MODELOWANIE INŻYNIERSKIE ISSN 1896-771X
37, s. 193-200, Gliwice 2009

DYNAMIKA UKŁADU WIELOCZŁONOWEGO PODLEGAJĄCEGO WIĘZOM OPISUJĄCYM PUNKTOWY KONTAKT POMIĘDZY UKŁADEM I NIERUCHOMĄ KRZYWKĄ

KRZYSZTOF LIPIŃSKI

Katedra Mechaniki i Wytrzymałości Materiałów, Politechnika Gdańska
e-mail: klipinsk@pg.gda.pl

Streszczenie. W pracy zaproponowano równanie więzów opisujących punktowy kontakt pomiędzy układem wieloczłonowym i nieruchomą krzywką. Równania położenia punktu układu wielomasowego połączono z równaniem opisującym profil krzywki. Z równań prędkości i przyspieszeń punktu wyznaczono pierwsze i drugie pochodne równania więzów. Analizę rozszerzono o zagadnienie dynamiki układu z więzami. Przedstawiono wyniki przykładowych symulacji komputerowych. Ograniczono się do analizy układów płaskich. Metodę łatwo rozszerzyć do układów przestrzennych.

1. WSTĘP

Formułowanie równań więzów to jedno z ważnych zadań w procesie przygotowywania modelu układu wieloczłonowego. Należy podkreślić, że zagadnienia dynamiki układów o strukturze drzewa są opracowane szczegółowo. Istnieje obszerna literatura obejmująca między innymi kilkadziesiąt pozycji książkowych. Przykładem są tu pozycje [1-5]. Uogólnienie zagadnień dynamiki zamkniętych łańcuchów kinematycznych jest trudniejsze. Główny powód to mnogość form możliwych do przyjęcia przez więzy. Tylko nieliczne typy więzów zostały opisane szczegółowo. Najczęściej opisywano więzy reprezentujące pary: sferyczną, obrotową i postępową. Ich opisy znajdziemy w cytowanych już pracach [1-5]. Inne spotykane typy więzów to więzy reprezentujące pary cylindryczne i śrubowe [1, 5], bezmasowe pręty [2, 4], przegub Cardana [3, 5], styk dwóch płaszczyzn [5], styk koło/grunt [7], styk koło/szyna [6], punktowy styk dwóch ciał [5], przekładnie [2, 4]. Osobnym zagadnieniem są więzy kierujące. Omówienie tego zagadnienia można znaleźć w pracy [1].

Zagadnienie kontaktu układu wielomasowego i krzywki prezentowane jest sporadycznie. Przykładowe równanie więzów znajdujemy w pracy [4]. Pochodne równania więzów nie są tam omawiane. Analizę ograniczono do układu składającego się z obracającej się krzywki i pionowego popychacza połączonego z ostoją za pomocą pary postępowej lub obrotowej. Analizę bardziej rozbudowanego układu przedstawiono w pracy [8]. Stykającymi się elementami są dwie krzywki. Do opisu ich powierzchni wykorzystano odcinakowo ciągłe funkcje współrzędnych biegunowych. Obydwie krzywki są tu elementami ruchomymi. Metodologicznie, model ten nawiązuje do modelu styku ciał, jaki zaprezentowano w [5].

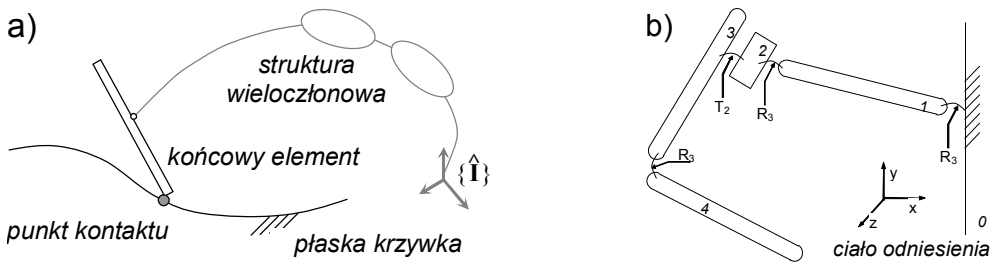
W pracy ograniczono się do opisu styku krzywki i ostrza popychacza. Równania wyznaczono w układzie współrzędnych związanym z krzywką. Przeanalizowano zachowanie

układu płaskiego. Praca jest punktem wyjścia do analiz poświęconych więzom opisującym kontakt ostrza i krzywki trójwymiarowej.

Pracę podzielono na siedem rozdziałów. W rozdziale drugim przedstawiono równania więzów. Rozdział trzeci poświęcono omówieniu pochodnych równań więzów. Rozdział czwarty i piąty omawiają kolejno: dynamikę układu wielomasowego o strukturze drzewa oraz dynamikę układu z więzami. W rozdziale szóstym zaprezentowano model i wyniki przykładowych obliczeń. Najważniejsze wnioski zaprezentowano w rozdziale siódmym.

2. RÓWNANIE WIĘZÓW OPISUJĄCE STYK OSTRZA I KRZYWKI

W rozważanym zagadnieniu wymuszamy ruch punktu układu wzdłuż zadanej trajektorii. Trajektoria ta realizowana jest przez więzy materialne (krzywkę – rys. 2). Istnieje tu istotna różnica w stosunku do klasycznego zagadnienia „planowania trajektorii ruchu końcówki" [1]. Zagadnienie „planowania trajektorii" polega na narzuceniu przebiegów czasowych dla wszystkich współrzędnych kartezjańskich punktu. W przypadku układu płaskiego opisują to dwa równania więzów. Obecne podejście prowadzi do jedynego równania więzów. Opisuje ono odległość od krzywki. Pozycja na krzywce nie jest narzucona. Wynika z dynamiki.



Rys. 1. Analizowany układ: kontakt krzywki i ostrza (a); struktura wieloczłonowa (b)

Przyjęto następujące założenia: manipulator jest płaski; kinematykę modelu opisujemy we współrzędnych złączowych; element końcowy ślizga się po nieruchomej krzywce; krzywka oraz popychacz są nieodkształcalne; możliwy jest poślizg w punkcie styku. Zaletami modelu są: model kontaktu jest spójny z założeniami dynamiki układów wieloczłonowych (nieodkształcalność członów); daje możliwość operowania większymi krokami całkowania (w stosunku do modelu odkształcalnego). Wadą jest zgoda na nieskończenie duże naprężenia w punkcie kontaktu. Stworzony model stanowi ważne odniesienie dla bardziej szczegółowych rozważań.

Przyjęto, że położenie punktu manipulatora opisują równania:

$$x_A = f_1(\boldsymbol{q}) \quad ; \quad y_A = f_2(\boldsymbol{q}), \tag{1}$$

gdzie: x_A , y_A - współrzędne kartezjańskie położenia punktu; $\boldsymbol{q}$ – wektor współrzędnych złączowych manipulatora.

Ponieważ punkt manipulatora styka się z krzywką, obowiązuje dodatkowa zależność

$$y_A = f_3(x_A), \tag{2}$$

gdzie: f_3 – funkcja opisująca profil krzywki.

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

Prowadzi to do równania więzów:

$$h(\boldsymbol{q}) = f_2(\boldsymbol{q}) - f_3(f_1(\boldsymbol{q})) = 0\,. \tag{3}$$

3. POCHODNE RÓWNANIA WIĘZÓW

Po wprowadzeniu równań więzów nie wszystkie elementy wektora $\boldsymbol{q}$ można traktować jako niezależne. W celu eliminacji prędkości i przyspieszeń współrzędnych zależnych, wyznaczamy pierwszą i drugą pochodną równania więzów. Różniczkując (1) oraz (2), uzyskamy:

$$v_{xA} = \sum_{i=1:n} \frac{\partial f_1}{\partial q_i} \cdot \dot{q}_i \quad ; \quad v_{yA} = \sum_{i=1:n} \frac{\partial f_2}{\partial q_i} \cdot \dot{q}_i \quad ; \quad v_{yA} = \frac{\partial f_3}{\partial x_A} \cdot v_{xA}\,, \tag{4}$$

gdzie: v_{xA} , v_{yA} - współrzędne kartezjańskie prędkości punktu.
Pochodną równania (3) (relację między prędkościami współrzędnych złączowych) zapisujemy

$$\sum_{i=1:n} \frac{\partial f_2}{\partial q_i} \cdot \dot{q}_i = \frac{\partial f_3}{\partial x_A} \cdot \sum_{i=1:n} \frac{\partial f_1}{\partial q_i} \cdot \dot{q}_i\,. \tag{5a}$$

Wykorzystując zapis macierzowy, równanie (5) przyjmuje postać

$$\boldsymbol{J} \cdot \dot{\boldsymbol{q}} = 0 \quad : \quad \boldsymbol{J} = \left(\boldsymbol{J_2} - \frac{\partial f_3}{\partial x_A} \cdot \boldsymbol{J_1} \right) \quad ; \quad \boldsymbol{J_1} = [J_{1i}] = \left[\frac{\partial f_1}{\partial q_i} \right] \quad ; \quad \boldsymbol{J_2} = [J_{2i}] = \left[\frac{\partial f_2}{\partial q_i} \right]. \tag{5b}$$

Uzyskanie drugiej pochodnej równania więzów wymaga operowania pochodnymi z równań (4) oraz (5). Przyjmują one postać:

$$a_{xA} = (\boldsymbol{J_1} \cdot \dot{\boldsymbol{q}})_q \cdot \dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{J_1} \cdot \ddot{\boldsymbol{q}} \quad ; \quad a_{yA} = (\boldsymbol{J_2} \cdot \dot{\boldsymbol{q}})_q \cdot \dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{J_2} \cdot \ddot{\boldsymbol{q}} \quad : \quad (\boldsymbol{J}_k \cdot \dot{\boldsymbol{q}})_{qi} = \frac{\partial}{\partial q_i} (\boldsymbol{J}_k \cdot \dot{\boldsymbol{q}}); \tag{6a}$$

$$a_{yA} = \frac{\partial^2 f_3}{(\partial x_A)^2} \cdot v_{xA}^2 + \frac{\partial f_3}{\partial x_A} \cdot a_{xA}\,, \tag{6b}$$

a zatem drugą pochodną równania więzów (3) (relację między prędkościami współrzędnych złączowych) zapisujemy

$$\left(\boldsymbol{J_2} - \frac{\partial f_3}{\partial x_A} \cdot \boldsymbol{J_1} \right) \cdot \ddot{\boldsymbol{q}} + \left[(\boldsymbol{J_2} \cdot \dot{\boldsymbol{q}})_q \cdot \dot{\boldsymbol{q}} - \frac{\partial f_3}{\partial x_A} \cdot (\boldsymbol{J_1} \cdot \dot{\boldsymbol{q}})_q \cdot \dot{\boldsymbol{q}} - \frac{\partial^2 f_3}{(\partial x_A)^2} \cdot (\boldsymbol{J_1} \cdot \dot{\boldsymbol{q}}) \cdot (\boldsymbol{J_1} \cdot \dot{\boldsymbol{q}}) \right] = 0\,. \tag{7}$$

Po podstawieniu symboli zaproponowanych w równaniu (5b) otrzymujemy

$$(\boldsymbol{J} \cdot \dot{\boldsymbol{q}})_q \cdot \dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{J} \cdot \ddot{\boldsymbol{q}} = 0 \quad :$$

$$\boldsymbol{J} = \left(\boldsymbol{J_2} - \frac{\partial f_3}{\partial x_A} \cdot \boldsymbol{J_1} \right) \quad ; \quad (\boldsymbol{J} \cdot \dot{\boldsymbol{q}})_q = \left[(\boldsymbol{J_2} \cdot \dot{\boldsymbol{q}})_q - \frac{\partial f_3}{\partial x_A} \cdot (\boldsymbol{J_1} \cdot \dot{\boldsymbol{q}})_q - \frac{\partial^2 f_3}{(\partial x_A)^2} \cdot (\boldsymbol{J_1} \cdot \dot{\boldsymbol{q}}) \cdot \boldsymbol{J_1} \right] = 0\,. \tag{8}$$

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

4. DYNAMIKA UKŁADU WIELOCZŁONOWEGO BEZ WIĘZÓW

Układ zbudowano z nieodkształcalnych ciał oraz par postępowych i obrotowych o jednym stopniu swobody. Układ posiada formę łańcucha kinematycznego. Łańcuch rozpoczyna się od nieruchomego ciała odniesienia. Ciała układu numerujemy. Ciału odniesienia nadajemy numer zero. Pozostałe ciała łańcucha numerujemy w kolejności następowania w łańcuchu (rys. 1b).

Wyprowadzamy równania opisujące prędkości i przyspieszenia środków masy ciał oraz prędkości i przyspieszenia ruchu obrotowego ciał. Prędkości i przyspieszenia wyznaczamy względem nieruchomego ciała odniesienia. Są one liniowymi kombinacjami wektorów cząstkowych. Ich współczynnikami są prędkości i przyspieszenia współrzędnych złączowych. Kombinacje takie można zapisać, wykorzystując zasady rachunku macierzowego:

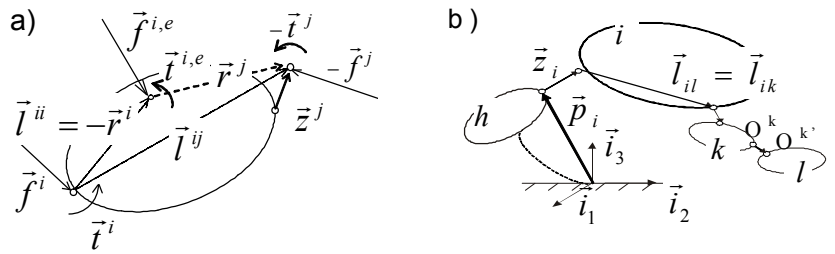
$$\vec{\omega}^{\,i} = \vec{\boldsymbol{A}}^{2,i} \cdot \dot{\boldsymbol{q}} \quad ; \quad \dot{\vec{x}}^{\,i} = \vec{\boldsymbol{A}}^{1,i} \cdot \dot{\boldsymbol{q}} \quad ; \quad \dot{\vec{\omega}}^{\,i} = \vec{\boldsymbol{A}}^{2,i} \cdot \ddot{\boldsymbol{q}} + \dot{\vec{\omega}}^{\,i,R} \quad ; \quad \ddot{\vec{x}}^{\,i} = \vec{\boldsymbol{A}}^{1,i} \cdot \ddot{\boldsymbol{q}} + \ddot{\vec{x}}^{\,i,R} \,, \tag{9}$$

gdzie: $\vec{\omega}^{\,i}$ - prędkość kątowa członu i; $\vec{x}^{\,i}$ - położenie środka masy członu i; $\vec{\boldsymbol{A}}^{1,i}$; $\vec{\boldsymbol{A}}^{2,i}$ - macierze których elementami są wektory; $\dot{\vec{\omega}}^{\,i,R}$; $\ddot{\vec{x}}^{\,i,R}$ - wyrażenia wzoru na przyspieszenia niezależne od przyspieszeń współrzędnych złączowych.

Równania dynamiki uzyskujemy, rozcinając pary kinematyczne. W miejscach przecięcia pojawiają się siły i pary sił reakcji. Dynamikę ciał opisują: II zasada dynamiki Newtona (ruch postępowy) oraz równania Eulera (ruch obrotowy). Otrzymujemy [2]:

$$m \cdot \ddot{\vec{x}}_C = \sum\nolimits_{\alpha=1}^{\beta} \vec{f}_\alpha \quad ; \qquad \vec{\omega} \times \left(\bar{\bar{I}} \cdot \vec{\omega}\right) + \bar{\bar{I}} \cdot \dot{\vec{\omega}} = \sum\nolimits_{\delta=1}^{\varepsilon} \vec{t}_{\delta C} + \sum\nolimits_{\alpha=1}^{\beta} \vec{r}_\alpha \times \vec{f}_\alpha \,, \tag{10}$$

gdzie: $\ddot{\vec{x}}_C$ – przyspieszenie liniowe środka masy ciała; $\vec{f}_\alpha$ - siła zewnętrzna; $\vec{t}_{\delta C}$ - zewnętrzny moment sił, określony względem środka masy ciała; $\vec{r}_\alpha$ - wektor określający położenie punktu przyłożenia siły (względem środka masy ciała).



Rys. 2. Układ wieloczłonowy: obciążenia ciała (a); wektory geometrii układu (b)

W układzie wieloczłonowym równania (10) łączymy z równaniami (9) wszystkich członów. Grupując wyrażenia poprzedzające przyspieszenia współrzędnych złączowych, otrzymamy [2]:

$$\begin{aligned} &\vec{\boldsymbol{B}}^{1,i} \cdot \ddot{\boldsymbol{q}} + m^i \cdot \ddot{\vec{x}}^{\,i,R}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) = \vec{f}^{\,z,i} + \sum\nolimits_{j \in \{i,i^+\}} \vec{f}^{\,j} \,; \\ &\vec{\boldsymbol{B}}^{2,i} \cdot \ddot{\boldsymbol{q}} + \vec{\omega}^i \times \left(\bar{\bar{I}}^i \cdot \vec{\omega}^i\right) + \bar{\bar{I}}^i \cdot \dot{\vec{\omega}}^{\,i,R}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) = \vec{t}^{\,z,i} + \sum\nolimits_{j \in \{i,i^+\}} \vec{t}^{\,j} + \sum\nolimits_{j \in \{i,i^+\}} \vec{r}^{\,ij} \times \vec{f}^{\,j} \,, \end{aligned} \tag{11}$$

gdzie: $\vec{\boldsymbol{B}}^{1,i}$, $\vec{\boldsymbol{B}}^{2,i}$ - macierze których elementami są wektory.

Z równań członu i wyznaczane są oddziaływania w węźle poprzedzającym. Następnie przekształcane są tak, aby nie zawierały symboli oddziaływań ciał o numerach większych niż i. Jest to możliwe, gdy wyznaczanie równań dynamiki rozpoczynamy od końcowego członu

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

łańcucha. Równania innych ciał uzyskujemy drogą iteracji zstępującej. Symbole oddziaływań sąsiedniego ciała o numerze większym są zastępowane wzorami wyznaczonymi w poprzednim kroku. Proces powtarzamy aż do uzyskania równania członu *0*. Po tej operacji, równania zapisujemy w postaci [2]:

$$\vec{f}^{\,i} = \vec{\boldsymbol{C}}^{1,i} \cdot \ddot{\boldsymbol{q}} + \vec{\boldsymbol{D}}^{1,i} + \vec{\boldsymbol{E}}^{1,i} \quad ; \qquad \vec{t}^{\,i} = \vec{\boldsymbol{C}}^{2,i} \cdot \ddot{\boldsymbol{q}} + \vec{\boldsymbol{D}}^{2,i} + \vec{\boldsymbol{E}}^{2,i} \,, \tag{12a}$$

gdzie:

$$\begin{gathered}\vec{\boldsymbol{C}}^{1,i} = \sum\nolimits_{l:i\le l} \vec{\boldsymbol{B}}^{2,l} \;; \quad \vec{\boldsymbol{D}}^{1,i} = \sum\nolimits_{l:i\le l} m^l \cdot \ddot{\vec{x}}^{l,R} \;; \quad \vec{\boldsymbol{E}}^{1,i} = -\sum\nolimits_{l:i\le l} \vec{f}^{\,z,l} \;; \quad \vec{\boldsymbol{C}}^{2,i} = \sum\nolimits_{l:i\le l} \left[\vec{\boldsymbol{B}}^{1,l} + \left(\sum\nolimits_{k:i\le k\le l} \vec{l}^{\,kl}\right) \times \vec{\boldsymbol{B}}^{2,l}\right] ; \\ \vec{\boldsymbol{D}}^{2,i} = \sum\nolimits_{l:i\le l} \left[\vec{\omega}^l \times \left(\bar{\bar{I}}^l \cdot \vec{\omega}^l\right) + \bar{\bar{I}}^l \cdot \dot{\vec{\omega}}^{l,R} + m^l \cdot \left(\sum\nolimits_{k:l\le k\le l} \vec{l}^{\,kl}\right) \times \ddot{\vec{x}}^{l,R}\right]; \qquad \vec{\boldsymbol{E}}^{2,i} = -\sum\nolimits_{l:i\le l} \left[\vec{t}^{\,z,l} - \left(\sum\nolimits_{k:i\le k\le l} \vec{l}^{\,kl}\right) \times \vec{f}^{\,z,l}\right].\end{gathered} \tag{12b}$$

Tylko jedna ze składowych oddziaływań (12a) (siły lub pary sił) zawiera składową aktywną. Odnajdujemy ją, rzutując oddziaływania na kierunek przemieszczenia poprzedzającej pary kinematycznej. Elementy równań grupujemy w macierzach. Uzyskujemy [2]

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{q}) \cdot \ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{F}(\dot{\boldsymbol{q}}, \boldsymbol{q}) + \boldsymbol{Q}(\dot{\boldsymbol{q}}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{e}}, \boldsymbol{t}_{\boldsymbol{e}}, t) = 0 \,, \tag{13}$$

gdzie: $\boldsymbol{M}$ - macierz mas, $\boldsymbol{F}$ – wektor zawierający pozostałe efekty bezwładnościowe (niezależne od przyśpieszeń współrzędnych złączowych); $\boldsymbol{Q}$ – wektor zawierający efekty oddziaływań zewnętrznych.

5. DYNAMIKA UKŁADU WIELOCZŁONOWEGO Z WIĘZAMI

Równania dynamiki układu z więzami przyjmują postać różniczkowo-algebraiczną. Przeprowadzana jest operacja rozłączania zamkniętych łańcuchów kinematycznych. Różniczkowe równania dynamiki (13) układu rozłączonego łączymy z algebraicznymi równinami więzów (3). Równania dynamiki układu rozłączonego rozszerzamy o wyrazy reprezentujące reakcje. Korzystając z równań Lagrange'a I rodzaju, otrzymujemy [9]:

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{q}^*, t) \cdot \ddot{\boldsymbol{q}}^* + \boldsymbol{F}(\dot{\boldsymbol{q}}^*, \boldsymbol{q}^*) + \boldsymbol{Q}(\dot{\boldsymbol{q}}^*, \boldsymbol{q}^*, \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{e}}, \boldsymbol{t}_{\boldsymbol{e}}, t) + \boldsymbol{J}^T(\boldsymbol{q}^*) \cdot \boldsymbol{\lambda} = 0 \quad ; \quad \boldsymbol{h}(\boldsymbol{q}^*) = 0 \,, \tag{14}$$

gdzie: $\boldsymbol{J}$ - jakobian macierzy $\boldsymbol{h}$; $\boldsymbol{\lambda}$ - macierz kolumnowa mnożników Lagrange'a; $\boldsymbol{q}^*$ - macierz współrzędnych złączowych układu rozciętego.

Liczba elementów macierzy $\boldsymbol{q}^*$ jest większa niż liczba stopni swobody układu. Elementy macierzy $\boldsymbol{q}^*$ dzielone są na zależne $\boldsymbol{v}$ oraz niezależne $\boldsymbol{u}$. Zależne usuwane są metodą opisaną w [9]. Rozpoczynamy od numerycznego rozwiązania nieliniowej funkcji $\boldsymbol{h}$:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{h}^{-1}(\boldsymbol{u}, t) \qquad \textit{gdzie} \qquad \boldsymbol{q}^* = [\boldsymbol{u} \;,\; \boldsymbol{v}]^T. \tag{15}$$

Następnie część algebraiczna równania (14) jest różniczkowana. Otrzymywane są liniowe równania (5b, 8) wiążące prędkości i przyspieszenia współrzędncy złączowych. Równania te rozwiązywane są algebraicznie w celu uzyskania relacji przedstawiających prędkości i przyspieszenia współrzędnych $\boldsymbol{v}$ [9]:

$$\dot{\boldsymbol{v}} = -\boldsymbol{J}_v^{-1} \cdot \boldsymbol{J}_u \cdot \dot{\boldsymbol{u}} \cdot \quad ; \qquad \ddot{\boldsymbol{v}} = -\boldsymbol{J}_v^{-1} \cdot \boldsymbol{J}_u \cdot \ddot{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{J}_v^{-1} \cdot \boldsymbol{A} \tag{16}$$

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

Pozwala to na eliminację wektora $\boldsymbol{v}$ z części różniczkowej równania (14). Otrzymujemy

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{u},t)\cdot\ddot{\boldsymbol{u}}+\boldsymbol{F}(\dot{\boldsymbol{u}},\boldsymbol{u})+\boldsymbol{Q}(\dot{\boldsymbol{u}},\boldsymbol{u},\boldsymbol{f}_e,\boldsymbol{t}_e,t)+\boldsymbol{J}^T(\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{\lambda}=0\,. \tag{17}$$

Postać ta składa się z n równań. Zależą one od $(n\text{-}w)$ niezależnych współrzędnych złączowych układu z więzami. Z równania (17) można wybrać w równań, które posłużą do wyznaczenia w niewiadomych $\boldsymbol{\lambda}$. Uzyskane zależności określające mnożniki $\boldsymbol{\lambda}$ wstawiane są do niewykorzystanego fragmentu równania (17). Prowadzi to do równań dynamiki postaci [9]

$$\boldsymbol{M}^*(\boldsymbol{u},t)\cdot\ddot{\boldsymbol{u}}+\boldsymbol{F}^*(\dot{\boldsymbol{u}},\boldsymbol{u})+\boldsymbol{Q}^*(\dot{\boldsymbol{u}},\boldsymbol{u},\boldsymbol{f}_e,\boldsymbol{t}_e,t)=0\ , \tag{18a}$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{M}^* &= \boldsymbol{M}_{uu}-\boldsymbol{M}_{uv}\cdot\boldsymbol{J}_v^{-1}\cdot\boldsymbol{J}_u-\boldsymbol{J}_u^T\cdot\left(\boldsymbol{J}_v^{-1}\right)^T\left(\boldsymbol{M}_{vu}-\boldsymbol{M}_{vv}\cdot\boldsymbol{J}_v^{-1}\cdot\boldsymbol{J}_u\right);\\
\boldsymbol{F}^* &= \boldsymbol{F}_u-\boldsymbol{M}_{uv}\cdot\boldsymbol{J}_v^{-1}\cdot\boldsymbol{A}-\boldsymbol{J}_u^T\cdot\left(\boldsymbol{J}_v^{-1}\right)^T\left(\boldsymbol{F}_v-\boldsymbol{M}_{vv}\cdot\boldsymbol{J}_v^{-1}\cdot\boldsymbol{A}\right);\\
\boldsymbol{Q}^* &= \boldsymbol{Q}_u-\boldsymbol{J}_u^T\cdot\left(\boldsymbol{J}_v^{-1}\right)^T\boldsymbol{Q}_v\ .
\end{aligned} \tag{18b}$$

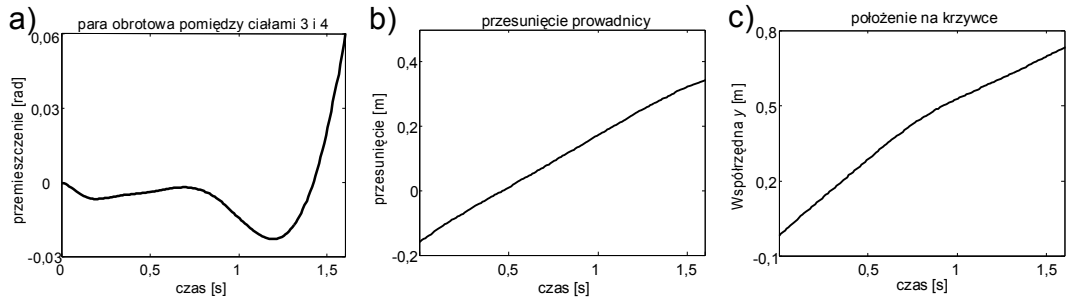
6. WYNIKI OBLICZEŃ

Analizowany układ wieloczłonowy przedstawiono na rys. 2b. Składa się on z 4 członów połączonych kolejno: parą obrotową; parą obrotową; parą postępową; parą obrotową. Parametry członów podano w tabeli 1. W parach umieszczono elementy sprężysto-tłumiące. Przyjęto sztywności: k_2=15; k_3=40; k_4=18 [N/m] oraz tłumienia: c_2=1; c_3=1; c_4=1 [Ns/m].

Tabela 1. Parametry członów

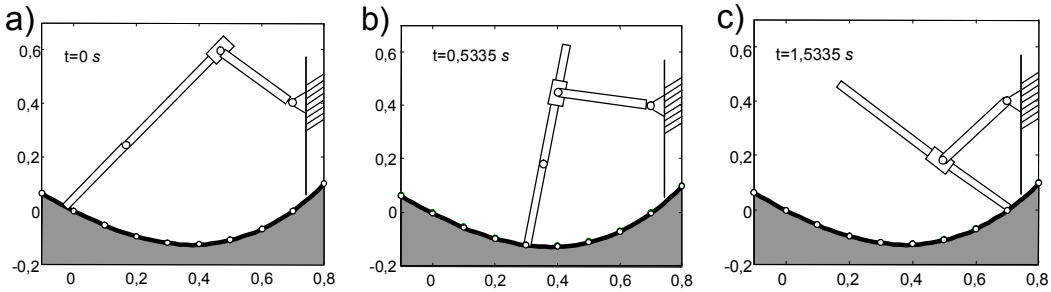
Nr członu	długość [m]	masa [kg]	Moment bezwł. [kg m^2]
1	0,3	1	0,10
2	0,1	0,5	0,01
3	0,3	1	0,10
4	0,3	1	0,10

Przeprowadzono serię testów dla różnych profili krzywki. Całkowano numeryczne równania dynamiki. Jako pierwszy przetestowano wklęsły profil krzywki. Opisuje go równanie $y(x) = -0{,}595\cdot x + 0{,}5\cdot x^2 + 0{,}5\cdot x^3$. Na rys. 3 przedstawiono uzyskane przebiegi czasowe przemieszczeń w wybranych parach kinematycznych. Na rys. 4 zaprezentowano wybrane położenia manipulatora.



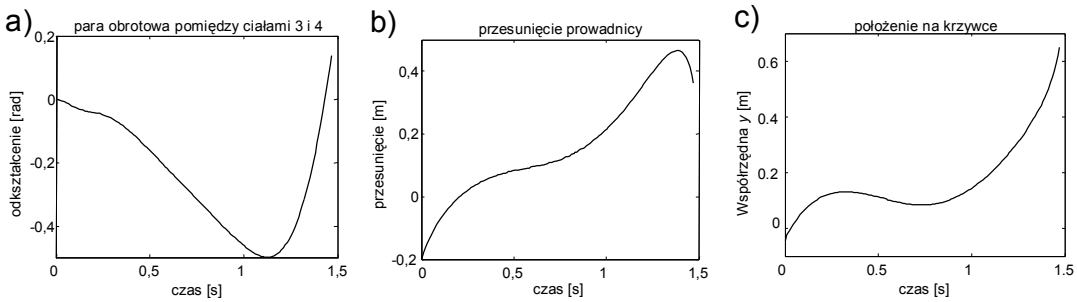
Rys. 3: Uzyskane przebiegi czasowe: obrót w przegubie pomiędzy ciałami 3 i 4 (a); przesunięcie w prowadnicy (b); pozycja punktu styku na krzywce (c)

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl



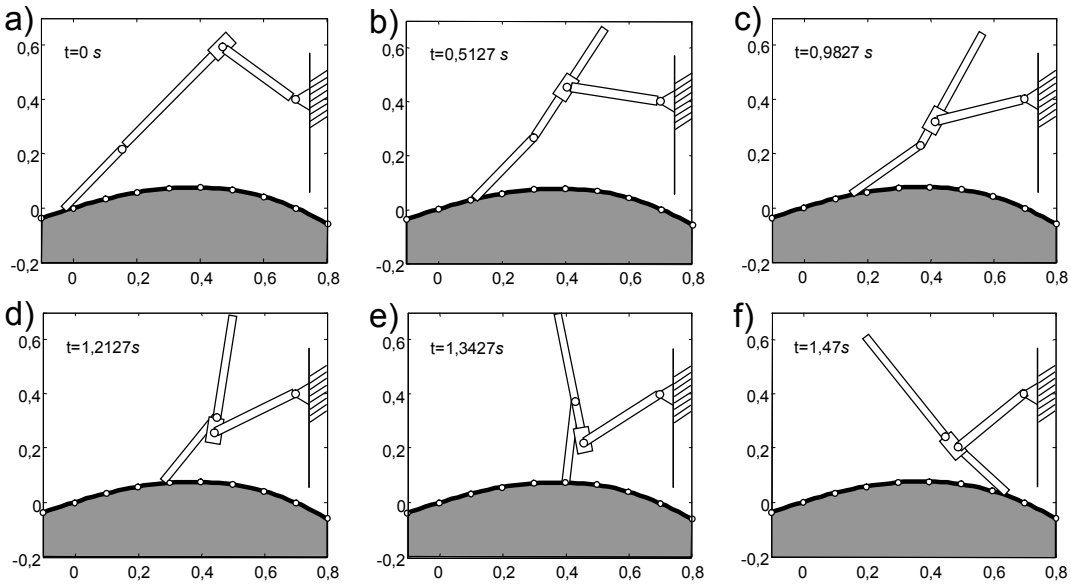
Rys. 4: Wybrane położenia – profil krzywki: $y = -0{,}595 \cdot x + 0{,}5 \cdot x^2 + 0{,}5 \cdot x^3$

Następnie przetestowano profil wypukły. Jego równanie to: $y(x) = -0{,}357 \cdot x - 0{,}3 \cdot x^2 - 0{,}3 \cdot x^3$. Na rys. 5 przedstawiono uzyskane przebiegi czasowe przemieszczeń w wybranych parach kinematycznych. Na rys. 6 zaprezentowano wybrane położenia manipulatora.



Rys. 5: Uzyskane przebiegi czasowe: obrót w węźle pomiędzy ciałami 3 i 4 (a); przesunięcie w prowadnicy (b); pozycja punktu styku na krzywce (c)

Porównując wyniki przedstawione na rys. 4 z wynikami przedstawionymi na rys. 6, zauważamy, że krzywkę wypukłą wyróżnia występowanie dużych przemieszczeń w węźle pomiędzy ciałami 3 i 4. W krzywce wklęsłej przemieszczenia te praktycznie nie występują.



Rys. 6: Wybrane położenia układu – profil krzywki: $y = 0{,}357 \cdot x - 0{,}3 \cdot x^2 - 0{,}3 \cdot x^3$

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

7. WNIOSKI

Metody analizy układu wieloczłonowego są użytecznym narzędziem analizy dynamiki mechanizmów, w tym mechanizmów krzywkowych. Znajomość kinematyki mechanizmu połączona ze znajomością geometrii krzywki pozwala na sformułowanie równań więzów opisujących ruch po krzywce. Podatność elementów mechanizmu popychacza może mięć istotny wpływ na działanie całego mechanizmu krzywkowego. W skrajnych przypadkach podatność ta może doprowadzić do niewłaściwego działania mechanizmu krzywkowego.

LITERATURA

1. Frączek J., Wojtyra M.: Kinematyka układów wieloczłonowych : metody obliczeniowe. Warszawa : WNT, 2008.
2. Fisette P., Samin J.C.: Symbolic modeling of multibody system. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 2003.
3. Garcia de Jalon J., Bayo E.: Kinematic and dynamic simulation of multibody systems. Berlin : Springer-Verlag, 1994.
4. Nicravesh P.E.: Computer-aided analysis of mechanical systems. Englewood Cliffs : Prentice Hall, 1988.
5. Robertson R.E., Shwertassek R.: Dynamics of multibody systems. Berlin : Springer-Verlag, 1988.
6. Fisette P., Samin J-C.: A new wheel /rail contact model for independent wheels. "Archive of Applied Mech." 1994, 64,1994, p. 180-191.
7. Lipiński K., Fisette P.: A multibody loop constraints approach for modelling the wheel/ground rigid contact of rolling systems. W: 14th European Simulation Multiconference, ESM 2000. Ghent (Belgium), 2000, p. 201-207.
8. Fisette P., Lipinski K., Samin J.C.: A multibody loop constraints approach for modelling cam/follower devices. Proc. of the 1999 ASME Design Eng. Tech. Conf., Vib 8215, Las Vegas (USA), 1999, p. 1-12.
9. Haug E.J., Yen J.: General coordinate partitioning. Method for numerical integration, NATO ASI 69, 1990, p. 97-114.

DYNAMICS OF A MULTIBODY SYSTEM UNDER CONSTRAINTS EXPRESSING A PUNCTUAL CONTACT BETWEEN THE SYSTEM AND A CAM FIXED IN POSITION

Summary. The paper presents a formula for a cam/follower contact in a multibody system. Kinematic equations of the multibody structure are combined with the profile equations. From velocity and acceleration formulas, first and the second derivatives of the constraint equations are composed. The kinematical considerations are extended and the dynamics of such systems is expressed. Then, some exemplary, numerical calculations are presented in the paper. Restriction to a planar system is imposed. Regardless of these restrictions, the constraint equations can be easily extended to the 3D cases.

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl