

# Modele teoretyczne i matematyczne momentu strat mechanicznych w pompie stosowanej w napędzie hydrostatycznym

Zygmunt Paszota

**O**pracowanie jest kontynuacją prac [1–18], których celem jest stworzenie metody oceny strat i sprawności energetycznej napędów hydrostatycznych oraz zastosowanych w nich maszyn wporowych (pomp i silników hydraulicznych). Metoda opiera się na modelach matematycznych strat energetycznych występujących w pompach, w silnikach hydraulicznych i w pozostałych elementach układu napędu hydrostatycznego.

Podstawą opisu strat i sprawności energetycznej pompy jest wykres wzrostu mocy w układzie napędowym przeciwnego do kierunku przepływu mocy, który zastępuje wykres Sankeya spadku mocy zgodnego z kierunkiem przepływu mocy [18]. Wykres Sankeya spadku (podziału) mocy w układzie napędowym zgodnego z kierunkiem przepływu mocy jest główną przyczyną błędnej oceny strat energetycznych, między innymi w pompach i w silnikach hydraulicznych wporowych stosowanych w hydrostatycznych układach napędowych.

W trakcie pracy hydrostatycznego układu napędowego straty energetyczne wymuszają wzrost mocy w układzie – od mocy użytecznej  $P_{Mu}$  wymaganej przez napędzaną silnikiem hydraulicznym maszynę do mocy  $P_{Pc}$  konsumowanej na wale pompy.

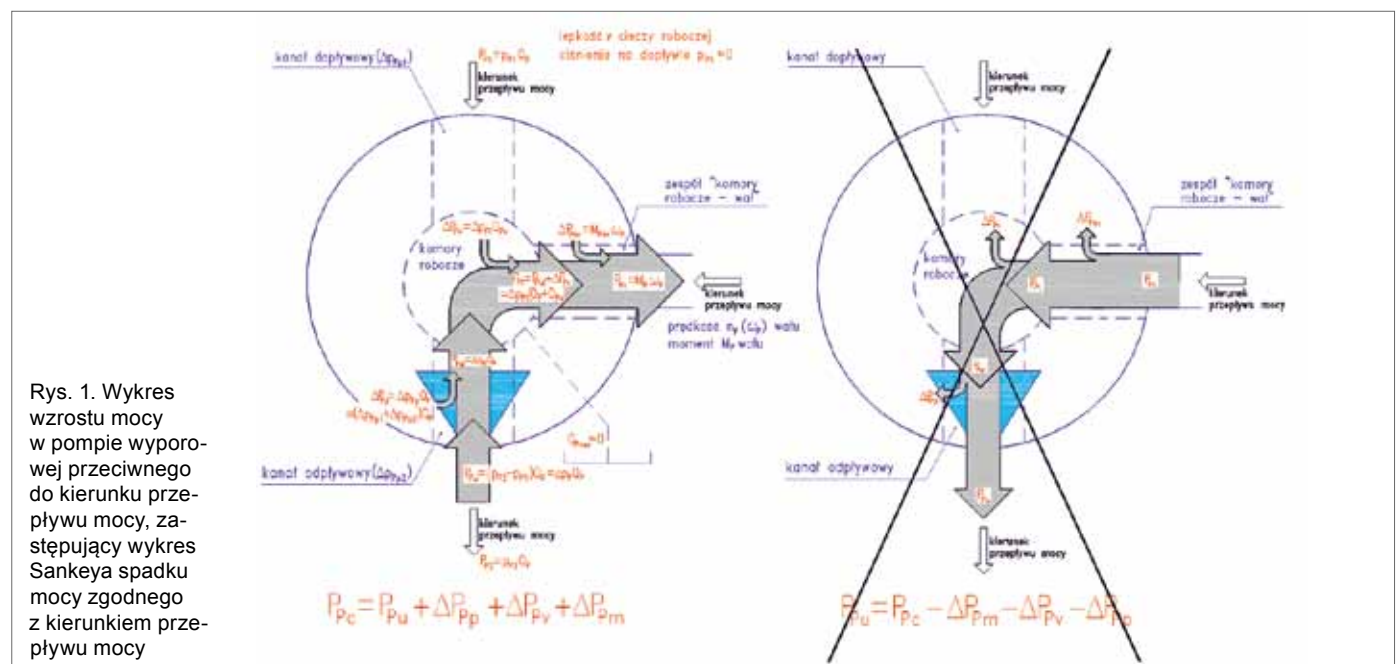
W opisie przepływu mocy w układzie napędowym i związanych z nim mocy strat energetycznych nie należy używać pojęć: „spadek mocy”, „podział mocy”, „strata mocy”.

Z mocami strat energetycznych występującymi w układzie napędowym należy natomiast związać pojęcia: „wzrost mocy”, „przyrost mocy”.

**Streszczenie:** W pracy przedstawiono modele teoretyczne i matematyczne momentu strat mechanicznych występujących w pompie o teoretycznej (stałej) wydajności  $q_{Pt}$  na obrót wału (o stałej teoretycznej objętości roboczej  $V_{Pt}$ ) i o geometrycznej (zmiennej) wydajności  $q_{Pgv}$  na obrót wału (o zmiennej geometrycznej objętości roboczej  $V_{Pgv}$ ). Modele mają służyć badaniom laboratoryjnym i symulacyjnym strat energetycznych w pompie, umożliwiającym ocenę sprawności energetycznej pompy i sprawności napędu hydrostatycznego.

## THEORETICAL AND MATHEMATICAL MODELS OF THE TORQUE OF MECHANICAL LOSSES IN THE PUMP USED IN A HYDROSTATIC DRIVE

**Abstract:** The paper presents theoretical and mathematical models of the torque of mechanical losses in the pump with theoretical (constant) capacity  $q_{Pt}$  per one shaft revolution (with constant theoretical working volume  $V_{Pt}$ ) and geometrical (variable) capacity  $q_{Pgv}$  per one shaft revolution (with variable volume  $V_{Pgv}$ ). The models may be used in the laboratory and simulation investigations of the pump energy efficiency and the hydrostatic drive efficiency.



Na rys. 1 przedstawiony został wykres wzrostu mocy w pompie wyporowej przeciwnego do kierunku przepływu mocy, który zastępuje wykres Sankeya spadku mocy zgodnego z kierunkiem przepływu mocy.

Celem opracowania jest przedstawienie modeli teoretycznych i matematycznych momentu strat mechanicznych występujących w zespole konstrukcyjnym „komory robocze – wał” pompy. Pompa jest maszyną wyporową o teoretycznej (stałej) wydajności  $q_{Pt}$  na obrót wału (o stałej teoretycznej objętości roboczej  $V_{Pt}$ ) bądź o geometrycznej (zmiennej) wydajności  $q_{Pgv}$  na obrót wału (o zmiennej geometrycznej objętości roboczej  $V_{Pgv}$ ).

Modele mają służyć badaniom laboratoryjnym i symulacyjnym strat mechanicznych w pompie, umożliwiającym ocenę sprawności energetycznej pompy i sprawności napędu hydrostatycznego.

### Modele teoretyczne momentu $M_{Pm}$ strat mechanicznych w zespole konstrukcyjnym „komory robocze – wał” pompy

Moment  $M_p$  na wale pompy (wymagany przez pompę od napędzającego ją silnika) musi być większy od momentu indykowanego  $M_{Pi}$  w komorach roboczych pompy w wyniku konieczności równoważenia nim również momentu  $M_{Pm}$  strat mechanicznych występujących w zespole konstrukcyjnym „komory robocze – wał”. Zespół formuje komory robocze i zmienia ich objętość oraz łączy komory robocze z wałem. Moment  $M_p$  wymagany przez pompę na jej wale jest więc równy sumie momentu  $M_{Pi}$  indykowanego w komorach roboczych i momentu  $M_{Pm}$  strat mechanicznych w zespole konstrukcyjnym „komory robocze – wał” pompy:

$$M_p = M_{Pi} + M_{Pm} \quad (1)$$

Moment  $M_{Pm}$  strat mechanicznych występujących w pompie o zmiennej wydajności  $q_{Pgv}$  na obrót wału jest, przy maksymalnej wielkości  $q_{Pgv}$ , czyli przy  $q_{Pgv} = q_{Pt}$  (przy współczynniku  $b_p = q_{Pgv}/q_{Pt} = 1$ ), równy momentowi strat mechanicznych występujących w tej pompie, pracującej jako pompa o stałej wydajności  $q_{Pt}$  na obrót wału. Modele teoretyczne i matematyczne opisujące moment  $M_{Pm}$  strat mechanicznych w pompie o zmiennej wydajności  $q_{Pgv}$  na obrót wału mogą więc być zbudowane w oparciu o modele  $M_{Pm}$  opisujące moment strat mechanicznych w pompie o stałej wydajności  $q_{Pt}$  na obrót wału (przy  $b_p = 1$ ). W rozważaniach dotyczących modeli opisujących moment strat mechanicznych w pompie zakładamy, że pompa napędzana jest z praktycznie stałą prędkością obrotową  $n_p$ , zaś pewien spadek prędkości jej wału (spadek prędkości silnika napędzającego pompę w wyniku wzrostu momentu  $M_p$  obciążającego wał tego silnika) do wartości  $n_p < n_{p0}$  ( $n_{p0}$  – prędkość obrotowa nieobciążonego silnika napędzającego pompę) jest, z punktu widzenia wpływu prędkości  $n_p$  na wielkość momentu  $M_{Pm}$  strat mechanicznych, pomijalny.

Moment  $M_{Pm}$  strat mechanicznych w pompie jest głównie skutkiem sił tarcia występujących między elementami zespołu konstrukcyjnego „komory robocze – wał”, a zależnych, między innymi, od momentu  $M_{Pi}$  indykowanego w komorach roboczych –  $M_{Pi} = q_{Pgv} \Delta p_{Pi} / 2\Pi = b_p q_{Pt} \Delta p_{Pi} / 2\Pi$ .

Siły tarcia występujące między elementami zespołu konstrukcyjnego „komory robocze – wał” są w pewnym stopniu również skutkiem obciążenia tych elementów siłami bezwład-

ności wynikającymi z ich ruchu obrotowego i posuwisto-zwrotnego a zależnymi od wydajności  $q_{Pgv}$  pompy na obrót wału (od współczynnika  $b_p$ ).

W pompach tłokowych (osiowych lub promieniowych), posiadających obudowę (karter) wypełnioną cieczą, występują także siły tarcia między elementami zespołu konstrukcyjnego „komory robocze – wał” a tą cieczą, które zależne są, między innymi, od lepkości  $\nu$  cieczy.

Wielkość momentu  $M_{Pm|\Delta p_{Pi}, b_p, \nu_n}$  strat mechanicznych w zespole konstrukcyjnym „komory robocze – wał” pompy, obciążonym przyrostem indykowanym  $\Delta p_{Pi}$  ciśnienia w komorach roboczych, w pompie pracującej przy wydajności  $q_{Pgv} = b_p q_{Pt}$  na obrót wału i tłoczącej cieczą roboczą o (stałej) lepkości odniesienia  $\nu_n$ , może być opisana jako suma momentu  $M_{Pm|\Delta p_{Pi} = 0, b_p, \nu_n}$  strat mechanicznych występujących w pompie nieobciążonej (momentu strat występujących w okresie, gdy przyrost indykowany  $\Delta p_{Pi}$  ciśnienia w komorach roboczych pompy jest równy zero –  $\Delta p_{Pi} = 0$ ) oraz przyrostu  $\Delta M_{Pm|\Delta p_{Pi}, b_p, \nu_n}$  momentu strat mechanicznych, przyrostu będącego skutkiem obciążenia elementów konstrukcyjnych momentem  $M_{Pi}$  indykowanym w komorach roboczych pompy (momentem  $M_{Pi}$  występującym w okresie, gdy przyrost indykowany  $\Delta p_{Pi}$  ciśnienia w komorach roboczych pompy jest większy od zera –  $\Delta p_{Pi} > 0$ ):

$$M_{Pm|\Delta p_{Pi}, b_p, \nu_n} = M_{Pm|\Delta p_{Pi} = 0, b_p, \nu_n} + \Delta M_{Pm|\Delta p_{Pi}, b_p, \nu_n} \quad (2)$$

Moment  $M_{Pi}$  indykowany w komorach roboczych pompy jest proporcjonalny do przyrostu indykowanego  $\Delta p_{Pi}$  ciśnienia w komorach i do objętości czynnej komór, tworzonej w trakcie jednego obrotu wału pompy, objętości, która jest równa wydajności teoretycznej  $q_{Pt}$  na obrót wału w pompie o stałej wydajności na obrót lub wydajności geometrycznej  $q_{Pgv} = b_p q_{Pt}$  na obrót wału w pompie o zmiennej wydajności na obrót.

Elementy zespołu konstrukcyjnego „komory robocze – wał” są zatem obciążone:

- w pompie o teoretycznej (stałej) wydajności  $q_{Pt}$  na obrót wa-

$$\text{łu – momentem indykowanym } M_{Pi} = \frac{q_{Pt} \Delta p_{Pi}}{2\Pi},$$

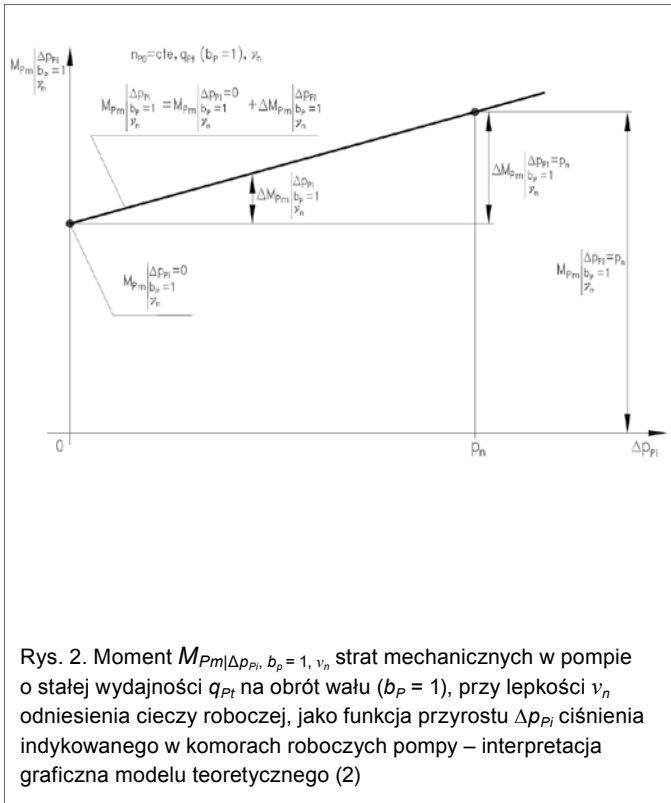
- w pompie o geometrycznej (zmiennej) wydajności  $q_{Pgv}$  na obrót wału – momentem indykowanym

$$M_{Pi} = \frac{q_{Pgv} \Delta p_{Pi}}{2\Pi} = \frac{b_p q_{Pt} \Delta p_{Pi}}{2\Pi},$$

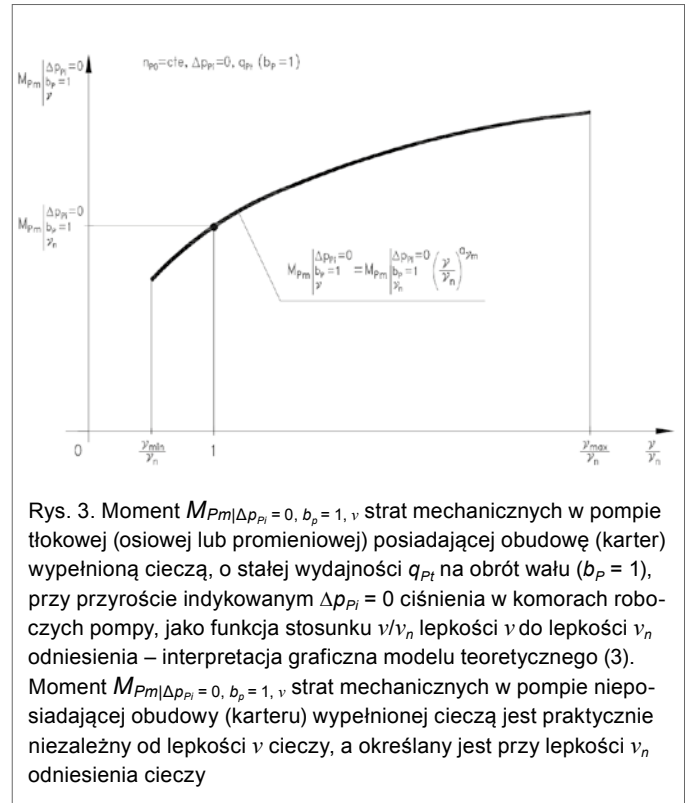
- co w efekcie wpływa na zróżnicowaną intensywność przyrostu  $\Delta M_{Pm|\Delta p_{Pi}, b_p, \nu_n}$  momentu strat mechanicznych określonego, przy różnych wartościach współczynnika  $b_p = q_{Pgv}/q_{Pt}$ , jako funkcja przyrostu  $\Delta p_{Pi}$  ciśnienia w komorach roboczych pompy.

W modelach teoretycznych i matematycznych opisujących moment  $M_{Pm|\Delta p_{Pi}, b_p, \nu_n}$  strat mechanicznych przyjmuje się hipotezę, że przyrost  $\Delta M_{Pm|\Delta p_{Pi}, b_p, \nu_n}$  momentu strat mechanicznych w pompie jest proporcjonalny do momentu  $M_{Pi}$  indykowanego w jej komorach roboczych (rys. 2 i 5).

Obraz wpływu sił bezwładności elementów zespołu konstrukcyjnego „komory robocze – wał”, wykonujących w pompie ruch obrotowy i posuwisto-zwrotny, na moment  $M_{Pm}$  strat mechanicznych można przedstawić, przy założeniu, że prędkość obrotowa  $n_p$  silnika napędzającego pompę zmienia się w niewielkim zakresie, jako funkcję wydajności  $q_{Pgv}$  (współczyn-



Rys. 2. Moment  $M_{Pm|\Delta p_{Pi}=0, b_p=1, v_n}$  strat mechanicznych w pompie o stałej wydajności  $q_{Pt}$  na obrót wału ( $b_p = 1$ ), przy lepkości  $v_n$  odniesienia cieczy roboczej, jako funkcja przyrostu  $\Delta p_{Pi}$  ciśnienia indykowanego w komorach roboczych pompy – interpretacja graficzna modelu teoretycznego (2)



Rys. 3. Moment  $M_{Pm|\Delta p_{Pi}=0, b_p=1, v}$  strat mechanicznych w pompie tłokowej (osiowej lub promieniowej) posiadającej obudowę (karter) wypełnioną cieczą, o stałej wydajności  $q_{Pt}$  na obrót wału ( $b_p = 1$ ), przy przyroście indykowanym  $\Delta p_{Pi} = 0$  ciśnienia w komorach roboczych pompy, jako funkcja stosunku  $v/v_n$  lepkości  $v$  do lepkości  $v_n$  odniesienia – interpretacja graficzna modelu teoretycznego (3). Moment  $M_{Pm|\Delta p_{Pi}=0, b_p=1, v}$  strat mechanicznych w pompie nieposiadającej obudowy (karteru) wypełnionej cieczą jest praktycznie niezależny od lepkości  $v$  cieczy, a określany jest przy lepkości  $v_n$  odniesienia cieczy

nika  $b_p$ ) na obrót wału pompy o zmiennej wydajności na obrót. Siły bezwładności nie zależą od wielkości przyrostu  $\Delta p_{Pi}$  ciśnienia w komorach roboczych, stąd ich wpływ na moment  $M_{Pm}$  strat mechanicznych w pompie może być ujęty w ocenie wielkości momentu  $M_{Pm|\Delta p_{Pi}=0, b_p, v_n}$  strat mechanicznych, czyli określonego przy przyroście  $\Delta p_{Pi} = 0$  (rys. 5).

Wpływ sił tarcia występujących między elementami zespołu konstrukcyjnego „komory robocze – wał” a cieczą wypełniającą obudowę (karter) pompy tłokowej na moment  $M_{Pm}$  strat mechanicznych w pompie można przedstawić, przy założeniu, że prędkość  $n_p$  zmienia się w niewielkim zakresie, jako zależność  $M_{Pm}$  od lepkości  $v$  cieczy oraz od wydajności  $q_{PgV}$  (współczynnika  $b_p$ ) na obrót wału pompy (rys. 3, 4, 6, 7).

Zakłada się, że wpływ lepkości  $v$  cieczy na siły tarcia między elementami zespołu konstrukcyjnego „komory robocze – wał” a cieczą wypełniającą obudowę (karter) pompy tłokowej, a w efekcie – na wielkość momentu  $M_{Pm}$  strat mechanicznych w pompie, może być oceniony przy jednym poziomie przyrostu  $\Delta p_{Pi}$  ciśnienia indykowanego w komorach roboczych, np. przy przyroście  $\Delta p_{Pi} = 0$  (rys. 3, 6). Założenie to wiąże się z uproszczeniem zakładającym brak istotnego wpływu przyrostu  $\Delta p_{Pi}$  ciśnienia na wzrost lepkości  $v$  cieczy i z przyjęciem, w modelu opisującym moment  $M_{Pm}$  strat mechanicznych, lepkości  $v$  cieczy określanej w przewodzie dopływowym pompy (przy ciśnieniu  $p_{Pi}$  równym zero (przy ciśnieniu bezwzględnym cieczy równym ciśnieniu atmosferycznemu)).

Wpływ sił bezwładności elementów konstrukcyjnych wykonujących w pompie ruch obrotowy lub posuwisto-zwrotny, a także wpływ lepkości  $v$  cieczy na moment  $M_{Pm}$  strat mechanicznych w pompie ujęty więc jest w modelu opisującym moment  $M_{Pm|\Delta p_{Pi}=0, b_p, v}$  tych strat w pompie nieobciążonej (przy  $\Delta p_{Pi} = 0$ ) zasilanej cieczą roboczą o zmieniającej się lepkości  $v$ .

Proponowane modele teoretyczne opisujące moment  $M_{Pm|\Delta p_{Pi}=0, b_p, v}$  strat mechanicznych w nieobciążonej pompie

(przy przyroście indykowanym  $\Delta p_{Pi} = 0$  ciśnienia w komorach roboczych) i przy zmieniającej się lepkości  $v$  cieczy roboczej (wpływ lepkości  $v$  cieczy ma miejsce w pompie tłokowej z cieczą wypełniającą obudowę (karter)), mają postacie:

- w pompie o teoretycznej (stałej) wydajności  $q_{Pt}$  ( $b_p = 1$ ) na obrót wału (rys. 3):

$$M_{Pm|\Delta p_{Pi}=0, b_p=1, v} = M_{Pm|\Delta p_{Pi}=0, b_p=1, v_n} \left(\frac{v}{v_n}\right)^{a_{vm}} \quad (3)$$

- w pompie o geometrycznej (zmiennej) wydajności  $q_{PgV}$  ( $q_{PgV} = b_p q_{Pt}$ ) na obrót wału (rys. 6):

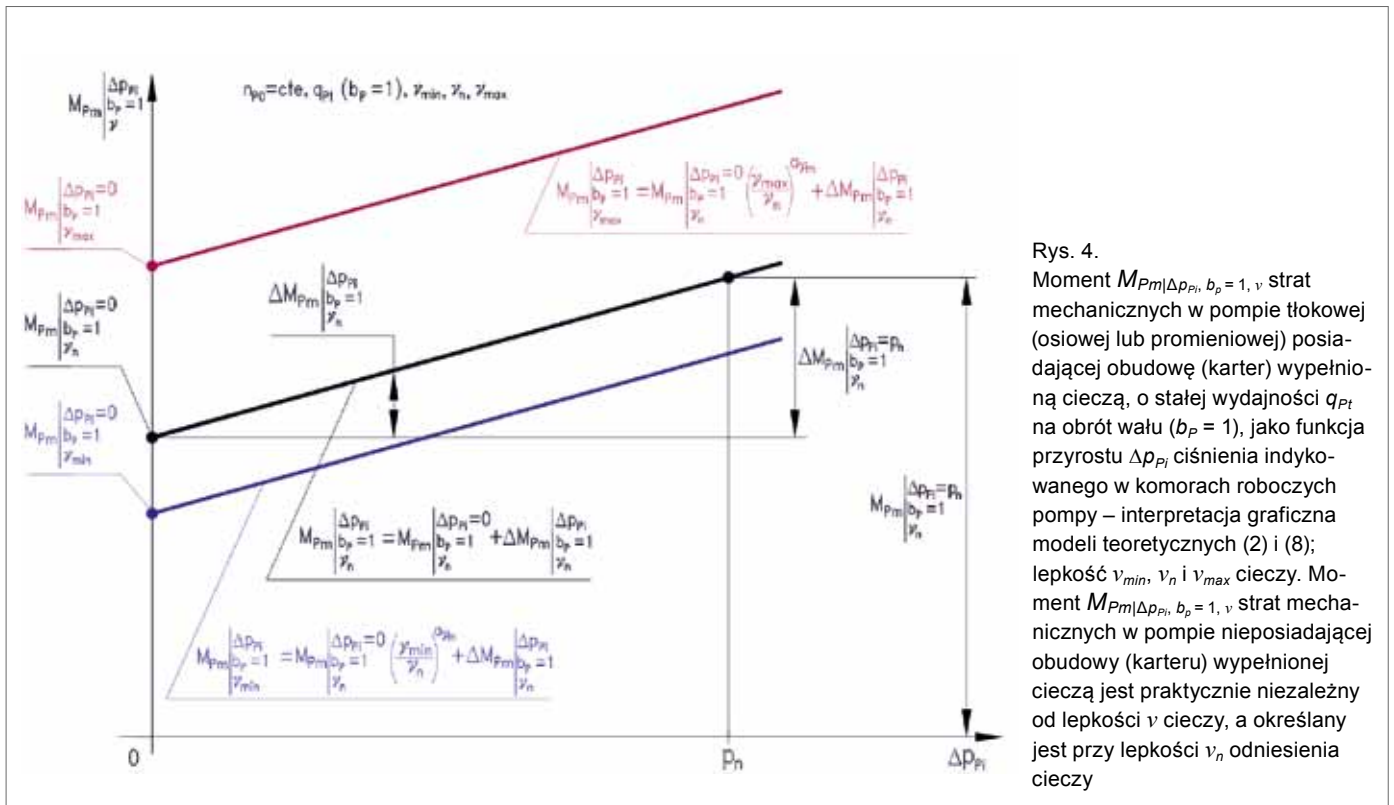
$$M_{Pm|\Delta p_{Pi}=0, b_p, v} = \left(M_{Pm|\Delta p_{Pi}=0, b_p=0, v_n} + \Delta M_{Pm|\Delta p_{Pi}=0, b_p, v_n}\right) \left(\frac{v}{v_n}\right)^{a_{vm}} \quad (4)$$

gdzie:

$$\Delta M_{Pm|\Delta p_{Pi}=0, b_p, v_n} = M_{Pm|\Delta p_{Pi}=0, b_p, v_n} - M_{Pm|\Delta p_{Pi}=0, b_p=0, v_n} = \left(M_{Pm|\Delta p_{Pi}=0, b_p=1, v_n} - M_{Pm|\Delta p_{Pi}=0, b_p=0, v_n}\right) b_p \quad (5)$$

Wykładnik  $a_{vm}$  we wzorach (3) i (4) określa wpływ stosunku  $v/v_n$  lepkości  $v$  do lepkości  $v_n = 35 \text{ mm}^2\text{s}^{-1}$  odniesienia cieczy roboczej na wielkość momentu strat mechanicznych w maszynie wyporowej tłokowej z cieczą wypełniającą obudowę (karter) (zarówno w pompie, jak i w silniku hydraulicznym).

Przyrost  $\Delta M_{Pm|\Delta p_{Pi}, b_p, v_n}$  momentu strat mechanicznych w pompie, będący skutkiem obciążenia elementów zespołu konstrukcyjnego momentem indykowanym  $M_{Pi}$  wynikającym z przyrostu  $\Delta p_{Pi}$  ciśnienia indykowanego w komorach roboczych pompy,



Rys. 4. Moment  $M_{Pm|\Delta p_{Pi}, b_p=1, v}$  strat mechanicznych w pompie tłokowej (osiowej lub promieniowej) posiadającej obudowę (karter) wypełnioną cieczą, o stałej wydajności  $q_{Pi}$  na obrót wału ( $b_p = 1$ ), jako funkcja przyrostu  $\Delta p_{Pi}$  ciśnienia indykowanego w komorach roboczych pompy – interpretacja graficzna modeli teoretycznych (2) i (8); lepkość  $\nu_{min}, \nu_n$  i  $\nu_{max}$  cieczy. Moment  $M_{Pm|\Delta p_{Pi}, b_p=1, v}$  strat mechanicznych w pompie nieposiadającej obudowy (karteru) wypełnionej cieczą jest praktycznie niezależny od lepkości  $\nu$  cieczy, a określany jest przy lepkości  $\nu_n$  odniesienia cieczy

jest niezależny od sił bezwładności elementów wykonujących w pompie ruch obrotowy lub posuwisto-zwrotny. Jest także praktycznie niezależny od lepkości  $\nu$  cieczy roboczej; może więc być określony przy jednej lepkości, np. przy lepkości  $\nu_n$  odniesienia cieczy (rys. 4, 7).

Proponowane modele teoretyczne opisujące przyrost  $\Delta M_{Pm|\Delta p_{Pi}, b_p, \nu_n}$  momentu strat mechanicznych w pompie, wynikający z przyrostu  $\Delta p_{Pi}$  ciśnienia indykowanego w komorach roboczych pompy, posiadają formy:

- w pompie o teoretycznej (stałej) wydajności  $q_{Pi}$  ( $b_p = 1$ ) na obrót wału (rys. 4):

$$\begin{aligned} \Delta M_{Pm|\Delta p_{Pi}, b_p=1, v} &= \Delta M_{Pm|\Delta p_{Pi}, b_p=1, \nu_n} = \\ &= M_{Pm|\Delta p_{Pi}, b_p=1, \nu_n} - M_{Pm|\Delta p_{Pi}=0, b_p=1, \nu_n} = \\ &= \left( M_{Pm|\Delta p_{Pi}=p_n, b_p=1, \nu_n} - M_{Pm|\Delta p_{Pi}=0, b_p=1, \nu_n} \right) \frac{\Delta p_{Pi}}{p_n} \end{aligned} \quad (6)$$

- w pompie o geometrycznej (zmiennej) wydajności  $q_{Pgv}$  ( $q_{Pgv} = b_p q_{Pi}$ ) na obrót wału (rys. 7):

$$\begin{aligned} \Delta M_{Pm|\Delta p_{Pi}, b_p, v} &= \Delta M_{Pm|\Delta p_{Pi}, b_p, \nu_n} = \\ &= M_{Pm|\Delta p_{Pi}, b_p, \nu_n} - M_{Pm|\Delta p_{Pi}=0, b_p, \nu_n} = \\ &= \left( M_{Pm|\Delta p_{Pi}=p_n, b_p=1, \nu_n} - M_{Pm|\Delta p_{Pi}=0, b_p=1, \nu_n} \right) b_p \frac{\Delta p_{Pi}}{p_n} \end{aligned} \quad (7)$$

W efekcie proponowane modele teoretyczne opisujące moment  $M_{Pm}$  strat mechanicznych w pompie przyjmują postacie:

- w pompie o teoretycznej (stałej) wydajności  $q_{Pi}$  ( $b_p = 1$ ) na obrót wału (rys. 4):

$$\begin{aligned} M_{Pm|\Delta p_{Pi}, b_p=1, v} &= \\ &= M_{Pm|\Delta p_{Pi}=0, b_p=1, \nu_n} \left( \frac{\nu}{\nu_n} \right)^{a_{vm}} + \Delta M_{Pm|\Delta p_{Pi}, b_p=1, \nu_n} = \\ &= M_{Pm|\Delta p_{Pi}=0, b_p=1, \nu_n} \left( \frac{\nu}{\nu_n} \right)^{a_{vm}} + \\ &+ \left( M_{Pm|\Delta p_{Pi}=p_n, b_p=1, \nu_n} - M_{Pm|\Delta p_{Pi}=0, b_p=1, \nu_n} \right) \frac{\Delta p_{Pi}}{p_n} \end{aligned} \quad (8)$$

- w pompie o geometrycznej (zmiennej) wydajności  $q_{Pgv}$  ( $q_{Pgv} = b_p q_{Pi}$ ) na obrót wału (rys. 7):

$$\begin{aligned} M_{Pm|\Delta p_{Pi}, b_p, v} &= \\ &= \left( M_{Pm|\Delta p_{Pi}=0, b_p=0, \nu_n} + \Delta M_{Pm|\Delta p_{Pi}=0, b_p, \nu_n} \right) \left( \frac{\nu}{\nu_n} \right)^{a_{vm}} + \\ &+ \Delta M_{Pm|\Delta p_{Pi}, b_p, \nu_n} \end{aligned} \quad (9)$$

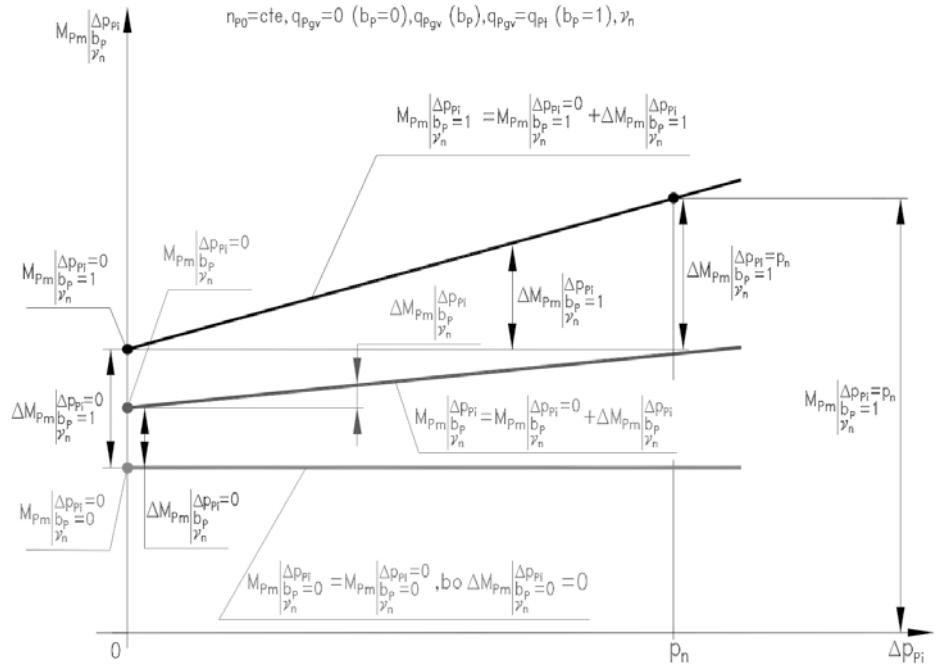
gdzie:

$$\begin{aligned} \Delta M_{Pm|\Delta p_{Pi}=0, b_p, \nu_n} &= \\ &= \left( M_{Pm|\Delta p_{Pi}=0, b_p=1, \nu_n} - M_{Pm|\Delta p_{Pi}=0, b_p=0, \nu_n} \right) b_p \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \Delta M_{Pm|\Delta p_{Pi}, b_p, \nu_n} &= \\ &= \left( M_{Pm|\Delta p_{Pi}=p_n, b_p=1, \nu_n} - M_{Pm|\Delta p_{Pi}=0, b_p=1, \nu_n} \right) b_p \frac{\Delta p_{Pi}}{p_n} \end{aligned} \quad (11)$$

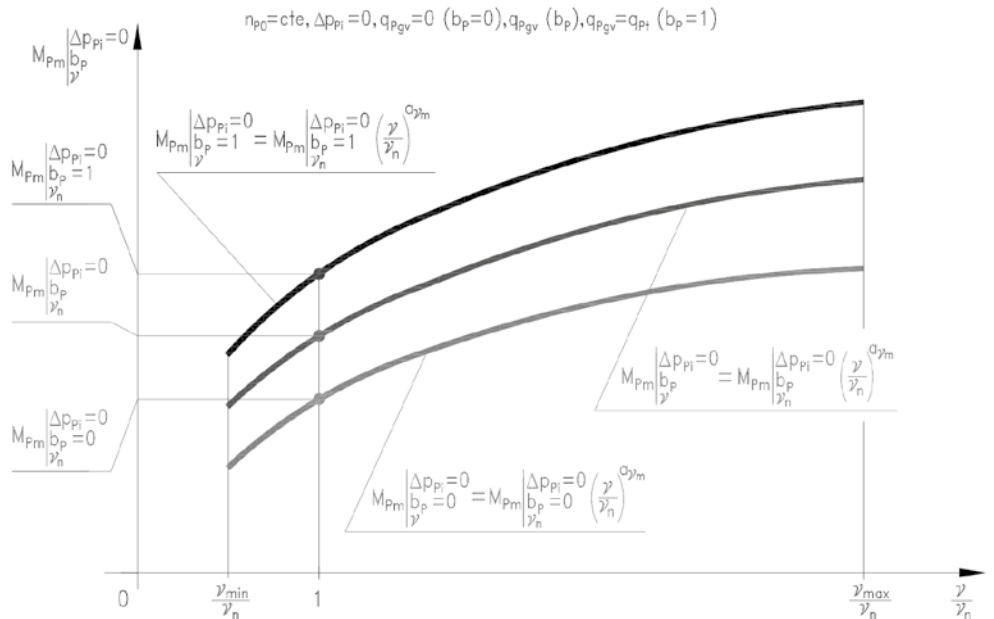
Rys. 5.

Moment  $M_{Pm|\Delta p_{Pi}, b_p, \nu_n}$  strat mechanicznych w pompie o zmiennej wydajności  $q_{Pgv} = b_p q_{Pt}$  na obrót wału, przy lepkości  $\nu_n$  odniesienia cieczy roboczej, jako funkcja przyrostu  $\Delta p_{Pi}$  ciśnienia indykowanego w komorach roboczych pompy – interpretacja graficzna modeli teoretycznych (2) i (7); wydajność  $q_{Pgv}$ , na obrót wału (współczynnik  $b_p$  zmiany wydajności na obrót wału):  $q_{Pgv} = 0$  ( $b_p = 0$ ),  $q_{Pgv} = q_{Pt}$  ( $b_p = 1$ )



Rys. 6.

Moment  $M_{Pm|\Delta p_{Pi} = 0, b_p, \nu}$  strat mechanicznych w pompie tłokowej (osiowej lub promieniowej) posiadającej obudowę (karter) wypełnioną cieczą, o zmiennej wydajności  $q_{Pgv} = b_p q_{Pt}$  na obrót wału, przy przyroście indykowanym  $\Delta p_{Pi} = 0$  ciśnienia w komorach roboczych pompy, jako funkcja stosunku  $\nu/\nu_n$  lepkości  $\nu$  do lepkości  $\nu_n$  odniesienia cieczy – interpretacja graficzna modelu teoretycznego (4); wydajność  $q_{Pgv}$ , na obrót wału (współczynnik  $b_p$  zmiany wydajności na obrót wału):  $q_{Pgv} = 0$  ( $b_p = 0$ ),  $q_{Pgv} = q_{Pt}$  ( $b_p = 1$ ). Moment  $M_{Pm|\Delta p_{Pi} = 0, b_p, \nu}$  strat mechanicznych w pompie nie posiadającej obudowy (karteru) wypełnionej cieczą jest praktycznie niezależny od lepkości  $\nu$  cieczy, a określany jest przy lepkości  $\nu_n$  odniesienia cieczy



### Modele matematyczne momentu strat mechanicznych

W modelach matematycznych opisujących moment  $M_{Pm}$  strat mechanicznych w pompie zastosowane są współczynniki  $k_i$  strat odnoszące (porównujące) składniki opisujące moment  $M_{Pm}$  strat w modelach teoretycznych do momentu teoretycznego  $M_{Pt}$  pompy. Moment teoretyczny  $M_{Pt}$  pompy jest także wielkością odniesienia zastosowaną w opisie momentu  $M_{Pi}$  indykowanego w komorach roboczych pompy:

- moment teoretyczny  $M_{Pt} = \frac{q_{Pt} p_n}{2\Pi}$  pompy o teoretycznej

(stałej) wydajności  $q_{Pt}$  na obrót wału ( $b_p = 1$ ) jest określony przy przyroście  $\Delta p_p$  ciśnienia w pompie równym ciśnieniu nominalnemu  $p_n$  układu, w którym pompa jest zastosowana –  $\Delta p_p = p_n$ , oraz przy założeniu, że w pompie nie występują straty ciśnieniowe i mechaniczne,

- moment indykowany

$$M_{Pi} = \frac{q_{Pt} \Delta p_{Pi}}{2\Pi} = \frac{q_{Pt} p_n}{2\Pi} \frac{\Delta p_{Pi}}{p_n} = M_{Pt} \frac{\Delta p_{Pi}}{p_n}$$

w komorach roboczych pompy o teoretycznej (stałej) wydajności  $q_{Pt}$  na obrót wału ( $b_p = 1$ ) jest określony przy przyroście indykowanym  $\Delta p_{Pi}$  ciśnienia w komorach roboczych,

- moment indykowany

$$M_{Pi} = \frac{q_{PgV} \Delta p_{Pi}}{2\Pi} = \frac{b_p q_{Pt} \Delta p_{Pi}}{2\Pi} = \frac{q_{Pt} p_n}{2\Pi} b_p \frac{\Delta p_{Pi}}{p_n} = M_{Pt} b_p \frac{\Delta p_{Pi}}{p_n}$$

w komorach roboczych pompy o geometrycznej (zmiennej) wydajności  $q_{PgV} = b_p q_{Pt}$  na obrót wału jest określony przy przyroście indykowanym  $\Delta p_{Pi}$  ciśnienia w komorach roboczych.

Modele teoretyczne i matematyczne opisują moment  $M_{Pm}$  strat mechanicznych w pompie o teoretycznej (stałej) wydajności  $q_{Pt}$  na obrót wału bądź o geometrycznej (zmiennej) wydajności  $q_{PgV} = b_p q_{Pt}$  na obrót wału:

- $q_{Pt} = q_{p|\Delta p_{Pi}=0, p_{Pi}=0, b_p=1, v_n}$  jest wydajnością teoretyczną na obrót wału pompy o stałej wydajności na obrót ( $b_p = 1$ ), określoną przy  $\Delta p_{Pi} = 0, p_{Pi} = 0$  i  $v_n$ , która jest równa objętości czynnej komór roboczych tworzonej w trakcie jednego obrotu wału;
- $q_{PgV} = b_p q_{Pt}$  jest wydajnością geometryczną na obrót wału pompy o zmiennej wydajności na obrót, określoną przy  $\Delta p_{Pi} = 0, p_{Pi} = 0$  i  $v_n$ , która jest równa objętości czynnej komór roboczych tworzonej w trakcie jednego obrotu wału. Wydajność  $q_{PgV}$  na obrót wału pompy zmienia się w granicach  $0 \leq q_{PgV} \leq q_{Pt}$  zaś współczynnik  $b_p = q_{PgV}/q_{Pt}$  zmiany wydajności na obrót wału pompy zmienia się w granicach  $0 \leq b_p \leq 1$ .

Proponowane modele matematyczne opisujące moment  $M_{Pm}$  strat mechanicznych w pompie, nawiązujące do modeli teoretycznych momentu strat mechanicznych, mają postać:

- w pompie o teoretycznej (stałej) wydajności  $q_{Pt}$  ( $b_p = 1$ ) na obrót wału (w nawiązaniu do modelu teoretycznego (8)):

$$M_{Pm|\Delta p_{Pi}, v} = k_{4.1} M_{Pt} \left(\frac{v}{v_n}\right)^{a_{vm}} + k_{4.2} M_{Pt} \frac{\Delta p_{Pi}}{p_n} = \left[ k_{4.1} \left(\frac{v}{v_n}\right)^{a_{vm}} + k_{4.2} \frac{\Delta p_{Pi}}{p_n} \right] M_{Pt} = \left[ k_{4.1} \left(\frac{v}{v_n}\right)^{a_{vm}} + k_{4.2} \frac{\Delta p_{Pi}}{p_n} \right] \frac{q_{Pt} p_n}{2\Pi}$$

gdzie:

$$k_{4.1} = \frac{M_{Pm|\Delta p_{Pi}=0, b_p=1, v_n}}{M_{Pt}} = \frac{M_{Pm|\Delta p_{Pi}=0, b_p=1, v_n}}{\frac{q_{Pt} p_n}{2\Pi}} \quad (13)$$

$$k_{4.2} = \frac{\Delta M_{Pm|\Delta p_{Pi}, b_p=1, v_n}}{M_{Pi}} = \frac{\Delta M_{Pm|\Delta p_{Pi}, b_p=1, v_n}}{\frac{q_{Pt} \Delta p_{Pi}}{2\Pi}} = \frac{M_{Pm|\Delta p_{Pi}, b_p=1, v_n} - M_{Pm|\Delta p_{Pi}=0, b_p=1, v_n}}{\frac{q_{Pt} \Delta p_{Pi}}{2\Pi}} \quad (14)$$

$$= \frac{M_{Pm|\Delta p_{Pi}=p_n, b_p=1, v_n} - M_{Pm|\Delta p_{Pi}=0, b_p=1, v_n}}{\frac{q_{Pt} p_n}{2\Pi}} = \frac{M_{Pm|\Delta p_{Pi}=p_n, b_p=1, v_n} - M_{Pm|\Delta p_{Pi}=0, b_p=1, v_n}}{M_{Pt}} \quad (14)$$

- w pompie o geometrycznej (zmiennej) wydajności  $q_{PgV}$  ( $q_{PgV} = b_p q_{Pt}$ ) na obrót wału (w nawiązaniu do modeli teoretycznych (9), (10) i (11)):

$$M_{Pm|\Delta p_{Pi}, b_p, v} = (k_{4.1.1} + k_{4.1.2} b_p) M_{Pt} \left(\frac{v}{v_n}\right)^{a_{vm}} + k_{4.2} M_{Pt} b_p \frac{\Delta p_{Pi}}{p_n} = \left[ (k_{4.1.1} + k_{4.1.2} b_p) \left(\frac{v}{v_n}\right)^{a_{vm}} + k_{4.2} b_p \frac{\Delta p_{Pi}}{p_n} \right] M_{Pt} = \left[ (k_{4.1.1} + k_{4.1.2} b_p) \left(\frac{v}{v_n}\right)^{a_{vm}} + k_{4.2} b_p \frac{\Delta p_{Pi}}{p_n} \right] \frac{q_{Pt} p_n}{2\Pi} \quad (15)$$

gdzie:

$$k_{4.1.1} = \frac{M_{Pm|\Delta p_{Pi}=0, b_p=0, v_n}}{M_{Pt}} = \frac{M_{Pm|\Delta p_{Pi}=0, b_p=0, v_n}}{\frac{q_{Pt} p_n}{2\Pi}} \quad (16)$$

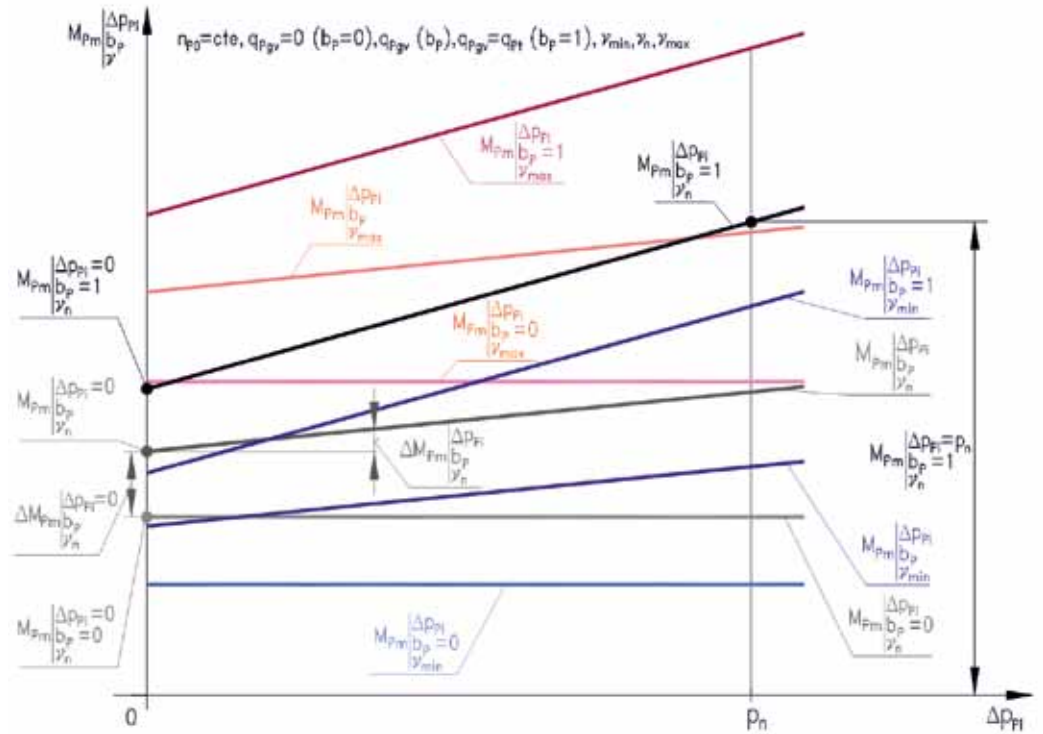
$$k_{4.1.2} = \frac{M_{Pm|\Delta p_{Pi}=0, b_p=1, v_n} - M_{Pm|\Delta p_{Pi}=0, b_p=0, v_n}}{M_{Pt}} = \frac{M_{Pm|\Delta p_{Pi}=0, b_p=1, v_n} - M_{Pm|\Delta p_{Pi}=0, b_p=0, v_n}}{\frac{q_{Pt} p_n}{2\Pi}}$$

$$k_{4.2} = \frac{\Delta M_{Pm|\Delta p_{Pi}, b_p, v_n}}{M_{Pi}} =$$

$$= \frac{\Delta M_{Pm|\Delta p_{Pi}, b_p, v_n}}{b_p q_{Pt} \Delta p_{Pi}} = \frac{\Delta M_{Pm|\Delta p_{Pi}, b_p=1, v_n}}{\frac{q_{Pt} \Delta p_{Pi}}{2\Pi}} = \quad (18)$$

$$= \frac{M_{Pm|\Delta p_{Pi}=p_n, b_p=1, v_n} - M_{Pm|\Delta p_{Pi}=0, b_p=1, v_n}}{\frac{q_{Pt} p_n}{2\Pi}} = \frac{M_{Pm|\Delta p_{Pi}=p_n, b_p=1, v_n} - M_{Pm|\Delta p_{Pi}=0, b_p=1, v_n}}{M_{Pt}}$$

Rys. 7. Moment  $M_{Pm|\Delta p_{Pi}, b_p, \nu}$  strat mechanicznych w pompie tłokowej (osiowej lub promieniowej) posiadającej obudowę (karter) wypełnioną cieczą, o zmiennej wydajności  $q_{Pgv} = b_p q_{Pi}$  na obrót wału, jako funkcja przyrostu  $\Delta p_{Pi}$  ciśnienia indykowanego w komorach roboczych pompy – interpretacja graficzna modelu teoretycznego (9); wydajność  $q_{Pgv}$  na obrót wału (współczynnik  $b_p$  zmiany wydajności na obrót wału):  $q_{Pgv} = 0$  ( $b_p = 0$ ),  $q_{Pgv} = q_{Pi}$  ( $b_p = 1$ ); lepkość  $\nu_{min}$ ,  $\nu_n$  i  $\nu_{max}$  cieczy. Moment  $M_{Pm|\Delta p_{Pi}, b_p, \nu}$  strat mechanicznych w pompie nieposiadającej obudowy (karteru) wypełnionej cieczą jest praktycznie niezależny od lepkości  $\nu$  cieczy, a określany jest przy lepkości  $\nu_n$  odniesienia cieczy



Komentarz:

- Suma ( $k_{4.1.1} + k_{4.1.2}$ ) współczynników zastosowanych w modelu matematycznym (15) opisującym moment  $M_{Pm}$  strat mechanicznych w pompie o geometrycznej (zmiennej) wydajności  $q_{Pgv}$  ( $q_{Pgv} = b_p q_{Pi}$ ) na obrót wału równa się współczynnikowi  $k_{4.1}$  zastosowanemu w modelu matematycznym (12) opisującym moment  $M_{Pm}$  strat mechanicznych w tej pompie pracującej jako pompa o teoretycznej (stałej) wydajności  $q_{Pi}$  na obrót wału:  $k_{4.1.1} + k_{4.1.2} = k_{4.1}$ .
- Współczynnik  $k_{4.2}$  zastosowany w modelu matematycznym (15) opisującym moment  $M_{Pm}$  strat mechanicznych w pompie o geometrycznej (zmiennej) wydajności  $q_{Pgv}$  ( $q_{Pgv} = b_p q_{Pi}$ ) na obrót wału równa się współczynnikowi  $k_{4.2}$  zastosowanemu w modelu matematycznym (12) opisującym moment  $M_{Pm}$  strat mechanicznych w tej pompie pracującej jako pompa o teoretycznej (stałej) wydajności  $q_{Pi}$  na obrót wału.

Wnioski

1. Opracowano modele teoretyczne i matematyczne momentu  $M_{Pm}$  strat mechanicznych w zespole „komory robocze – wał” pompy wporowej o stałej  $q_{Pi}$  ( $V_{Pi}$ ) i o zmiennej  $q_{Pgv} = b_p q_{Pi}$  ( $V_{Pgv}$ ) wydajności na obrót wału pompy.

Modele obrazują zależność momentu  $M_{Pm}$  strat mechanicz-

$$\text{nych w zespole od momentu } M_{Pi} = \frac{q_{Pgv} \Delta p_{Pi}}{2\Pi} = \frac{b_p q_{Pi} \Delta p_{Pi}}{2\Pi}$$

indykowanego w komorach roboczych pompy, a także od lepkości  $\nu$  cieczy roboczej na dopływie do pompy zmieniającej się w zakresie  $\nu_{min} \leq \nu \leq \nu_{max}$ . Założono, że nieznaczna zmiana prędkości obrotowej  $n_p$  silnika napędzającego pompę (pod wpływem zmieniającego się momentu  $M_p$  na

wale pompy obciążającego silnik) nie wpływa praktycznie na moment  $M_{Pm}$  strat.

Moment  $M_{Pi}$  indykowany w komorach roboczych pompy oraz lepkość  $\nu$  cieczy roboczej są parametrami niezależnymi od momentu  $M_{Pm}$  strat mechanicznych występujących w zespole „komory robocze – wał”.

Modele obrazują również zależność momentu  $M_{Pm}$  od wielkości  $q_{Pgv}$  wydajności na obrót wału pompy (współczynnika  $b_p = q_{Pgv}/q_{Pi}$  wydajności na obrót pompy) w pompie o zmiennej wydajności na obrót. W modelach przyjmuje się zmianę  $q_{Pgv}$  ( $b_p$ ) w zakresie  $0 \leq q_{Pgv} \leq q_{Mt}$  ( $0 \leq b_p \leq 1$ ).

2. Modele matematyczne momentu  $M_{Pm}$  strat mechanicznych oparte są na zdefiniowanych współczynnikach  $k_i$  strat energetycznych odnoszących moment strat mechanicznych do wielkości odniesienia, czyli do: momentu teoretycznego  $M_{Pi}$  pompy o teoretycznej (stałej) wydajności  $q_{Pi}$  na obrót wału, określonego przy przyroście  $\Delta p_{Pi}$  ciśnienia w pompie równym ciśnieniu nominalnemu  $p_n$  pracy układu ( $\Delta p_{Pi} = p_n$ ), przy:
  - znanych wartościach  $b_p = q_{Pgv}/q_{Pi}$  współczynnika wydajności pompy;
  - założeniu praktycznie stałej prędkości  $n_p$  pompy równej prędkości  $n_{p0}$  wału pompy nieobciążonej ( $n_p = n_{p0}$ ).
3. Modele matematyczne momentu  $M_{Pm}$  strat mechanicznych w zespole „komory robocze – wał” powinny korespondować z modelami strat objętościowych w komorach roboczych oraz z modelami strat ciśnieniowych w kanałach pompy.

Bibliografia

- [1] PASZOTA Z.: *Graficzne przedstawianie mocy strat energetycznych oraz mocy rozwijanych w elementach układu napędu i ste-*

- rowania hydrostatycznego. Część I – Układy ze sterowaniem dławieniowym szeregowym prędkości silnika hydraulicznego obrotowego. Rozdział w monografii pt. *Badanie, konstrukcja, wytwarzanie i eksploatacja układów hydraulicznych* pod redakcją Adama Klicha, Edwarda Palczaka i Andrzeja Medera. Biblioteka „Cylinder”. Centrum Mechanizacji Górnictwa „Komag”, Gliwice 2008, s. 121–139, rys. 12, bibliograf. 10 poz.
- [2] PASZOTA Z.: *Graficzne przedstawianie mocy strat energetycznych oraz mocy rozwijanych w elementach układu napędu i sterowania hydrostatycznego. Część II – Układy ze sterowaniem dławieniowym równoległym i ze sterowaniem objętościowym prędkości silnika hydraulicznego obrotowego.* Rozdział w monografii pt. *Badanie, konstrukcja, wytwarzanie i eksploatacja układów hydraulicznych* pod redakcją Adama Klicha, Edwarda Palczaka i Andrzeja Medera. Biblioteka „Cylinder”. Centrum Mechanizacji Górnictwa „Komag”, Gliwice 2008, s. 141–159, rys. 7, bibliograf. 10 poz.
- [3] PASZOTA Z.: *Kierunek wzrostu strumienia mocy w układzie napędu i sterowania hydrostatycznego. Graficzne przedstawianie mocy strat energetycznych oraz mocy rozwijanych w elementach układu – Cz. I. Układy ze sterowaniem dławieniowym szeregowym prędkości silnika hydraulicznego obrotowego.* „Napędy i Sterowanie”, Miesięcznik naukowo-techniczny, nr 10 (114), Rok X, Październik 2008, s. 142–152, rys. 13, bibliograf. 12 poz.
- [4] PASZOTA Z.: *Kierunek wzrostu strumienia mocy w układzie napędu i sterowania hydrostatycznego. Graficzne przedstawianie mocy strat energetycznych oraz mocy rozwijanych w elementach układu – Cz. II. Układy ze sterowaniem dławieniowym równoległym i ze sterowaniem objętościowym prędkości silnika hydraulicznego obrotowego.* „Napędy i Sterowanie”, Miesięcznik naukowo-techniczny, nr 11 (115), Rok X, Listopad 2008, s. 116–125, rys. 7, bibliograf. 12 poz.
- [5] PASZOTA Z.: *Graphical presentation of the power of energy losses and power developed in the elements of hydrostatic drive and control system. Part I – Rotational hydraulic motor speed series throttling control systems.* „Polish Maritime Research” 3 (57) 2008, Vol. 15; s. 28–37, rys. 13, bibliogr. 12 poz.
- [6] PASZOTA Z.: *Graphical presentation of the power of energy losses and power developed in the elements of hydrostatic drive and control system. Part II – Rotational hydraulic motor speed parallel throttling control and volumetric control systems.* „Polish Maritime Research” 4 (58) 2008, Vol. 15; s. 21–29, rys. 7, bibliograf. 13 poz.
- [7] PASZOTA Z.: *Pole pracy układu napędu hydrostatycznego.* Rozdział w monografii pt. *Badanie, konstrukcja, wytwarzanie i eksploatacja układów hydraulicznych* pod redakcją Adama Klicha, Antoniego Koziela i Edwarda Palczaka. Biblioteka „Cylinder”. Centrum Mechanizacji Górnictwa „Komag”, Gliwice 2009, s. 31–43, rys. 1, bibliograf. 10 poz.
- [8] PASZOTA Z.: *Parametry badań sprawności energetycznej pomp i silników hydraulicznych. Pole pracy układu napędu hydrostatycznego.* „Napędy i Sterowanie”, Miesięcznik naukowo-techniczny, nr 11 (127), Rok XI, Listopad 2009, s. 124–129, rys. 1, bibliograf. 11 poz.
- [9] PASZOTA Z.: *The operating field of a hydrostatic drive system parameters of the energy efficiency investigations of pumps and hydraulic motors.* „Polish Maritime Research” 4 (62) 2009, Vol. 16; s. 16–21, rys. 1, bibliogr. 11 poz.
- [10] PASZOTA Z.: *Straty energetyczne w silniku hydraulicznym obrotowym – definicje i zależności służące ocenie sprawności silnika i napędu hydrostatycznego.* Rozdział w monografii pt. *Badanie, konstrukcja, wytwarzanie i eksploatacja układów hydraulicznych* pod redakcją Adama Klicha, Antoniego Koziela i Edwarda Palczaka. Biblioteka „Cylinder 2010”. Instytut Techniki Górniczej KOMAG, Gliwice 2010, s. 31–54, rys. 1, bibliograf. 14 poz.
- [11] PASZOTA Z.: *Modele teoretyczne i matematyczne momentu strat mechanicznych w silniku hydraulicznym obrotowym stosowanym w napędzie hydrostatycznym.* Rozdział w monografii pt. *Badanie, konstrukcja, wytwarzanie i eksploatacja układów hydraulicznych* pod redakcją Adama Klicha, Antoniego Koziela i Edwarda Palczaka. Biblioteka „Cylinder 2010”. Instytut Techniki Górniczej KOMAG, Gliwice 2010, s. 123–137, rys. 6, bibliograf. 10 poz.
- [12] PASZOTA Z.: *Straty energetyczne w silniku hydraulicznym obrotowym – definicje i zależności służące ocenie sprawności silnika i napędu hydrostatycznego.* „Napędy i sterowanie”, miesięcznik naukowo-techniczny, nr 10 (138) Rok XII, Październik 2010, s. 114–125, rys. 1, bibliograf. 15 poz.
- [13] PASZOTA Z.: *Modele teoretyczne i matematyczne momentu strat mechanicznych w silniku hydraulicznym obrotowym stosowanym w napędzie hydrostatycznym.* „Napędy i Sterowanie”, Miesięcznik naukowo-techniczny, nr 11 (139), Rok XII, Listopad 2010, s. 122–129, rys. 6, bibliograf. 11 poz.
- [14] PASZOTA Z.: *Energy losses in the hydraulic rotational motor – definitions and relations for evaluation of the efficiency of motor and hydrostatic drive.* „Polish Maritime Research” 2 (65) 2010, Vol. 17; s. 44–54, rys. 1, bibliograf. 14 poz.
- [15] PASZOTA Z.: *Theoretical and mathematical models of the torque of mechanical losses in a hydraulic rotational motor for hydrostatic drive.* „Polish Maritime Research” 3 (66) 2010, Vol. 17; s. 18–25, rys. 6, bibliograf. 10 poz.
- [16] PASZOTA Z.: *Napędy hydrostatyczne jako maszyny bezpieczne i energooszczędne.* „Napędy i Sterowanie”, Miesięcznik naukowo-techniczny, nr 1 (141), Rok XIII, Styczeń 2011, s. 74–79, bibliograf. 19 poz.
- [17] PASZOTA Z.: *Napędy hydrostatyczne jako maszyny bezpieczne i energooszczędne.* Konferencja Naukowo-Techniczna „Innowacyjne Maszyny i Technologie – Bezpieczeństwo” 2–3 lutego 2011 – Szczyrk, Organizator: „Napędy i Sterowanie”, Miesięcznik naukowo-techniczny; s. 6, bibliograf. 19 poz.
- [18] PASZOTA Z.: *Hydrostatic drives as safe and energy saving machines. The drive investigation method compatible with the diagram of power increase opposite to the direction of power flow.* „Polish Maritime Research” 1 (68) 2011, Vol. 18; s. 3–9, rys. 1, bibliograf. 22 poz.

prof. dr hab. inż. Zygmunt Paszota – Wydział Oceanotechniki i Okrętownictwa, Politechnika Gdańska, Gdańsk;  
e-mail: zpszota@pg.gda.pl

artykuł recenzowany

reklama