Wiad. Mat. 55 (1) 2019, 127–135

Grzegorz Graff (Gdańsk)

Jak gładkość generuje punkty periodyczne

1. Wprowadzenie

Jednym z ważnych problemów teorii układów dynamicznych i topologii jest pytanie, jaka jest najmniejsza liczba punktów stałych lub periodycznych w danej klasie odwzorowań. Na przykład klasyczne twierdzenie Brouwera stwierdza, że każde ciągłe odwzorowanie kuli domkniętej w siebie ma przynajmniej jeden punkt stały. Szczególnie interesujące staje się powyższe pytanie w odniesieniu do klasy homotopii danego odwzorowania f. Rozważania zacznijmy od rozmaitości M, zwartej, spójnej i bez brzegu oraz ciągłej funkcji $f\colon M \to M$. Pytamy o wartość

$$\min_{g\sim f} \# \operatorname{Fix}(g), \tag{1}$$

przy czym $g \sim f$ jest zapisem faktu, że g jest homotopijne z f, natomiast $\# \operatorname{Fix}(g)$ oznacza liczbę punktów stałych odwzorowania g.

Odpowiedzią, udzieloną przez Weckena w 1942 roku w pracy [21] dla rozmaitości o wymiarze co najmniej trzy, jest topologiczny niezmiennik $N(f)$ zwany liczbą Nielsena.

Narzuca się pytanie, czy wartość minimum z formuły (1) uległaby zmianie, gdybyśmy rozpatrywali odwzorowania gładkie (tzn. klasy C^1) f i g oraz gładkie homotopie pomiędzy nimi. Okazuje się, że odpowiedź jest negatywna, co wykazał Jiang w 1981 roku (zob. [13]). Wynik ten mógłby sugerować, że założenie różniczkowalności nie odgrywa istotniejszej roli w teorii punktów stałych, gdyby nie praca Browna, Greena i Schirmer [3] z końca lat osiemdziesiątych XX wieku, w której zawarta została interesująca obserwacja dotycząca rozmaitości z brzegiem. Autorzy ci rozważali gładką rozmaitość M z brzegiem ∂M oraz gładkie odwzorowanie $\phi\colon \partial M \to \partial M$, pytając, czy wśród wszystkich rozszerzeń $f\colon M \to M$ odwzorowania ϕ istnieją takie, które nie mają punktów stałych w $M \setminus \partial M$. Okazało się, że odpowiedź zależy od tego, czy rozważa się rozszerzenia gładkie, czy ciągłe. Ten nieoczekiwany wynik zapoczątkował intensywne badania różnic między kategorią gładką a ciągłą w teorii punktów stałych.

Ideę Browna, Greena i Schirmer zilustrujemy na prostym przykładzie zaczerpniętym z artykułu [2]. Oznaczmy przez $\mathbb{D}^2$ jednostkowy dysk dwuwymiarowy na płaszczyźnie, a przez $\mathbb{S}^1$ – jego brzeg.

Przykład 1.1. Niech $\phi\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ będzie dane wzorem $\phi(z) = z^k$, przy czym $k \in \{2, 3, \dots\}$. Wówczas każde $f\colon \mathbb{D}^2 \to \mathbb{D}^2$, będące gładkim rozszerzeniem ϕ, ma punkt stały w $\operatorname{Int} \mathbb{D}^2$.

Oznacza to, że – przy założeniach z przykładu – oprócz punktu stałego na brzegu, otrzymamy jeszcze dodatkowy punkt stały w $\operatorname{Int} \mathbb{D}^2$ dla każdego rozszerzenia ϕ, a więc swoiste wzmocnione twierdzenie Brouwera. Własność ta nie zachodzi, jeśli opuścimy założenie gładkości. Nietrudno wówczas sprawdzić, że możemy znaleźć przedłużenia f bez punktów stałych we wnętrzu rozpatrywanego dysku. Mianowicie, niech $z_0 \in S^1$ będzie punktem stałym ϕ. Rozpatrzmy dowolny punkt $\alpha \neq z_0$ z brzegu $\mathbb{S}^1$ i połączmy go odcinkiem z z_0, a następnie sparametryzujemy każdy punkt z znajdujący się na tym odcinku: $z = (1-t)z_0 + t\alpha$, $t \in [0, 1]$. Gdy zadamy $f(z) = (1-t^2)z_0 + t^2 f(\alpha)$, otrzymamy ciągłe przedłużenie ϕ bez punktów stałych w $\operatorname{Int} \mathbb{D}^2$, gdyż punkty z odcinka (z_0, α) przechodzą na proporcjonalnie bliższe z_0 punkty odcinka $(z_0, f(\alpha))$.

Jak widać, przypadek ciągły różni się od gładkiego również dla punktów stałych przy założeniu, że rozpatrujemy przedłużenia odwzorowań określonych na brzegu. Co jednak dzieje się w przypadku rozmaitości bez brzegu? Okazuje się, że różnica pojawia się dla punktów periodycznych.

Rozważmy wielkość analogiczną do (1), tym razem w kategorii gładkiej i dla punktów periodycznych. Niech $r \geqslant 1$ będzie ustaloną liczbą naturalną. Badać będziemy odwzorowanie $f\colon M \to M$ gładkie, przy czym rozważamy gładkie homotopie (relacja oznaczana będzie poprzez $\overset{s}{\sim}$), poszukiwaną zaś wielkością jest

$$\min_{g \overset{s}{\sim} f} \# \operatorname{Fix}(g^r). \tag{2}$$

Aby oddać istotę sprawy, przyjmiemy ważne upraszczające założenie. Mianowicie, rozpatrywać będziemy rozmaitości jednospójne o wymiarze co najmniej trzy, w szczególności zilustrujemy gładką teorię Nielsena dla punktów periodycznych na modelowym przykładzie sfery trójwymiarowej $\mathbb{S}^3$.

Przeszkodą w minimalizacji liczby punktów periodycznych w kategorii ciągłej jest tylko grupa podstawowa rozmaitości, natomiast w kategorii gładkiej dodatkową przeszkodę stanowią indeksy punktu stałego iteracji. Dla rozmaitości jednospójnej M różnica będzie dobrze widoczna. Rozważmy gładkie odwzorowanie $f\colon M \to M$. Wówczas trywialność grupy podstawowej M sprawia, że zawsze można znaleźć w jego (ciągłej) klasie homotopii takie odwzorowanie g, że $\mathrm{Fix}(g^r)$ jest jednopunktowy, co jednak, jak zaraz wykażemy, nie jest to prawdą w gładkiej klasie homotopii.

Jak zatem opisać ową przeszkodę w sytuacji gładkiej? Okazuje się, że wyraża się ona przez ciągi indeksów punktu stałego iteracji odwzorowania f w punktach stałych p: $\{\mathrm{ind}(f^n, p)\}_{n=1}^{\infty}$. Definicję indeksu, jak i stopnia topologicznego, którego również będziemy używać, znaleźć można w książce [14].

Wygodnym sposobem zapisywania ciągu indeksów iteracji jest rozwinięcie periodyczne, które polega na przedstawieniu $\{\mathrm{ind}(f^n, p)\}_{n=1}^{\infty}$ w postaci kombinacji pewnych okresowych ciągów bazowych.

Definicja 1.1. Dla ustalonego k definiujemy ciąg bazowy reg_k jako:

$$\mathrm{reg}_k(n) = \begin{cases} k, & \text{jeżeli } k|n, \\ 0, & \text{jeżeli } k\nmid n. \end{cases}$$

Ciąg indeksów można zapisać w postaci sumy ciągów bazowych z pewnymi współczynnikami a_k:

$$\mathrm{ind}(f^n, p) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \,\mathrm{reg}_k(n). \tag{3}$$

Otrzymujemy tak zwane rozwinięcie periodyczne, przy czym współczynniki a_k zawsze są całkowite (nietrywialny ten fakt znany jest jako relacje Dolda).

W przypadku odwzorowań ciągłych może się zdarzyć, że w sumie (3) występuje nieskończona liczba niezerowych składników. Badania indeksów odwzorowań gładkich zapoczątkowane zostały eleganckim wynikiem Shuba i Sullivana, którzy w 1974 roku wykazali, że dla gładkiego odwzorowania f ciąg $\{\mathrm{ind}(f^n, p)\}_{n=1}^{\infty}$ jest ograniczony (zob. [20]). Stąd nietrudno już uzyskać, że jest on okresowy (zob. [1]), co równoważne jest stwierdzeniu, że w formule (3) występuje tylko skończona liczba ciągów reg_k.

Mówiąc w bardzo dużym uproszczeniu, ta właśnie różnica dotycząca postaci możliwych ciągów indeksów iteracji odwzorowania gładkiego i ciągłego decyduje o liczbie punktów periodycznych w odpowiedniej klasie homotopii.

2. Najmniejsza liczba punktów periodycznych odwzorowania $\mathbb{S}^m$ w siebie

Rozważmy takie odwzorowanie $f\colon \mathbb{S}^m \to \mathbb{S}^m$, przy czym $m \geqslant 2$, że dla każdego ustalonego n zbiór $\mathrm{Fix}(f^n)$ jest skończony.

Znany wzór Poincarégo–Hopfa łączy lokalne własności rozmaitości wyrażone przy pomocy indeksów z globalnymi, określonymi poprzez stopień odwzorowania oznaczony przez d (w ogólnej wersji przez liczby Lefschetza, zob. [14]). Dla sfery $\mathbb{S}^m$ formuła ta będzie miała postać

$$1 \pm d^n = \sum_{x \in \mathrm{Fix}(f^n)} \mathrm{ind}(f^n, x), \tag{4}$$

przy czym po lewej stronie współczynnik przy d^n wynosi $+1$ dla m parzystego lub -1 dla m nieparzystego.

Przyjmijmy teraz, że $|d| \geqslant 2$. Ile wówczas może być punktów periodycznych? Shub i Suillivan wykazali, że może być ich bardzo niewiele, podając odpowiedni przykład ciągłego odwzorowania $\mathbb{S}^2$ w siebie stopnia dwa.

Przykład 2.1 [20]**.** Niech $g\colon \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$, będzie odwzorowaniem, w którym na każdym równoleżniku (utożsamionym z $\mathbb{S}^1$) zadajemy odwzorowanie $z \mapsto z^2$. Niech odwzorowanie $h\colon \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ działa w ten sposób, że wszystkie punkty oprócz biegunów „spływają w dół", poruszając się po południkach, od bieguna północnego do południowego. Ostatecznie przyjmijmy $f = h \circ g$. Tak określone odwzorowanie f ma tylko dwa punkty periodyczne, którymi są punkty stałe (bieguny), natomiast jego stopień wynosi dwa.

Co ciekawe, można nawet podać przykład, w którym rozpatrywane odwzorowanie ma tylko jeden punkt stały (zob. [9]).

W rozważanych przykładach występują odwzorowania, które nie są różniczkowalne przynajmniej w jednym punkcie (na przykład w biegunie północnym w przykładzie 2.1). W przypadku odwzorowań gładkich, postać indeksów iteracji wymusza znacznie większą liczbę punktów periodycznych. Mechanizm ten zilustrujemy na przykładzie odwzorowań gładkich $\mathbb{S}^3$ w siebie.

Oznaczmy przez $D_r(f)$ minimalną liczbę punktów r-periodycznych w gładkiej klasie homotopii f, tzn. $D_r(f) = \min_{g \overset{s}{\sim} f} \# \mathrm{Fix}(g^r)$. Wyznaczymy wartość $D_r(f)$ dla odwzorowania $f\colon \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3$, przyjmując jeszcze jedno upraszczające założenie, że r jest nieparzyste.

Chcielibyśmy skorzystać z formuły (4), a do tego celu potrzebne nam będą postaci ciągów indeksów iteracji w wymiarze trzy.

Twierdzenie 2.1 [6, 10]**.** *Rozważmy gładkie odwzorowanie* $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *i jego izolowany (dla każdego* f^n*) punkt stały* p*. Wówczas możliwe ciągi indeksów iteracji* $\{\mathrm{ind}(f^n, p)\}_{n=1}^{\infty}$*, dla nieparzystych* n*, są następujące:*

(i) $c_A(n) = a_1 \operatorname{reg}_1(n)$,

(ii) $c_B(n) = \operatorname{reg}_1(n) + a_k \operatorname{reg}_k(n)$,

(iii) $c_C(n) = -\operatorname{reg}_1(n) + a_k \operatorname{reg}_k(n)$,

(iv) $c_D(n) = a_k \operatorname{reg}_k(n)$,

we wszystkich przypadkach $k \geqslant 3$ *oraz* $a_i \in \mathbb{Z}$.

Do obliczenia niezmiennika $D_r(f)$ wystarczy nam znajomość indeksów iteracji w punktach stałych (dla $\mathbb{S}^3$ i r nieparzystego), tzn. zawsze istnieje w gładkiej klasie homotopii f takie odwzorowanie g realizujące minimum (2), że $\mathrm{Fix}(g^r)$ składa się tylko z punktów stałych (zob. [4]).

Z dość elementarnych rachunków wynika, że ciąg $\{d^n\}_n$, przy warunku $|d| \geqslant 2$, rozkłada się na nieskończoną sumę ciągów reg_k, przy czym dla każdego k współczynnik przy reg_k musi być niezerowy (zob. [16]). Rozważamy teraz ustalone r oraz porównujemy obie strony wzoru (4) dla $n|r$. Zaniedbując na razie kwestię ciągu reg_1 widzimy, na postawie twierdzenia 2.1, że po prawej stronie musi zostać użytych przynajmniej tyle ciągów, ile jest dzielników r. Oznaczając przez $\zeta(r)$ liczbę dzielników liczby r, otrzymujemy więc nierówność $D_r(f) \geqslant \zeta(r)$.

W konsekwencji każde odwzorowanie gładko homotopijne z f ma co najmniej $\zeta(r)$ punktów r-periodycznych. Nasuwa się pytanie, czy może zachodzić równość, tzn. czy da się znaleźć w gładkiej klasie homotopii f odwzorowanie, które ma dokładnie tyle punktów periodycznych. Odpowiedź okazuje się pozytywna, wymaga jednak wykorzystania subtelnych technik opartych na usuwaniu i tworzeniu punktów periodycznych w klasie homotopii stworzonych przez J. Jezierskiego (zob. [14]). Ważne jest tu też, że rozmaitość ma wymiar co najmniej równy trzy (wystarczająco dużo miejsca na manipulowanie homotopiami), gdyż techniki te zawodzą w wymiarze dwa.

Biorąc jeszcze pod uwagę fakt, że niekiedy do zrealizowania współczynnika przy reg_1 po lewej stronie równości (4) (który równy jest $1 - d$) możemy wykorzystać już użyte po prawej stronie ciągi c_B i c_C z twierdzenia 2.1, otrzymujemy poniższy rezultat.

Twierdzenie 2.2 [4]**.** *Niech* f *będzie gładkim odwzorowaniem* $\mathbb{S}^3$ *w siebie stopnia* d*, przy czym* $|d| \geqslant 2$*. Wówczas* $D_r(f) \in \{\zeta(r) - 1, \zeta(r)\}$.

Warto w tym miejscu zaobserwować interesujące zjawisko. Wartość $D_r(f)$, dla $d \notin \{-1, 0, +1\}$, okazuje się niewrażliwa nawet na klasę homotopii odwzorowania f, a zależy tylko od r. Podobna sytuacja zachodzi niekiedy dla innych przestrzeni, a zatem $D_r(f)$ może wówczas być traktowany jako niezmiennik całej przestrzeni, a nie tylko klasy homotopii f.

Co ciekawe, o ile istnieją odpowiedniki twierdzenia 2.2 dla sfer o wyższych wymiarach, o tyle kwestia minimalizacji w przypadku dwuwymiarowym wciąż sprawia trudności. Jak dotąd problem wyznaczenia $D_r(f)$ dla odwzorowań $\mathbb{S}^2$ został rozwiązany tyko dla punktów o okresie jeden i częściowo dwa (zob. [12]).

3. Hipoteza Shuba o prędkości wzrostu liczby punktów periodycznych dla odwzorowań $\mathbb{S}^m$ w siebie

O ile dotąd interesowała nas głównie liczba elementów w zbiorze $\mathrm{Fix}(f^n)$ przy ustalonym n, to obecnie zajmiemy się kwestią wzrostu liczby punktów periodycznych wraz ze wzrostem n (zakładamy, że $\mathrm{Fix}(f^n)$ jest skończony dla każdego n). Raz jeszcze użyjmy wzoru (4) dla odwzorowań gładkich $f\colon \mathbb{S}^m \to \mathbb{S}^m$ mających stopień d spełniający nierówność $|d| \geqslant 2$. Zauważmy, że lewa strona równości (4) jest nieograniczona przy $n \to \infty$, a prawa stanowi sumę ciągów okresowych odpowiadających punktom periodycznym. Stąd wynika, że każde takie odwzorowanie gładkie f posiada nieskończenie wiele punktów periodycznych o różnych okresach minimalnych.

Rodzi się naturalne pytanie, jak szybko rosnąć może w tej sytuacji liczba punktów periodycznych. Wyniki Kaloshina pokazują, że górnego ograniczenia nie ma (zob. [15]), z drugiej strony wiadomo, że wzrost ten musi być co najmniej liniowy (zob. [1]). Ten liniowy wzrost może jednak trwać bardzo długo, aż do dowolnie dużego ustalonego okresu (zob. [5]).

Michael Shub postawił w 1974 roku hipotezę (zob. [18, problem 4]), że wzrost liczby punktów periodycznych gładkiego odwzorowania $f\colon \mathbb{S}^m \to \mathbb{S}^m$ o stopniu d, co do modułu większym niż 1, jest co najmniej (asymptotycznie) wykładniczy, czyli

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\log \# \mathrm{Fix}(f^n)}{n} \geqslant \log |d|.$$

Przez kilka dekad problem pozostawał nierozwiązany, w związku z czym Shub powtórzył go, jako pytanie otwarte, w trakcie wykładu sekcyjnego na Międzynarodowym Kongresie Matematyków w Madrycie w 2006 roku (zob. [19, problem 3]). Nawet w najprostszym przypadku dwuwymiarowej sfery $\mathbb{S}^2$ hipoteza wciąż pozostaje nierozstrzygnięta.

Jak zatem zabrać się za tak oporny problem? Jedną ze strategii jest poszerzenie liczby założeń, które umożliwi rozwiązanie zagadnienia w prostszej sytuacji.

Tak właśnie postąpili Pugh i Shub, którzy potwierdzili hipotezę Shuba dla $\mathbb{S}^2$, dodając założenie, że rozpatrywane odwzorowania zachowują równoleżniki [17]. Ta obiecująca linia badań, przewidująca analizę odwzorowań zachowujących różne typy foliacji, jest obecnie z sukcesem kontynuowana (hipoteza została potwierdzona dla foliacji południkowej w artykule [8] oraz jednobiegunowej w pracy [9]). Pozwala ona uchwycić mechanizm pojawiania się punktów periodycznych w różnych sytuacjach i dzięki temu zbliża nas do rozwiązania hipotezy w pełnej ogólności.

Podejście to przynosi efekty również dla sfer w wymiarach $m > 2$. Dotyczy to na przykład odwzorowań zachowujących foliację równoleżnikową z włóknami S^1 (zob. [7]). W tym przypadku użytecznym obiektem są pewne zbiory U – składowe spójności $\phi^{-1}(\mathrm{Int}\, J)$ zawarte w Int J, przy czym J jest bazą (czyli $(m-1)$-wymiarową kulą domkniętą D^{m-1}), a odwzorowanie $\phi\colon J \to J$ opisuje, które włókno przechodzi na które. Za pomocą tego typu zbiorów można pokusić się o opisanie strategii dowodu hipotezy (na razie dla odwzorowań zachowujących foliacje). Mówiąc bardzo ogólnie, zastosowanie teorii homotopii, własności stopnia oraz różniczkowalności w punktach periodycznych w wielu przypadkach umożliwia dowiedzenie twierdzenia o punkcie stałym dla U. Punkty te stanowią niezmiennicze okręgi dla f, na których muszą wystąpić punkty stałe f. Przy iteracjach liczba zbiorów U rośnie wykładniczo, co zapewnia taki sam wzrost liczby punktów periodycznych.

Założenie zachowywania foliacji jest na tyle silne, że często różniczkowalność na całej sferze nie jest konieczna. Prowadzi to do pytania, jaka jest rola założenia gładkości odwzorowania w hipotezie Shuba, na przykład czy może ono być zastąpione przez inny warunek. Obecnie grupa matematyków urugwajskich (zob. [11]) pracuje intensywnie nad hipotezą Shuba dla sfery dwuwymiarowej, zastępując postulat gładkości pewnymi warunkami topologicznymi, pozwalającymi sprowadzić problem do analizy odwzorowań pierścienia.

Na zakończenie krótkie podsumowanie. Gładkość jest bardzo mocnym założeniem, które w omawianych przypadkach ma znaczące konsekwencje – wymusza istnienie wielu punktów periodycznych i często bardzo szybki (wykładniczy) wzrost ich liczby. Jednocześnie w przedstawionej tematyce jest sporo problemów otwartych. Mimo że pojęcie różniczkowalności liczy sobie już kilkaset lat, to pełne zrozumienie jego roli w teorii punktów periodycznych wciąż stanowi duże wyzwanie.

Bibliografia

[1] I. K. Babenko, S. A. Bogatyi, *The behavior of the index of periodic points under iterations of a mapping*, Math. USSR Izv. 38 (1992), 1–26.

[2] R. F. Brown, R. E. Greene, *An interior fixed point property of the disc*, Amer. Math. Monthly 101 (1994), nr 1, 39–47.

[3] R. Brown, R. Greene, H. Schirmer, *Fixed points of map extensions*, [w:] *Topological fixed point theory and applications (Tianjin, 1988)*, Lecture Notes in Math., t. 1411, Springer, Berlin 1989, 24–45.

[4] G. Graff, J. Jezierski, *Minimal number of periodic points for smooth self-maps of* $\mathbb{S}^3$, Fund. Math. 204 (2009), 127–144.

[5] G. Graff, J. Jezierski, *On the growth of the number of periodic points for smooth self maps of a compact manifold*, Proc. Amer. Math. Soc. 135 (2007), nr 10, 3249–3254.

[6] G. Graff, J. Jezierski, P. Nowak-Przygodzki, *Fixed point indices of iterated smooth maps in arbitrary dimension*, J. Differential Equations 251 (2011), 1526–1548.

[7] G. Graff, M. Misiurewicz, P. Nowak-Przygodzki, *Periodic points of latitudinal maps of the m-dimensional spheres*, Discrete Contin. Dyn. Syst. 36 (2016), nr 11, 6187–6199.

[8] G. Graff, M. Misiurewicz, P. Nowak-Przygodzki, *Shub's conjecture for smooth longitudinal maps of* S^m, J. Difference Equ. Appl. 24 (2018), nr 7, 1044–1054.

[9] G. Graff, M. Misiurewicz, P. Nowak-Przygodzki, *Periodic points for sphere maps preserving monopole foliations*, Qualit. Theory Dyn. Syst. (2018), DOI: 10.1007/s12346-018-0298-8.

[10] G. Graff, P. Nowak-Przygodzki, *Fixed point indices of iterations of* C^1 *maps in* $\mathbb{R}^3$, Discrete Cont. Dyn. Syst. 16 (2006), nr 4, 843–856.

[11] G. Honorato, J. Iglesias, A. Portela, A. Rovella, F. Valenzuela, J. Xavier, *On the growth rate inequality for periodic points in the two sphere*, J. Difference Equ. Appl. 25 (2019), nr 2, 219–232.

[12] J. Jezierski, *The least number of* 2*-periodic points of a smooth self-map of* $\mathbb{S}^2$ *of degree* 2 *equals* 2, J. Fixed Point Theory Appl. 21 (2019), nr 1, 13 str.

[13] B. Jiang, *Fixed point classes from a differential viewpoint*, [w:] *Fixed point theory* (E. Fadell, G. Fournier, red.), Lecture Notes in Mathematics, t. 886, Springer 1981, 163–170.

[14] J. Jezierski, W. Marzantowicz, *Homotopy methods in topological fixed and periodic points theory*, Topological Fixed Point Theory and Its Applications, t. 3, Springer, Dordrecht 2006.

[15] V. Kaloshin, *Generic diffeomorphisms with superexponential growth of number of periodic orbits,* Comm. Math. Phys. 211 (2000), nr 1, 253–271.

[16] J. Llibre, J. Paranõs, J. A. Rodriguez, *Periods for transversal maps on compact manifolds with a given homology*, Houston J. Math. 24 (1998), nr 3, 397–407.

[17] C. Pugh, M. Shub, *Periodic points on the* 2*-sphere*, Discrete Contin. Dynam. Sys. 34 (2014), 1171–1182.

[18] M. Shub, *Dynamical systems, filtration and entropy*, Bull. Amer. Math. Soc. 80 (1974), 27–41.
[19] M. Shub, *All, most, some differentiable dynamical systems*, [w:] *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Madrid, Spain*, European Math. Society 2006, 99–120.
[20] M. Shub, P. Sullivan, *A remark on the Lefschetz fixed point formula for differentiable maps*, Topology 13 (1974), 189–191.
[21] F. Wecken, *Fixpunktklassen. III. Mindestzahlen von Fixpunkten*, Math. Ann. 118 (1942), 544–577.

Grzegorz Graff
Wydział Fizyki Technicznej i Matematyki Stosowanej
Politechnika Gdańska
grzegorz.graff@pg.edu.pl