

Imię i nazwisko autora rozprawy: Renata Zakrzewska
Dyscyplina naukowa: matematyka

ROZPRAWA DOKTORSKA

Tytuł rozprawy w języku polskim: Liczby Ramsey'a on-line dla różnych klas grafów

Tytuł rozprawy w języku angielskim: On-line Ramsey numbers for various classes of graphs

Promotor
<i>podpis</i>
dr hab., prof. UMG, Tomasz Dzido
Promotor pomocniczy
<i>podpis</i>
dr Janusz Dybizbański

Gdańsk, rok 2023

Streszczenie

Rozpatrujemy grę rozgrywaną na nieskończonej liczbie wierzchołków, w której każda runda polega na wskazaniu krawędzi przez jednego gracza - Budowniczego oraz pokolorowaniu jej przez drugiego gracza - Malarkę na jeden z dwóch kolorów, czerwony lub niebieski. Celem Budowniczego jest zmuszenie Malarki do stworzenia monochromatycznej kopii wcześniej ustalonego grafu H w jak najmniejszej możliwej liczbie ruchów. Zakładamy, że gracze grają optymalnie czyli najlepiej jak można w danym momencie i nie popełniają błędów. Malarka będzie próbowała przeszkodzić Budowniczemu jak długo się tylko da. Taką grę będziemy nazywać $\tilde{r}(\mathbf{H})$ -grą ($\tilde{r}(\mathbf{H}, \mathbf{H})$ -grą). W wersji asymetrycznej tej gry, Malarka unika czerwonej kopii grafu G oraz niebieskiej kopii grafu H . Taką grę będziemy nazywać $\tilde{r}(\mathbf{G}, \mathbf{H})$ -grą. Wartością liczby Ramsey'a on-line $\tilde{r}(H)$ - wersja symetryczna lub $\tilde{r}(G, H)$ - wersja asymetryczna, jest to minimalna liczba tur, w której gra się zakończy. W rozprawie rozważamy liczby Ramsey'a on-line dla różnych klas grafów. Praca została podzielona na 4 rozdziały.

W rozdziale 1 omawiamy historię problemu klasycznych liczb Ramsey'a jak i jej różnych wariantów. Wprowadzamy potrzebne definicje i oznaczenia.

W pierwszej części rozdziału 2 prezentujemy dotychczasowe wyniki dotyczące liczby Ramsey'a online dla ścieżek P_n zarówno w graphach symetrycznych jak i niesymetrycznych. W jego drugiej części przedstawiamy wyznaczone przez nas wartości liczb Ramsey'a on-line $\tilde{r}(P_4, P_{10})$ oraz $\tilde{r}(P_4, P_{11})$. Prezentujemy również nowe górne oszacowanie $\tilde{r}(P_4, P_n)$ dla $12 \leq n \leq 22$. Treści rozdziału 2 zostały zawarte w opublikowanej pracy [7].

Rozdział 3 podobnie jak poprzedni składa się z dwóch podrozdziałów. W pierwszym przedstawiamy znane wyniki dotyczące $\tilde{r}(S_n, P_l)$ -gry. Natomiast w drugiej części prezentujemy górne oszacowanie $\tilde{r}(S_3, P_l)$ dla $l \geq 3$ oraz dokładną wartość $\tilde{r}(S_3, P_5)$.

Rozdział 4 dotyczy liczby Ramsey'a on-line dla cykli C_n i ścieżek P_l . W pierwszym podrozdziale prezentujemy znane oszacowania jak i dokładne wartości dla tej liczby. W jego drugiej części pokazujemy nowe oszacowania z dołu i góry dla liczby Ramsey'a on-line $\tilde{r}(C_3, P_k)$ oraz $\tilde{r}(C_4, P_k)$ dla odpowiednich k oraz wyznaczamy dokładną wartość $\tilde{r}(C_4, P_9)$. Treści tego rozdziału zostały zawarte w publikacji [6].

Spis treści

Streszczenie	1
1 Wprowadzenie	3
1.1 Wstęp	3
1.2 Liczby Ramseya on-line	7
1.3 Podstawowe pojęcia teorii grafów	9
2 Liczby Ramseya on-line dla ścieżek P_n	11
2.1 Znane wyniki	11
2.2 Nowe wyniki	13
3 Liczby Ramseya on-line dla gwiazd S_n i ścieżek P_l	23
3.1 Znane wyniki	23
3.2 Nowe wyniki	25
4 Liczby Ramseya on-line dla cykli C_n i ścieżek P_l	42
4.1 Znane wyniki	42
4.2 Nowe wyniki	44
Spis rysunków	57
Spis tabel	58
Bibliografia	59

Rozdział 1

Wprowadzenie

1.1 Wstęp

Liczby Ramseya pojawiły się w matematyce w pierwszej połowie XX wieku. Angielski matematyk, ekonomista i filozof Frank Ramsey udowodnił twierdzenie, które opublikowano krótko po jego śmierci w 1930 roku. Stało się ono przedmiotem szeregu badań i dzisiaj nazywane jest jego imieniem. Zanim przedstawimy treść twierdzenia Ramseya warto najpierw przypomnieć sobie bardzo użyteczną zasadę:

Twierdzenie 1.1.1 (Zasada szufladkowa Dirichleta, [17]) *Jeżeli $X = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_t$ oraz $|X| \geq t + 1$, to $|X_i| \geq 2$ dla pewnego $i \in \{1, 2, 3, \dots, t\}$.*

Dowód tego twierdzenia jest oczywisty. Równie oczywiste jest uogólnienie zasady szufladkowej w postaci *zasady podziałowej*.

Twierdzenie 1.1.2 (Zasada podziałowa, [17]) *Niech q_1, q_2, \dots, q_t będą liczbami naturalnymi. Jeżeli $X = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_t$ oraz $|X| \geq \sum_{i=1}^t q_i - t + 1$, to $|X_i| \geq q_i$ dla pewnego $i \in \{1, 2, 3, \dots, t\}$.*

Jak widać zasada szufladkowa jest szczególnym przypadkiem zasady podziałowej. Aby to wykazać, wystarczy za wszystkie q_i wziąć liczbę 2.

Daleko idącym uogólnieniem zasady podziałowej jest wspomniane na wstępie twierdzenie Ramseya.

Twierdzenie 1.1.3 (Ramsey [21]) *Dla dowolnych liczb naturalnych r i m oraz dla dowolnego ciągu liczb naturalnych k_1, k_2, \dots, k_m istnieje liczba naturalna n taka, że:*

(*) dla dowolnego zbioru X , $|X| \geq n$ oraz podziału $\binom{X}{r} = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m$ istnieje $1 \leq i \leq m$ oraz zbiór $Y \subseteq X$ o co najmniej k_i elementach taki, że $\binom{Y}{r} \subseteq A_i$.

Symbolem $\binom{X}{r}$ oznaczamy wszystkie r -elementowe podzbiory zbioru X . Dla $r = 1$ twierdzenie to jest równoważne zasadzie szufladkowej Dirichleta. Mówiąc nieformalnie, zgodnie z twierdzeniem 1.1.3, każda odpowiednio duża struktura musi zawierać regularną podstrukturę i to o zadanym rozmiarze. Naturalną konsekwencją tego faktu jest pytanie jak duża musi być ta struktura? Czy też, jaka jest najmniejsza wartość liczby n spełniająca warunek (*)?

W połowie lat 30 XX wieku dwaj węgierscy matematycy: Paul Erdős i George Szekeres w pracy [10] wykazali, że dla każdego n istnieje liczba całkowita $N(n)$ taka, że dowolny N -elementowy zbiór punktów płaszczyzny, $N \geq N(n)$, z których żadne trzy nie są współliniowe, zawiera n punktów będących wierzchołkami n -kąta wypukłego. Do udowodnienia tejże własności potrzebowali (jako lematu) właśnie twierdzenia Ramseya. Udowodnili je w inny sposób.

Erdős głębiej zajął się tym problemem, dając początek popularyzacji twierdzenia Ramseya w środowisku matematyków. Zdefiniował kompletną sieć jako pewną liczbę punktów na płaszczyźnie, połączonych każdy z każdym krawędzią. Następnie kolorował krawędzie dwoma kolorami i szukał odpowiedzi na pytanie: jak duża musi być ta sieć, by niezależnie od sposobu pokolorowania wystąpiła zadana struktura w jednym bądź drugim kolorze. Najmniejszą z liczb spełniającą tego typu zależność nazwano dwukolorową liczbą Ramseya. W późniejszych latach rozszerzono pojęcie liczb Ramseya do liczb trójkolorowych i innych.

Definicja 1.1.4 Dla $r = 2$ oraz dowolnego ciągu liczb naturalnych k_1, k_2, \dots, k_m najmniejszą liczbę naturalną n spełniającą warunek (*) nazywamy liczbą Ramseya i oznaczamy przez $R(k_1, k_2, \dots, k_m)$.

O liczbach Ramseya często mówi się w języku teorii grafów. Wówczas definicję 1.1.4 można przedstawić równoważnie następująco:

Definicja 1.1.5 (Klasyczna liczba Ramseya) Klasyczna m -kolorowa liczba Ramseya $R(K_{k_1}, K_{k_2}, \dots, K_{k_m})$ to najmniejsza liczba naturalna n taka, że dla dowolnego m -kolorowania krawędziowego grafu pełnego $G = K_n$ istnieje i , $1 \leq i \leq m$ takie, że graf G zawiera podgraf izomorficzny z K_{k_i} , którego wszystkie krawędzie są w kolorze i .

Ponadto rozpatruje się wiele pokrewnych problemów, gdzie w kolorowaniu krawędziowym grafu pełnego K_n szukamy grafów innych niż grafów pełnych danego rozmiaru. Liczby te są zdefiniowane w następujący sposób:

Definicja 1.1.6 *Dla dowolnych grafów H_1, H_2, \dots, H_m grafowa liczba Ramseya $R(H_1, H_2, \dots, H_m)$ to najmniejsza liczba naturalna n taka, że dla dowolnego m -kolorowania krawędziowego grafu pełnego $G = K_n$ istnieje i ($1 \leq i \leq m$) takie, że graf G zawiera podgraf izomorficzny z H_i , którego wszystkie krawędzie są w kolorze i .*

Badane są także inne warianty problemu. Można tu wymienić m. in.: (a) krawędziową liczbę Ramseya, wprowadzoną przez Erdősa, Faudree, Rousseau i Schelpa [9], czyli problem polegający na wyznaczeniu najmniejszej liczby n takiej, że istnieje graf o n krawędziach, którego każde kolorowanie krawędziowe zawiera podgraf izomorficzny z H_i , o krawędziach w kolorze i ; (b) dwudzielną liczbę Ramseya, wprowadzoną przez Beineke i Schwenka [2] w 1975 roku - problem polegający na wyznaczeniu najmniejszej liczby n takiej, że dowolne kolorowanie krawędziowe pełnego grafu dwudzielnego $K_{n,n}$ zawiera podgraf izomorficzny z zadany graf dwudzielny H_i , którego wszystkie krawędzie są w kolorze i ; (c) liczbę górnego dominowania Ramseya $u(m, n)$ łącząca klasyczną liczbę Ramseya z parametrami dominowania grafów, zdefiniowaną jako najmniejsze takie p , że dla dowolnego 2-kolorowania krawędzi grafu K_p kolorem czerwonym lub niebieskim, spełniony jest warunek $\Gamma(B) \geq m$ lub $\Gamma(R) \geq n$; B i R oznaczają podgraf grafu K_p indukowany odpowiednio przez niebieskie i czerwone krawędzie, a $\Gamma(G)$ to największy rozmiar minimalnego zbioru dominującego grafu G (pierwotnie wersja dla t -kolorowania zdefiniowana w [15]); (d) nieklasyczna mieszana liczba dominowania Ramsey $v(m, G)$ zdefiniowana przez Dzido i Zakrzewska [8] w 2009 roku jako najmniejsza taka n , że dowolne 2-kolorowanie krawędzi grafu pełnego K_n kolorem czerwonym lub niebieskim spełnia warunek, że $\Gamma(B) \geq m$ lub istnieje niebieska kopia grafu G , gdzie B jest indukowanym podgrafem grafu K_n przez niebieskie krawędzie. Te kilka przykładów pokazuje jak szeroką mamy gamę wariantów liczb Ramseya.

Teoria Ramseya ma szerokie zastosowanie w różnych dziedzinach matematyki i informatyki, można tu wymienić teorię liczb, algebrę, geometrię, topologię, logikę oraz teorię informacji. Jest przydatna przy budowie i analizowaniu różnego typu sieci komunikacyjnych. Frederickson i Lynch [12] wykorzystali twierdzenie Ramseya w problemie obliczeń rozproszonych, Snir [23] zastosował je do problemu przeszukiwania posorto-

wanych tablic przy wykorzystaniu różnych modeli obliczeń równoległych. Z szerokim zakresem zastosowań można się zapoznać w przeglądowej pracy Rosty [22].

1.2 Liczby Ramseya on-line

W niniejszej rozprawie będziemy zajmować się liczbami Ramseya on-line łączącymi ze sobą teorię klasycznych liczb Ramseya, kolorowanie krawędziowe grafów i inne zagadnienia kombinatoryki. Liczby Ramseya on-line zostały wprowadzone niezależnie przez Becka [1] oraz Kurka i Rucińskiego [16]. Najłatwiej jest je zrozumieć rozpatrując grę, w której każda runda polega na wskazaniu krawędzi przez jednego gracza - Budowniczego oraz pokolorowaniu jej przez drugiego gracza - Malarkę na jeden z dwóch kolorów, czerwony lub niebieski. Celem Budowniczego jest zmuszenie Malarki do stworzenia monochromatycznej kopii wcześniej ustalonego grafu H w jak najmniejszej możliwej liczbie ruchów. Zakładamy, że gracze grają optymalnie czyli najlepiej jak można w danym momencie i nie popełniają błędów. Malarka będzie próbowała przeszkodzić Budowniczemu jak długo się tylko da. Taką grę będziemy nazywać $\tilde{r}(\mathbf{H})$ -grą ($\tilde{r}(\mathbf{H}, \mathbf{H})$ -grą). Istnieje również asymetryczna wersja tej gry, gdzie Malarka unika czerwonej kopii grafu G lub niebieskiej kopii grafu H . Taką grę będziemy nazywać $\tilde{r}(\mathbf{G}, \mathbf{H})$ -grą. Wartością liczby Ramseya on-line jest minimalna liczba tur, w której gra się zakończy. Formalnie definicje tych liczb zapiszmy następująco:

Definicja 1.2.1 (wersja symetryczna) Liczba Ramseya on-line oznaczana przez $\tilde{r}(H) = \tilde{r}(H, H)$ to minimalna liczba rund w $\tilde{r}(H)$ -grze.

Definicja 1.2.2 (wersja asymetryczna) Liczba Ramseya on-line oznaczana przez $\tilde{r}(G, H)$ to minimalna liczba rund w $\tilde{r}(G, H)$ -grze.

Liczby Ramseya on-line były szeroko rozważane, aczkolwiek najprawdopodobniej wyznaczenie dokładnych wartości tych liczb jest trudniejsze niż wyznaczenie dokładnych klasycznych liczb Ramseya.

Najlepsze znane oszacowanie liczby $\tilde{r}(K_t)$ przy stałej $c > 0$ jest następujące:

$$\frac{r(t)}{2} \leq \tilde{r}(K_t) \leq t^{-c \frac{\log t}{\log \log t}} 4^t$$

Autorem dolnego oszacowanie jest Alon (przedstawione jest ono w pracy [1]). Górne oszacowanie przedstawił Conlon [3]. W tej samej pracy Conlon udowodnił również, że dla pewnej stałej $C > 1$ i nieskończenie wielu wartości t , $\tilde{r}(K_t) \leq C^{-t} \binom{r(t)}{2}$.

Dla ogólnych grafów G , dolne oszacowanie dla $\tilde{r}(G)$ zostało pokazane przez Grytchuka, Kiersteada i Prałata [14]:

Twierdzenie 1.2.3 ([14]) *Dla dowolnego grafu G zachodzi :*

$$\tilde{r}(G) \geq \beta(G)(\Delta(G) - 1)/2 + e(G),$$

gdzie $\beta(G)$ to wielkość najmniejszego pokrycia wierzchołkowego grafu G .

W prezentowanej rozprawie przedstawimy wyniki dotyczące liczby Ramsey'a online, których parametrami będą grafy takich klas jak: ścieżki P_n , cykle C_n oraz gwiazdy S_n .

1.3 Podstawowe pojęcia teorii grafów

Definicja 1.3.1 *Grafem G nazywamy parę $G = (V(G), E(G))$, gdzie $V(G)$ jest skończonym zbiorem wierzchołków, $E(G) \subseteq \binom{V}{2}$ jest zbiorem krawędzi.*

$\binom{V}{2}$ oznacza zbiór wszystkich dwuelementowych podzbiorów zbioru V . Zbiór wierzchołków grafu G oznaczamy będziemy przez $V(G)$, zaś zbiór krawędzi przez $E(G)$. Liczebność tych zbiorów będziemy oznaczać odpowiednio przez $v(G)$ oraz $e(G)$. Sąsiedztwem wierzchołka $v \in V(G)$ w grafie G nazywamy zbiór wierzchołków $N_G(v) = \{u : \{u, v\} \in E(G)\}$. Elementy tego zbioru nazywamy sąsiadami wierzchołka v , zaś jego moc stopniem wierzchołka v i oznaczamy $\deg_G(v) = |N_G(v)|$. Stopień minimalny w grafie G oznaczamy $\delta_G = \min\{\deg_G(v) : v \in V(G)\}$. Analogicznie, stopień maksymalny oznaczamy przez $\Delta_G = \max\{\deg_G(v) : v \in V(G)\}$. W przypadku gdy jasne jest jakiego grafu dotyczą powyższe parametry, będziemy pomijali G w indeksie dolnym.

Definicja 1.3.2 *Graf G nazywamy regularnym stopnia r , jeżeli wszystkie jego wierzchołki są stopnia r .*

Definicja 1.3.3 *Graf G nazywamy spójnym, jeśli dla każdego podzbiory zbioru wierzchołków $V(G)$ na dwa niepuste podzbiory $V_1(G)$ i $V_2(G)$ istnieje krawędź $\{v_1, v_2\}$ taka, że $v_1 \in V_1$ oraz $v_2 \in V_2$.*

Innymi słowy, grafem spójnym nazywamy graf, w którym jest możliwe przejście pomiędzy każdą parą wierzchołków.

Definicja 1.3.4 *Graf H jest podgrafem grafu G (oznaczamy $H \subseteq G$), jeżeli $V(H) \subseteq V(G)$ oraz $E(H) \subseteq E(G)$.*

Definicja 1.3.5 *Podgraf indukowany przez zbiór wierzchołków $A \subseteq V(G)$ oznaczamy $G[A]$ i jest to graf (A, E') , gdzie $E' = E(G) \cap \binom{A}{2}$.*

Definicja 1.3.6 *Grafy G_1 oraz G_2 nazywamy izomorficznymi, jeżeli istnieje bijekcja $h : V(G_1) \rightarrow V(G_2)$ taka, że $\forall_{u, v \in V(G_1)} \{u, v\} \in E(G_1) \iff \{h(u), h(v)\} \in E(G_2)$.*

Definicja 1.3.7 *Dopełnieniem grafu $G = (V, E)$ jest graf $(V, \binom{V}{2} - E(G))$, oznaczany przez \overline{G} .*

Definicja 1.3.8 Dla grafów G i H , symbolem $G + H$ oznaczamy graf o zbiorze wierzchołków $V(G) \cup V(H)$ oraz zbiorze krawędzi $E(G) \cup E(H) \cup \{\{u, v\} : u \in V(G) \wedge v \in V(H)\}$

Definicja 1.3.9 m -kolorowaniem krawędziowym grafu $G = (V, E)$ nazywamy dowolną funkcję $f : E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, m\}$. Jeżeli $f(e) = i$ to mówimy, że krawędź e jest pokolorowana kolorem i .

Definicja 1.3.10 Grafem pełnym K_n nazywamy graf o n wierzchołkach oraz zbiorze krawędzi $E(K_n) = \binom{V(K_n)}{2}$.

Definicja 1.3.11 Graf $K_{n,m}$ nazywamy grafem pełnym dwudzielnym wtedy i tylko wtedy, gdy $K_{n,m} = \overline{K_n} + \overline{K_m}$.

Definicja 1.3.12 Drzewem T_n nazywamy n -wierzchołkowy graf spójny, który nie zawiera cykli (jest acykliczny).

W prezentowanej rozprawie omawiamy liczby Ramsey'a on-line, których parametrami są grafy różnych klas. Klasy te zdefiniowane są poniżej.

Definicja 1.3.13 Cyklem C_n nazywamy spójny, regularny graf stopnia drugiego o n wierzchołkach.

Definicja 1.3.14 Ścieżką P_n nazywamy graf powstały z cyklu C_n po usunięciu dowolnej krawędzi.

Definicja 1.3.15 Gwiazdą S_n nazywamy graf pełny dwudzielny $K_{1,n}$. Drzewo z jednym wierzchołkiem wewnętrznym i n liśćmi.

Rozdział 2

Liczby Ramseya on-line dla ścieżek

P_n

2.1 Znane wyniki

W rozdziale tym będziemy zajmować się liczbami Ramseya on-line dotyczącymi symetrycznej i asymetrycznej gry opartej na ścieżkach P_n . Wydawać by się mogło, że ścieżki P_n są grafami "prostymi" do rozpatrzenia w grze Ramseya on-line, ale już w tym przypadku znanych jest tylko kilka dokładnych wartości. Łatwo możemy zauważyć, że $\tilde{r}(P_n) \geq 2n - 3$. Wynika to z prostej obserwacji, że Malarka może najpierw bezpiecznie (nie utworzy ścieżki P_n) pokolorować $n - 2$ wskazane krawędzie na czerwono a następnie $n - 2$ krawędzie na niebiesko. Najlepsze, znane ograniczenie liczby Ramseya on-line dla ścieżek P_n w przypadku gry symetrycznej udowodnili Grytczuk, Kierstead i Prałat w [14]:

Twierdzenie 2.1.1 ([14]) *Dla $n \geq 2$, mamy $2n - 3 \leq \tilde{r}(P_n) \leq 4n - 7$.*

Również w przypadku asymetrycznej gry:

Twierdzenie 2.1.2 ([14]) *Dla wszystkich $k, l \in N$, mamy*

$$k + l - 1 \leq \tilde{r}(P_{k+1}, P_{l+1}) \leq 2k + 2l - 3.$$

Rozpatrując liczby Ramseya on-line dla ścieżek P_n w przypadku gry niesymetrycznej mamy niewielką wiedzę o ogólnych ograniczeniach. Cyman, Dzido, Lapinskas i Lo w [5] udowodnili następujące własności:

Twierdzenie 2.1.3 ([5]) Dla $n \geq 2$, mamy $\tilde{r}(P_3, P_{n+1}) = \lceil 5n/4 \rceil$.

Twierdzenie 2.1.4 ([5]) Dla $n \geq 2$, mamy $(7n + 2)/5 \leq \tilde{r}(P_4, P_{n+1}) \leq (7n + 52)/5$.

Poniższa tabela prezentuje znane wartości liczb Ramseya on-line dla małych ścieżek zarówno w przypadku symetrycznej jak i asymetrycznej gry:

n \ m	2	3	4	5	6	7	8	9
2	1[G]							
3	2[P]	3[G]						
4	3[P]	4[P]	5[G]					
5	4[P]	5[P]	6[P]	7[G]				
6	5[P]	7[P]	8[P]	9[P]	10[G]			
7	6[P]	8[P]	9[P]	10[P]	11[P]	12[P]		
8	7[P]	9[P]	11[P]	12[P]	13[P]	14[P]	15[P]	
9	8[P]	10[P]	12[P]	13[P]	14[P]	15[P]	16[P]	17[P]

Tabela 2.1: Znane wartości liczb Ramseya on-line dla ścieżek P_n .

Wyniki oznaczone jako [G] możemy znaleźć w pracy [14] zaś przez [P] w pracach [19] oraz [20].

W pracy [5] postawiono ciekawą hipotezę, a mianowicie:

Hipoteza 2.1.5 Dla wszystkich $n \geq 3$, mamy $\tilde{r}(P_4, P_{n+1}) = \lceil (7n + 2)/5 \rceil$.

Porównując znane wartości liczb $\tilde{r}(P_4, P_{n+1})$, które zawarte są w tabeli 2.1 jak np. $\tilde{r}(P_4, P_6) = \lceil (7 \cdot 5 + 2)/5 \rceil = \lceil \frac{37}{5} \rceil = 8$ czy $\tilde{r}(P_4, P_8) = \lceil (7 \cdot 7 + 2)/5 \rceil = \lceil \frac{51}{5} \rceil = 11$, widzimy że hipoteza 2.1.5 zachodzi dla tych wartości. Kolejne znane wyniki dla dłuższych ścieżek, również dają potwierdzenie tej hipotezy.

2.2 Nowe wyniki

Prezentację nowych wyników zaczniemy od lematu.

Lemat 2.2.1 $\tilde{r}(P_4, P_n) \leq \tilde{r}(P_4, P_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}) + \tilde{r}(P_4, P_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}) + 3$.

Dowód. Strategia Budowniczego polega na tym, aby otrzymać dwie wierzchołkowo-rozłączne niebieskie ścieżki $P_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ oraz $P_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$ przy użyciu co najwyżej $\tilde{r}(P_4, P_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor})$ oraz odpowiednio $\tilde{r}(P_4, P_{\lceil \frac{n}{2} \rceil})$ ruchów dla utworzenia każdej z nich. Następnie łatwo możemy zauważyć, że Budowniczy potrzebuje co najwyżej trzech rund gry, aby wymusić na Malarce takie pokolorowanie połączenia końców tych ścieżek, że powstanie niebieska ścieżka P_n lub czerwoną ścieżkę P_4 . Wystarczy, że w pierwszym ruchu połączy krawędzią wierzchołki początkowe ścieżek $P_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ oraz $P_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$ - Malarka musi użyć koloru czerwonego, w przeciwnym wypadku powstanie niebieska ścieżka P_n . W drugim ruchu Budowniczy połączy krawędzią wierzchołki końcowe obu ścieżek a Malarka jest zmuszona postąpić jak w rundzie pierwszej. W trzeciej turze Budowniczy połączy krawędzią początkowy wierzchołek ścieżki $P_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ z końcowym wierzchołkiem ścieżki $P_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$. Jakiiegokolwiek koloru użyje Malarka, uzyskamy niebieską ścieżkę P_n lub czerwoną ścieżkę P_4 . □

Z lematu 2.2.1 otrzymujemy $\tilde{r}(P_4, P_{10}) \leq 2\tilde{r}(P_4, P_5) + 3 = 2 \cdot 6 + 3 = 15$. Jeśli Budowniczy realizując swoją strategię będzie bardziej "ostrożny" w łączeniu obu krótszych, niebieskich ścieżek niż w lemacie 2.2.1, otrzymamy dokładną wartość liczby Ramseya online $\tilde{r}(P_4, P_{10})$.

Twierdzenie 2.2.2 (Dzido, Zakrzewska [7]) $\tilde{r}(P_4, P_{10}) = 13$.

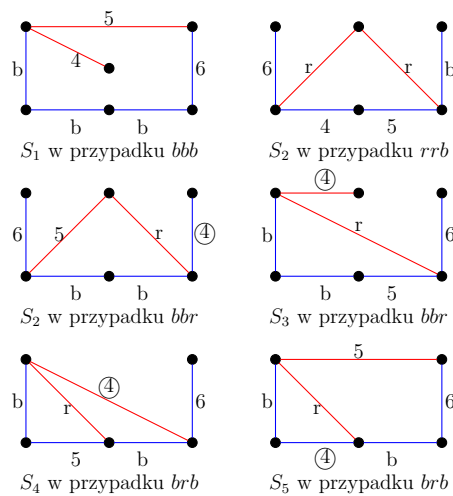
Dowód. Bezpośrednio z twierdzenia 2.1.4 otrzymujemy $\tilde{r}(P_4, P_{10}) \geq 13$. Zatem wystarczy udowodnić, że Budowniczy może wygrać $\tilde{r}(P_4, P_{10})$ -grę w ciągu 13 rund.

Niech strategia Budowniczego w $\tilde{r}(P_4, P_{10})$ -grze polega na tym, że zaczyna od rozegrania dwóch niezależnych $\tilde{r}(P_4, P_5)$ -gier. Pamiętajmy, że zarówno Budowniczy jak i Malarka grają optymalnie. Malarka chce uniknąć czerwonej ścieżki P_4 , więc Budowniczy wymusi na Malarce stworzenie dwóch oddzielnych niebieskich P_5 . Na początku zauważmy, że jeśli Budowniczy był w stanie skonstruować niebieską P_5 w co najwyżej pięciu rundach, a następnie wymusić drugą niebieską P_5 w co najwyżej pięciu ruchach, to stosując podobne rozumowanie jak w dowodzie lematu 2.2.1 mamy wynik. Oczywiście otrzymanie każdej z obu niezależnych niebieskich ścieżek P_5 w pięciu ruchach oznaczałoby, że Malarka nie gra optymalnie ($\tilde{r}(P_4, P_5) = 6$).

Rozpatrzmy zatem bardzo starannie opisaną przez Prałata w [19] strategię dla $\tilde{r}(P_4, P_5)$ -gry, z której skorzysta Budowniczy w obu niezależnych $\tilde{r}(P_4, P_5)$ -grach.

W strategii tej, Budowniczy zaczyna od wskazania ścieżki P_4 w pierwszych 3 rundach, dla której to dopuszczalne są cztery nieizomorficzne pokolorowania tejże ścieżki. Pierwszy wariant to wszystkie krawędzie niebieskie - bbb . Drugi wariant w kolejności kolorowania krawędzi: czerwona, czerwona, niebieska - rrb . Trzeci wariant to w kolejności niebieska, niebieska, czerwona bbr oraz ostatni przypadek - niebieska, czerwona, niebieska - brb . Wykluczamy rrr gdyż jest to czerwona P_4 oraz wykluczamy możliwość pokolorowania w kolejności czerwona, niebieska, czerwona - rbr z tego względu, iż jak pokazuje Prałat w [19], takie pokolorowanie stwarza dla Malarki strategię tzw. "prze-trwania" do końca szóstej rundy, tzn. Budowniczy może nie wymusić na Malarce ani czerwonego P_4 ani niebieskiego P_5 w pięciu ruchach. By uniknąć rbr możemy posłużyć się strategią przewidzianą dla Budowniczego w przypadku liczby $\tilde{r}(P_3, P_5)$ i opisaną w [19]. Pokolorowanie wyjściowych ścieżek układem kolorystycznym bbb , rrb , bbr oraz brb pozwala Budowniczemu uzyskać w kolejnych trzech rundach niebieską ścieżkę P_5 bądź czerwoną P_4 .

Wynikiem takiego wyboru sposobu zagrania przez Budowniczego w $\tilde{r}(P_4, P_5)$ -grze jest powstanie jednej z pięciu nieizomorficznych struktur nazwanych S_i dla $i = 1, \dots, 5$, przedstawionych na rysunku 2.1. Litery b, r to kolory początkowej ścieżki P_4 a cyfry 4, 5, 6 oznaczają trzy ostatnie rundy $\tilde{r}(P_4, P_5)$ -gry. Cyfra w kółku oznacza, że w tej rundzie Malarka ma swobodę kolorowania i rozpatrujemy oba przypadki.



Rysunek 2.1: Wszystkie możliwe struktury dla $\tilde{r}(P_4, P_5)$ -gry.

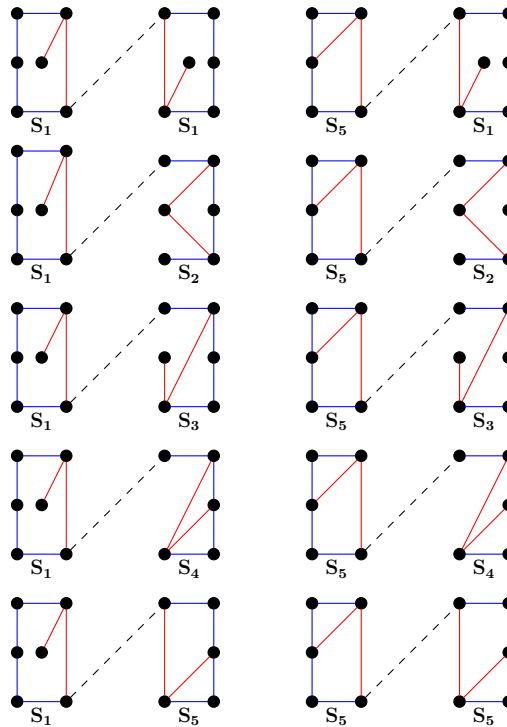
Zauważmy, iż w przypadku początkowego pokolorowania ścieżki P_4 układem rrb

oraz w jednym przypadku pokolorowania w kolejności *bbr*, uzyskujemy tę samą strukturę S_2 . Wynik pokolorowania we wszystkich pięciu strukturach jest niezależny od sposobu postępowania przez Malarkę.

Przypomnijmy zatem, że początkowa strategia Budowniczego w $\tilde{r}(P_4, P_{10})$ -grze polega na zastosowaniu strategii $\tilde{r}(P_4, P_5)$ -gry opisanej w [19] w dwóch oddzielnych grach. Pozostało wykazać, iż wystarczy 1 ruch, aby połączyć struktury S_i uzyskane w tych oddzielnych grach aby uzyskać niebieską P_{10} . Rozpatrzmy następujące lematy:

Lemat 2.2.3 *Niech w $\tilde{r}(P_4, P_{10})$ -grze Budowniczy otrzyma strukturę S_1 lub S_5 w pierwszej $\tilde{r}(P_4, P_5)$ -grze. Wówczas niezależnie od użytej przez Malarkę strategii w drugiej $\tilde{r}(P_4, P_5)$ -grze, po zakończeniu tej partii i wykonaniu jednego ruchu otrzymamy albo czerwoną kopię P_4 albo niebieską kopię P_{10} .*

Dowód. Budowniczy łączy krawędzią końcowy wierzchołek czerwonej ścieżki P_3 , który jest jednocześnie końcowym wierzchołkiem niebieskiej P_5 w S_1 lub S_5 z końcowym wierzchołkiem niebieskiej P_5 w strukturze S_i dla $i = 1, 2, 3, 4, 5$ uzyskanej w drugiej $\tilde{r}(P_4, P_5)$ -grze. Niezależnie od użytego przez Malarkę koloru niebieskiego czy czerwonego do pokolorowania tej krawędzi, uzyskamy albo czerwoną P_4 albo niebieską P_{10} .



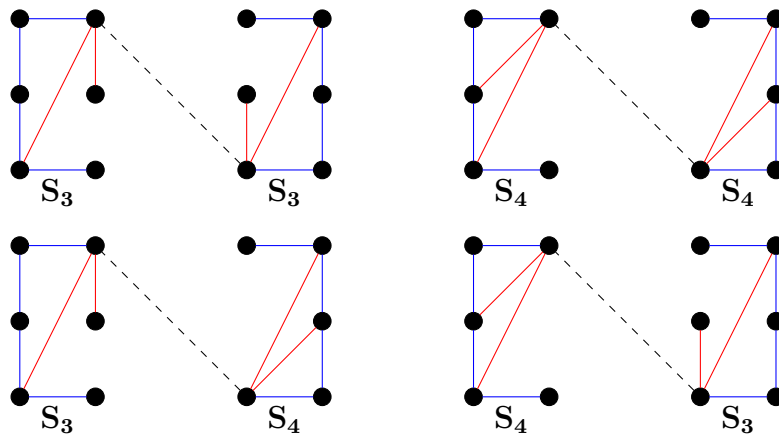
Rysunek 2.2: Wszystkie warianty tur $\tilde{r}(P_4, P_{10})$ -gry z lematu 2.2.3.

Wszystkie warianty tur gry z lematu 2.2.3 przedstawia rysunek 2.2. Ostatni, niezależny od koloru ruch Malarki jest zaznaczony przerywaną linią.

□

Lemat 2.2.4 *Niech w $\tilde{r}(P_4, P_{10})$ -grze Budowniczy otrzyma strukturę S_3 lub S_4 w obydwu $\tilde{r}(P_4, P_5)$ -grach. Wówczas niezależnie od użytego przez Malarkę koloru do pokolorowania krawędzi łączącej obie struktury, otrzymamy albo czerwoną kopię P_4 albo niebieską kopię P_{10} .*

Dowód. Budowniczy łączy krawędzią końcowy wierzchołek niebieskiej ścieżki P_5 , który jest jednocześnie środkowym wierzchołkiem czerwonej ścieżki P_3 , w pierwszej $\tilde{r}(P_4, P_5)$ -grze z analogicznym wierzchołkiem uzyskanym w drugiej $\tilde{r}(P_4, P_5)$ -grze. Niezależnie od użytego przez Malarkę koloru do pokolorowania tej krawędzi, otrzymujemy czerwoną P_4 albo niebieską P_{10} .



Rysunek 2.3: Warianty tur gry z lematu 2.2.4.

Warianty tur gry z lematu 2.2.4 przedstawia rysunek 2.3. Ostatni, niezależny od koloru ruch Malarki jest zaznaczony przerywaną linią.

□

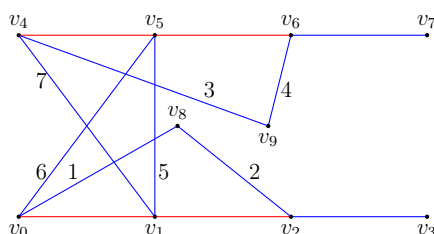
Pamiętając, że struktura S_2 może wystąpić w $\tilde{r}(P_4, P_5)$ -grze zarówno przy startowym układzie rrb jak i bbr rozpatrzmy:

Lemat 2.2.5 *Niech w $\tilde{r}(P_4, P_{10})$ -grze Budowniczy uzyska układ rrb lub bbr w trzech ruchach w obu $\tilde{r}(P_4, P_5)$ -grach. Wówczas po kolejnych siedmiu rundach gry otrzyma czerwoną ścieżkę P_4 lub niebieską P_{10} .*

Dowód. Istnieją tylko trzy możliwe przypadki pokolorowania, których może dokonać Malarka.

Przypadek 1 Budowniczy w pierwszych trzech rundach w obu $\tilde{r}(P_4, P_5)$ -grach uzyskał układ rrb .

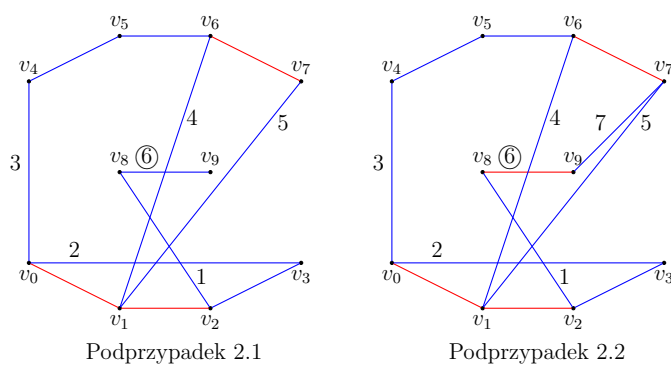
Niech oba układy będą oparte na wierzchołkach odpowiednio: $v_0v_1v_2v_3$ oraz $v_4v_5v_6v_7$. Budowniczy tworzy krawędzie: $v_0v_8, v_2v_8, v_4v_9, v_6v_9, v_1v_5, v_0v_5$ i v_1v_4 przy czym v_8 oraz v_9 są nowymi wierzchołkami. Jeśli Malarka, którąkolwiek z tych krawędzi pokoloruje na czerwono, wówczas powstanie czerwona ścieżka P_4 . Zatem wszystkie te krawędzie jest zmuszona pokolorować na niebiesko. Łącznie po 13 rundach gry powstaje niebieska ścieżka P_{10} oparta na wierzchołkach $v_3v_2v_8v_0v_5v_1v_4v_9v_6v_7$. Powyższy przypadek obrazuje rysunek 2.4, na którym cyfry przy krawędziach oznaczają kolejno wykonywane ruchy.



Rysunek 2.4: Niebieska ścieżka P_{10} w Przypadku 1 dowodu lematu 2.2.5.

Przypadek 2 Budowniczy w jednej $\tilde{r}(P_4, P_5)$ -grze uzyskał układ rrb , zaś w drugiej, układ bbr .

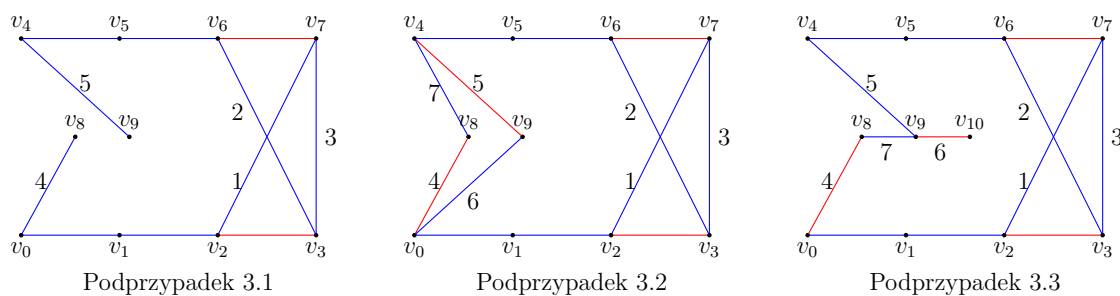
Niech pierwszy układ będzie oparty na wierzchołkach $v_0v_1v_2v_3$, natomiast drugi na $v_4v_5v_6v_7$. Budowniczy najpierw tworzy pięć krawędzi $v_2v_8, v_0v_3, v_0v_4, v_1v_6$ i v_1v_7 , gdzie ponownie v_8 oraz v_9 są nowymi wierzchołkami. Jeśli Malarka, którąkolwiek z tych krawędzi pokoloruje na czerwono, uzyskamy czerwona ścieżkę P_4 . Zatem Malarka musi pokolorować wszystkie te krawędzie na niebiesko. Następnie Budowniczy tworzy krawędź v_8v_9 . Jeśli Malarka użyje ponownie koloru niebieskiego, uzyskamy niebieską ścieżkę P_{10} - $v_9v_8v_2v_3v_0v_4v_5v_6v_1v_7$ - podprzypadek 2.1. Przy pokolorowaniu tej krawędzi na czerwono - podprzypadek 2.2, Budowniczy tworzy krawędź v_7v_9 . Pokolorowanie tej krawędzi na czerwono daje czerwona ścieżkę P_4 opartą na wierzchołkach $v_6v_7v_9v_8$. Przez niebieskie pokolorowanie uzyskamy niebieską P_{10} - $v_8v_2v_3v_0v_4v_5v_6v_1v_7v_9$. Oba podprzypadki obrazuje rysunek 2.5, na którym cyfra w kółku oznacza, że w tym ruchu Malarka ma swobodę kolorowania i rozpatrujemy oba przypadki.



Rysunek 2.5: Niebieska ścieżka P_{10} powstała w podprzypadkach przypadku 2 dowodu lematu 2.2.5.

Przypadek 3 Budowniczy w obu $\tilde{r}(P_4, P_5)$ -grach uzyskał układ *bbr*.

Niech oba układy będą oparte na wierzchołkach odpowiednio: $v_0v_1v_2v_3$ oraz $v_4v_5v_6v_7$. Budowniczy tworzy wpieryw krawędzie v_2v_7 , v_3v_6 oraz v_3v_7 . Jeśli Malarka, którąkolwiek z tych krawędzi pokoloruje na czerwono, wówczas powstanie czerwona ścieżka P_4 . Zatem wszystkie muszą zostać niebieskie. Następnie Budowniczy tworzy krawędzie v_0v_8 oraz v_4v_9 , przy czym v_8 i v_9 stanowią nowe wierzchołki. Jeśli Malarka pokoloruje obie te krawędzie na niebiesko, powstanie niebieska ścieżka P_{10} - $v_8v_0v_1v_2v_7v_3v_6v_5v_4v_9$ - podprzypadek 3.1 na rysunku 2.6. Jeśli pokoloruje obie na czerwono, wówczas Budowniczy tworzy krawędzie v_0v_9 i v_4v_8 wymuszając niebieską P_{10} - $v_9v_0v_1v_2v_7v_3v_6v_5v_4v_8$ - podprzypadek 3.2 na rysunku 2.6. Załóżmy zatem, że Malarka koloruje krawędź v_0v_8 na czerwono, natomiast v_4v_9 na niebiesko. Budowniczy tworzy krawędź v_9v_{10} , gdzie v_{10} jest nowym wierzchołkiem, którą Malarka musi pokolorować na czerwono (w przeciwnym wypadku powstanie niebieska P_{10}). Krawędź v_8v_9 kończy podprzypadek 3.3. Jakikolwiek jej pokolorowanie powoduje uzyskanie w sumie w 13 ruchach czerwonej ścieżki P_4 lub niebieskiej P_{10} - $v_8v_9v_4v_5v_6v_3v_7v_2v_1v_0$.



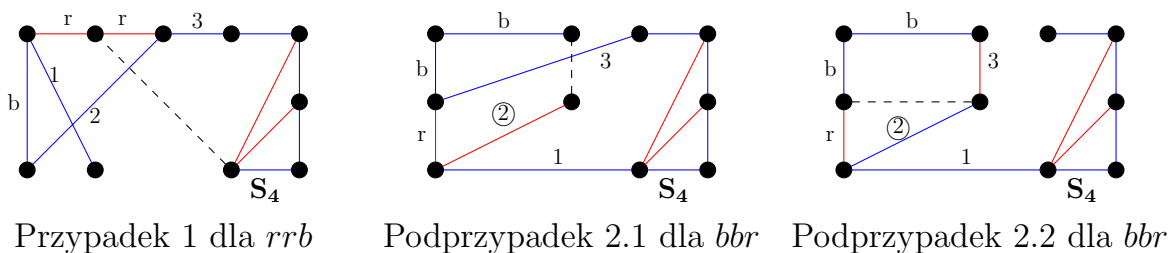
Rysunek 2.6: Niebieska ścieżka P_{10} powstała w podprzypadkach przypadku 3 dowodu lematu 2.2.5.

□

Lemat 2.2.6 Niech w $\tilde{r}(P_4, P_{10})$ -grze Budowniczy uzyska układ rrb lub bbr w trzech ruchach w pierwszej $\tilde{r}(P_4, P_5)$ -grze oraz układ bbb lub brb w trzech ruchach drugiej $\tilde{r}(P_4, P_5)$ -gry. Wówczas w kolejnych siedmiu rundach gry otrzyma czerwoną ścieżkę P_4 lub niebieską P_{10} .

Dowód. Kontynuując drugą z $\tilde{r}(P_4, P_5)$ -gier, Budowniczy wymusi na Malarce takie pokolorowanie, że uzyskamy jedną ze struktur: S_1, S_4 lub S_5 . Jeśli będą to struktury S_1 lub S_5 , to wystarczy w pierwszej $\tilde{r}(P_4, P_5)$ -grze uzyskać niebieską P_5 . Wiemy, że wychodząc od układu rrb , chcąc uzyskać niebieską ścieżkę P_5 dochodzimy do struktury S_2 . Wówczas na podstawie lematu 2.2.3 kończymy główną grę. Jeśli natomiast w pierwszej grze zaczniemy od układu bbr chcąc uzyskać niebieską ścieżkę P_5 dochodzimy do struktury S_2 lub S_3 . Jeżeli w drugiej grze uzyskamy struktury S_1 lub S_5 , to również na podstawie lematu 2.2.3 kończymy główną grę.

Jeśli zaś w drugiej grze uzyskamy strukturę S_4 , wówczas Budowniczy potrzebuje już tylko czterech ruchów do zakończenia $\tilde{r}(P_4, P_{10})$ -gry. Możliwe pokolorowania w tych czterech ostatnich ruchach obrazuje rysunek 2.7. Uzyskujemy dwa przypadki, przy czym drugi przypadek dzieli się na dwa podprzypadki. Krawędź oznaczona przerywaną linią obrazuje ostatnie kolorowanie. Bez względu na wybór czerwonego lub niebieskiego koloru przez Malarkę uzyskamy czerwoną P_4 lub niebieską P_{10} . Krawędź oznaczona cyfrą w kółku pokazuje możliwość pokolorowania jednym lub drugim kolorem tworząc wspomniane podprzypadki.



Rysunek 2.7: Możliwe 4 ostatnie kolorowania w obu $\tilde{r}(P_4, P_5)$ -grach dla lematu 2.2.6 przy strukturze S_4 .

Na rysunku 2.7 ostatni ruch Budowniczego zaznaczony jest przerywaną linią.

□

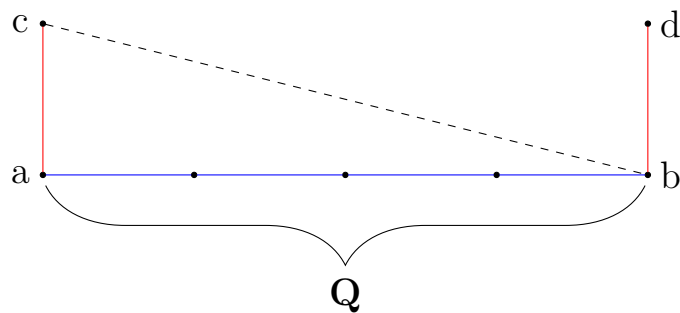
Biorąc pod uwagę, że wartość $\tilde{r}(P_4, P_5) = 6$ oraz fakt, że lematy 2.2.3, 2.2.4, 2.2.5 oraz 2.2.6 wyczerpują możliwe pokolorowania w $\tilde{r}(P_4, P_5)$ -grze, uzyskujemy górne ograniczenie dla $\tilde{r}(P_4, P_{10})$ -gry a mianowicie $\tilde{r}(P_4, P_{10}) \leq 13$. Przypomnijmy, że z twierdzenia 2.1.4 mamy $\tilde{r}(P_4, P_{13}) \geq 13$, co kończy dowód twierdzenia o dokładnej wartości liczby Ramseya online $\tilde{r}(P_4, P_{13}) = 13$.

□

Pokażemy teraz, że Budowniczy może wygzekwować albo dłuższą niebieską ścieżkę albo czerwoną ścieżkę P_4 poprzez proste rozszerzenie niebieskiej ścieżki.

Lemat 2.2.7 *Niech Q będzie nietrywialną niebieską ścieżką, o wierzchołkach odpowiednio początkowym a i końcowym b . Wówczas Budowniczy może wymusić na Malarce takie pokolorowanie krawędzi, że uzyskamy czerwoną ścieżkę P_4 lub niebieską ścieżkę o długości $e(Q) + 1$ w co najwyżej trzech ruchach.*

Dowód. Niech c i d będą nowymi wierzchołkami. Wówczas Budowniczy stworzy krawędzie ac , bd oraz bc . Jeśli, którąkolwiek z tych krawędzi Malarka pokoloruje na niebiesko, otrzymamy niebieską ścieżkę dłuższą od wyjściowej ścieżki Q o 1. W takim razie, aby tego uniknąć Malarka pokoloruje wszystkie te krawędzie na czerwono, tworząc czerwoną ścieżkę P_4 . Na poniższym rysunku 2.8 ostatni ruch Budowniczego zaznaczony jest przerywaną linią. W przypadku użycia czerwonego koloru mamy w co najwyżej trzech ruchach czerwoną P_4 , w przypadku niebieskiego koloru wydłużymy niebieską ścieżkę Q o 1.



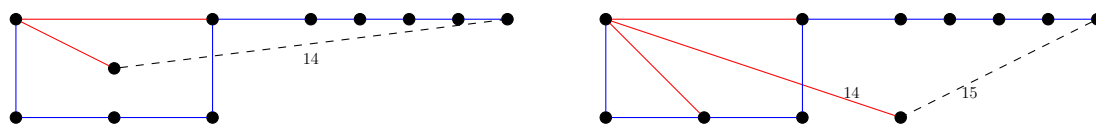
Rysunek 2.8: Utworzenie niebieskiej ścieżki o długości $e(Q) + 1$.

□

Twierdzenie 2.2.8 (Dzido, Zakrzewska [7]) $\tilde{r}(P_4, P_{11}) = 15$.

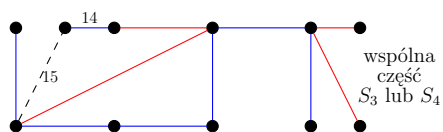
Dowód. Z twierdzenia 2.1.4 mamy: $\tilde{r}(P_4, P_{11}) \geq 15$. Wystarczy zatem pokazać, że Budowniczy może wygrać $\tilde{r}(P_4, P_{11})$ -grę w 15 rundach.

Budowniczy zaczyna od $\tilde{r}(P_4, P_{10})$ -gry, aby w co najwyżej 13 ruchach wymusić niebieską ścieżkę P_{10} . Jeżeli Budowniczy osiągnie ten cel w 12 lub mniejszej ilości tur, to korzystając z lematu 2.2.7 kończymy grę w co najwyżej 15 ruchach. Pozostaje zatem rozpatrzyć przypadek uzyskania niebieskiej ścieżki P_{10} w startowej grze $\tilde{r}(P_4, P_{10})$, w dokładnie 13 ruchach. Stosując strategię opisaną w dowodzie twierdzenia 2.2.2 udowodnimy, że w każdym z przypadków rozważanych w lematach: 2.2.3, 2.2.4, 2.2.5 oraz 2.2.6 wystarczą dwa ruchy, aby wymusić na Malarce takie kolorowanie, że uzyskamy czerwoną ścieżkę P_4 lub niebieską P_{11} . W tym celu analizujemy dokładnie przypadek po przypadku ostatnie dwa ruchy co przedstawiamy na rysunku 2.9.

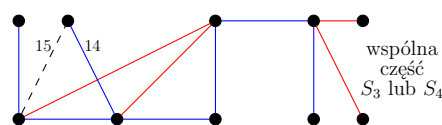


Przypadek 1 dla lematu 2.2.3.

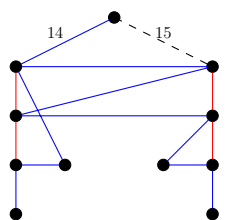
Przypadek 2 dla lematu 2.2.3.



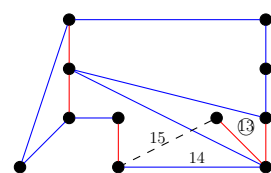
Przypadek 1 dla lematu 2.2.4.



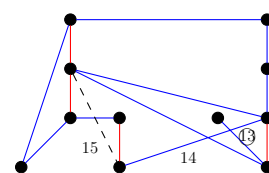
Przypadek 2 dla lematu 2.2.4.



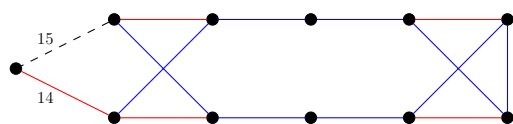
Przypadek 1 dla lematu 2.2.5.



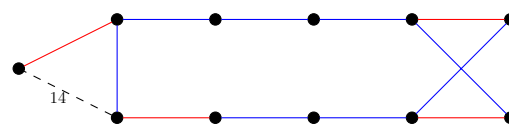
Przypadek 2a dla lematu 2.2.5.



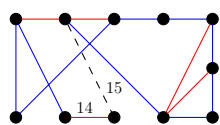
Przypadek 2b dla lematu 2.2.5.



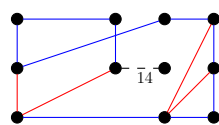
Przypadek 3a dla lematu 2.2.5.



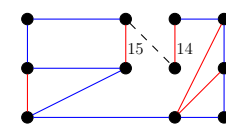
Przypadek 3b dla lematu 2.2.5.



Przypadek 1 dla lematu 2.2.6.



Przypadek 2a dla lematu 2.2.6.



Przypadek 2b dla lematu 2.2.6.

Rysunek 2.9: Wszystkie możliwe struktury kolorowań w strategii dla $\tilde{r}(P_4, P_{11})$.

Ostatni, piętnasty bądź w niektórych przypadkach czternasty ruch jest zaznaczony przerywaną linią. Przypadek drugi dla lematu 2.2.5 poprzez możliwość pokolorowania krawędzi w trzynastym ruchu w dowolny sposób, powoduje podział na podprzypadki. Na rysunku wyrażamy to poprzez zapisanie liczby trzynście w kółku.

□

Stosując lemat 2.2.1, twierdzenia 2.2.2 i 2.2.8 oraz znane liczby $\tilde{r}(P_4, P_{\frac{n}{2}})$ dla $12 \leq n \leq 18$ (tabela 2.1), otrzymaliśmy nowe górne ograniczenia liczby $\tilde{r}(P_4, P_n)$ dla $12 \leq n \leq 22$. Zestawienie górnych ograniczeń wynikających z twierdzenia 2.1.4 oraz nowych górnych ograniczeń prezentujemy w poniższej tabeli 2.2.

liczba	z twierdzenia 2.1.4	z lematu 2.2.1
$\tilde{r}(P_4, P_{12})$	≤ 25	≤ 18 (z lematu 2.2.7)
$\tilde{r}(P_4, P_{13})$	≤ 27	≤ 20
$\tilde{r}(P_4, P_{14})$	≤ 28	≤ 21
$\tilde{r}(P_4, P_{15})$	≤ 30	≤ 23
$\tilde{r}(P_4, P_{16})$	≤ 31	≤ 25
$\tilde{r}(P_4, P_{17})$	≤ 32	≤ 26
$\tilde{r}(P_4, P_{18})$	≤ 34	≤ 27
$\tilde{r}(P_4, P_{19})$	≤ 35	≤ 28
$\tilde{r}(P_4, P_{20})$	≤ 37	≤ 29
$\tilde{r}(P_4, P_{21})$	≤ 38	≤ 31
$\tilde{r}(P_4, P_{22})$	≤ 39	≤ 33

Tabela 2.2: Znane i nowe górne oszacowania liczby $\tilde{r}(P_4, P_n)$ dla $12 \leq n \leq 22$.

Rozdział 3

Liczby Ramseya on-line dla gwiazd S_n i ścieżek P_l

3.1 Znane wyniki

W podrozdziale tym przedstawimy dotychczas osiągnięte wyniki dotyczące liczby Ramseya on-line w asymetrycznej grze, a mianowicie dla gwiazd S_n i ścieżek P_l . Natomiast w podrozdziale 3.2 - nowe wyniki. Przypomnijmy, ponieważ w literaturze przez S_n rozumiany jest graf zwany gwiazdą zarówno oparty na n wierzchołkach jak i graf oparty na n krawędziach, że w rozprawie przyjmujemy notację taką jak w pracy [24] Song, Wang i Zhang, tzn. gwiazdy S_n opartej na n krawędziach pełnego grafu dwudzielnego $K_{1,n}$.

W pracy [14], J. Grytczuk, H. Kierstead i P. Prałat rozważyli $\tilde{r}(S_n, H)$ - grę, gdzie H oznacza dowolny graf. Udowodnili dolne ograniczenie dla tej liczby Ramseya on-line.

Twierdzenie 3.1.1 ([14]) *Niech H będzie dowolnym grafem, S_n gwiazdą o n krawędziach. Wówczas $\tilde{r}(S_n, H) \geq \frac{1}{2}\beta(H)n + e(H)$, gdzie przez $\beta(H)$ rozumiemy liczbę pokrycia wierzchołkowego, definiowaną jako najmniejszą liczbę wierzchołków pokrywającą wszystkie krawędzie grafu H .*

W tej samej pracy, ci sami autorzy podali również górną granicę tej liczby Ramseya on-line, przy zachowaniu pewnych ograniczeń dla grafu H .

Twierdzenie 3.1.2 ([14]) *Gdy graf H jest dowolnym drzewem T , cyklem C_n lub kliką K_k , wówczas $\tilde{r}(S_n, H) \leq (n + 1) \cdot e(H)$.*

Oba ograniczenia stanowią dość ogólne granice rozpatrywanych tu liczb Ramseya on-line. Bardziej szczegółowe, gdyż dla konkretnych grafów, ale mniej ogólne górne ograniczenie znajdziemy w pracy [18]. Latip i Tan stosując metodę indukcji matematycznej, pokazali prawdziwość poniższego twierdzenia:

Twierdzenie 3.1.3 ([18]) Dla $l \geq 2$ mamy $\tilde{r}(S_3, P_l) \leq \left\lfloor \frac{5(l-1)}{3} \right\rfloor + 2$.

Ponadto, uwzględniając, że graf $S_2 = P_3$, poniższe twierdzenie 3.1.4 wraz z dowodem jest alternatywne do udowodnionego przez J. Cyman, T. Dzido, J. Lapinkas i A. Lo twierdzenia 3.1.5

Twierdzenie 3.1.4 ([18]) Dla $l \geq 2$ mamy $\tilde{r}(S_2, P_l) = \left\lfloor \frac{5(l-1)}{4} \right\rfloor$.

Twierdzenie 3.1.5 ([5]) Dla $l \geq 2$ mamy $\tilde{r}(P_3, P_l) = \left\lfloor \frac{5(l-1)}{4} \right\rfloor$.

Gordinowicz oraz Prałat [13] badając między innymi oszacowania $\tilde{r}(K_k, K_l)$ dla $3 \leq k \leq l \leq 10$ przy użyciu algorytmu komputerowego, uzyskali również następujące wyniki $\tilde{r}(S_3, P_3) = 4$ oraz $\tilde{r}(S_3, P_4) = 6$.

W dalszej części rozdziału poprawimy oszacowanie z twierdzenia 3.1.3 oraz udowodnimy dokładną wartość $\tilde{r}(S_3, P_5) = 7$.

3.2 Nowe wyniki

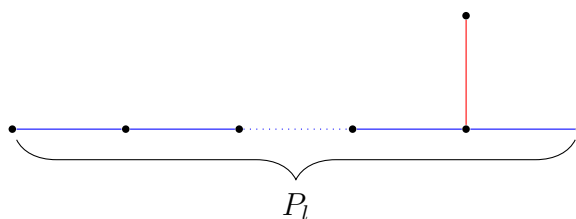
Po przeprowadzeniu bardzo dokładnej analizy sposobu dowodzenia twierdzenia 3.1.3 wraz z Dzido udało się doprecyzować górne oszacowanie liczby Ramsey'a on-line $\tilde{r}(S_3, P_{l+1})$.

Twierdzenie 3.2.1 (Dzido, Zakrzewska) Dla $l \geq 3$ mamy

$$\tilde{r}(S_3, P_l) \leq \left\lfloor \frac{5}{3}(l-1) \right\rfloor + 1.$$

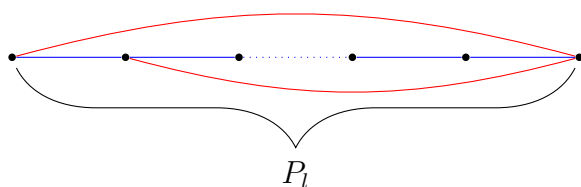
Dowód. Z analizy pracy [18] wiemy, że przyjęcie przez Budowniczego strategii polegającej na przedłużeniu prostej niebieskiej ścieżki P_l o 3 w pięciu ruchach nie zawsze przynosi potrzebny efekt. Jednak, jeśli ścieżka ta będzie "bogatsza" o pewne właściwości, takie wydłużenie rozpatrywanej ścieżki o 3 w pięciu ruchach jest możliwe. W tym celu zdefiniujemy następujące struktury, których podstawą jest niebieska ścieżka P_l .

Definicja 3.2.2 Pokolorowany dwoma kolorami graf złożony z niebieskiej ścieżki P_l oraz czerwonej krawędzi mającej jeden wspólny wierzchołek ze ścieżką P_l (nie będący żadnym końcem ścieżki P_l), zaś drugi poza tą ścieżką, nazywamy strukturą PF opartą na ścieżce P_l .



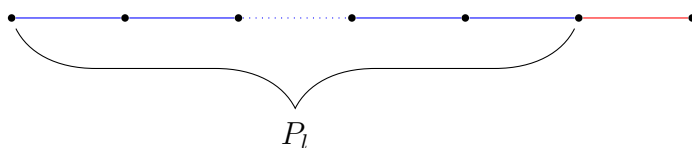
Rysunek 3.1: Przykład struktury PF opartej na ścieżce P_l .

Definicja 3.2.3 Pokolorowany dwoma kolorami graf złożony z niebieskiej ścieżki P_l oraz dwóch czerwonych krawędzi, takich że jedna z nich łączy końce ścieżki P_l , zaś druga łączy jeden koniec niebieskiej ścieżki z sąsiadem jej drugiego wierzchołka końcowego, nazywamy strukturą PC opartą na ścieżce P_l .



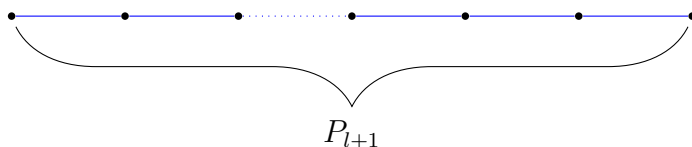
Rysunek 3.2: Przykład struktury PC opartej na ścieżce P_l .

Definicja 3.2.4 Pokolorowany dwoma kolorami graf złożony z niebieskiej ścieżki P_l oraz czerwonej krawędzi, mającej wspólny wierzchołek z jednym z końców niebieskiej ścieżki, zaś drugi poza ścieżką, nazywamy strukturą PEC opartą na ścieżce P_l .



Rysunek 3.3: Przykład struktury PEC opartej na ścieżce P_l .

Definicja 3.2.5 Graf będący niebieską ścieżką P_{l+1} (posiada jedną krawędź więcej niż potrzeba) nazywamy strukturą PZ opartą na ścieżce P_{l+1} .



Rysunek 3.4: Przykład struktury PZ opartej na ścieżce P_{l+1} .

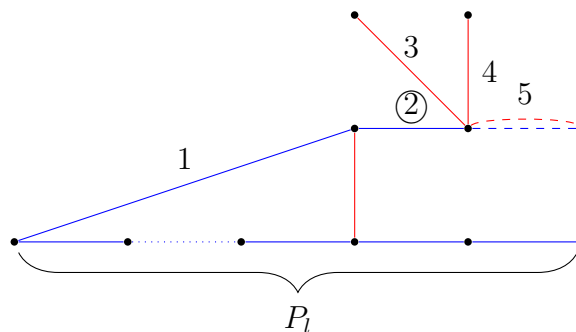
Następnie rozpatrzmy następujące lematy:

Lemat 3.2.6 Rozpoczynając grę od struktury PF opartej na niebieskiej ścieżce P_l , w co najwyżej pięciu ruchach otrzymamy którąś z poniższych struktur:

- graf zawierający strukturę PF opartą na niebieskiej ścieżce P_{l+3} ,
- graf zawierający strukturę PC opartą na niebieskiej ścieżce P_{l+3} ,
- graf zawierający strukturę PEC opartą na niebieskiej ścieżce P_{l+3} ,

ruchu Malarka użyje koloru niebieskiego. W drugim ruchu Budowniczy łączy wierzchołek czerwonej krawędzi, nienależący do niebieskiej ścieżki P_l z dowolnym, nowym wierzchołkiem spoza struktury PF . Malarka może użyć do pokolorowania tej nowej krawędzi zarówno koloru niebieskiego jak i czerwonego, dlatego rozważamy dwa podprzypadki (por. rysunek 3.6 oraz rysunek 3.7).

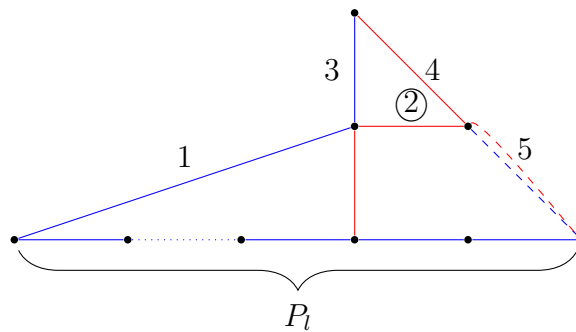
Podprzypadek 2.1 Malarka używa w drugiej turze koloru niebieskiego. W trzecim ruchu Budowniczy łączy końcowy wierzchołek krawędzi z drugiej tury z dowolnym wierzchołkiem spoza struktury PF . Malarka używa do pokolorowania koloru czerwonego (w przeciwnym wypadku mamy niebieską ścieżkę P_{l+3} , którą już w czwartym ruchu można przedłużyć i uzyskać strukturę PEC opartą na niebieskiej P_{l+3} lub strukturę PZ opartą na P_{l+4}). W czwartej turze Budowniczy ponownie łączy końcowy wierzchołek krawędzi z tury drugiej z dowolnym wierzchołkiem poza strukturą PF , zaś Malarka ponownie używa koloru czerwonego. W ruchu piątym ponawiając strategię z ruchu trzeciego i czwartego Budowniczy tworzy krawędź, którą jakkolwiek pokoloruje Malarka na czerwono czy niebiesko uzyskamy albo graf o strukturze PF oparty na niebieskiej ścieżce P_{l+3} albo czerwoną gwiazdę S_3 .



Rysunek 3.6: Kolejne tury gry dla podprzypadku 2.1 lematu 3.2.6.

Podprzypadek 2.2 W drugiej turze Malarka używa koloru czerwonego. Trzecia tura Budowniczej jest analogiczna jak runda druga (Budowniczy łączy wierzchołek czerwonej krawędzi, nienależący do niebieskiej ścieżki P_l z dowolnym, nowym wierzchołkiem spoza struktury PF). Malarka używa do pokolorowanie tej krawędzi koloru niebieskiego (unikając czerwonej S_3). W czwartej turze Budowniczy łączy krawędzią końcowe wierzchołki krawędzi z rundy drugiej i trzeciej, zaś Malarka koloruje tę krawędź na czerwono (w przeciwnym wypadku mamy niebieską ścieżkę P_{l+3} , którą w piątym

ruchu można przedłużyć i uzyskać albo strukturę PEC opartą na niebieskiej P_{l+3} albo strukturę PZ opartą na P_{l+4}).



Rysunek 3.7: Kolejne tury gry dla podzypadku 2.2 lematu 3.2.6.

W piątej turze Budowniczy łączy krawędzią końcowy wierzchołek czerwonej krawędzi z tury drugiej z drugim końcowym wierzchołkiem niebieskiej ścieżki P_l . Jakkolwiek pokoloruje Malarka tę krawędź, czy to na niebiesko czy na czerwono, uzyskamy albo graf o strukturze PC oparty na niebieskiej ścieżce P_{l+3} albo czerwoną gwiazdę S_3 .

□

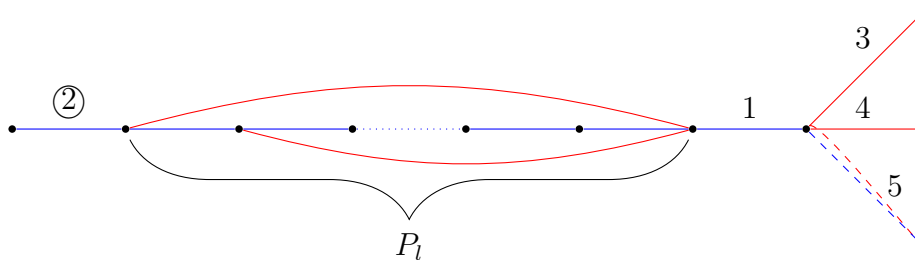
Lemat 3.2.7 *Rozpoczynając grę od struktury PC opartej na niebieskiej ścieżce P_l , w co najwyżej pięciu ruchach otrzymamy którąś z poniższych struktur:*

- graf zawierający strukturę PF opartą na niebieskiej ścieżce P_{l+3} ,
- graf zawierający strukturę PC opartą na niebieskiej ścieżce P_{l+3} ,
- graf zawierający strukturę PEC opartą na niebieskiej ścieżce P_{l+3} ,
- graf zawierający strukturę PZ opartą na niebieskiej ścieżce P_{l+4} ,
- czerwoną gwiazdę S_3 .

Dowód. Startujemy mając już kolorowanie jak w strukturze PC . W pierwszej turze Budowniczy wydłuża niebieską ścieżkę P_l dokładając krawędź o początku w końcowym wierzchołku wspomnianej ścieżki, z którego wychodzą również zdefiniowane dwie czerwone krawędzie, z wierzchołkiem spoza struktury PC (por. rysunek 3.8 i 3.9). Malarka koloruje tę krawędź na niebiesko (w przeciwnym wypadku powstaje czerwona S_3). W drugiej turze Budowniczy dokłada krawędź do wierzchołka początkowego ścieżki P_l .

Malarka może pokolorować tę krawędź zarówno kolorem niebieskim jak i czerwonym, stąd musimy rozpatrzyć dwa możliwe przypadki:

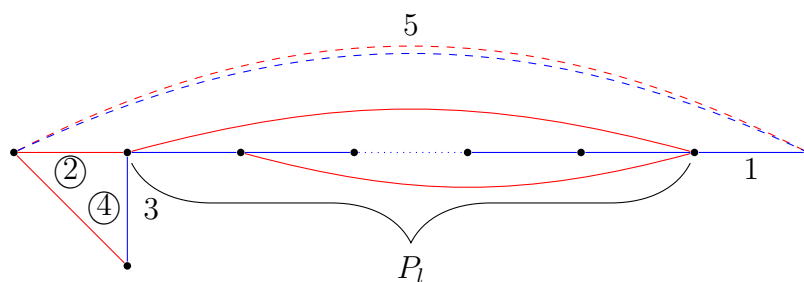
Przypadek 1 W drugiej turze Malarka używa koloru niebieskiego (por. rysunek 3.8). W trzeciej turze Budowniczy łączy końcowy wierzchołek krawędzi uzyskanej w rundzie pierwszej, z dowolnym wierzchołkiem poza strukturą PC , zaś Malarka musi pokolorować tę krawędź na czerwono (w przeciwnym przypadku, po kolejnym wydłużeniu ścieżki uzyskamy albo strukturę PEC opartą na niebieskiej P_{l+3} albo strukturę PZ oparta na P_{l+4}). W rundzie czwartej Budowniczy jak i Malarka powtarzają swoją strategię z rundy trzeciej (w przeciwnym wypadku mamy strukturę PF opartą na niebieskiej ścieżce P_{l+3}). W piątym ruchu Budowniczy ponownie dokłada krawędź na tej samej zasadzie co w rundzie trzeciej i czwartej. Jakkolwiek Malarka pokoloruje tę krawędź, czy to na niebiesko czy na czerwono, uzyskamy albo graf o strukturze PF oparty na niebieskiej ścieżce P_{l+3} albo czerwoną gwiazdę S_3 .



Rysunek 3.8: Kolejne tury gry dla przypadku 1 lematu 3.2.7.

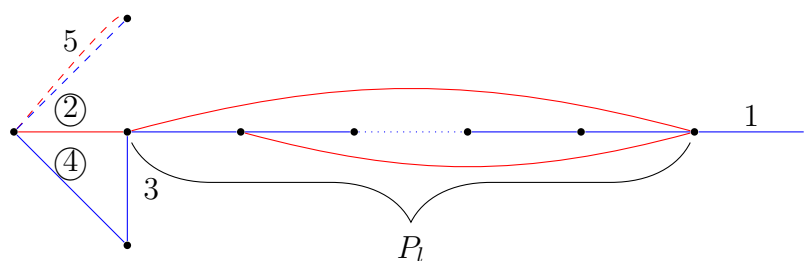
Przypadek 2 W drugiej turze Malarka używa koloru czerwonego (por. rysunek 3.9). W trzeciej turze Budowniczy łączy początkowy wierzchołek ścieżki P_l z dowolnym wierzchołkiem spoza struktury PC , zaś Malarka koloruje powstałą w ten sposób krawędź na niebiesko (w przeciwnym wypadku powstaje czerwona S_3). W czwartej turze Budowniczy łączy końcowe wierzchołki krawędzi z tury drugiej i trzeciej. Malarka ma swobodę kolorowania dlatego wyróżniamy dwa podprzypadki.

Podprzypadek 2.1 Malarka w rundzie czwartej używa koloru czerwonego. W piątym ruchu Budowniczy łączy krawędzią końcowy wspólny wierzchołek krawędzi z tury drugiej i czwartej z końcowym wierzchołkiem niebieskiej krawędzi rundy pierwszej. Jakkolwiek pokoloruje Malarka tę krawędź, czy to na niebiesko czy na czerwono, uzyskamy albo graf o strukturze PC oparty na niebieskiej ścieżce P_{l+3} albo czerwoną gwiazdę S_3 .



Rysunek 3.9: Kolejne tury gry dla podzypadku 2.1 lematu 3.2.7.

Podzypadek 2.2 Malarka w rundzie czwartej używa koloru niebieskiego. W rundzie piątej Budowniczy łączy krawędzią końcowy wspólny wierzchołek krawędzi z tury drugiej i czwartej z nowym wierzchołkiem.



Rysunek 3.10: Kolejne tury gry dla podzypadku 2.2 lematu 3.2.7.

Jakkolwiek pokoloruje Malarka tę krawędź, czy to na niebiesko czy na czerwono, uzyskamy albo graf o strukturze PEC oparty na niebieskiej ścieżce P_{l+3} albo graf o strukturze PZ oparty na niebieskiej ścieżce P_{l+4} .

□

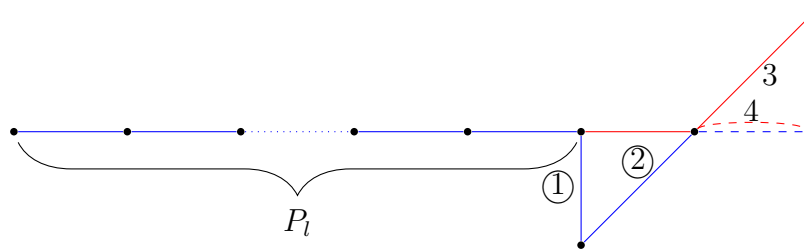
Lemat 3.2.8 *Rozpoczynając grę od struktury PEC opartej na niebieskiej ścieżce P_l , w co najwyżej pięciu ruchach otrzymamy którąś z poniższych struktur:*

- graf zawierający strukturę PF opartą na niebieskiej ścieżce P_{l+3} ,
- graf zawierający strukturę PC opartą na niebieskiej ścieżce P_{l+3} ,
- graf zawierający strukturę PEC opartą na niebieskiej ścieżce P_{l+3} ,
- graf zawierający strukturę PZ opartą na niebieskiej ścieżce P_{l+4} ,
- czerwoną gwiazdę S_3 .

Dowód. Startujemy mając już kolorowanie jak w strukturze PEC . W pierwszej turze Budowniczy dokłada krawędź do końcowego wierzchołka niebieskiej ścieżki P_l , wspólnego z czerwoną krawędzią (por. rysunki 3.11 - 3.14). Malarka może pokolorować tę krawędź zarówno na niebiesko jak i czerwono. Rozpatrzmy dwa przypadki (możliwość zaistniałych przypadków i podprzypadków zaznaczona jest numerem rundy w kółku).

Przypadek 1 Malarka w rundzie pierwszej używa do kolorowania koloru niebieskiego. W drugiej turze Budowniczy łączy krawędzią końcowy wierzchołek krawędzi z tury pierwszej z końcowym wierzchołkiem czerwonej krawędzi struktury PEC . Malarka może użyć do kolorowania zarówno koloru niebieskiego jak i czerwonego, dlatego rozpatrujemy tu dwa podprzypadki - szczegóły znajdują się na rysunkach 3.11 i 3.12.

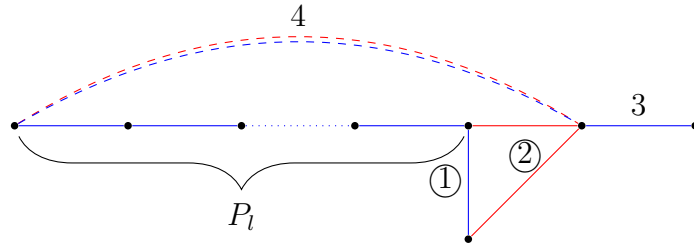
Podprzypadek 1.1 W turze drugiej Malarka używa koloru niebieskiego. W trzeciej turze Budowniczy łączy krawędzią końcowy wierzchołek czerwonej krawędzi struktury PEC z dowolnym wierzchołkiem spoza struktury. Malarka maluje tę krawędź na czerwono (w przeciwnym wypadku mamy niebieską ścieżkę P_{l+3} i wystarczy jeszcze jeden ruch do uzyskania czy to grafu o strukturze PEC opartego na niebieskiej ścieżce P_{l+3} czy też grafu o strukturze PZ - niebieska ścieżka P_{l+4}). W czwartym ruchu Budowniczy postępuje analogicznie jak w ruchu trzecim. Nie ma znaczenia czy Malarka użyje do pokolorowania koloru niebieskiego czy czerwonego, gdyż albo otrzymamy graf o strukturze PF opartym na niebieskiej ścieżce P_{l+3} , albo czerwoną gwiazdę S_3 .



Rysunek 3.11: Kolejne tury gry dla podprzypadku 1.1 lematu 3.2.8.

Podprzypadek 1.2 W turze drugiej Malarka używa koloru czerwonego (por. rysunek 3.12). Trzecia tura Budowniczego jest analogiczna jak w podprzypadku 1.1, natomiast Malarka musi użyć koloru niebieskiego (w przeciwnym wypadku powstaje czerwona S_3). W czwartym ruchu Budowniczy łączy krawędzią początkowy wierzchołek niebieskiej ścieżki P_l z końcowym wierzchołkiem czerwonej krawędzi Struktury PEC .

Jakkolwiek Malarka pokoloruje tę krawędź, uzyskamy albo czerwoną gwiazdę S_3 , albo Budowniczy mając jeszcze zapasowy piąty ruch może przedłużyć niebieską ścieżkę i uzyskać albo strukturę PEC opartą na niebieskiej ścieżce P_{l+3} albo strukturę PZ opartą na niebieskiej P_{l+4} .



Rysunek 3.12: Kolejne tury gry dla podprzypadku 1.2 lematu 3.2.8.

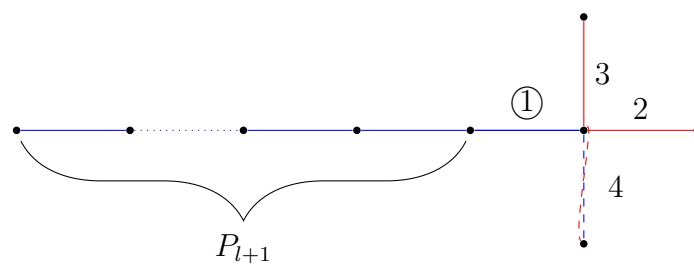
Przypadek 2 Malarka używa do kolorowania koloru czerwonego. W drugiej turze Budowniczy postępuje jak w turze pierwszej. Malarka musi użyć koloru niebieskiego (w przeciwnym wypadku powstaje czerwona S_3). W trzeciej turze Budowniczy łączy początkowy wierzchołek niebieskiej ścieżki P_l z końcowym wierzchołkiem krawędzi z tury pierwszej. Malarka ma swobodę kolorowania, stąd podprzypadki 2.1 i 2.2..

Podprzypadek 2.1 Jeśli w trzeciej rundzie Malarka użyje koloru niebieskiego (por. rysunek 3.13), to w czwartym ruchu Budowniczy łączy krawędzią końcowy wierzchołek krawędzi z tury drugiej z końcowym wierzchołkiem czerwonej krawędzi struktury PEC . Malarka koloruje tę krawędź na czerwono (w przeciwnym wypadku mamy niebieską ścieżkę P_{l+3} , gdzie wystarczy jeszcze jeden optymalny ruch Budowniczego - krawędź powstała z połączenia końcowego wierzchołka czerwonej krawędzi struktury PEC z nowym wierzchołkiem, aby uzyskać strukturę PEC opartą na niebieskiej ścieżce P_{l+3} lub strukturę PZ opartą na P_{l+4}). W piątym ruchu Budowniczy łączy krawędzią końcowy wierzchołek czerwonej krawędzi z rundy pierwszej ponownie z końcowym wierzchołkiem czerwonej krawędzi struktury PEC . Jakkolwiek Malarka pokoloruje tę krawędź, uzyskamy albo graf o strukturze PC oparty na niebieskiej ścieżce P_{l+3} albo czerwoną gwiazdę S_3 .

- graf zawierający strukturę PEC opartą na niebieskiej ścieżce P_{l+3} ,
- graf zawierający strukturę PZ opartą na niebieskiej ścieżce P_{l+4} ,
- czerwoną gwiazdę S_3 .

Dowód. Startujemy mając już kolorowanie jak w strukturze PZ (szczegóły na rysunkach: 3.15 - 3.18). W pierwszej turze Budowniczy dokłada krawędź do końcowego wierzchołka ścieżki P_{l+1} . Malarka może pokolorować tę krawędź zarówno na czerwono jak i na niebiesko, dlatego otrzymujemy dwa przypadki.

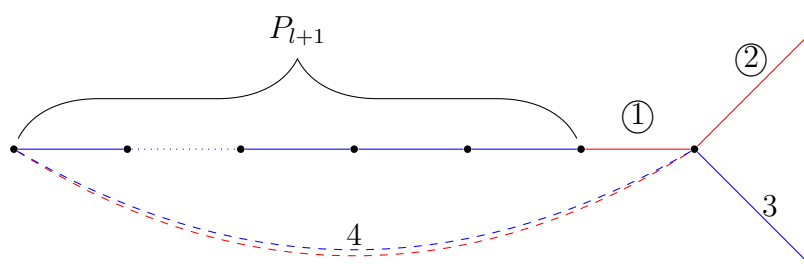
Przypadek 1 W pierwszej turze Malarka używa koloru niebieskiego (por. rysunek 3.15). W drugim ruchu Budowniczy dokłada krawędź pomiędzy końcowym wierzchołkiem krawędzi z tury pierwszej a wierzchołkiem spoza struktury PZ , zaś Malarka używa koloru czerwonego (w przeciwnym razie uzyskujemy niebieską ścieżkę P_{l+3} i w takim wypadku Budowniczemu wystarczy jeden ruch aby uzyskać strukturę PEC opartą na P_{l+3} lub strukturę PZ opartą na P_{l+4}). W trzeciej turze Budowniczy jak i Malarka postępują jak w turze drugiej (gdyby w tej turze Malarka pokolorowała krawędź na niebiesko to uzyskalibyśmy strukturę PF na niebieskiej P_{l+3}). W czwartym ruchu Budowniczy ponownie postępuje jak w dwóch poprzednich turach, natomiast Malarka jakkolwiek pokoloruje tę krawędź, uzyskamy strukturę PF opartą na niebieskiej ścieżce P_{l+3} lub czerwoną S_3 .



Rysunek 3.15: Kolejne tury gry dla przypadku 1 lematu 3.2.9.

Przypadek 2 W pierwszej turze Malarka używa koloru czerwonego. W drugim ruchu Budowniczy postępuje analogicznie jak w drugiej turze przypadku 1, natomiast Malarka uzyskuje wtedy dwie możliwości kolorowania, dlatego musimy rozpatrzyć obie.

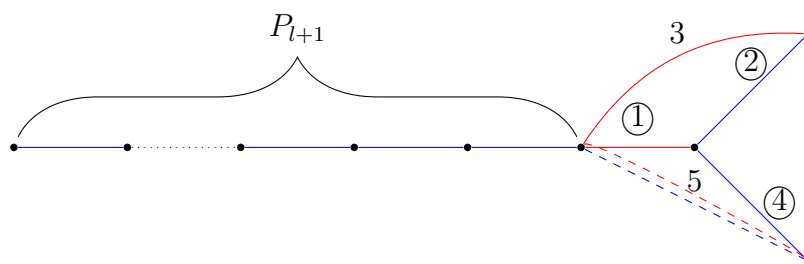
Podprzypadek 2.1 W drugiej turze Malarka używa koloru czerwonego (por. rysunek 3.16). Wówczas w trzecim ruchu Budowniczy tworzy krawędź na tej samej zasadzie co w rundzie drugiej, zaś Malarka koloruje ją na niebiesko (w przeciwnym wypadku powstaje czerwona gwiazda S_3). W czwartej turze Budowniczy tworzy krawędź łącząc początkowy wierzchołek niebieskiej ścieżki P_{l+1} z końcowym wierzchołkiem czerwonej krawędzi z tury pierwszej. Jakkolwiek Malarka pokoloruje tę krawędź uzyskamy albo graf o strukturze PF oparty na niebieskiej ścieżce P_{l+3} albo czerwoną gwiazdę S_3 .



Rysunek 3.16: Kolejne tury gry dla przypadku 2.1 lematu 3.2.9.

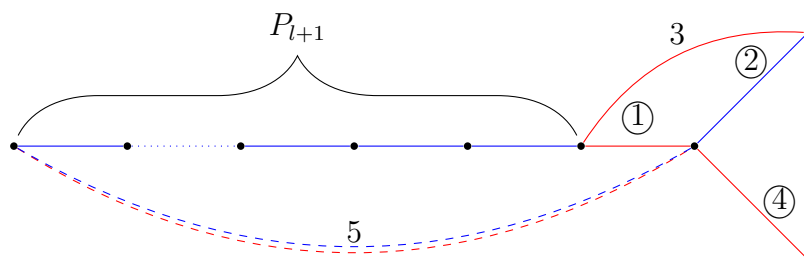
Podprzypadek 2.2 W drugiej turze Malarka używa koloru niebieskiego (por. rysunek 3.17). W trzeciej turze Budowniczy łączy krawędzią końcowy wierzchołek niebieskiej ścieżki P_{l+1} z końcowym wierzchołkiem krawędzi z tury drugiej. Malarka koloruje tę krawędź na czerwono (w przeciwnym razie uzyskujemy niebieską ścieżkę P_{l+3} i w takim wypadku Budowniczemu wystarczy jeden ruch aby uzyskać strukturę PEC na P_{l+3} lub strukturę PZ na P_{l+4}). W czwartym ruchu Budowniczy tworzy krawędź łącząc końcowy wierzchołek czerwonej krawędzi rundy pierwszej z dowolnym wierzchołkiem spoza aktualnego kolorowania. Malarka w tej turze posiada swobodę kolorowania stąd uzyskujemy kolejne podprzypadki 2.2.1 i 2.2.2.

Podprzypadek 2.2.1 Jeśli w czwartej rundzie Malarka użyje koloru niebieskiego (por. rysunek 3.17) to w piątej turze Budowniczy łączy końcowy wierzchołek krawędzi z rundy czwartej z końcowym wierzchołkiem niebieskiej ścieżki P_{l+1} , wspólnym z czerwoną krawędzią rundy pierwszej. Wówczas jakkolwiek Malarka pokoloruje tę krawędź, w pięciu ruchach otrzymujemy albo graf o strukturze PZ oparty na niebieskiej ścieżce P_{l+4} albo czerwoną gwiazdę S_3 .



Rysunek 3.17: Kolejne tury gry dla podprzypadku 2.2.1 lematu 3.2.9.

Podprzypadek 2.2.2 Jeśli użyje koloru czerwonego (por. rysunek 3.18), to w piątej turze Budowniczy łączy końcowy wierzchołek krawędzi z rundy pierwszej z początkowym wierzchołkiem niebieskiej ścieżki P_{l+1} . Wówczas jakkolwiek Malarka pokoloruje tę krawędź w pięciu ruchach otrzymujemy albo graf o strukturze PF oparty na niebieskiej ścieżce P_{l+3} albo czerwoną gwiazdę S_3 .



Rysunek 3.18: Kolejne tury gry dla podprzypadku 2.2.2 lematu 3.2.9.

Ostatnia tura gry na rysunkach 3.15 - 3.18 zaznaczona jest przerywaną linią.

□

Analizując następnie znane wartości liczb Ramsey'a on-line dla gwiazdy S_3 i krótkich ścieżek, możemy zauważyć następujące fakty:

- Wiedząc, że $\tilde{r}(S_3, P_3) = 4$, to po 4 rundach w $\tilde{r}(S_3, P_3)$ -grze w powstałym dwukolorowym grafie odnajdziemy strukturę PF opartą na niebieskiej P_3 albo czerwoną S_3 . Zgodnie zaś z lematem 3.2.6 możemy wydłużać ścieżkę P_3 o 3 w co najwyżej pięciu ruchach. Następnie zaś ponawiać działanie odpowiedniego z lematów (3.2.6 - 3.2.9).
- Wiedząc, że $\tilde{r}(S_3, P_4) = 6$, to po 6 rundach w $\tilde{r}(S_3, P_4)$ -grze w powstałym dwukolorowym grafie odnajdziemy strukturę PF opartą na niebieskiej P_4 albo czerwoną S_3 . Zgodnie zaś z lematem 3.2.6 możemy wydłużać ścieżkę P_4 o 3 w co najwyżej



pięciu ruchach. Następnie zaś ponawiać działanie odpowiedniego z lematów (3.2.6 - 3.2.9).

- Wiedząc, że $\tilde{r}(S_3, P_5) = 7$, to po 7 rundach w $\tilde{r}(S_3, P_5)$ -grze w powstałym dwukolorowym grafie odnajdziemy struktury PF , PEC oparte na niebieskiej P_5 lub PZ opartą na niebieskiej P_6 albo czerwoną S_3 (szczegóły w dowodzie twierdzenia 3.2.10). Zgodnie zaś z lematami 3.2.6, 3.2.8 oraz 3.2.9 możemy wydłużać niebieską ścieżkę P_5 o 3 w co najwyżej pięciu ruchach. Następnie zaś ponawiać działanie odpowiedniego z lematów (3.2.6 - 3.2.9).

Podsumowując:

- dla $l = 3, 6, 9, \dots$ otrzymujemy:

$$\tilde{r}(S_3, P_l) \leq 4 + \frac{5}{3}(l-3) = 4 + \frac{5}{3}l - \frac{15}{3} = \frac{5}{3}l - 2 + 1 = \left\lfloor \frac{5}{3}l - \frac{5}{3} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{5}{3}(l-1) \right\rfloor + 1$$

- dla $l = 4, 7, 10, \dots$ otrzymujemy:

$$\tilde{r}(S_3, P_l) \leq 6 + \frac{5}{3}(l-4) = 6 + \frac{5}{3}l - \frac{20}{3} = \frac{5}{3}l - \frac{5}{3} + 1 = \left\lfloor \frac{5}{3}l - \frac{5}{3} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{5}{3}(l-1) \right\rfloor + 1$$

- dla $l = 5, 8, 11, \dots$ otrzymujemy:

$$\tilde{r}(S_3, P_l) \leq 7 + \frac{5}{3}(l-5) = 7 + \frac{5}{3}l - \frac{25}{3} = \frac{5}{3}l - \frac{7}{3} + 1 = \left\lfloor \frac{5}{3}l - \frac{5}{3} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{5}{3}(l-1) \right\rfloor + 1$$

Zatem twierdzenie 3.2.1 zachodzi dla $l \geq 3$. □

Na podstawie twierdzenia 3.1.3 oraz znajomości konkretnej wartości liczby Ramsey'a on-line $\tilde{r}(S_3, P_4) = 6$ [13], otrzymujemy $6 < \tilde{r}(S_3, P_5) \leq \left\lfloor \frac{5 \cdot 4}{3} \right\rfloor + 2 = 6 + 2 = 8$. Zatem wartość liczby Ramsey'a on-line wynosi 7 lub 8. Wykażemy poniższe.

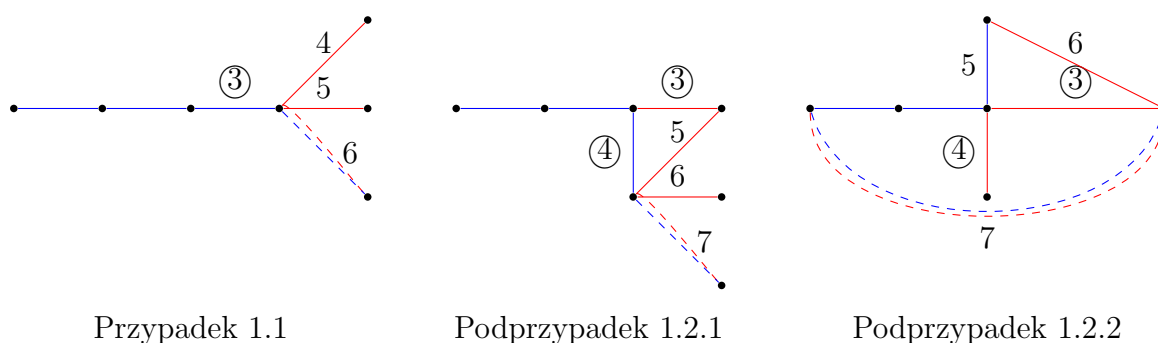
Twierdzenie 3.2.10 (Dzido, Zakrzewska) $\tilde{r}(S_3, P_5) = 7$

Dowód. Analizując strategię Budowniczego, pokażemy że jakkolwiek Malarka będzie kolorować krawędzie, to Budowniczy wymusi w co najwyżej siedmiu turach gry czerwoną gwiazdę S_3 lub niebieską ścieżkę P_5 . W pierwszych dwóch turach Budowniczy tworzy ścieżkę P_3 , którą Malarka może pokolorować na trzy sposoby. Uzyskujemy w ten sposób trzy podstawowe przypadki.

Przypadek 1 Po dwóch turach mamy niebieską ścieżkę P_3 (por. rysunek 3.19). W kolejnym ruchu Budowniczy dokłada krawędź tworząc P_4 , którą Malarka może pokolorować zarówno na niebiesko jak i czerwono.

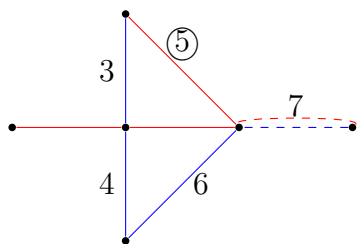


Niech na początku Malarka użyje w trzeciej turze koloru niebieskiego - dostajemy przypadek 1.1. Budowniczy potrzebuje już tylko trzech krawędzi, dokładając je do końcowego wierzchołka uzyskanej niebieskiej P_4 , aby wymusić na Malarce czerwoną gwiazdę S_3 lub niebieską ścieżkę P_5 (struktura PF oparta na niebieskiej ścieżce P_5). Przypadek 1.2 dotyczy sytuacji gdy Malarka w trzeciej turze użyje koloru czerwonego. W czwartej rundzie Budowniczy stworzy krawędź łączącą końcowy wierzchołek niebieskiej ścieżki P_3 wspólny z czerwoną krawędzią rundy trzeciej, z wierzchołkiem spoza uzyskanego kolorowania. Malarka ma tu swobodę kolorowania, dlatego wyróżniamy dwa podprzypadki. W podprzypadku 1.2.1 w czwartej rundzie Malarka użyje koloru niebieskiego zaś w podprzypadku 1.2.2 - czerwonego. W obu tych podprzypadkach Budowniczy w kolejnych trzech rundach wymusi na Malarce takie pokolorowanie, że uzyskamy czerwoną S_3 lub niebieską P_5 (struktura PF oparta na niebieskiej ścieżce P_5). Poniższy rysunek 3.19 prezentuje możliwe kolorowania w całym przypadku 1.

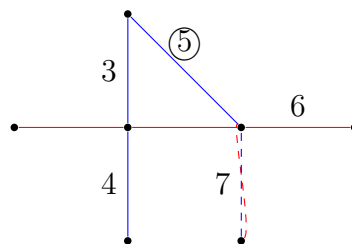


Rysunek 3.19: Możliwe kolorowania w przypadku 1 dla twierdzenia 3.2.10.

Przypadek 2 Po dwóch turach gry mamy czerwoną ścieżkę P_3 (por. rysunek 3.20). Dokładając kolejne dwie krawędzie w turach: trzeciej i czwartej w taki sposób, że powstanie graf S_4 , Budowniczy wymusza na Malarce w obu tych rundach użycie koloru niebieskiego - w przeciwnym wypadku powstanie czerwona gwiazda S_3 . W piątej turze Malarka może zagrać w dwojaki sposób. Niemniej jakkolwiek postąpi, Budowniczemu wystarczą już tylko dwie tury do zakończenia gry, czyli wymuszenia czerwonej gwiazdy S_3 lub niebieskiej ścieżki P_5 (struktura PF oparta na niebieskiej ścieżce P_5). Obie możliwości użycia kolorów w kolejnych turach widoczne są na poniższym rysunku 3.20, przy czym użycie przez Malarke w rundzie piątej koloru czerwonego określamy jako przypadek 2.1, niebieskiego to przypadek 2.2.



Przypadek 2.1

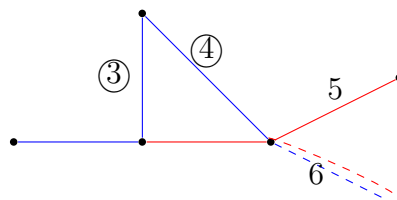
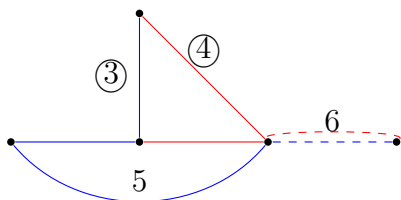


Przypadek 2.2

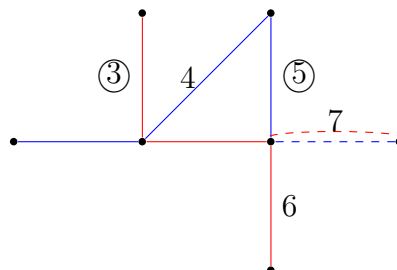
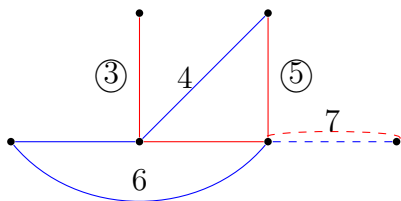
Rysunek 3.20: Możliwe kolorowania w przypadku 2 dla twierdzenia 3.2.10.

Przypadek 3 Po dwóch turach gry otrzymujemy dwukolorową ścieżkę P_3 (por. rysunek 3.21). W trzeciej turze Budowniczy wskazuje krawędź łączącą środkowy wierzchołek ścieżki P_3 z nowym wierzchołkiem. Malarka może użyć zarówno koloru czerwonego jak i niebieskiego.

Niech przypadek 3.1 oznacza, że w trzeciej turze Malarka koloruje krawędź na niebiesko. W czwartej turze Budowniczy łączy krawędzią czerwony koniec początkowej ścieżki P_3 z końcem niebieskiej krawędzi z tury trzeciej. Malarka ma swobodę kolorowania.



Możliwe kolorowania w przypadku 3.1



Możliwe kolorowania w przypadku 3.2

Rysunek 3.21: Możliwe kolorowania w przypadku 3 dla twierdzenia 3.2.10.

Jeśli w czwartej rundzie użyje koloru czerwonego, Budowniczymu wystarczą już tylko dwie tury do wygrania gry - wymuszenia czerwonej gwiazdy S_3 lub niebieskiej ścieżki P_5 . Budowniczy potrzebuje jeszcze siódmego ruchu, który ma w zapasie aby wydłużyć ścieżkę P_5 i bez względu na to jakiego koloru użyje Malarka - uzyskać strukturę PEC opartą na niebieskiej P_5 albo strukturę PZ opartą na niebieskiej ścieżce P_6 . Jeśli natomiast Malarka w rundzie czwartej użyje koloru niebieskiego, po dwóch kolejnych turach Budowniczy skończy grę (uzyskując niebieską ścieżkę P_5 otrzyma strukturę PF opartą na tej ścieżce). Szczegóły kolejnych tur i użycia przez Malarkę kolorów zaprezentowane są na rysunku 3.21.

Pozostaje przypadek 3.2, który oznacza, że w trzeciej turze Malarka koloruje krawędź na czerwono. W czwartej turze Budowniczy dokłada krawędź w taki sposób, że powstaje gwiazda S_4 . Malarka jest zmuszona użyć koloru niebieskiego do pokolorowania tej krawędzi (w przeciwnym wypadku czerwona S_3). Natomiast w piątym ruchu, bez względu na to jakiego użyje koloru do pokolorowania krawędzi łączącej koniec czerwonej krawędzi z początkowej ścieżki P_3 z końcem niebieskiej krawędzi rundy czwartej, to Budowniczy potrzebuje już tylko dwóch rund, aby uzyskać czerwoną gwiazdę S_3 lub niebieską ścieżkę P_5 (struktura PF oparta na niebieskiej ścieżce P_5), co w szczegółach ilustruje dolna część rysunku 3.21.

Rozważyliśmy wszystkie możliwe kolorowania w tej strategii Budowniczego.

□

Powyższe określenie konkretnej wartości liczby Ramsey'a on-line jest zgodne z najnowszym, przedstawionym w lutym 2023 roku przez Song, Wang i Zhang w [24] dowodem hipotezy, że $\tilde{r}(K_{1,3}, P_l) = \tilde{r}(S_3, P_l) = \left\lfloor \frac{3l}{2} \right\rfloor$ dla $l \geq 2$.

Rozdział 4

Liczby Ramseya on-line dla cykli

C_n i ścieżek P_l

4.1 Znane wyniki

W tym rozdziale przedstawimy dotychczas osiągnięte jak i nowe wyniki dotyczące liczby Ramseya on-line w asymetrycznej grze, a mianowicie dla cykli C_n oraz ścieżek P_l . Znamy dokładną wartość klasycznej liczby Ramseya dla takich grafów. Została ona pokazana przez Faudree, Lawrence, Parsons oraz Schelp w 1974 w pracy [11]. Wydaje się więc, że określanie liczb Ramseya on-line w tym przypadku jest trudniejsze niż wyznaczanie grafowych liczb Ramseya.

W 2008 roku Grytczuk, Kierstead i Prałat w [14] rozpatrywali asymetryczną $\tilde{r}(S_n, H)$ -grę, gdzie za graf H rozważali m.in. cykl C_n . Pokazali:

Twierdzenie 4.1.1 ([14]) *Dla każdego $n, k \in \mathbb{N}, n \geq 3$ mamy*

$$\frac{n}{4}(k+3) \leq \tilde{r}(S_k, C_n) \leq kn.$$

Biorąc pod uwagę, że $S_2 = P_3$, natychmiast otrzymujemy, że dla $n \geq 3$,

$$\frac{5n}{4} \leq \tilde{r}(P_3, C_n) \leq 2n.$$

W roku 2015 Cyman, Dzido, Lapinskas i Lo w pracy [5] uzyskali dokładne wartości liczb Ramseya on-line w $\tilde{r}(P_3, C_n)$ -grze.

Twierdzenie 4.1.2 ([5]) *Dla wszystkich $n \geq 3$ mamy*

$$\tilde{r}(P_3, C_n) = \begin{cases} n + 2 & \text{dla } n = 3, 4, \\ \left\lceil \frac{5n}{4} \right\rceil & \text{dla } n \geq 5. \end{cases}$$

W tej samej pracy [5] autorzy otrzymali również ograniczenia dla liczby Ramseya on-line $\tilde{r}(C_4, P_l)$.

Twierdzenie 4.1.3 ([5]) *Dla wszystkich $l \geq 4$ mamy*

$$2l - 2 \leq \tilde{r}(C_4, P_l) \leq 4l - 8.$$

Co więcej, $\tilde{r}(C_4, P_3) = 6$ oraz $\tilde{r}(C_4, P_4) = 8$.

Warto wspomnieć, że badane są również symetryczne i asymetryczne gry Ramseya on-line oparte na samych cyklach C_n . Cyman i Dzido w [4] przy użyciu algorytmów komputerowych uzyskali dokładne wartości następujących liczb: $\tilde{r}(C_4, C_3) = 3$, $\tilde{r}(C_4, C_4) = \tilde{r}(C_4) = 10$, $\tilde{r}(C_4, C_5) = 12$ oraz $\tilde{r}(C_4, C_6) = 12$. Przy czym dla symetrycznej gry $\tilde{r}(C_4)$ przedstawili również dowód analityczny. Uzyskali również, górne ograniczenie dla liczb Ramseya on-line $\tilde{r}(C_4, C_k)$.

Twierdzenie 4.1.4 *Dla wszystkich $n \geq 3$ mamy $\tilde{r}(C_4, C_k) \leq 4n + 11$.*

4.2 Nowe wyniki

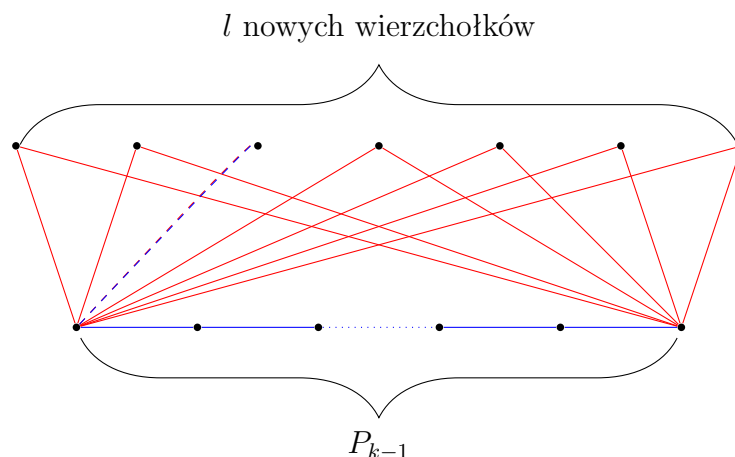
Zanim przedstawimy nowe oszacowania dla $\tilde{r}(C_3, P_l)$ oraz $\tilde{r}(C_4, P_l)$, udowodnimy następujące ogólne ograniczenie.

Lemat 4.2.1 (Dybizbański, Dzido, Zakrzewska [6]) *Niech $k \geq 2$, $l \geq 1$ oraz $H \subseteq K_{2,l}$, wówczas*

$$\tilde{r}(H, P_k) \leq (k-1)e(H).$$

Dowód. Dowód przeprowadzimy za pomocą indukcji. Przypomnijmy, że $e(H)$ oznacza liczbę krawędzi grafu H . Dla $k = 2$ twierdzenie to jest oczywiste - Budowniczy tworzy graf H lub P_2 w co najwyżej $e(H)$ rundach. Niech teraz $k > 2$ i założmy, że lemat zachodzi dla $k-1$. Zatem $\tilde{r}(H, P_{k-1}) \leq (k-2)e(H)$. W $\tilde{r}(H, P_k)$ -grze po pierwsze Budowniczy wykorzystuje co najwyżej $\tilde{r}(H, P_{k-1})$ rund aby otrzymać ścieżkę P_{k-1} a następnie w $e(H)$ rundach tworzy graf H wykorzystując dwa końcowe wierzchołki ścieżki P_{k-1} i l nowych wierzchołków (por. rysunek 4.1). Jeśli Malarka którąkolwiek z tych nowych krawędzi pokoloruje na niebiesko, wówczas otrzymamy niebieską ścieżkę P_k , z tego względu, że każda nowa krawędź ma wspólny wierzchołek z jednym z końców P_{k-1} . W przeciwnym przypadku otrzymamy czerwony graf H , więc

$$\tilde{r}(H, P_k) \leq \tilde{r}(H, P_{k-1}) + e(H) \leq (k-2)e(H) + e(H) = (k-1)e(H).$$



Rysunek 4.1: Ilustracja dowodu lematu 4.2.1.

□

Ponieważ $K_{2,2} = C_4$ wprost z lematu 4.2.1 otrzymujemy następujący wniosek:

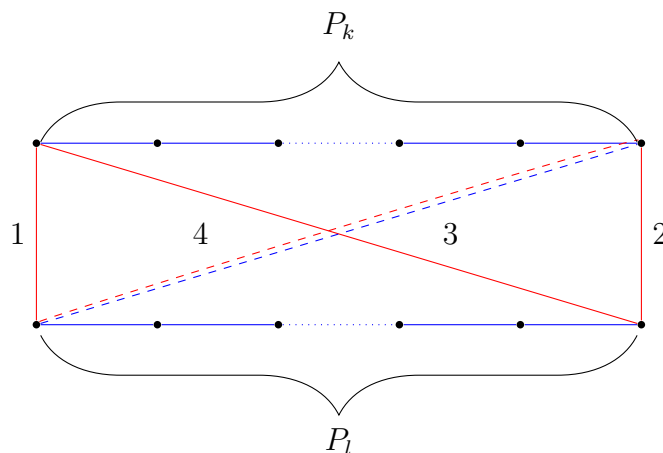
Wniosek 4.2.2 Dla wszystkich $k \geq 2$ mamy $\tilde{r}(C_4, P_k) \leq 4(k - 1) = 4k - 4$

Możemy także zaobserwować, że Budowniczy może uzyskać długą niebieską ścieżkę, stosując dwukrotnie strategię krótszych ścieżek. Otrzymamy wówczas następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4.2.3 (Dybizbański, Dzido, Zakrzewska [6]) Dla wszystkich $l, k \geq 2$ mamy

$$\tilde{r}(C_4, P_{l+k}) \leq \tilde{r}(C_4, P_l) + \tilde{r}(C_4, P_k) + 4.$$

Dowód. W pierwszej kolejności aby uzyskać dwie, rozłączne niebieskie ścieżki P_l oraz P_k , Budowniczy potrzebuje co najwyżej $\tilde{r}(C_4, P_l)$ oraz odpowiednio $\tilde{r}(C_4, P_k)$ rund gry. Następnie Budowniczy tworzy krawędzie, które połączą ze sobą końce obu ścieżek. Uzyskujemy cztery możliwe sposoby takiego połączenia i pokolorowania przez Malarkę. Aby uniknąć czerwonego C_4 , jedna z tych krawędzi musi być pokolorowana na niebiesko tworząc niebieską ścieżkę P_{l+k} .



Rysunek 4.2: Możliwe sposoby uzyskania niebieskiej ścieżki P_{l+k} z twierdzenia 4.2.3.

Rysunek 4.2 prezentuje możliwe sposoby połączenia niebieskich ścieżek P_l i P_k , gdzie kolejne rundy oznaczono cyframi. Ostatni ruch, który prowadzi do niebieskiej P_{l+k} lub czerwonego cyklu C_4 zaznaczono przerywaną linią.

□

Założmy teraz, że mamy następującą ścieżkę $Q = v_1 \dots v_k$ o k wierzchołkach i długości $e(Q) = k - 1$. Dla podkreślenia połączenia krawędzi e ze skrajnym wierzchołkiem ścieżki Q będziemy stosować zapis eQ . Rozpatrzmy teraz następujący lemat.

Lemat 4.2.4 (Dybizbański, Dzido, Zakrzewska [6]) *Niech Q będzie nietrywialną niebieską ścieżką o końcach a i b , przy czym wierzchołek b jest incydentny do czerwonej krawędzi bc , gdzie $c \notin V(Q)$. Budowniczy może w co najwyżej trzech rundach wymusić na Malarce takie pokolorowanie, że otrzymamy jedną z poniższych struktur:*

- (i) *niebieską ścieżkę Q' o długości $e(Q) + 1$ z jednym końcowym wierzchołkiem b' incydentnym do czerwonej krawędzi $b'c'$, gdzie $c' \notin V(Q')$,*
- (ii) *czerwony cykl C_4 .*

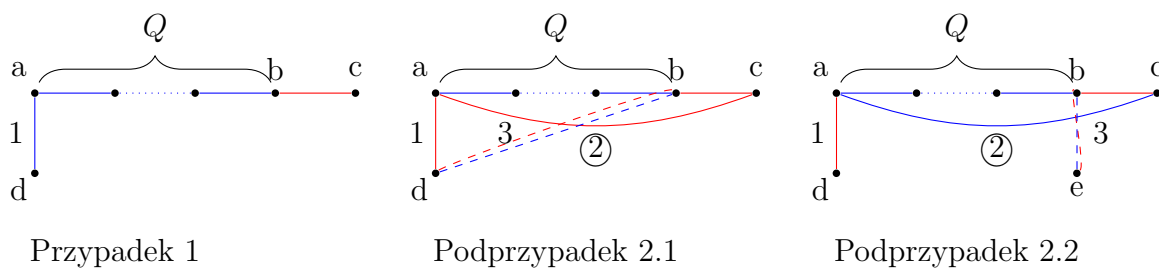
Dowód. Niech d będzie nowym wierzchołkiem. W pierwszej turze Budowniczy tworzy krawędź ad . Malarka ma swobodę w wyborze koloru, dlatego rozpatrzmy dwa przypadki (por. rysunek 4.3).

Przypadek 1 Malarka używa do pokolorowania krawędzi ad koloru niebieskiego. Wówczas od razu otrzymujemy (i) - niebieską ścieżkę dQ o długości $e(Q) + 1$, gdzie końcowy wierzchołek b jest incydentny do czerwonej krawędzi bc .

Przypadek 2 Malarka używa do pokolorowania krawędzi ad koloru czerwonego. W rundzie drugiej Budowniczy tworzy krawędź ac . Malarka ponownie ma swobodę kolorowania, stąd podprzypadki 2.1 oraz 2.2.

Podprzypadek 2.1 Malarka używa do pokolorowania krawędzi ac koloru czerwonego. W trzeciej rundzie Budowniczy tworzy krawędź bd . Jeśli Malarka pokoloruje ją na niebiesko wówczas zachodzi (i) - niebieska ścieżka dQ o długości $e(Q) + 1$, gdzie końcowy wierzchołek a jest incydentny do czerwonej krawędzi ac . Jeśli zaś Malarka użyje koloru czerwonego, wówczas $dacbd$ tworzy czerwony cykl C_4 , a więc zachodzi własność (ii).

Podprzypadek 2.2 Malarka używa do pokolorowania krawędzi ac koloru niebieskiego. W trzeciej rundzie Budowniczy tworzy krawędź be , gdzie e jest nowym wierzchołkiem. Jeśli Malarka pokoloruje tę krawędź na niebiesko, wówczas zachodzi własność (i) - powstaje niebieska ścieżka eQ o długości $e(Q) + 1$, gdzie końcowy wierzchołek a jest incydentny do czerwonej krawędzi ad . Jeśli natomiast Malarka krawędź be pokoloruje na czerwono, ponownie uzyskamy własność (i) - niebieską ścieżkę cQ o długości $e(Q) + 1$, gdzie końcowy wierzchołek b jest incydentny do czerwonej krawędzi bc .



Rysunek 4.3: Możliwe kolorowania dla lematu 4.2.4.

Możliwe przypadki kolorowania przedstawiamy na rysunku 4.3, gdzie cyfra w kółku oznacza rozpatrzenie obu wariantów kolorowania dozwolonych Malarce.

□

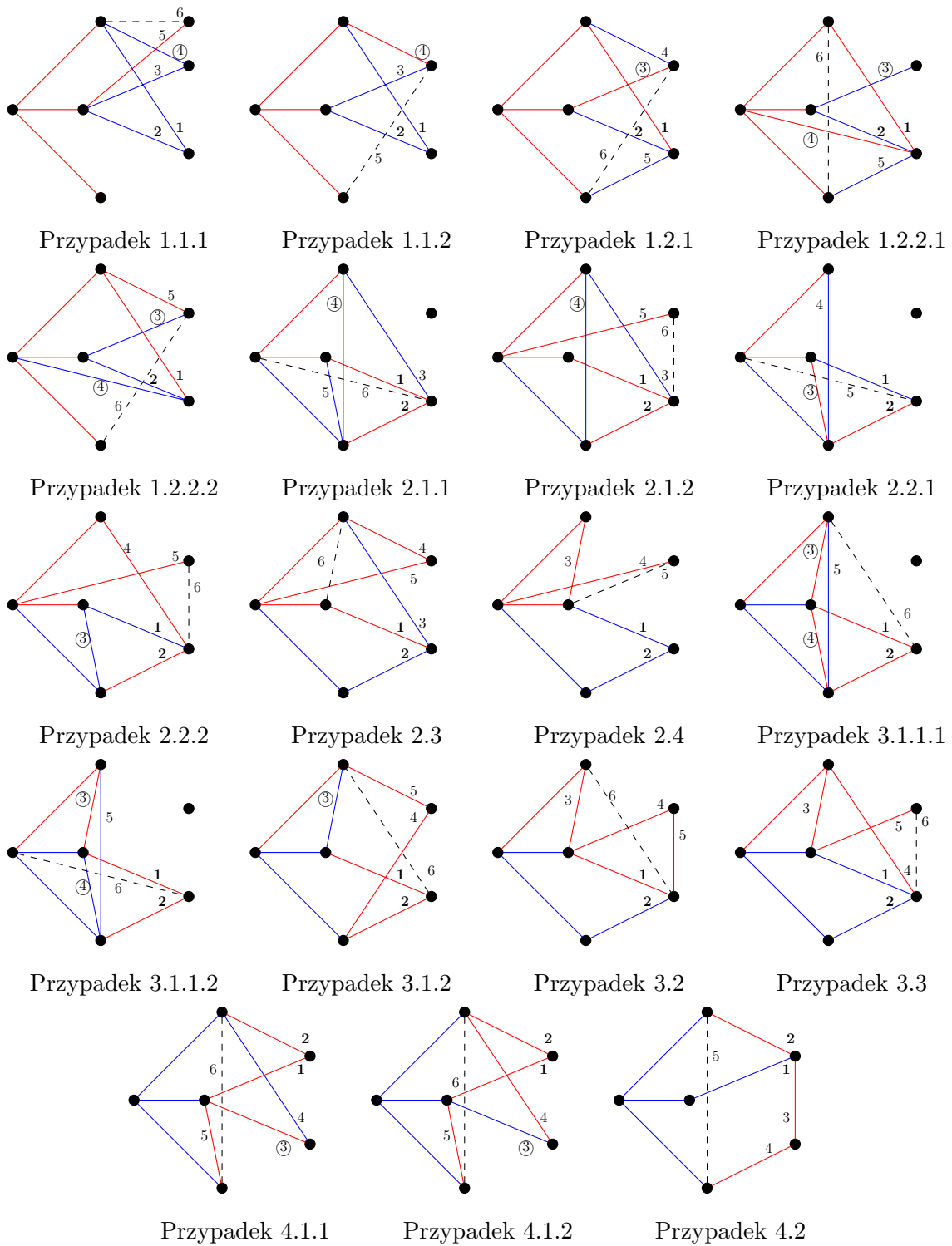
Wyznamy teraz nowe, górne oszacowania liczb Ramseya on-line $\tilde{r}(C_4, P_k)$ oraz $\tilde{r}(C_3, P_k)$.

Twierdzenie 4.2.5 (Dybizbański, Dzido, Zakrzewska [6]) *Dla wszystkich $k \geq 6$ mamy $\tilde{r}(C_4, P_k) \leq 3k - 5$. Co więcej, $\tilde{r}(C_4, P_5) = 9$.*

Dowód. Zaczniemy od określenia dokładnej wartości liczby $\tilde{r}(C_4, P_5)$. Zapiszemy ten wynik za pomocą lematu.

Lemat 4.2.6 $\tilde{r}(C_4, P_5) = 9$

Dowód. Wprost z wniosku 4.2.17 otrzymujemy, że $\tilde{r}(C_4, P_5) \geq 9$. Pozostaje nam zatem pokazać, że Budowniczy może wygrać $\tilde{r}(C_4, P_5)$ -grę w przeciągu 9 rund.



Rysunek 4.4: Wszystkie warianty ostatnich sześciu rund gry prowadzących do niebieskiej ścieżki P_5 lub czerwonego cyklu C_4 .

W pierwszych trzech rundach gry Budowniczy tworzy gwiazdę $K_{1,3}$. Malarka może ją pokolorować na cztery różne sposoby. Ze względu na zastosowanie koloru niebieskiego - **b** i czerwonego - **r** według kolejności tur wyróżnimy następujące wzory użycia kolorów. Przypadek 1 dotyczy sytuacji, gdy wszystkie krawędzie $K_{1,3}$ są czerwone - **rrr**. Przypadek 2 - odpowiednio: niebieska, czerwona, czerwona - **brr**, przypadek 3 - odpowiednio: niebieska, niebieska, czerwona - **bbrr** i ostatni przypadek 4, gdy wszystkie krawędzie są niebieskie - **bbb**. Graczom pozostało co najwyżej sześć rund gry. W kolejnych dwóch rundach (na rysunku 4.4 oznaczone jako 1 i 2), Budowniczy tworzy $K_{1,2}$ w taki sposób, że łączy dwa wybrane wierzchołki końcowe $K_{1,3}$ z nowym wierzchołkiem. W przypadku 1.1 ($K_{1,3}$ jest pokolorowana na *rrr* oraz w ruchach 1 i 2 użyliśmy koloru niebieskiego) rozpatrzyliśmy tylko dwa możliwe nieizomorficzne kolorowania ruchów 3 i 4, gdy oba są niebieskie (przypadek 1.1.1) oraz gdy nadano im różne barwy (przypadek 1.1.2). Analizując kolejne, co najwyżej 4 rundy gry otrzymujemy dziewiętnaście możliwych wariantów zagrań. Rysunek 4.4 prezentuje wszystkie przypadki z dokładnością do izomorfizmu. Cyfry zapisane w kółku oznaczają, że w danej rundzie Malarka ma swobodę w wyborze koloru.

Kolejne cyfry w nazewnictwie przypadków oznaczają rozpatrzenie dwóch wariantów kolorowania w kolejnych rundach gry. Ostatnia runda zaznaczona jest przerywaną linią.

□

Wracając do dowodu twierdzenia, rozważmy teraz następującą strategię gry Budowniczego. Po uzyskaniu przez niego niebieskiej ścieżki P_5 w dziewięciu ruchach w $\tilde{r}(C_4, P_5)$ -grze, wydłuża on niebieską ścieżkę, dopóki Malarka nie użyje koloru czerwonego. Otrzymujemy wówczas nietrywialną niebieską ścieżkę Q z końcowymi wierzchołkami - nazwijmy je a i b , gdzie b jest incydentny do czerwonej krawędzi bc , przy czym $c \notin V(Q)$. Zatem stosując wielokrotnie lemat 4.2.4, Budowniczy może wydłużyć ścieżkę Q do niebieskiej ścieżki P_k lub czerwonego cyklu C_4 w co najwyżej $10 + 3(k - 5)$ rundach (potrzebujemy 9 ruchów $\tilde{r}(C_4, P_5)$ -gry, aby uzyskać niebieską P_5 oraz jednego na dodanie do ścieżki czerwonej krawędzi i trzech ruchów na każde wydłużenie ścieżki o 1), zatem $\tilde{r}(C_4, P_k) \leq 3k - 5$.

□

Przejdziemy teraz do nowego oszacowania z góry liczby $\tilde{r}(C_3, P_k)$. Budowniczy stosując strategię polegającą na unikaniu czerwonego cyklu C_3 a startując już od niebieskiej ścieżki P_l , może wymusić niebieską ścieżkę P_{l+1} w co najwyżej $2l + 1$ rundach.



Aby to uzyskać, w początkowych $l + 1$ ruchach Budowniczy próbuje wydłużyć niebieską ścieżkę P_l dokładając krawędzie do tego samego wierzchołka końcowego tej ścieżki. Jeśli Malarka pokoloruje każdą z tych nowych $l + 1$ krawędzi na czerwono, wówczas Budowniczy z łatwością uzyska niebieską ścieżkę P_{l+1} , łącząc końce tych nowych czerwonych krawędzi. Malarka musi każdą z nich pokolorować na niebiesko, aby uniknąć czerwonego cyklu C_3 . Jeżeli będziemy używać tej strategii wielokrotnie to otrzymamy oszacowanie $\tilde{r}(C_3, P_k) \leq k^2 - 1$. Poniżej przedstawiamy inną strategię, która pozwoli nam uzyskać lepsze, liniowe górne oszacowanie. Niech teraz podczas gry Budowniczy nie skupia się na zbudowaniu jak najdłuższej niebieskiej ścieżki. Jego strategia polega teraz na tym, aby uzyskać dwie rozłączne niebieskie ścieżki, których suma długości jest jak największa.

Twierdzenie 4.2.7 (Dybizbański, Dzido, Zakrzewska [6]) *Dla wszystkich $k \geq 2$ mamy $\tilde{r}(C_3, P_k) \leq 4k - 5$.*

Dowód. Niech trójka (p, l, B) oznacza stan gry, gdzie p i l wyrażają odpowiednio długości dwóch rozłącznych, niebieskich ścieżek. Bit B informuje nas o tym, czy istnieje (prawda), bądź nie istnieje (fałsz) czerwona krawędź łącząca końce tych niebieskich ścieżek. Biorąc pod uwagę, że każdy wierzchołek stanowi ścieżkę P_1 , to stan początkowy gry zapisujemy jako $(1, 1, \text{fałsz})$. Jeśli stan gry przedstawia się następująco $(p, l, \text{fałsz})$, wówczas Budowniczy postępuje następująco:

- (1) łączy krawędzią końce niebieskich ścieżek. Jeśli Malarka pokoloruje tę krawędź na niebiesko, wówczas w jednym ruchu stan gry wynosi $(p + l, 1, \text{fałsz})$ (mamy niebieską ścieżkę o długości $p+l$ i bierzemy kolejny, nowy wierzchołek jako ścieżkę P_1). Jeśli natomiast Malarka pokoloruje tę krawędź na czerwono, wówczas:
- (2) Budowniczy łączy krawędzią końcowy wierzchołek ścieżki o długości p z nowym wierzchołkiem, powiedzmy u . Jeśli Malarka użyje koloru niebieskiego, to stan gry po dwóch ruchach jest następujący: $(p + 1, l, \text{fałsz})$. Jeśli natomiast użyje koloru czerwonego, wówczas:
- (3) Budowniczy łączy krawędzią końcowy wierzchołek ścieżki o długości l z wierzchołkiem u . Malarka musi pokolorować tę krawędź na niebiesko, aby uniknąć czerwonego cyklu C_3 . Zatem w trzech ruchach mamy następujący stan gry: $(p, l + 1, \text{prawda})$.

Analogicznie, jeśli stan gry wynosi (p, l, prawda) , wówczas Budowniczy może zagrać tylko na dwa sposoby podane powyżej, oznaczone jako (2) i (3). Uzyskamy wówczas odpowiednio:

(2') stan $(p + 1, l, \text{fałsz})$ w jednej rundzie,

(3') stan $(p, l + 1, \text{prawda})$ w dwóch rundach.

Podsumowując, w każdej z pięciu powyższych sytuacji, w co najwyżej trzech ruchach Budowniczy może przejść ze stanu gry $(x, y, *)$ do $(x', y', *)$, przy czym $x' + y' = x + y + 1$. Taką sekwencję ruchów nazwiemy krokiem. Zaczynając od stanu początkowego, po $2k - 3$ krokach, długość jednej z niebieskich ścieżek wynosi co najmniej k . Każdy krok zawiera co najwyżej trzy ruchy, przy czym dokładnie trzy ruchy są zawarte tylko w (3). Ten krok zmienia stan z $(*, *, \text{fałsz})$ na $(*, *, \text{prawda})$. Jeśli chcemy powtórzyć ten krok, to musimy powrócić do stanu $(*, *, \text{fałsz})$. Jest to możliwe tylko za pomocą kroku (2'), a ten wymaga tylko jednego ruchu. W sekwencji $2k - 3$ kroków, pomiędzy każdymi krokami składającymi się z trzech ruchów, występuje krok wymagający jednego ruchu. Wszystkie pozostałe kroki wymagają co najwyżej dwóch ruchów, zatem Budowniczy zakończy grę w co najwyżej $2(2k - 3) + 1 = 4k - 6 + 1 = 4k - 5$ ruchach.

□

Przejdziemy teraz do przedstawienia dolnych oszacowań liczb $\tilde{r}(C_3, P_k)$ oraz $\tilde{r}(C_4, P_k)$. W tym celu przedstawiamy następujące definicje. Graf nazywamy \mathcal{F} -wolnym, jeśli nie zawiera jako podgrafu żadnego grafu z rodziny \mathcal{F} . Piszemy N dla oznaczenia zbioru $\{1, 2, \dots\}$ liczb naturalnych.

Definicja 4.2.8 *Niech \mathcal{F} oznacza pewną rodzinę grafów. Definiujemy strategię \mathcal{F} -blokowania dla Malarki w następujący sposób. Przez R_i oznaczamy graf, który nie zawiera czerwonych krawędzi bezpośrednio przed i -tym ruchem w grze, zaś przez e_i rozumiemy i -tą krawędź wybraną przez Budowniczego. Wówczas Malarka koloruje krawędź e_i na czerwono gdy $R_i + e_i$ jest \mathcal{F} -wolny, w przeciwnym wypadku używa koloru niebieskiego.*

Naszym celem jest ograniczyć z dołu $\tilde{r}(G, H)$ dla niektórych grafów G oraz H . Dlatego w tej części pracy Malarka zawsze użyje strategii \mathcal{F} -blokowania dla pewnej rodziny \mathcal{F} grafów z $G \in \mathcal{F}$. Dla przykładu jeśli $\mathcal{F} = \{G\}$, to strategia \mathcal{F} -blokowania dla Malarki polega na kolorowaniu każdej pojawiającej się krawędzi na czerwono, chyba

że powodowałyoby to przegranie gry. Natomiast w tej sytuacji strategia Budowniczego sprowadza się do wyboru czerwonego grafu, za pomocą którego może wymusić niebieską kopię grafu H .

Definicja 4.2.9 Niech \mathcal{F} oznacza pewną rodzinę grafów oraz niech $R \subseteq K_N$ jest grafem \mathcal{F} -wolnym. Krawędź $e \in K_N - R$ nazywamy (R, \mathcal{F}) -wymuszoną jeśli $R + e$ nie jest \mathcal{F} -wolny. Graf H nazywamy (R, \mathcal{F}) -wymuszonym jeśli istnieje graf $H' \subseteq K_N - R$ izomorficzny do grafu H , taki że każda krawędź $e \in E(H')$ jest (R, \mathcal{F}) -wymuszona. Graf H' nazywamy (R, \mathcal{F}) -wymuszoną kopią grafu H .

Jeśli z kontekstu zdania jasno wynika czym jest R i \mathcal{F} , wówczas pomijamy tę część zapisu - " (R, \mathcal{F}) ".

Definicja 4.2.10 Niech \mathcal{F} oznacza rodzinę grafów, zaś H będzie grafem. Graf $R \subseteq K_N$ nazywamy \mathcal{F} -rusztowaniem dla grafu H jeśli zachodzą następujące własności:

1. R jest grafem \mathcal{F} -wolnym,
2. H jest grafem (R, \mathcal{F}) -wymuszonym,
3. R nie zawiera wierzchołków izolowanych.

Przypomnijmy z pracy [5] następujący lemat.

Lemat 4.2.11 ([4]) Niech G oraz H będą grafami. Niech \mathcal{F} stanowi rodzinę grafów, przy czym $G \in \mathcal{F}$. Załóżmy, że każde \mathcal{F} -rusztowanie dla H zawiera co najmniej m krawędzi. Wówczas $\tilde{r}(G, H) \geq m + e(H)$.

Przypomnijmy również lemat dotyczący dolnego oszacowania $\tilde{r}(C_k, H)$, gdzie H jest grafem spójnym.

Lemat 4.2.12 ([4]) Niech H będzie grafem spójnym. Wówczas każde $\{C_i : i \geq 3\}$ -rusztowanie dla grafu H posiada co najmniej $v(H) - 1$ krawędzi. Co więcej, dla wszystkich $k \geq 3$ mamy $\tilde{r}(C_k, H) \geq v(H) + e(H) - 1$.

Z powyższego lematu 4.2.12 otrzymujemy następujący wniosek dotyczący dolnego oszacowania liczby krawędzi w $\{C_3\}$ - oraz w $\{C_4\}$ -rusztowaniu dla ścieżki P_k .

Wniosek 4.2.13 Każde $\{C_3\}$ - oraz $\{C_4\}$ -rusztowanie dla ścieżki P_k posiada przynajmniej $k - 1$ krawędzi.



Udowodnimy teraz, że dla każdego $k \geq 3$ minimalne $\{C_3\}$ -rusztowanie dla ścieżki P_k posiada co najmniej jedną krawędź więcej.

Lemat 4.2.14 (Dybizbański, Dzido, Zakrzewska [6]) *Dla $k \geq 3$ każde $\{C_3\}$ -rusztowanie dla ścieżki P_k posiada przynajmniej k krawędzi.*

Dowód. Niech R oznacza $\{C_3\}$ -rusztowanie dla ścieżki P_k , z minimalną liczbą krawędzi $e(R)$ i $k \geq 3$. Zauważmy, że wszystkie $(R, \{C_3\})$ -wymuszone krawędzie muszą w całości należeć do R . Zatem R jest grafem spójnym, zawierającym przynajmniej $k - 1$ krawędzi, zaś $(R, \{C_3\})$ -wymuszone P_k zawiera wszystkie wierzchołki R . Załóżmy teraz, że R ma $k - 1$ krawędzi, a zatem jest drzewem, czyli jest również grafem dwudzielnym. Zatem wszystkie $(R, \{C_3\})$ -wymuszone krawędzie łączą wierzchołki z tej samej partycji grafu R . Ponieważ każda partycja R zawiera przynajmniej jeden wierzchołek, oznacza to, że $(R, \{C_3\})$ nie wymusza ścieżki P_k . Zauważmy, że gwiazda $K_{1,k}$ stanowi dobre rusztowanie. □

Wniosek 4.2.15 *Dla $k \geq 3$ mamy $\tilde{r}(C_3, P_k) \geq 2k - 1$.*

Dowód. Rozważmy strategię $\{C_3\}$ -blokowania, według której gra Malarka w $\tilde{r}(C_3, P_k)$ -grze, przy czym $k \geq 3$. Niech R oznacza minimalne ze względu na liczbę krawędzi $\{C_3\}$ -rusztowanie dla P_k . Z lematu 4.2.14 mamy, że liczba krawędzi $e(R) \geq k$. Korzystając również z wyniku lematu 4.2.11 otrzymujemy żądany wniosek. □

Pokażemy teraz, że dla $k \in \{5, 6, 7\}$ minimalne $\{C_4\}$ -rusztowanie dla ścieżki P_k posiada co najmniej jedną krawędź więcej, niż otrzymujemy we wniosku 4.2.13

Lemat 4.2.16 (Dybizbański, Dzido, Zakrzewska [6]) *Dla $k \in \{5, 6, 7\}$ każde $\{C_4\}$ -rusztowanie dla ścieżki P_k posiada co najmniej k krawędzi.*

Dowód. Niech R będzie $\{C_4\}$ -rusztowaniem dla ścieżki P_k o minimalnej liczbie krawędzi $e(R)$ i $k \in \{5, 6, 7\}$. Zauważmy najpierw, że wszystkie $(R, \{C_4\})$ -wymuszone krawędzie muszą być częścią R . Ponadto R jest spójny i musi zawierać co najmniej $k - 1$ różnych ścieżek P_4 .

Przypuśćmy nie wprost, że $e(R) \leq k - 1$. Ponieważ $k \leq 7$, to R jest drzewem i każde $(R, \{C_4\})$ -wymuszone P_k musi zawierać wszystkie wierzchołki R . Ponadto, każdy wierzchołek R , z wyjątkiem co najwyżej dwóch, jest wierzchołkiem końcowym co najmniej



dwóch różnych P_4 w R . Dwa wyróżnione wierzchołki są wierzchołkami końcowymi co najmniej jednej ścieżki P_4 w R . Poprzez prostą analizę drzew złożonych odpowiednio z 4, 5 lub 6 krawędzi, otrzymujemy, że nie istnieje R spełniające powyższe własności, co oznacza, że $e(R) \geq k$.

□

Wniosek 4.2.17 Dla $k \in \{5, 6, 7\}$ mamy $\tilde{r}(C_4, P_k) \geq 2k - 1$.

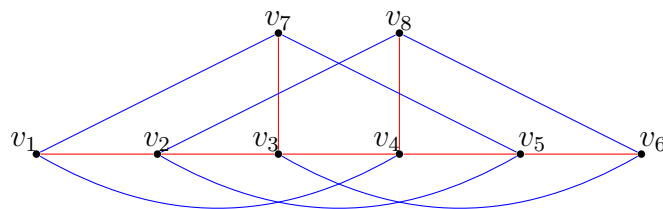
Dowód. Rozważmy strategię $\{C_4\}$ -blokowania, według której gra Malarka w $\tilde{r}(C_4, P_k)$ -grze, przy czym $5 \leq k \leq 7$. Niech R oznacza minimalne ze względu na krawędzie $\{C_4\}$ -rusztowanie dla P_k . Z lematu 4.2.16 mamy, że liczba krawędzi $e(R) \geq k$. Korzystając również z wyniku lematu 4.2.11 otrzymujemy powyższy wniosek.

□

Zauważmy teraz, że lemat 4.2.16 nie zachodzi dla większych k . Mamy bowiem następujący lemat.

Lemat 4.2.18 Dla $k \geq 8$ istnieje $\{C_4\}$ -rusztowanie R dla ścieżki P_k , które zawiera $k - 1$ krawędzi.

Dowód. Dla $k = 8$, R jest ścieżką v_1, v_2, \dots, v_6 z dodatkowymi krawędziami v_3v_7 oraz v_4v_8 . Dostajemy wymuszoną kopię ścieżki P_8 opartą na wierzchołkach w kolejności $v_4, v_1, v_7, v_5, v_2, v_8, v_6, v_3$ (por. rysunek 4.5).



Rysunek 4.5: $\{C_4\}$ -rusztowanie R dla ścieżki P_8 .

Dla większych wartości k , zakładamy, że mamy $\{C_4\}$ -rusztowanie R' dla ścieżki P_{k-1} , które składa się z $k-2$ krawędzi i wymusza następującą kopię $P_{k-1}: v_1, v_2, \dots, v_{k-1}$. Opierając się na R' konstruujemy $\{C_4\}$ -rusztowanie R dla P_k zawierające $k - 1$ krawędzi przez dodanie nowego wierzchołka u i krawędzi pomiędzy tym wierzchołkiem a dowolnym wierzchołkiem znajdującym się w odległości dwa od v_1 . Wówczas R wymusza następującą kopię $P_k: u, v_1, v_2, \dots, v_{k-1}$.

□

Wniosek 4.2.19 Dla $k \geq 8$ mamy $\tilde{r}(C_4, P_k) \geq 2k - 2$.

Dowód. Otrzymujemy jako natychmiastowy wniosek z lematów 4.2.11 i 4.2.18. □

Teraz podsumujemy wszystkie rezultaty otrzymane w tym rozdziale.

Wniosek 4.2.20 Dla $k \geq 5$ mamy

$$2k - 1 \leq \tilde{r}(C_3, P_k) \leq 4k - 5.$$

Wniosek 4.2.21 Dla $k \geq 6$ mamy

$$3k - 5 \geq \tilde{r}(C_4, P_k) \geq \begin{cases} 2k - 1 & \text{dla } k = 6, 7, \\ 2k - 2 & \text{dla } k \geq 8. \end{cases}$$

Podsumowując, biorąc pod uwagę powyższe wnioski, twierdzenie 4.2.3 jak i znane liczby Ramsey'a on-line $\tilde{r}(C_n, P_l)$ otrzymaliśmy nowe ograniczenia dla $\tilde{r}(C_4, P_k)$, gdzie $6 \leq k \leq 10$, które prezentujemy w zestawieniu z wcześniejszymi ograniczeniami w tabeli 4.1.

liczba	stare oszacowanie	nowe oszacowanie
$\tilde{r}(C_4, P_6)$	≥ 10 oraz ≤ 16	$\geq \mathbf{11}$ oraz $\leq \mathbf{13}$
$\tilde{r}(C_4, P_7)$	≥ 12 oraz ≤ 20	$\geq \mathbf{13}$ oraz $\leq \mathbf{16}$
$\tilde{r}(C_4, P_8)$	≥ 14 oraz ≤ 24	≥ 14 oraz $\leq \mathbf{19}$
$\tilde{r}(C_4, P_9)$	≥ 16 oraz ≤ 28	≥ 16 oraz $\leq \mathbf{22}$
$\tilde{r}(C_4, P_{10})$	≥ 18 oraz ≤ 32	≥ 18 oraz $\leq \mathbf{25}$

Tabela 4.1: Zestawienie oszacowań dla $\tilde{r}(C_4, P_k)$, gdzie $6 \leq k \leq 10$.

Spis rysunków

2.1	Wszystkie możliwe struktury dla $\tilde{r}(P_4, P_5)$ -gry.	14
2.2	Wszystkie warianty tur $\tilde{r}(P_4, P_{10})$ -gry z lematu 2.2.3.	15
2.3	Warianty tur gry z lematu 2.2.4.	16
2.4	Niebieska ścieżka P_{10} w Przypadku 1 dowodu lematu 2.2.5.	17
2.5	Niebieska ścieżka P_{10} powstała w podprzypadkach przypadku 2 dowodu lematu 2.2.5.	18
2.6	Niebieska ścieżka P_{10} powstała w podprzypadkach przypadku 3 dowodu lematu 2.2.5.	18
2.7	Możliwe 4 ostatnie kolorowania w obu $\tilde{r}(P_4, P_5)$ -grach dla lematu 2.2.6 przy strukturze S_4	19
2.8	Utworzenie niebieskiej ścieżki o długości $e(Q) + 1$	20
2.9	Wszystkie możliwe struktury kolorowań w strategii dla $\tilde{r}(P_4, P_{11})$	21
3.1	Przykład struktury PF opartej na ścieżce P_l	25
3.2	Przykład struktury PC opartej na ścieżce P_l	26
3.3	Przykład struktury PEC opartej na ścieżce P_l	26
3.4	Przykład struktury PZ opartej na ścieżce P_{l+1}	26
3.5	Kolejne tury gry dla przypadku 1 lematu 3.2.6.	27
3.6	Kolejne tury gry dla podprzypadku 2.1 lematu 3.2.6.	28
3.7	Kolejne tury gry dla podprzypadku 2.2 lematu 3.2.6.	29
3.8	Kolejne tury gry dla przypadku 1 lematu 3.2.7.	30
3.9	Kolejne tury gry dla podprzypadku 2.1 lematu 3.2.7.	31
3.10	Kolejne tury gry dla podprzypadku 2.2 lematu 3.2.7.	31
3.11	Kolejne tury gry dla podprzypadku 1.1 lematu 3.2.8.	32
3.12	Kolejne tury gry dla podprzypadku 1.2 lematu 3.2.8.	33
3.13	Kolejne tury gry dla podprzypadku 2.1 lematu 3.2.8.	34



3.14	Kolejne tury gry dla podprzypadku 2.2 lematu 3.2.8.	34
3.15	Kolejne tury gry dla przypadku 1 lematu 3.2.9.	35
3.16	Kolejne tury gry dla przypadku 2.1 lematu 3.2.9.	36
3.17	Kolejne tury gry dla podprzypadku 2.2.1 lematu 3.2.9.	37
3.18	Kolejne tury gry dla podprzypadku 2.2.2 lematu 3.2.9.	37
3.19	Możliwe kolorowania w przypadku 1 dla twierdzenia 3.2.10.	39
3.20	Możliwe kolorowania w przypadku 2 dla twierdzenia 3.2.10.	40
3.21	Możliwe kolorowania w przypadku 3 dla twierdzenia 3.2.10.	40
4.1	Ilustracja dowodu lematu 4.2.1.	44
4.2	Możliwe sposoby uzyskania niebieskiej ścieżki P_{l+k} z twierdzenia 4.2.3. .	45
4.3	Możliwe kolorowania dla lematu 4.2.4.	47
4.4	Wszystkie warianty ostatnich sześciu rund gry prowadzących do niebieskiej ścieżki P_5 lub czerwonego cyklu C_4	48
4.5	$\{C_4\}$ -rusztowanie R dla ścieżki P_8	54

Spis tabel

2.1	Znane wartości liczb Ramseya on-line dla ścieżek P_n	12
2.2	Znane i nowe górne oszacowania liczby $\tilde{r}(P_4, P_n)$ dla $12 \leq n \leq 22$	22
4.1	Zestawienie oszacowań dla $\tilde{r}(C_4, P_k)$, gdzie $6 \leq k \leq 10$	55

Bibliografia

- [1] J. Beck, Achievement games and the probabilistic method, *Combinatorics, Paul Erdős is Eighty*, Bolyai Society of Mathematical Studies (1993) 51–78.
- [2] L. W. Beineke, A. J. Schwenk, On a bipartite form of the Ramsey problem, *Proceedings of the Fifth British Combinatorial Conference Congressus Numer. XV* (1975) 17–22.
- [3] D. Conlon, On-line Ramsey numbers, *SIAM Journal on Discrete Mathematics* **23** (2009) 1954–1963.
- [4] J. Cyman, T. Dzido, A note on on-line Ramsey numbers for quadrilaterals, *Opuscula Mathematica* **34** (2014) 463–468.
- [5] J. Cyman, T. Dzido, J. Lapinskas, A. Lo, On-line Ramsey numbers for paths and cycles, *Electronic Journal of Combinatorics* **22** (2015) #P1.15.
- [6] J. Dybizbański, T. Dzido, R. Zakrzewska, On-line Ramsey numbers for path and short cycles, *Discrete Applied Mathematics* **282** (2020) 265–270.
- [7] T. Dzido, R. Zakrzewska, A note on on-line Ramsey numbers for some paths, *Mathematics* **9** (7) (2021) 735.
- [8] T. Dzido, R. Zakrzewska, The nonclassical mixed domination Ramsey numbers, *Australasian Journal of Combinatorics* **45** (2009) 109–115.
- [9] P. Erdős, R. J. Faudree, C. C. Rousseau, R. H. Schelp, The size Ramsey number, *Periodica Mathematica Hungarica* **9** (1978) 145–161.
- [10] P. Erdős, G. Szekeres, A combinatorial problem in geometry, *Composito Mathematica* **2** (1935) 463–470

- [11] R. J. Faudree, S. L. Lawrence, T. D. Parsons, R. H. Schelp, Path-cycle Ramsey numbers, *Discrete Mathematics* **10** (1974) 269–277.
- [12] G. Frederickson, N. Lynch, Electing a leader in synchronous ring, *Journal of Association for Computing Machinery* **34** (1987) 98–115.
- [13] P. Gordinowicz, P. Prałat, Small on-line Ramsey numbers—a new approach, *Contributions to Discrete Mathematics* **13(2)** (2018) 101–111.
- [14] J. Grytczuk, H. Kierstead and P. Prałat, On-line Ramsey numbers for paths and stars, *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science* **10(3)** (2008) 63–74.
- [15] M. A. Henning, O. R. Oellermann, The upper domination Ramsey number $u(3, 3, 3)$, *Discrete Mathematics* **242** (2002) 103–113.
- [16] A. Kurek, A. Ruciński, Two variants of the size Ramsey number, *Discussiones Mathematicae Graph Theory* **25** (2005) 141–149.
- [17] W. Lipski, W. Marek, *Analiza kombinatoryczna*, PWN, Warszawa, 1990.
- [18] Fatin Nur Nadia Binti Mohd Latip, Ta Sheng Tan, A note on on-line Ramsey numbers of stars and path, *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society* **44** (2021) 3511–3521 .
- [19] P. Prałat, A note on off-diagonal small on-line Ramsey numbers for paths, *Ars Combinatoria* **107** (2012) 295–306.
- [20] P. Prałat, A note on small on-line Ramsey numbers for paths and their generalization, *Australasian Journal of Combinatorics* **40** (2008) 27–36.
- [21] F. P. Ramsey, On a problem of formal logic, *Proceedings of the London Mathematical Society* **30** (1930) 264–286.
- [22] V. Rosta, Ramsey Theory Application, *Electronic Journal of Combinatorics, Dynamic Survey*, **13** (2004).
- [23] M. Snir, On parallel searching, *SIAM Journal Computing* **14** (1985) 688–708.
- [24] R. Song, S. Wang, Y. Zhang, Proof of a Conjecture on Online Ramsey Numbers of Stars versus Paths, arXiv:2302.08787.