

# Model matematyczny układu napędowego samochodu z silnikiem spalinowym i jego badania symulacyjne

Dariusz Steckiewicz, Robert Piotrowski

Wydział Elektrotechniki i Automatyki, Politechnika Gdańska

**Streszczenie:** Układ napędowy samochodu z silnikiem spalinowym jest złożonym obiektem fizycznym. W artykule omówiono budowę modelu matematycznego wykorzystującego fizykę poruszania się pojazdu. Następnie wykonano identyfikację parametrów modelu, opracowano model symulacyjny i przeprowadzono jego weryfikację stosując rzeczywiste dane. Przeanalizowano uzyskane wyniki.

**Słowa kluczowe:** modelowanie matematyczne, systemy dynamiczne, systemy nieliniowe.

## 1. Wprowadzenie

W celu analizy obiektu często stosowanym podejściem inżynierskim jest budowa modelu matematycznego tego obiektu, jego komputerowa implementacja i badania symulacyjne. Zawarte w modelu symbole i operatory matematyczne mają interpretację odnoszącą je do konkretnych elementów modelowanego obiektu. Stopień szczegółowości zależy od późniejszego wykorzystania. Do głównych etapów budowy modelu należą: sformułowanie celu i założeń, wybór kategorii modelu, określenie struktury modelu, identyfikacja parametrów, weryfikacja [1]. W literaturze w różny sposób podchodzi się do modelowania tego typu obiektów, np. [2, 3, 4].

W artykule zaprezentowano dynamiczny nieliniowy model matematyczny układu napędowego samochodu z silnikiem spalinowym dla potrzeb późniejszego projektu układu sterowania prędkością pojazdu. Model zbudowano na bazie wiedzy apriorycznej, dokumentacji technicznej oraz pomiarów obiektowych. Następnie zaimplementowano i zbadano go w środowisku Matlab/Simulink z wykorzystaniem bloków biblioteki SimDriveline [5]. Umożliwia on analizę prędkości obrotowej silnika przy różnych prędkościach pojazdu z uwzględnieniem zakłóceń w postaci wiatru i nachylenia niwelety drogi.

## 2. Charakterystyka obiektu

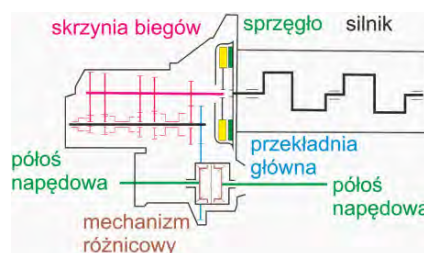
### 2.1. Opis ogólny

Modelowanym obiektem jest pojazd samochodowy dwuosiowy z czterema kołami o równej wielkości. Jego jednostką napędową jest silnik spalinowy z zapłonem iskrowym (ZI), czyli silnik benzynowy. Samochód przemieszcza się w wyniku działania na niego siły wypadkowej, pochodzącej od sumy wszystkich sił, jakie mają wpływ na pojazd. Dzielą się one na niezależne i zależne od osoby kierującej.

Pierwsze z nich są związane głównie z oporami jakie są stawiane poruszającemu się pojazdowi. Jest to przede wszystkim siła oporu powietrza zależna od prędkości, z jaką przemieszcza się pojazd, siła oporu toczenia związana z tarciem toczeniem, siła oporu wzniesienia, która uzależniona jest od kąta nachylenia nawierzchni, po której porusza się obiekt, oraz siła bezwładności wynikająca z przyspieszania. Drugi rodzaj sił zależny jest od kierującego. Kierowca za pomocą pedału przyspieszenia i hamulca reguluje siłę napędową lub hamującą, która wprawia w ruch pojazd albo go zatrzymuje. Pedaly gazu i hamulca są więc elementami wykonawczymi, za pomocą których prowadzący pojazd wybiera punkt pracy dla obiektu. Wszystkie wymienione siły są siłami wzdłużnymi – skierowanymi wzdłuż osi pojazdu, względem której on się przemieszcza. Pojazd podlega również działaniu sił pionowych związanych z dociskiem obiektu do nawierzchni i z jego przyczepnością. Mają one różne wartości na przedniej i tylnej osi oraz znaczący wpływ na działanie sił wzdłużnych. Siły pionowe zależą od ciężaru właściwego pojazdu, który działa w środku ciężkości pojazdu. Ten jednak przemieszcza się w zależności od kąta nachylenia podłoża. Istotną sprawą, którą należy uwzględnić w obiekcie, są opony. To one mają zasadniczy wpływ na poruszający się pojazd.

### 2.2. Układ napędowy

Siła napędowa powstaje w wyniku zamiany energii cieplnej na mechaniczną. Proces ten zachodzi w silniku, a energia przenoszona jest na koła za pomocą układu napędowego. Układ taki dla pojazdów z napędem na przednie koła z silnikiem umieszczonym z przodu (układ zblokowany), składa się z: silnika, koła zamachowego, sprzęgła, skrzyni biegów, przekładni głównej z mechanizmem różnicowym, półosi napędowych oraz kół jezdnych (rys. 1).



**Rys. 1.** Budowa układu napędowego dla układu zblokowanego [6]  
**Fig. 1.** The construction of the propulsion system [6]

Koło zamachowe – dzięki dużemu momentowi bezwładności – tłumi drgania związane z pulsacjami momentu. Sprzęgło jest częścią łączącą dwa elementy: czynny i bierny. W przypadku samochodu są to wały napędowe, jeden od silnika, a drugi napędzany, na który przenoszony jest moment obrotowy. Skrzynia biegów zawiera zespół kół zębatych, dzięki którym moc z silnika jest przekazywana w sposób płynny na koła pojazdu. Odpowiednie przekładnie konkretnych biegów pozwalają na stopniowe zmiany momentu obrotowego. Przekładnia główna służy do zwiększenia momentu obrotowego, zmienia kierunek obrotów z podłużnego na poprzeczny i jest częścią mostu napędowego. Mechanizm różnicowy redukuje obroty związane z pokonywaniem różnej drogi przez koła pojazdu (głównie podczas zakrętów). Półosie napędowe służą do ostatecznego przeniesienia momentu obrotowego na koła, a także łączą most napędowy z piastą koła.

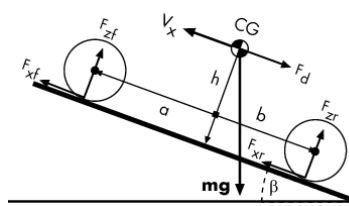
### 2.3. Szczegółowa charakterystyka obiektu

Obiektem badań jest samochód osobowy Volkswagen Golf III generacji z silnikiem benzynowym o pojemności 1598 cm<sup>3</sup>, oznaczony symbolem AEE. Auto z tym silnikiem było produkowane od 1995 roku. Silnik rozwija moc 75 KM (55 kW). Jednostka napędowa osiąga maksymalną moc przy 4 800 obr/min, a maksymalny moment obrotowy 135 Nm przy 2800–3400 obr/min [7]. Prędkość maksymalna wynosi 168 km/godz. Czas przyspieszenia do 100 km/godz jest równy 13,8 s. Współczynnik oporu powietrza jest równy 0,35. Obiekt wyposażony jest w pięciobiegową skrzynię biegów oznaczoną jako CYZ typ 020 o następujących przekładniach: bieg 1 – 3,455, bieg 2 – 1,750, bieg 3 – 1,286, bieg 4 – 0,939, bieg 5 – 0,745. W celu odpowiedniego zwiększenia momentu doprowadzonego do kół pojazd wyposażony jest w przekładnię główną o przełożeniu 3,941. Standardowo ma on montowane opony o rozmiarze 175/70 na stalowych felgach 5,5J • 13", co jest równoważne średnicy 575,2 mm. Promień koła wynosi 28,76 cm. Należy jednak pamiętać, że efektywny promień toczenia jest mniejszy od nominalnego promienia opony ze względu na odkształcenia opony pojawiające pod wpływem obciążenia pionowego.

## 3. Budowa modelu matematycznego i jego komputerowa implementacja

### 3.1. Założenia do modelu

Modelowanie dotyczy pojazdu, którego obie osie kół są równoległe i leżą w płaszczyźnie równoległej do podłoża, po którym przemieszcza się pojazd. Jeżeli pojazd porusza się po równi pochyłej o nachyleniu  $\beta$ , to oś  $Z$  zawsze jest prostopadła do płaszczyzny ziemi. Wszelkie siły uwzględnione w modelu są siłami pionowymi lub wzdłużnymi, tzn. działającymi wzdłuż osi pojazdu względem której się on przemieszcza. Jeżeli opory ruchu (np. wiatr) działają pod kątem do tej osi, to pod uwagę brana jest składowa równoległa do osi wzdłużnej pojazdu. Rozpatrywana dynamika pojazdu ma więc charakter wzdłużny z uwzględnieniem sił pionowych. Ruch pojazdu ustalany jest przez bilans sił i momentów działających na niego (rys. 2).

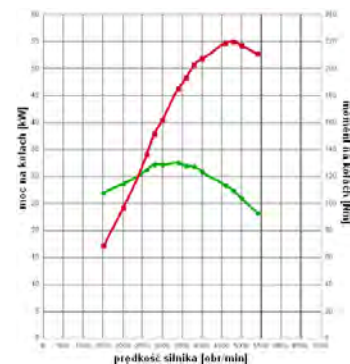


Rys. 2. Rozkład sił dla pojazdu na równi pochyłej [5]

Fig. 2. The distribution of forces for the vehicle on the skids [5]

Głównym składnikiem opon jest syntetyczny lub naturalny kauczuk. Największym odkształceniom podlega ona dla małych prędkości, przy większych zaczyna zachowywać się jak amortyzator.

Trudność w modelowaniu opisanego obiektu wynika z wpływu wielu czynników, np. temperatury, ciśnienia, obciążenia. W związku z tym model silnika jest przedstawiony często za pomocą charakterystyki statycznej momentu i mocy w funkcji prędkości obrotowej przy założeniu niezmienności pozostałych parametrów (rys. 3).



Rys. 3. Charakterystyka statyczna silnika [8]

Fig. 3. The static characteristic of engine [8]

W modelu przyjęto następujące założenia: normalna temperatura pracy silnika (90 °C); opony przy dużej prędkości zachowują się jak amortyzator, a przy małej prędkości jak ciało elastyczne; pojazd przemieszcza się po drodze o różnym nachyleniu; na pojazd działają podmuchy wiatru; pominięto tarcie oraz lepkość nasmarowanych elementów pojazdu.

### 3.2. Model matematyczny

Model matematyczny składa się z dwóch części: pierwszej dotyczącej dynamiki pojazdu, która wynika z bilansu sił, jakie działają na pojazd:

$$F_b = F_d + F_w + F_x \quad (1)$$

oraz drugiej dotyczącej dynamiki kół opisanej równaniami:

$$I_\omega \frac{d\Omega}{dt} = \tau_{drive} - r_e F_x \quad (2)$$

$$m \frac{dV_x}{dt} = F_x - mg \sin \beta \quad (3)$$

gdzie:  $F_b$  – siła bezwładności [N],  $F_d$  – siła oporu powietrza [N],  $F_w$  – siła oporu wzniesienia [N],  $F_x$  – siła napędowa [N],  $I_\omega$  – bezwładność koła [kg · m<sup>2</sup>],  $\Omega$  – prędkość kątowna [rad/s],  $\tau_{drive}$  – moment obrotowy osi koła [Nm],  $r_e$  – skuteczny promień toczenia [m],  $V_x$  – prędkość wzdłużna pojazdu [m/s],  $m$  – masa pojazdu [kg],  $g$  – przyspieszenie ziemskie [m/s<sup>2</sup>],  $\beta$  – kąt nachylenia podłoża [rad].

Rozwijając zależność (1), otrzymujemy następujące zależności na każdą z sił:

$$F_b = mV_x' \quad (4)$$

$$F_d = -\frac{1}{2}C_d\rho AV_x^2 \operatorname{sgn}(V_x) \quad (5)$$

$$F_w = -mg \sin \beta \quad (6)$$

$$F_x = F_{xf} + F_{xr} \quad (7)$$

$$F_x = f(\kappa', F_z) \quad (8)$$

gdzie:  $V_x'$  – przyspieszenie masy [m/s<sup>2</sup>],  $C_d$  – współczynnik czołowego oporu powietrza,  $\rho$  – gęstość powietrza [kg/m<sup>3</sup>],  $A$  – powierzchnia czołowa pojazdu [m<sup>2</sup>],  $V_x$  – prędkość wzdłużna pojazdu [m/s],  $F_{xf}$ ,  $F_{xr}$  – wzdłużne siły napędowe pojazdu dla przednich i tylnych punktów kontaktowych z ziemią [N],  $\kappa'$  – droga poślizgu,  $F_z$  – obciążenie pionowe [N].

Siła bezwładności  $F_b$  (4) zależna jest od masy obiektu oraz jej przyspieszenia. Siła  $F_d$  (5) powstaje w wyniku działania powietrza o gęstości  $\rho$  na powierzchnię czołową pojazdu  $A$ . Pojazd o współczynniku oporu powietrza  $C_d$  porusza się z prędkością  $V_x$  względem powietrza. Siła oporu wzniesienia  $F_w$  (6) to siła, której znak przyjmuje wartości dodatnie lub ujemne, w zależności od kąta nachylenia podłoża. Wynika ona z działania ciężaru właściwego pojazdu w jego środku ciężkości, który jest położony o  $a$  metrów od przedniej osi, o  $b$  metrów od tylnej osi i leży na wysokości  $h$  metrów (rys. 2). Położenie środka zmienia się w zależności od kąta nachylenia podłoża. Przesuwa się do góry, w dół, do przodu lub do tyłu zgodnie z zależnościami:

$$F_{zf} = \frac{+h(F_d - mg \sin \beta - mV_x') + b mg \cos \beta}{a + b} \quad (9)$$

$$F_{zr} = \frac{-h(F_d - mg \sin \beta - mV_x') + b mg \cos \beta}{a + b} \quad (10)$$

$$F_{xf} + F_{xr} = mg \cos \beta \quad (11)$$

Siła napędowa  $F_x$  (7-8) to suma sił dostarczonych na przednie i tylne koła pojazdu. Jest ona funkcją siły obciążenia i drogi poślizgu.  $F_{xf}$  oraz  $F_{xr}$  są siłami, które działają na przednią lub tylną oś pojazdu. Ponieważ modelowany pojazd posiada napęd na przód, należy przyjąć że  $F_x = F_{xr}$ . Droga poślizgu  $\kappa'$  zależy od deformacji opony  $u$ , natomiast siła napędowa  $F_x$  jest w przybliżeniu proporcjonalna do obciążenia pionowego, ponieważ  $F_x$  jest generowana przez tarcie kontaktowe oraz siłę  $F_z$  (relacja ta jest słabo nieliniowa przez deformację opony i poślizg). Zależność między  $F_x$  i  $\kappa$  jest bardziej skomplikowana. Jeżeli opona jest sztywna i nie ulega poślizgowi to prędkość wzdłużna pojazdu wynosi:

$$V_x = r_c \Omega \quad (12)$$

W rzeczywistości uwzględnia się jednak prędkość poślizgu koła z zależności:

$$V_{sx} = V_x - r_c \Omega \neq 0 \quad (13)$$

gdzie:

$V_{sx}$  – prędkość poślizgu kół [m/s].

Poślizg kół to ujemny stosunek prędkości z poślizgiem do modułu prędkości idealnej:

$$\kappa = \frac{-V_{sx}}{|V_x|} \quad (14)$$

gdzie:

$\kappa$  – poślizg kół.

Droga poślizgu wyrażana jest w postaci:

$$\kappa' = \frac{-V_{sx}'}{|V_x'|} \quad (15)$$

Dla  $\kappa = -1$  koło ulega całkowicie poślizgowi. Jeżeli  $\kappa = 0$  to koło porusza się w sposób idealny.

Punkt kontaktowy dla prędkości poślizgu opisywany jest zależnością:

$$V_{sx}' = V_x' - r_c \Omega' \quad (16)$$

gdzie:

$V_{sx}'$  – punkt kontaktowy prędkości poślizgu kół [m/s],

$\Omega'$  – punkt kontaktowy prędkości kątowej [rad/s].

Deformacja opony to różnica prędkości poślizgu i punktu kontaktowego dla prędkości poślizgu koła:

$$\frac{du}{dt} = V_{sx}' - V_{sx} \quad (17)$$

gdzie:

$u$  – odkształcenie opony [m].

Model opony musi dostarczyć siły napędowej  $F_x$ , uwzględniając obciążenie pionowe  $F_z$  oraz drogę poślizgu  $\kappa'$  (8). Ponieważ opona nie jest w stanie równowagi, droga poślizgu  $\kappa'$  i deformacje  $u$  nie są stałe. W tym modelu  $u$  i  $\kappa$  są umiarkowane i niewielkie. Relacje  $F_x$  do  $u$ , oraz  $u$  do  $\kappa'$  są traktowane jako liniowe. W związku z tym mamy:

$$F_x = C_{Fx} u \quad (18)$$

$$C_{Fx} = \left( \frac{\partial F_x}{\partial u} \right)_{u=0} \quad (19)$$

$$u = \sigma_{\kappa} \kappa' \quad (20)$$

$$\sigma_{\kappa} = \frac{\left( \frac{\partial F_x}{\partial \kappa'} \right)_{\kappa'=0}}{\left( \frac{\partial F_x}{\partial u} \right)_{u=0}} = \frac{\left( \frac{\partial F_x}{\partial \kappa'} \right)_{\kappa'=0}}{C_{Fx}} \quad (21)$$

gdzie:

$C_{Fx}$  – sztywność wzdłużna [N/m],

$\sigma_{\kappa}$  – długość nabiegania [m].

Zgodnie z danymi empirycznymi opony, deformacja  $u$  zmienia się zgodnie z zależnością:

$$\frac{du}{dt} + \left( \frac{1}{\sigma_{\kappa}} \right) |V_x| u = -V_{sx} \quad (22)$$

Droga poślizgu  $\kappa'$  pochodzi od  $\sigma_{\kappa}$  oraz  $u$ . Kiedy pojazd jest rozpędzony opona zachowuje się jak amortyzator o tłumieniu  $|V_x|/\sigma_{\kappa}$ . Przy niskich prędkościach jej zachowanie ulega zmianie i zachowuje się ona jak deformowane ciało elastyczne. Zatem uzyskujemy:

$$\left( \frac{1}{C_{Fx}} \right) \frac{dF_x}{dt} + |V_x| \kappa' = -V_{sx} \quad (23)$$

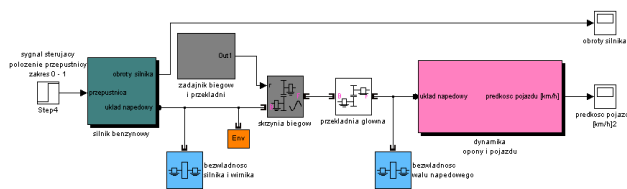
$$\left( \frac{1}{C_{Fx}} \right) \frac{\partial F_x}{\partial \kappa'} \frac{d\kappa'}{dt} + |V_x| \kappa' = -V_{sx} - \left( \frac{1}{C_{Fx}} \right) \frac{\partial F_x}{\partial F_z} \frac{dF_z}{dt} \quad (24)$$

Dynamika ruchu opony wynika z jej funkcji charakterystycznej (8). Obciążenie pionowe  $F_z$  oraz droga poślizgu  $\kappa'$  pozwala na znalezienie siły napędowej wzdłużnej i prędkości kątowej  $\Omega$  koła (2-3).

Ostatecznie uzyskano dynamiczny nieliniowy model z nieznanymi parametrami. Wartości niektórych z nich zaczerpnięto z danych technicznych pojazdu:  $I_\omega = 0,01 \text{ kgm}^2$ ,  $m = 1240 \text{ kg}$ ,  $r_e = 0,2876 \text{ m}$ , powierzchnia czołowa pojazdu  $A = 2,42385 \text{ m}^2$ . Środek ciężkości pojazdu dobrano doświadczalnie, uwzględniając większy ciężar z przodu pojazdu wynikający z ułożenia silnika. Jego położenie ustalono na odległości  $a = 1 \text{ m}$  od przedniej osi pojazdu oraz  $b = 1,5 \text{ m}$  od tylnej na wysokości  $h = 0,4 \text{ m}$ . Wartości: współczynnika czołowego oporu powietrza pojazdu  $C_d = 0,35$  i długości nabiegania  $\sigma_\kappa = 0,2 \text{ m}$  zidentyfikowano w sposób eksperymentalny obserwując odpowiedź modelu.

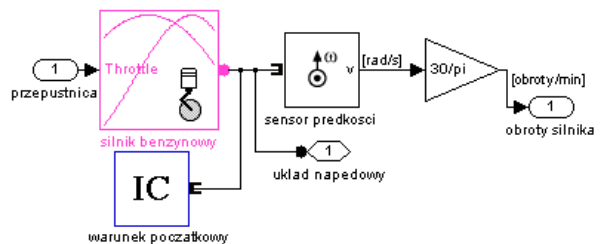
### 3.3. Komputerowa implementacja modelu

Model symulacyjny został zbudowany w środowisku Matlab/Simulink z wykorzystaniem bloków biblioteki SimDriveline [5]. Były one modyfikowane i dopasowywane do potrzeb modelowanego obiektu. Biblioteka daje możliwość zamodelowania środowiska dla symulacji wyidealizowanych układów napędowych. SimDriveline oferuje bloki, które reprezentują wirujące komponenty układu napędowego. Model symulacyjny układu napędowego samochodu Volkswagen Golf III pokazano na rys. 4.

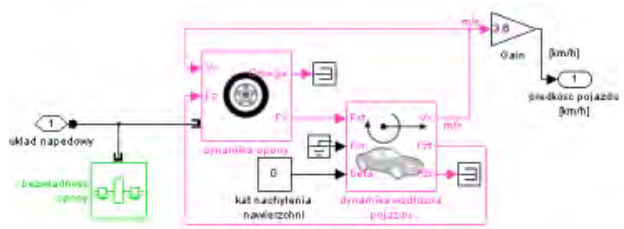


Rys. 4. Model symulacyjny układu napędowego Volkswagen Golf III  
Fig. 4. Simulation model of Volkswagen Golf III drive

Dwa główne bloki modelu symulacyjnego to podsystemy: silnika benzynowego (rys. 5) oraz dynamiki opony i pojazdu (rys. 6). Ponadto zamodelowano pracę skrzyni biegów i przekładni głównej oraz uwzględniono bezwładność silnika i wirnika wału napędowego, które wyznaczono drogą eksperymentalną ze względu na brak danych. Jako wejście do modelu skrzyni biegów zbudowano zadajnik biegów i przekładni. Zawarte są w nim czasy przełączania konkretnych biegów oraz ich przekładnie, zgodnie z dokumentacją techniczną auta. Sam blok skrzyni biegów to element biblioteki SimDriveline, realizujący pojedynczą przekładnię tak samo jak blok przekładni głównej – działają na zasadzie przeskalowania jednej wielkości na inną zgodnie z wartością biegu. Do sygnału fizycznego układu napędowego został podłączony blok Environment, który zapewnia właściwe środowisko pracy dla modeli mechanicznych w środowisku SimDriveline.



Rys. 5. Podsystem silnika  
Fig. 5. Subsystem of engine



Rys. 6. Podsystem dynamiki  
Fig. 6. Subsystem of dynamic

Podsystem silnika benzynowego (rys. 5) wykorzystuje relacje między prędkością obrotową, a momentem obrotowym przy wykorzystaniu bloku aproksymacji. Zawiera on wbudowaną charakterystykę statyczną silnika przebiegu momentu obrotowego w funkcji prędkości obrotowej. Relacja prędkości obrotowej i momentu obrotowego jest modulowana przez sygnał przepustnicy i podawana na silownik momentu. Dodatkowo uwzględniono ogranicznik obrotów silnika, symulujący odcięcie zapłonu przy uzyskaniu maksymalnych obrotów o wartości 6500 obr/min przez silnik – realizowany jest on w bloku silnik benzynowy. Sensor prędkości służy do konwersji właściwości fizycznych modelu na wartości liczbowe.

Podsystem dynamiki opony i pojazdu wykorzystuje dwa ważne bloki z biblioteki SimDriveline: blok dynamiki opony realizujący równania (2-3) oraz blok dynamiki wzdłużnej pojazdu odwołujący się do zależności (1). Ponadto uwzględniono bezwładność opony.

## 4. Weryfikacja modelu i analiza wyników

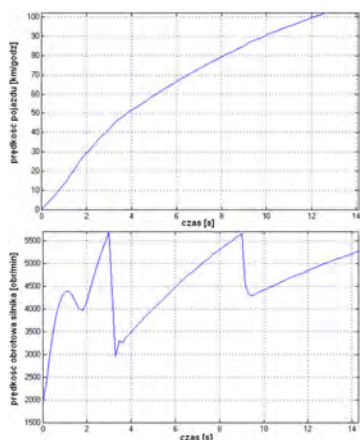
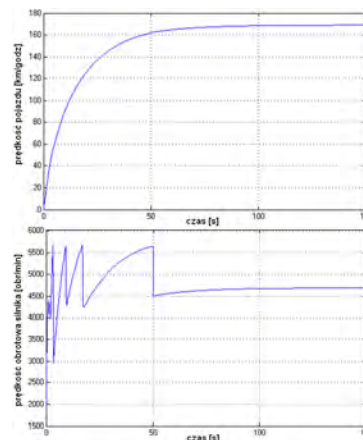
Obiektem rzeczywistym, na podstawie którego dokonano weryfikacji modelu był Volkswagen Golf III z roku 1996 zgodny ze specyfikacją (patrz sekcja 2.3). Badania dokonano na drodze 491, która łączy Działoszyn z Częstochową. Polegały one na odczycie prędkości obrotowej z obrotomierza przy różnych prędkościach pojazdu na każdym biegu. Pomiary rejestrowano w momencie najmniejszego zróżnicowania w wysokości terenu na drodze asfaltowej przy nachyleniu drogi bliskim 0°. Odczytu dokonywano po ustaleniu się prędkości na stałym poziomie. Wyniki przedstawiono w tabeli 1.



**Tab. 1.** Porównanie pomiarów obiektu rzeczywistego z modelem**Tab. 1.** Comparing measurements with model

Lp	Bieg	Prędkość pomiarowa [km/godz]	Obroty obiektu [obr/min]	Obroty modelu [obr/min]	Błąd względny [%]
1	1	20	2450	2512	2.5
2	2	20	1350	1272	5.8
3	2	25	1700	1591	6.4
4	2	30	2050	1909	6.9
5	3	30	1450	1403	3.2
6	3	35	1600	1637	2.3
7	3	40	1850	1872	1.2
8	3	45	2050	2107	2.8
9	3	50	2400	2342	2.4
10	3	55	2550	2577	0.9
11	3	60	2750	2813	2.3
12	4	60	2050	2054	0.2
13	4	65	2150	2226	3.5
14	4	70	2350	2399	2.0
15	4	75	2500	2572	2.9
16	5	60	1600	1623	1.4
17	5	70	1750	1893	8.2
18	5	80	2100	2171	3.4
19	5	85	2250	2315	2.9
20	5	90	2400	2468	2.8
21	5	100	2700	2731	1.1
22	5	110	3000	3006	0.2
23	5	120	3150	3289	4.4
24	5	130	3350	3571	6.6

Zweryfikowano również dynamikę przyspieszania pojazdu na podstawie danych katalogowych oraz dokumentu filmowego [9] (rys. 7–8).

**Rys. 7.** Przyspieszanie do 100 km/godz**Fig. 7.** Speed up to 100 km/h**Rys. 8.** Przyspieszanie do prędkości maksymalnej**Fig. 8.** Speed up to maximum speed

Dane symulacyjne obciążone są błędem w zakresie 0,2–8,2 % względem danych rzeczywistych.

Analizując materiał filmowy [9], który przedstawia przyspieszanie samochodu Volkswagen Golf III z silnikiem AEE od prędkości 0 km/godz do 100 km/godz oraz porównując go z otrzymanymi charakterystykami modelu symulacyjnego, można dojść do następujących wniosków:

- Model symulacyjny rozpędza się do prędkości 80 km/godz w czasie 8,1 s. Jest to czas krótszy w stosunku do [9] o 0,9 s, oraz krótszy w stosunku do danych technicznych o 0,7 s.
- Model symulacyjny rozpędza się do prędkości 100 km/godz w czasie 12,1 s. Jest to czas krótszy w stosunku do [9] o 2,2 s, oraz krótszy w stosunku do danych technicznych o 1,7 s.
- Model symulacyjny zachowuje się analogicznie jak obiekt rzeczywisty [9]. Od chwili 0 s obroty gwałtownie rosną, a w chwili 1 s lekko spadają. Głównym powodem spadku obrotów jest pokonanie siły oporu tocznego oraz uzyskanie odpowiedniej przyczepności przez koła, które podlegają poślizgowi.
- Zmiana biegu z 1 na 2 wykonywana jest w zbliżonej chwili czasowej dla modelu symulacyjnego i obiektu rzeczywistego [9]. Podczas zmiany biegu obroty silnika również są zbliżone. Podobnie przebiega zmiana biegu 2 na 3.
- Prędkość maksymalna obiektu rzeczywistego wynosi 168 km/godz (wg dokumentacji technicznej). Model osiąga prędkość 169 km/godz.

Reasumując, można stwierdzić brak sprzeczności koncepcyjnych, logicznych i matematycznych modelu. Charakteryzuje się on zgodnością pragmatyczną z małymi błędami i może zostać wykorzystany do budowy układu sterowania prędkością pojazdu.

## 5. Podsumowanie

Prace związane z modelowaniem obiektów/procesów są obecne praktycznie w każdej gałęzi przemysłu. W artykule podjęto próbę budowy dynamicznego nieliniowego modelu matematycznego układu napędowego samochodu z silni-

kiem spalinowym. Model ten zaimplementowano i zbadano symulacyjnie w środowisku Matlab. Uzyskano dużą dokładność modelu i stwierdzono jego użyteczność do budowy układu sterowania prędkością pojazdu.

### Bibliografia

1. Daw C. S., Kennel M. B., Finney C. E. A., Connolly F. T. (1998): *Observing and modeling nonlinear dynamics in an internal combustion engine*, "Physical Review E", Vol. 57, No. 3, 2811–2819.
2. Lee S. H., Howlett R. J., Walters S. D., Crua C. (2007): *Modeling and control of internal combustion engines using intelligent techniques*, "Cybernetics and Systems", Vol. 38, Issue 5–6, 509–533.
3. Guzzella L., Onder Ch. H. (2009): *Introduction to modeling and control of internal combustion engine systems*, Springer.
4. Gutenbaum J. (2003): *Modelowanie matematyczne systemów*, Akademicka Oficyna Wydawnicza EXIT, Warszawa.
5. [<http://www.mathworks.com/help/toolbox/physmod/drive/>] – SimDriveline User`s Guide, dostęp 05.04.2011.
6. Urbanik R.: *Konfiguracja układów napędowych*, <http://www.zsm.opole.pl/>, dostęp 14.04.2011.
7. [<http://www.vwgolf.pl/dane-techniczne/vw-golf-mk3/>] – Volkswagen Golf III Hatchback 1.6 (75 KM) – dane techniczne, dostęp 28.03.2011.
8. [<http://www.rototestinstitute.com/>] – Certificate of Performance, Volkswagen Golf III 1.6i – 97 (55 kW), dostęp 14.04.2011.
9. [<http://www.youtube.com/watch?v=pZvGkmqITqI>] – Przyspieszanie Golf III, dostęp 02.05.2011. ■

### Mathematical model of propulsion system of an internal combustion engine car and simulation studies

**Abstract:** The propulsion system of an internal combustion engine car is a complex physical object. In the paper its mathematical model based on the physics of the vehicle movement was constructed. Next, the identification of the model's parameters was made. A simulation model was worked out and its verification was carried out using real data. The obtained results were analyzed.

**Keywords:** mathematical modeling, dynamic systems, nonlinear systems

#### mgr inż. Dariusz Steckiewicz

Absolwent Wydziału Elektrotechniki i Automatyki Politechniki Gdańskiej (kierunek Automatyka i Robotyka) (2011 r.). Obecnie doktorant w Katedrze Inżynierii Systemów Sterowania. Zainteresowania naukowe dotyczą nowoczesnych metod sterowania procesami przemysłowymi.  
e-mail: [dariusz.steckiewicz@gmail.com](mailto:dariusz.steckiewicz@gmail.com)



#### dr inż. Robert Piotrowski

Absolwent Wydziału Elektrotechniki i Automatyki Politechniki Gdańskiej (kierunek: Automatyka i Robotyka) (2001 r.). W roku 2005 uzyskał stopień doktora (Automatyka i Robotyka). Obecnie adiunkt w Katedrze Inżynierii Systemów Sterowania. Zainteresowania naukowe dotyczą modelowania i zaawansowanych metod sterowania procesami przemysłowymi.  
e-mail: [r.piotrowski@ely.pg.gda.pl](mailto:r.piotrowski@ely.pg.gda.pl)

