} = 6,25 \cdot 10^{-5}$$

Sumaryczna wartość odkształcenia wywołanego skurczem betonu:

$$\varepsilon_{cs} = \varepsilon_{cd} + \varepsilon_{ca} = 4,04 \cdot 10^{-4} + 6,25 \cdot 10^{-5} = 4,67 \cdot 10^{-4}$$

Z uwagi na obecność więzów wewnętrznych (wkładki zbrojenia) ograniczających odkształcenia swobodne płyty, w betonie oraz prętach zbrojenia powstaną dodatkowe naprężenia wywołane skurczem.

Współczynnik  $\alpha_e$  (12):

$$\alpha_e = \frac{E_s}{E_{cm}} = \frac{200}{34} = 5,88$$

Całkowity stopień zbrojenia płyty (13):

$$\rho_s = \frac{A_{s1} + A_{s2}}{A_c} = \frac{5,655 + 5,665}{4500} = 0,00251 = 0,25 \text{ ‰}$$



Odształcenie elementu żelbetowego, bez uwzględnienia relaksacji betonu z uwagi na pełzanie (14):

$$\varepsilon_{cs}^{RC} = \frac{\varepsilon_{cs}}{1 + \alpha_\varepsilon \cdot \rho_s} = \frac{0,000467}{1 + 5,88 \cdot 0,00251} = 0,00046 = 4,6 \cdot 10^{-4}$$

Odształcenia i naprężenia wywołane więzami wewnętrznymi:  $\sigma_c^I, \sigma_s^I$   
Przekrój prostokątny zbrojony górną i dolną (symetrycznie):

$$\varepsilon_{cd} = \varepsilon_{cg} = \varepsilon_{cd}^{RC}$$

Współczynniki pomocnicze (56) i (19):

$$\alpha' = \frac{\alpha_\varepsilon \cdot \rho_s}{1 + \alpha_\varepsilon \cdot \rho_s} = \frac{5,88 \cdot 0,00251}{1 + 5,88 \cdot 0,00251} = 0,015$$

$$k = \frac{1}{1 + \beta \cdot \alpha' \cdot \varphi_p(\infty, t)} = \frac{1}{1 + 0,8 \cdot 0,015 \cdot 2,4} = 0,97$$

Naprężenia w betonie:

$$\sigma_c^I = \varepsilon_{cs} \cdot E_{cm} \cdot \alpha' \cdot k = 0,000467 \cdot 34000 \cdot 0,015 \cdot 0,97 = 0,231 \text{ MPa}$$

Naprężenia w stali:

$$\sigma_s^I = -\varepsilon_{cs} \cdot E_s \cdot (1 - \alpha') \cdot k = -0,000467 \cdot 200000 \cdot (1 - 0,015) \cdot 0,97 = -89,239 \text{ MPa}$$

Odształcenia i naprężenia wywołane więzami zewnętrznymi:  $\sigma_c^{II}, \sigma_s^{II}$

Brak więzów zewnętrznych (płyta wolnopodparta) nie powoduje powstania w płycie dodatkowych naprężeń.

$$\sigma_c^{II} = 0 \text{ MPa}$$

$$\sigma_s^{II} = 0 \text{ MPa}$$

Sumaryczne naprężenia w przekroju płyty  $\sigma_c, \sigma_s$  wynoszą:

- w betonie (rozciąganie) :

$$\sigma_{cg} = \sigma_c^I + \sigma_c^{II} = 0,231 + 0 = 0,23 \text{ MPa} \leq f_{ctm} = 2,6 \text{ MPa},$$

- w stali (ściskanie) :

$$\sigma_s = \sigma_s^I + \sigma_s^{II} = -89,2 + 0 = -89,2 \text{ MPa} \leq f_{yk} = 500 \text{ MPa}.$$

Zastosowana ilość zbrojenia jest wystarczająca do przeniesienia przez beton naprężeń rozciągających wywołanych skurczem. Na górnej krawędzi płyty nie powinno nastąpić zarysowanie wywołane skurczem.

Z uwagi na planowany okres betonowania płyty w okresie letnim, w okresie podwyższonych temperatur powietrza ( $> 25 \text{ }^\circ\text{C}$ ) sprawdzono możliwość zarysowania płyty wywołanych działaniem naprężeń termicznych.

Odształcenia i naprężenia wywołane ciepłem hydratacji cementu, w okresie tzw. szoku termicznego:  $\sigma_c^{III}, \sigma_s^{III}$

Maksymalnej temperatury twardniejącego betonu w analizowanej płycie stropowej spodziewamy się w początkowym okresie twardnienia młodego betonu, tzn. orientacyjnie w okresie pierwszych 24÷72 godzin od zabetonowania. W tym okresie wytrzymałość betonu jest niewielka i rośnie z upływem czasu. Do oszacowania wartości naprężeń rozciągających wywołanych ciepłem hydratacji cementu przyjęto parametry betonu w terminie 3 dni





twardnienia ( $t_s=3$  dni), gdy spodziewamy się maksymalnej temperatury elementu w wyniku samoociepnięcia. Założono brak pielęgnacji wilgotnościowej elementu po jego zabetonowaniu.

Odkształcenia betonu wywołane jednorodnym polem temperatury  $\varepsilon_c(\Delta T)$  i  $\varepsilon^{RC}(\Delta T)$ :

Wzrost temperatury twardniejącego betonu w warunkach adyabatycznych, bez wymiany ciepła z otoczeniem wynosi (21):

$$\Delta T^{adiab} = \frac{C \cdot Q_h}{c_b \cdot \gamma_b} = \frac{360 \cdot 0,8 \cdot 500}{0,96 \cdot 2375} = 63,2 \text{ } ^\circ K \quad (50)$$

Zastosowano cement klasy R o szybkim przyroście wytrzymałości, któremu towarzyszy intensywne wydzielanie ciepła w procesie hydratacji cementu. Przyjęto, że w początkowym okresie twardnienia wydzieli się około 80% ciepła, stąd we wzorze (51) dokonano redukcji całkowitego ciepła hydratacji  $Q_h$  o wartość 0,8.

Dla przyjętych założeń średni przyrost temperatury płyty w środku grubości wyniesie:

$$\Delta t^{sr} \approx 0,8 \cdot T^{adiab} = 0,8 \cdot 63,2 \approx 50 \text{ } ^\circ C \quad (51)$$

Średnia temperatura elementu, przy założeniu temperatury mieszanki dostarczonej na budowę  $8^\circ C$ , ( $T_{bo}$ ) wynosi:

$$T_{sr} = T_{bo} + \Delta t^{sr} = 8 + 50 = 58 \text{ } ^\circ C \quad (52)$$

Odkształcenia swobodne betonu wywołane jednorodnym polem temperatury możemy wyznaczyć ze wzoru (22):

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon_T &= \alpha_T \cdot \Delta t^{sr} = 0,000012 \cdot 50 = 0,0006 = 6 \cdot 10^{-4} \\ \varepsilon_c(\Delta T) &= \Delta \varepsilon_T = 6 \cdot 10^{-4} \end{aligned}$$

Odkształcenia betonu zbrojonego wkładkami zbrojenia, możemy wyznaczyć ze wzoru (16):

$$\varepsilon_c^{RC}(\Delta T) = \frac{\varepsilon_c(\Delta T)}{1 + \alpha_\varepsilon \cdot \rho_s} = \frac{0,0006}{1 + 5,88 \cdot 0,00251} = 0,000591 = 5,91 \cdot 10^{-4}$$

Z uwagi na fakt, że szok termiczny betonu występuje w początkowym okresie twardnienia (dojrzwiania młodego betonu), konieczne jest oszacowanie jego parametrów wytrzymałościowych w początkowym okresie. Do tego celu wykorzystamy zalecenia normy EC, korygując parametry 28 dniowe stosując odpowiednie współczynniki przeliczeniowe. Stosując zapisy normy [N1], oszacowano wczesne (3 dniowe) wartości wytrzymałości i moduł sprężystości młodego betonu. Wytrzymałość betonu oszacowano stosując współczynnik korygujący  $\beta_{cc}(t)$  (25):

$$\beta_{cc}(t=3) = \exp \left[ s \left( 1 - \sqrt{\frac{28}{t}} \right) \right] = \exp \left[ 0,2 \left( 1 - \sqrt{\frac{28}{3}} \right) \right] = 0,663$$

Szacunkowa charakterystyczna wytrzymałość walcowa betonu na ściskanie po upływie 3 dniach wg (27) wynosi:

$$f_{ck}(3) = \beta_{cc}(3) \cdot f_{ck} = 0,663 \cdot 35 = 23,2 \text{ } MPa$$

Szacunkowa średnia wytrzymałość betonu na ściskanie wg (23):

$$f_{cm}(3) = \beta_{cc}(3) \cdot f_{cm} = 0,663 \cdot 43 = 28,5 \text{ } MPa$$

Szacunkowa średnia wytrzymałość betonu na rozciąganie:

$$f_{ctk0,05}(3) = 0,7f_{ctm}(3) = 0,7 \cdot 2,44 = 1,7 \text{ MPa} \quad (50)$$

Szacunkowy moduł sprężystości betonu po upływie 3 dni wg (28):

$$E_{cm}(3) = \left( \frac{f_{cm}(3)}{f_{cm}(28)} \right)^{0,3} \cdot E_{cm}(28) = \left( \frac{28,5}{43} \right)^{0,3} \cdot 34 = 30 \text{ GPa}$$

Współczynniki pomocnicze:

$$\begin{aligned} \alpha_\varepsilon(3) &= \frac{E_s}{E_{cm}(3)} = \frac{200}{30} = 6,67 \\ a'(3) &= \frac{\alpha_\varepsilon(3) \cdot \rho_s}{1 + \alpha_\varepsilon(3) \cdot \rho_s} = \frac{6,67 \cdot 0,00251}{1 + 6,67 \cdot 0,00251} = 0,016 \\ k(3) &= \frac{1}{1 + \beta \cdot a'(3)} = \frac{1}{1 + 1,0 \cdot 0,016} = 0,98 \end{aligned}$$

Płyta w przekroju zbrojona jest symetrycznie, górną i dołem, stąd odkształcenia wywołane więzami wewnętrznymi, na górnej i dolnej krawędzi będą identyczne:  $\varepsilon_{cd} = \varepsilon_{cg} = \varepsilon_{cd}^{RC}(\Delta T)$ . Naprężenia w przekroju wywołane jednorodnym polem temperatury możemy obliczyć ze wzorów:

Naprężenia w betonie:

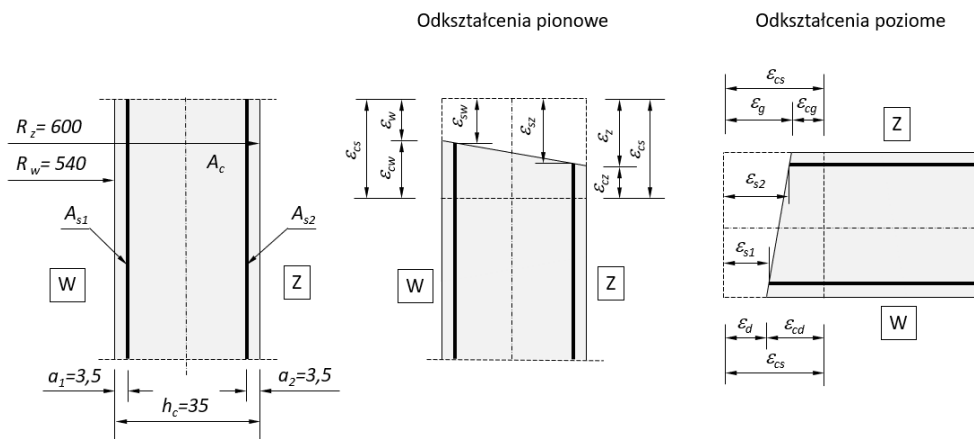
$$\begin{aligned} \sigma_c^{III} &= \varepsilon_c(\Delta T) \cdot E_{cm}(3) \cdot a'(3) \cdot k(3) = 0,0006 \cdot 30000 \cdot 0,016 \cdot 0,98 = 0,282 \text{ MPa} \\ \sigma_c^{III} &= 0,282 \text{ MPa} \leq f_{ctk0,05}(3) = 1,7 \text{ MPa} \end{aligned}$$

Naprężenia w stali:

$$\begin{aligned} \sigma_s^{III} &= -\varepsilon_c(\Delta T) \cdot E_s \cdot (1 - a'(3)) \cdot k(3) = -0,0006 \cdot 200000 \cdot (1 - 0,016) \cdot 0,98 \\ &= -115,7 \text{ MPa} \\ \sigma_s^{III} &= -115,7 \text{ MPa} \leq \sigma_{s,lim}(0,3; \emptyset 12) = 280 \text{ MPa} \end{aligned}$$

Jak wykazano w przypadku właściwej pielęgnacji, tzn. gdy nie dopuści się aby na grubości przekroju wystąpił gradient temperatury oraz przy równomiernym wysychaniu betonu, w płycie nie powinny powstać zarysowania na jej dolnej i górnej powierzchni a naprężenia rozciągające w betonie wywołane samoociepleniem elementu nie przekroczą wytrzymałości wczesnej na rozciąganie, naprężenia w stali natomiast będą mniejsze od naprężeń dopuszczalnych  $\sigma_{s,lim}$ .

## Przykład P4 – żelbetowa ściana zbiornika, naprężenia termiczno-skurczowe



Rys. 20. Przekrój obliczeniowy

### Dane geometryczne:

Zbiornik zewnętrzny, okrągły, otwarty. Grubość ściany  $b=35$  cm, wysokość  $H=3,5$  m, średnica zbiornika  $D=12$  m, obwód  $L=37,7$  m, wysokość lustra wody  $h_w=3,0$  m. Ściana i dno wykonane z betonu C35/45. Ściany zbrojone ortogonalnie siatką prętów  $\phi 16/\phi 12$ , w dwóch warstwach w rozstawie między prętami co 200 mm w obu kierunkach. Pole przekroju zbrojenia poziomego:  $A_{s\_poz}(\phi 16/200) = 10,05$  cm<sup>2</sup>/m, zbrojenia pionowego  $A_{s\_pion}(\phi 12/200) = 5,655$  cm<sup>2</sup>/m. Zbrojenie poziome w ścianach poza naprężeniami wywołanymi parciem wody powinno również przenieść naprężenia termiczno-skurczowe powstające w miejscu styku ściany z płytą fundamentową. Promień otulenia prętów zbrojenia (poziomego) wynosi  $a_1 = a_2 = 35$  mm. Wypadkowy mimośród zbrojenia wynosi  $e_s = 0,0$  cm (zbrojenie symetryczne).

### Dane materiałowe:

Beton klasy C35/45

$$f_{ck} = 35 \text{ MPa}, f_{cm} = 43 \text{ MPa}, f_{ctm} = 3,2 \text{ MPa}, E_{cm} = 34 \text{ GPa}$$

Stal klasy AIII-N

$$f_{yk} = 500 \text{ MPa}, E_s = 200 \text{ GPa}$$

### Warunki środowiskowe:

Wilgotność otoczenia:

$$RH = 60\%$$

Dopuszczalna szerokość rysy:

$$w_c = 0,2 \text{ mm}$$

Zredukowane naprężenia w stali:

$$\sigma_{s,lim}(w_c=0,2 \text{ mm}; \phi 16) = 200 \text{ MPa}$$

Pole przekroju betonu:

$$A_c = 1,0 \times 0,35 = 0,35 \text{ m}^2$$

Objętość betonu:

$$V_c = 1,0 \times \pi(6,0^2 - 5,65^2) = 12,81 \text{ m}^3$$

Pole powierzchni poddanej wysychaniu:

$$A_{out} = 1,0 \times 2\pi \times (5,65 + 6,0) = 73,20 \text{ m}^2$$

Miarodajny wymiar przekroju (46):

$$h_0 = \frac{2V_c}{A_{out}} = \frac{2 \cdot 12,81}{73,2} = 0,35 \text{ m} = 350 \text{ mm}$$

Moduł powierzchniowy elementu (47):

$$m = \frac{A_{out}}{V_c} = \frac{73,2}{12,81} = 5,71 \text{ m}^{-1}$$

Ściana jest elementem średnio masywnym. Wartości współczynników:  $k_h(h_0)$  wyznaczono ze wzoru (3) a  $\beta_{RH}$  ze wzoru (4).

$$k_h(h_0) = 0,73$$

$$\beta_{RH} = 1,55 \left[ 1 - \left( \frac{RH}{100} \right)^3 \right] = 1,55 \left[ 1 - \left( \frac{60}{100} \right)^3 \right] = 1,22$$

Ze wzoru (5) obliczono nominalne odkształcenie wywołane skurczem  $\varepsilon_{cd,0}$  od wysychania, a z (7) jego wartość końcową:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{cd,0} &= 0,85(220 + 110 \alpha_{ds1}) \cdot \exp\left(-\alpha_{ds2} \frac{f_{cm}}{f_{cm0}}\right) \cdot \beta_{RH} \cdot 10^{-6} = \\ &= 0,85(220 + 110 \cdot 6) \cdot \exp\left(-0,11 \frac{43}{10}\right) 1,22 \cdot 10^{-6} = 5,69 \cdot 10^{-4} \\ \varepsilon_{cd}(\infty) &= k_h(h_0) \cdot \varepsilon_{cd,0} = 0,73 \cdot 5,69 \cdot 10^{-4} = 4,15 \cdot 10^{-4} \end{aligned}$$

Odształcenie skurczem autogenicznym obliczono ze wzoru (9):

$$\varepsilon_{ca}(\infty) = 2,5(f_{ck} - 10) \cdot 10^{-6} = 2,5(35 - 10) \cdot 10^{-6} = 6,25 \cdot 10^{-5}$$

Sumaryczna wartość odkształcenia wywołanego skurczem betonu:

$$\varepsilon_{cs} = \varepsilon_{cd} + \varepsilon_{ca} = 4,15 \cdot 10^{-4} + 6,25 \cdot 10^{-5} = 4,78 \cdot 10^{-4}$$

Z uwagi na obecność więzów wewnętrznych (wkładki zbrojenia) ograniczających odkształcenia swobodne ściany, w betonie oraz prętach zbrojenia powstaną dodatkowe naprężenia wywołane skurczem.

Współczynnik  $\alpha_e$  (12):

$$\alpha_e = \frac{E_s}{E_{cm}} = \frac{200}{34} = 5,88$$

Całkowity stopień zbrojenia poziomego w ścianie (13):

$$\rho_s = \frac{A_{s1} + A_{s2}}{A_c} = \frac{10,05 + 10,05}{3500} = 0,00574 = 0,57 \text{ ‰}$$

Odształcenie ściany zbiornika, bez uwzględnienia relaksacji betonu z uwagi na pełzanie (14):

$$\varepsilon_{cs}^{RC} = \frac{\varepsilon_{cs}}{1 + \alpha_e \cdot \rho_s} = \frac{0,000478}{1 + 5,88 \cdot 0,0057} = 0,000462 = 4,62 \cdot 10^{-4}$$

Naprężenia wywołane więzami wewnętrznymi:  $\sigma_c^I, \sigma_s^I$

Przekrój prostokątny zbrojony górną i dolną (symetrycznie).  $\varepsilon_{cd} = \varepsilon_{cg} = \varepsilon_{cd}^{RC}$

$$\begin{aligned} \alpha_e &= \frac{E_s}{E_{cm}} = \frac{200}{34} = 5,88 \\ a' &= \frac{\alpha_e \cdot \rho_s}{1 + \alpha_e \cdot \rho_s} = \frac{5,88 \cdot 0,0057}{1 + 5,88 \cdot 0,0057} = 0,032 \end{aligned}$$



$$k = \frac{1}{1 + \beta \cdot \alpha' \cdot \varphi_p(\infty, t)} = \frac{1}{1 + 0,8 \cdot 0,032 \cdot 2,4} = 0,94$$

Napężenia w betonie:

$$\sigma_c^I = \varepsilon_{cs} \cdot E_{cm} \cdot \alpha' \cdot k = 0,000462 \cdot 34000 \cdot 0,032 \cdot 0,94 = 0,472 \text{ MPa}$$

Napężenia w stali:

$$\sigma_s^I = -\varepsilon_{cs} \cdot E_s \cdot (1 - \alpha') \cdot k = -0,000462 \cdot 200000 \cdot (1 - 0,032) \cdot 0,94 = -84,077 \text{ MPa}$$

Napężenia wywołane więzami zewnętrznymi:  $\sigma_c^{II}, \sigma_s^{II}$

Długa ściana utwierdzona na dolnej krawędzi. Warunki skrępowania przyjęto na podstawie normy PN-EN 1992-3 (Tabl. L1, przypadek a):

$$\frac{L}{H} = \frac{37,7}{3,5} = 10,8$$

Wskaźniki oporów:

- na dolnej krawędzi:  $R_{ax,d}(L/H=10,8) = 0,5$
- w strefie górnej:  $R_{ax,g}(L/H=10,8) = 0,5$

Minimalna wartość średnich naprężeń przyczepności wg Mörscha wynosi:

$$\bar{\tau}_p = 0,5 \sqrt{f_{cm} \cdot f_{ctm}} = 0,5 \sqrt{43 \cdot 3,2} = 5,87 \text{ MPa}$$

Wysokość strefy zarysowania ściany  $h_{cr}$ , przy założeniu równomiernego rozkładu naprężeń przyczepności  $\bar{\tau}_p$  w przekroju,:

$$h_{cr} = \frac{H}{6} \left( 4 - \frac{f_{ctm}}{\bar{\tau}_p \cdot \Delta \varepsilon_{cs} \cdot E_{cm}} \right)$$

$$h_{cr} = \frac{3,5}{6} \left( 4 - \frac{3,2}{5,87 \cdot 4,62 \cdot 10^{-4} \cdot 34000} \right) = 2,31 \text{ m}$$

Średni rozstaw rys w ścianie zbiornika utwierdzonej w płycie fundamentowej:

$$s_{r,max} \cong 1,3H = 1,3 \cdot 3,5 = 4,55 \text{ m}$$

Szerokość rys w ścianie zbiornika:

$$(\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm}) = R_{ax} \cdot \varepsilon_{free}$$

$$R_{ax} \cdot \varepsilon_{free} = 0,5 \cdot 0,000462 = 0,000231 = 2,31 \cdot 10^{-4}$$

Napężenia w betonie

- przy dolnej krawędzi ściany (w styku z płytą fundamentową):

$$\sigma_{cs,d}^{II} = (1 + \alpha_e \cdot \rho_s) \cdot \varepsilon_{cs}^{RC} \cdot E_{cm} \cdot k = (1 + 5,88 \cdot 0,0057) \cdot 0,000462 \cdot 34000 \cdot 0,94$$

$$= 15,26 \text{ MPa}$$

- przy górnej krawędzi ściany:

$$\sigma_{cs,g}^{II} = 0,00 \text{ MPa}$$

Napężenia w stali:

- przy dolnej krawędzi ściany (w styku z płytą fundamentową):

$$\sigma_s^{II,d} = \varepsilon_{cs} \cdot E_s \cdot (1 - \alpha') \cdot k = 0,000462 \cdot 200000 \cdot (1 - 0,032) \cdot 0,94 = 84,077 \text{ MPa}$$



- przy górnej krawędzi ściany:

$$\sigma_{s,q}^{II} = 0,00 \text{ MPa}$$

Sumaryczne wartości naprężeń w ścianie wywołane skurczem:

Naprężenia w betonie:

- przy dolnej krawędzi ściany:

$$\sigma_{c,d} = \sigma_{cs,d}^I + \sigma_{cs,d}^{II} = 0,472 + 15,26 = 15,732 \text{ MPa} \gg f_{ctk,0,05} = 2,2 \text{ MPa}$$

- przy górnej krawędzi ściany:

$$\sigma_{c,q} = \sigma_{cs,q}^I + \sigma_{cs,q}^{II} = 0,472 + 0,0 = 0,472 \text{ MPa} \leq f_{ctk,0,05} = 2,2 \text{ MPa}$$

Naprężenia w stali:

$$\sigma_s = \sigma_s^I + \sigma_s^{II} = -84,1 + 0 = -89,2 \text{ MPa} < f_{yk} = 500 \text{ MPa}$$

- przy dolnej krawędzi ściany:

$$\sigma_{s,d} = \sigma_{s,d}^I + \sigma_{s,d}^{II} = -84,1 + 84,1 = 0,0 \text{ MPa} \leq \sigma_{s,lim} = 200 \text{ MPa}$$

- przy górnej krawędzi ściany:

$$\sigma_{s,q} = \sigma_{s,q}^I + \sigma_{s,q}^{II} = -84,1 + 0,0 = -84,1 \text{ MPa} \leq \sigma_{s,lim} = 200 \text{ MPa}$$

Zastosowana ilość zbrojenia poziomego w dolnej części ściany zbiornika, przy dnie jest niewystarczająca do przeniesienia naprężeń rozciągających wywołanych skurczem. Na obwodzie zbiornika, na dolnej części ściany do wysokości  $h_{cr}=2,31$  pojawią się rysy o średnim rozstawie  $s_{r,max}=4,55$  m. Szacunkowa szerokość rys wynosiła będzie 0,23 mm.

Sprawdzenie wymaganej, minimalnej ilości zbrojenia poziomego w strefie przypowierzchniowej ściany.

Efektywna grubość strefy przypowierzchniowej:

$$h_{c,eff} = \min \left\{ \frac{2,5(h-d)}{h/2} \right\} = \min \left\{ \frac{2,5(0,35-0,32)}{0,35/2} \right\} = \min \left\{ \frac{0,075}{0,175} \right\} = 0,075 \text{ m}$$

Efektywne pole przekroju strefy rozciąganej betonu:

$$A_{c,eff} = A_{ct} = b \cdot h_{ct,eff} = 1,0 \cdot 0,075 = 0,075 \text{ m}^2$$

Średnia wytrzymałość betonu na rozciąganie, w chwili zarysowania  $t$ :

$$f_{ct,eff} = f_{ctm}(t) = 3,2 \text{ MPa}$$

Współczynniki:

$$k=1,0; k_c=1,0;$$

$$\sigma_{s,lim}(w_c=0,2; \phi 16) = 200 \text{ MPa}, \quad \sigma_{s,lim}(w_c=0,2; \phi 12) = 240 \text{ MPa}.$$

Minimalne wymagane pole przekroju zbrojenia poziomego, w strefie przypowierzchniowej z uwagi na skurcz:

$$A_{s,min} = k_c \cdot k \cdot f_{ct,eff} \cdot \frac{A_{ct}}{\sigma_{s,lim}} = 1,0 \cdot 1,0 \cdot 3200 \cdot \frac{0,075}{200000} = 0,0012 \text{ m}^2$$

Maksymalny rozstaw prętów zbrojenia poziomego ( $\phi 16$ ) z uwagi na zarysowanie wynosi 16,5 cm, podczas gdy zastosowano pręty w rozstawie co 20 cm.



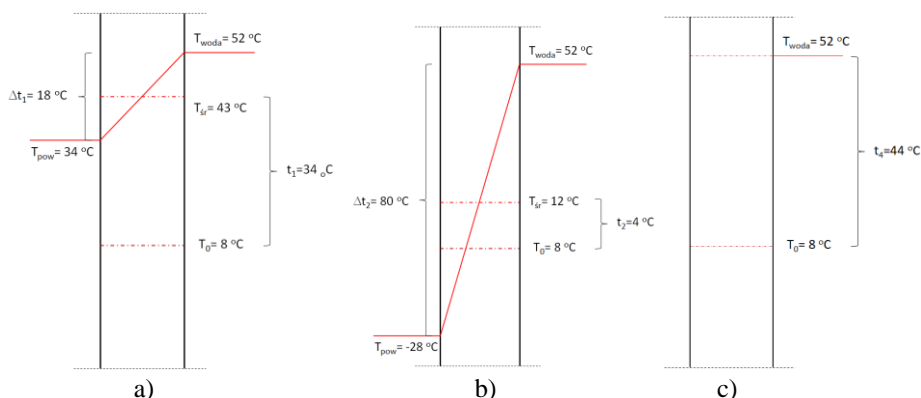
Minimalne wymagane pole przekroju zbrojenia pionowego, w strefie przypowierzchniowej z uwagi na skurcz:

$$A_{s,min} = k_c \cdot k \cdot f_{ct,eff} \cdot \frac{A_{ct}}{\sigma_{s,lim}} = 1,0 \cdot 1,0 \cdot 3200 \cdot \frac{0,075}{240000} = 0,0010 \text{ m}^2$$

Maksymalny rozstaw prętów zbrojenia pionowego ( $\phi 12$ ) z uwagi na zarysowanie wynosi 7,7 cm, podczas gdy zastosowano pręty w rozstawie co 20 cm.

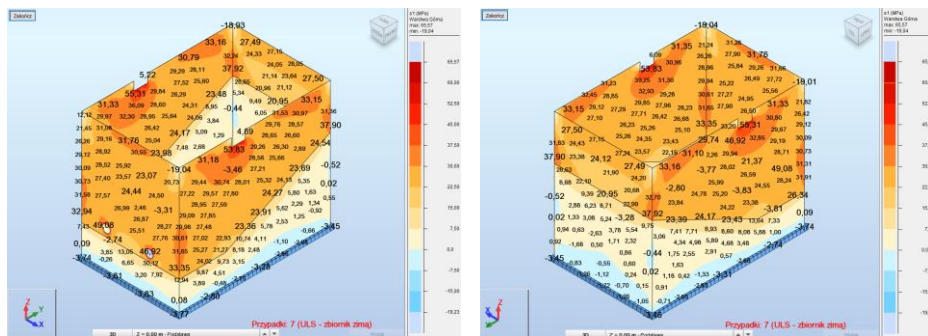
## Przykład P5 – monolityczny, żelbetowy zbiornik na ciepłą wodę technologiczną

Przedmiotem obliczeń jest otwarty, prostokątny, żelbetowy zbiornik na ciepłą wodę technologiczną, o wymiarach w rzucie  $20,7 \times 8,2$  m i wysokości 8,1 m. Grubość ścian wynosi 35 cm. Zbiornik wykonany został z betonu klasy C40/50, rozkład i ilość zbrojenia określona została na podstawie rysunków konstrukcyjnych. Grubość otulenia prętów, pomierzona została w trakcie wizji lokalnych na obiekcie, metodą elektromagnetyczną Ferroskanem PS200 firmy Hilti, średnia grubość otulenia wynosiła 7,0 cm (od 4,0 do 9,0 cm). Temperatura wody technologicznej w zbiorniku wynosiła  $52^\circ\text{C}$ , a wysokość lustra wody 7,55 m. Ściany zbiornika, krótko po jego włączeniu do użytkowania uległy intensywnemu zarysowaniu niemal na całej swojej powierzchni. Ściany rozszczelniły się i zaczęły przeciekać, pomimo pozytywnego wyniku przeprowadzonej próby wodnej. Próbę wodną wykonano z wodą wodociągową o średniej temperaturze  $\sim 8-10^\circ\text{C}$ , w okresie jesiennym. Pierwsze rysy wystąpiły i pogłębiały się w okresie zimowym, dlatego jako główną przyczynę awarii wskazano podwyższoną temperaturę magazynowej wody technologicznej i występujący gradient temperatury na grubości ścian. Na Rys. 21 pokazano trzy obliczeniowe przypadki rozkładu temperatury na grubości ścian. Obliczenia wykonano programem bazującym na Metodzie Elementów Skończonych (MES). Do obliczeń ustalone pole temperatury działające w przekroju ścian na podzielono na dwie składowe: jednorodne ogrzanie i gradient temperatury. Dla przyjętych założeń naprężenia na wszystkich powierzchniach ścian. Przykładowy rozkład naprężeń rozciągających na zewnętrznych powierzchniach ścian zbiornika pokazano na Rys. 22, odcieniem koloru czerwonym oznaczono naprężenia rozciągające powodujące zarysowanie ( $\sigma_c \geq f_{ctm}$ ).



Rys. 21. Analizowane przypadki rozkładu temperatury na grubości ścian zbiornika:  
a) w okresie letnim, b) w okresie zimowym, oraz d) po remoncie polegającym na ociepleniu ścian izolacją termiczną





Rys. 22. Mapa naprężeń głównych  $\sigma_1$  na powierzchni ścian zewnętrznych

## 8. Podsumowanie

Skurcz i pęcznienie są zjawiskami mającymi istotny wpływ na wyężenie i trwałość konstrukcji żelbetonowych. Rysy w konstrukcjach żelbetonowych traktowane są jako zjawisko normalne, a rysy wywołane skurczem, które powstają w okresie budowy są często traktowane pobłażliwie. Po wykonaniu lokalnej naprawy, z reguły iniekcji ich wpływ na wyężenie konstrukcji nie jest szczegółowo analizowany, zaś ignorowany a temat traktuje się jako rozwiązany. Tymczasem niedoceniane wpływu zjawisk reologicznych, w szczególności skurczu na wyężenie zarysowanego elementu ma negatywny wpływ na trwałość a wielu przypadkach również na jest bezpieczeństwo całej konstrukcji, co potwierdzono w przedstawionych przykładach obliczeniowych oraz opisach rzeczywistych przypadków.

Autorzy zalecają aby już na etapie projektowania dokonać analizy wpływu zjawisk reologicznych na bezpieczeństwo i trwałość konstrukcji.

Dominujący wpływ na odkształcenia skurczowe betonu ma odparowanie wody w procesie wysychania, tzw. skurcz od wysychania oraz skurcz plastyczny, które zarazem są n najłatwiejsze do kontrolowania przez stosowanie odpowiednich zabiegów technologicznych, każdorazowo dostosowanych do lokalnych wymagań geometrycznych, atmosferycznych, technologicznych i wykonawczych. Skurcz autogeniczny ma mniejszy wpływ na końcową wartość odkształceń skurczowych, występuje zawsze i podobnie jak skurcz chemiczny jest trudniejszy do kontrolowania.

Zbrojenie elementu, lokalizacja, grubość otulenia, średnica prętów oraz klasa stali mają istotny wpływ na wartość odkształceń wywołanych skurczem. Odkształcenia skurczowe elementu betonowego będą większe (w przypadku brak więzów wewnętrznych i zewnętrznych równe swobodnym odkształceniom betonu  $\epsilon_{cs}$ ) w porównaniu do odkształceń elementu zbrojonego  $\epsilon_{cs}^{RC} \leq \epsilon_{cs}$ , dotyczy to również betonu zbrojonego zbrojeniem rozproszonym np. włóknami metalowymi, z tworzyw sztucznych, szkła lub innych.

Wielkość odkształcenia skurczowego elementu zależy od klasy betonu, stopnia zbrojenia rodzaju zastosowanego cementu, wskaźnika W/C, , miarodajnego wymiaru  $h_0$ , wilgotności otoczenia, oznacza to, że w konstrukcji odkształcenia wywołane skurczem być różne w różnych elementach i mogą wywoływać siły wewnętrzne, których pominięcie w analizie wyężenia może stwarzać zagrożenie jej bezpieczeństwa i mieć istotny wpływ na trwałość konstrukcji.

## Bibliografia

- [1] Bobrowicz J.: *Zależność wytrzymałości na ściskanie zapraw od ilości wydzielonego ciepła hydratacji cementów w obniżonych temperaturach*. Prace ITB. Kwartalnik 3 (135) 2005, s. 3-14.
- [2] Borucka-Lipska J., Kiernożycki W.: *Termiczne naprężenie wymuszone w betonowych budowlach masywnych*.
- [3] Brunarski L.: *Pełzanie betonu*.
- [4] Czarnecki L., Łukowski P., Garbacz A., *Naprawa i ochrona konstrukcji z betonu Komentarz do PN-EN 1504*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2017.
- [5] Flaga K.: *Zbrojenie przeciwskurczowe, obliczenia, zalecenia konstrukcyjne w budownictwie powszechnym*. Materiały konferencyjne XII Ogólnopolska Konferencja Warsztat Pracy Projektanta Konstrukcji. Ustroń 2002.
- [6] Flaga K.: *Naprężenia skurczowe i zbrojenie przypowierzchniowe w konstrukcjach betonowych*. Monografia nr 295. Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej, Kraków 2004.
- [7] Flaga K.: *Naprężenia skurczowe i zbrojenie przypowierzchniowe w konstrukcjach betonowych*. Monografia nr 391. Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej, Kraków 2011.
- [8] Flaga K., Klemczak B., Knoppik-Wróbel A.: *Wczesne rysy termiczno-skurczowe w ścianach przyczółków mostowych*. Inżynieria i Budownictwo, nr 4, 2013.
- [9] Flaga K., Klemczak B., Knoppik-Wróbel A.: *Metody obliczeniowe przewidywania ryzyka zarysowania ścian przyczółków mostowych*. Inżynieria i Budownictwo, nr 5, 2013, s. 271-276.
- [10] Flaga K., Klemczak B.: *Określanie wczesnych naprężeń termiczno-skurczowych i ryzyka zarysowania w masywnych płytach fundamentowych*. Inżynieria i Budownictwo. 7/2016, s. 366-371.
- [11] Halicka A., Franczak D. *Projektowanie zbiorników żelbetowych. Zbiorniki na ciecze. Tom 2*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2013.
- [12] Hajduk P.: *Projektowanie podłóg przemysłowych*. Wydawnictwo Naukowe PWN Warszawa, 2013.
- [13] Hajduk P.: *Projektowanie i ocena techniczna podłóg przemysłowych*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2018.
- [14] Helowicz A.: *Analiza pól temperatury wywołanych ciepłem hydratacji w masywach betonowych*. Praca doktorska. Instytut Inżynierii Lądowej Politechniki Wrocławskiej. Wrocław 2003.
- [15] Kiernożycki W.: *Uszkodzenia młodego betonu konstrukcji masywnych*. Polski Cement. 3/2002, s. 42-43.
- [16] Kiernożycki W.: *Betonowe konstrukcje masywne*. Polski Cement, Kraków 2003.
- [17] Kiernożycki W.: *Metody realizacji masywnych elementów płytowych z uwagi na oddziaływanie pośrednie twardniejącego betonu*. 2002, Materiały konferencyjne WPPK-2002, Ustroń 2002.
- [18] Klemczak B., Knoppik-Wróbel A.: *Analiza naprężeń w ścianie żelbetowej poddanej wczesnym wpływom-termiczno-skurczowym*. Zeszyty Naukowe Politechniki Rzeszowskiej. Nr 283. Budownictwo o Inżynieria Środowiska. Zeszyt 59. s. 85-92.
- [19] Klemczak B., Knoppik-Wróbel A.: *Charakter i przyczyny powstawania wczesnych rys termiczno-skurczowych w konstrukcjach betonowych*. Przegląd budowlany. 2/2012, s. 28-36.



- [20] Klemczak B., Knoppik-Wróbel A.: *Ocena wrażliwości konstrukcji betonowych z uwagi na wczesne wpływy termiczno-skurczowe*. Przegląd budowlany. 3/2012, s. 53-59.
- [21] Klemczak B.: *Masywne konstrukcje betonowe*. Materiały konferencyjne. XXXIII Ogólnopolskie Warsztaty Pracy Projektanta Konstrukcji. s. 1-46. Szczyrk 2018.
- [22] Klemczak B., Batog M.: *Znaczenie cementu w kształtowaniu temperatury twardniejącego betonu*. Inżynieria i Budownictwo, 8, 215-219, Warszawa 2015.
- [23] Knauff M., Golubińska A.: *O uproszczonej metodzie kontroli zarysowania według Eurokodu 2*. Zeszyty Naukowe Politechniki Rzeszowskiej. Nr 283. Budownictwo o Inżynieria Środowiska. Zeszyt 59. s. 93-100.
- [24] Knauff M.: *Podstawy projektowania konstrukcji żelbetowych i sprężonych wg EC2*. Dolnośląskie Wydawnictwo Edukacyjne, Wrocław 2006. s. 579 – 648.
- [25] Knoppik-Wróbel A.: *Analiza naprężeń w ścianach żelbetowych poddanych wczesnym wpływom termiczno-skurczowym*. Rozprawa doktorska, suplement. Politechnika Śląska. Wydział Budownictwa. Styczeń 2015.
- [26] Knor G.: *Identyfikacja, modelowanie i sterowanie polami temperatury w konstrukcjach betonowych*. Rozprawa doktorska. Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN. Warszawa 2014.
- [27] Kubicki J.: *Wpływ skurczu na ugięcia długotrwałe zginanych elementów żelbetowych wg Eurokodu 2*. Prace ITB. Kwartalnik nr 3 (119) 2001, s. 3-21.
- [28] Kurdowski W.: *Rodzaje skurczu betonu, ich znaczenie i metody zapobiegania*. Cement Wapno Beton, 26(2) 2001, s. 109-117.
- [29] Lewiński P.: *Zasady projektowania zbiorników żelbetowych na cieczy z uwzględnieniem wymagań Eurokodu 2*. Instytut Techniki Budowlanej, Warszawa 2011.
- [30] Neville A. M.: *Właściwości betonu*. Polski Cement, Kraków 2000.
- [31] Okuń M., Kręgiel W., Dybicz R.: *Reologiczne przyczyny uszkodzeń betonowych posadzek bezspoinowych na przykładzie wielkopowierzchniowej hali magazynowej*. Przegląd budowlany. 3-4/2022, s. 58-63.
- [32] Piasta W.: *Odkształcenia własne betonów napowietrzonych*. Przegląd budowlany. 4/2009, s. 28-31.
- [33] Rüschi H., Jungwirt D.: *Skurcz i pęcznienie w konstrukcjach betonowych*. Wydawnictwo Arkady, Warszawa 1979.
- [34] Raczkiewicz W.: *Skurcz betonu – cechy istotne ze względu na projektowanie konstrukcji z betonu*. Przegląd budowlany. 2/2012, s. 43-46.
- [35] Seruga A., Szydłowski R., Zych M.: *Ocena postępującego procesu zarysowania ścian cylindrycznych w monolitycznych zbiornikach żelbetowych*. Czasopismo techniczne. Zeszyt 1-B/2008 s. 135-163. Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej.
- [36] Witkowski P.: *Technologia budowy konstrukcji masywnych z betonu*. Materiały XIII Konferencji Naukowej-Korbielów 2001.
- [37] Witkowski P.: *Uszkodzenia termiczne przyczółków mostowych*. Czasopismo techniczne. Zeszyt 3-Ś/2011, s. 193-213. Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej.
- [38] Zych M.: *Komentarz do maksymalnej średnicy zbrojenia w ścianach zbiorników żelbetowych zgodnie z PN-EN 1992-3*. Materiały budowlane. 9/2015, s. 59-60.
- [39] Zych M.: *Metoda uproszczona kontroli zarysowania ścian zbiorników żelbetowych poddanych obciążeniu wymuszonemu wg PN-EN 1992-3*. Materiały budowlane, nr 3, 2015.
- [40] Zych M.: *Naprężenia termiczne w dojrzewającym betonie ściany zbiornika żelbetowego*. Czasopismo techniczne. Zeszyt 1-Ś/2007, s. 191-208.

- [41] Zych M.: *Analiza numeryczna zarysowania w dojrzewającym betonie ściany zbiornika żelbetowego*. Czasopismo techniczne. Zeszyt 3-S/2008, s. 227-249. Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej.
- [42] Zych M., Jaromska E.: *Szacowanie ryzyka zarysowania płyt fundamentowych według wytycznych niemieckich – komentarz*. Przegląd budowlany. 9/2019, s. 15-18.
- [43] Knoppik-Wróbel A.: *Naprężenia własne i wymuszone w ścianie żelbetowej poddanej wczesnym wpływom termiczno-skurczowy*.
- [44] Warunki techniczne wykonania i odbioru robót budowlano-montażowych tom 1, 2, 3, 4 – Wydawnictwo Arkady, Warszawa, 1989
- [45] Warunki techniczne wykonania i odbioru robót budowlanych część B: Roboty wykończeniowe zeszyt 8: Posadzki betonowe utwardzone powierzchniowo preparatami proszkowymi – instrukcja nr 433/2010 Instytut Techniki Budowlanej, 2010
- [46] Warunki techniczne wykonania i odbioru robót budowlanych część B: Roboty wykończeniowe zeszyt 8: Posadzki betonowe utwardzone powierzchniowo preparatami proszkowymi – instrukcja, Instytut Techniki Budowlanej, 2014
- [47] Warunki techniczne wykonania i odbioru robót budowlanych część B: Roboty wykończeniowe zeszyt 3: Posadzki mineralne i żywiczne – instrukcja Instytut Techniki Budowlanej, 2013
- [48] Warunki techniczne wykonania i odbioru robót budowlanych część A: Roboty ziemne i konstrukcyjne zeszyt 5: Konstrukcje betonowe i żelbetowe – instrukcja ITB nr 431/2008 znowelizowana w 2013.

#### **Normy, instrukcje i wytyczne**

- [N1] PN-EN 1992-1-1 Eurokod 2. *Projektowanie konstrukcji z betonu. Część 1. Reguły ogólne i reguły dla budynków*.

