



Andrzej AMBROZIAK*

MODELOWANIE NUMERYCZNE ISTNIEJĄCYCH KONSTRUKCJI ŻELBETOWYCH

1. Wstęp

Powstawanie nowoczesnych technik i metod numerycznych spowodowało szybki rozwój programów komputerowych i systemów wspomagania projektowania, tzw. *computer aided design* lub *computer aided engineering*. Wykorzystując zaawansowane metody komputerowe można modelować szereg zjawisk fizycznych i mechanicznych o różnych stopniach złożoności. Wśród metod komputerowych można wymienić metodę elementów skończonych, metodę elementów brzegowych, uogólnioną metodę różnic skończonych, itp. Szerokiego omówienia tych metod dokonano m.in. w monografii [31]. Aktualnie wśród tych metod najpopularniejszą i najczęściej stosowaną w analizie konstrukcji jest metoda elementów skończonych ([33], [8]). Podkreślając wielkie możliwości i przydatność metody elementów skończonych, należy zwrócić uwagę na konieczność bardzo przemyślanego i rozważnego stosowania tej metody. Jest ona metodą przybliżoną. Musimy pamiętać, że jej wyniki, jak zresztą każdej innej metody numerycznej, odnoszą się nie do rzeczywistych układów konstrukcyjnych, ale do ich modeli. Cechą charakterystyczną tej metody jest podział analizowanego obiektu (konstrukcji) na skończoną liczbę elementów połączonych w węzłach, poprzez zbudowanie tzw. modelu dyskretnego. Taki podział konstrukcji w metodzie elementów skończonych nazywa się dyskretyzacją. Elementy mają niewielkie,

* dr hab. inż., profesor PG, Politechnika Gdańska, ambrozan@pg.edu.pl

ale skończone wymiary i stąd też wzięła się nazwa metody elementów skończonych. Kluczowym zagadnieniem jest dobór i przyjęcie rozmiaru elementów skończonych, który jest zależny od wymagań jakie stawiają kształty oraz dokładność. Liczba równań w metodzie elementów skończonych jest proporcjonalna do ilości węzłów i stopni swobody, które posiada każdy z nich, dlatego rozmiary i liczba elementów skończonych w dużej mierze zależą od możliwości sprzętowych i obliczeniowych, którymi dysponujemy.

Pomimo licznych zalet metoda elementów skończonych posiada pewne ograniczenia. W przypadku niewłaściwego i niepoprawnego lub wręcz nieprzemysłowego sposobu stosowania oprogramowania wykorzystującego metodę elementów skończonych można stworzyć model numeryczny nie mający nic wspólnego z rzeczywistym modelem konstrukcji lub otrzymać wyniki, które nie będą odzwierciedleniem rzeczywistego stanu naprężeń w elementach konstrukcyjnych. Głównymi źródłami generującymi błędy w metodzie elementów skończonych (MES, ang. *FEM*, *finite element method*) są:

- pominięcie istotnych właściwości materiałowych i lub przyjęcie niewłaściwego modelu materiałowego,
- niewłaściwie przyjęta metoda poszukiwania rozwiązania,
- zbyt duże uproszczenia dotyczące rzeczywistych zjawisk fizycznych,
- niepoprawne odwzorowanie geometrii (zbyt mała dokładność) oraz istotnych jej szczegółów,
- niewłaściwa dyskretyzacja obszaru analizy (np. zbyt mała gęstość podziału konstrukcji na elementy skończone)
- przyjęcie niewłaściwego typ i rodzaj elementów skończonych,
- niepoprawne przyjęcie kroku czasowego w analizach geometrycznie nieliniowych lub analizach dynamicznych (np. zbyt duża wartość kroku czasowego),
- brak weryfikacji doświadczalnej dla przyjętych modeli oraz założonych warunków brzegowych

2. Zastosowanie metody elementów skończonych w analizie konstrukcji

W pierwszej części tego rozdziału, poprzedzonej wprowadzeniem, dokonano opisu geometrii powłoki i tensora odkształceń błonowych. W drugiej części przedstawiono macierzowy zapis równań powłoki błonowej w metodzie elementów skończonych. Podając implementacyjne formy macierzy elementowych dla trójwymiarowego czterowęzłowego izoparametrycznego elementu membranowego. Na zakończenie rozdziału przedstawiono przykład analityczny, obrazujące praktyczne zastosowanie prezentowanej teorii, w którym przedstawiono analizę stanu odkształcenia w czterowęzłowym izoparametrycznym elemencie membranowym.

2.1. Wprowadzenie

Z punktu widzenia mechaniki ośrodków ciągłych, powłoka jest ciałem trójwymiarowym, w którym da się wyróżnić pewną powierzchnię (równo odległą od obu powierzchni zewnętrznych), nazywaną powierzchnią środkową. Poza tym, powłoka w każdym punkcie musi mieć różną od zera grubość mierzoną w kierunku prostopadłym do powierzchni środkowej, która jest mała w stosunku do pozostałych wymiarów. Powłokę uważamy za cienką, jeśli $t_i/R_\theta \ll 1$, gdzie t_i jest grubością, R_θ jest najmniejszym promieniem krzywizny nieodkształconej powłoki. Na ogół przyjmuje się, że jeśli: $t_i/R_\theta \leq 1/20$, to



mamy do czynienia z cienką powłoką, gdy $1/20 < t_i/R_0 \leq 1/6$ ze średniej grubości powłoką. Powłoki membranowe są zazwyczaj powłokami cienkimi. Opis matematyczny takiego ciała poprzez skończony zbiór pól o współrzędnych zapisanych na powierzchni odniesienia, traktowanych jako jedyne zmienne niezależne, rozumie się jako teorię powłok. W ogólności celem teorii powłok jest zastąpienie trójwymiarowego modelu ciała typu powłoka, dwuwymiarowym modelem powierzchni wyposażonej w odpowiednią strukturę wewnętrzną i własności mechaniczne ujmujące główne cechy opisywanego ciała ([4], [5], [6]).

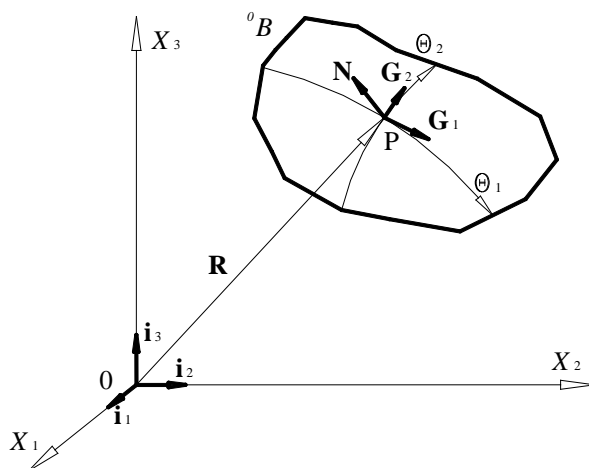
Podstawy teorii powłok cienkich są ściśle związane z teorią powierzchni i sięgają dziewiętnastego wieku. Dane dotyczące rozwoju teorii powłok w ujęciu historycznym można znaleźć w pracy Awrejcewicz & Andrianova [7], tu zostaną podane tylko pewne istotne etapy tego rozwoju. Ważny wkład w rozwój matematycznej teorii powierzchni wnieśli przede wszystkim Gauss, Lamé, Codazzi, Weingarten. Ogólną zgięciową teorię powłok sformułowali Aron w 1874 roku i Love w 1888 roku. Na bazie tych prac sformułowane zostały dwie podstawowe teorie powłok Kirchhoffa-Love'a oraz Reissnera-Mindlina. Klasyczny wariant teorii zakłada, że każdy liniowy element materialny powłoki, który w konfiguracji początkowej jest odcinkiem prostym normalnym do powierzchni podstawowej jest nieodkształcalny oraz pozostaje w trakcie deformacji do niej normalny. W uogólnionym wariancie tej teorii dodatkowo zakłada się, że element materialny powłoki może zmieniać swoją długość.

Współczesne opracowania dotyczą głównie opisów geometrycznie nieliniowych. Do ciekawych pozycji literaturowych z tej dziedziny należą opracowania między innymi: Filina [15], który omówił szczegółowo podstawy liniowej i nieliniowej teorii powłok, rozpatrzył różne warianty uproszczeń teorii; Galimova [17], który przedstawił geometrycznie nieliniową teorię powłok cienkich, której zastosowanie jest bardzo szerokie zarówno w analizie naprężeń, jak i stateczności; Goldenveizera [18], który wprowadził ogólne równania liniowej teorii powłok cienkich, omówił metody ich rozwiązywania oraz zagadnienia brzegowe; Kujaka [26], który wskazał na nowe podejścia w formułowaniu podstawowych równań nieliniowej teorii płyt i powłok; Olszaka [29], który zaprezentował prace dotyczące podstaw teorii powłok i zastosowań oraz wskazał kierunki dalszego rozwoju; Pietraszkiewicz [30], który rozwinął geometrycznie nieliniową teorię powłok ze szczególnym uwzględnieniem skończonych obrotów przekrojów; Bessa [11], który omówił klasyfikację naprężeń z uwzględnieniem pełzania, linową i nieliniową analizę wytrzymałości zbiorników cienkościennych oraz wybrane metody komputerowe; Farshad [14], który przedstawił analizę i zasady projektowania powłok o różnych kształtach. Przeglądu powyższej literatury dokonano w oparciu o pracę [20]. Szerszego przeglądu piśmiennictwa dotyczącego teorii powłok dokonano między innymi w pracach: [6], [13], w których łącznie zamieszczono bibliografię liczącą ponad 3100 pozycji.

2.2. Opis deformacji powłoki błonowej

Rozdział ten dotyczy opisu deformacji powłoki błonowej w teorii dużych przemieszczeń (patrz m.in.: [16], [23], [25], [27]). W opisie deformacji powłoki błonowej zastosowano opis Lagrange'a. Wyróżniono dwie konfiguracje: konfigurację początkową 0B ciała nieodeformowanego w chwili $t = t_0$, oraz konfigurację tB ciała zdeformowanego w chwili t (patrz rys. 1 oraz rys. 2). Dodatkowo zakładamy, że indeksy oznaczone literami alfabetu łacińskiego przybierają wartości 1, 2 i 3; a oznaczone literami alfabetu greckiego 1 i 2.

Wolny od zginania stan naprężenia w powłoce jest określany jako błonowy stan naprężenia. Ponieważ występuje on w cienkiej powłoce, więc w rozważaniach możemy ograniczyć się do analizy wielkości na powierzchni środkowej.



Rys. 1. Konfiguracja początkowa 0B ciała niezdeformowanego

Powierznię środkową można opisać w globalnym kartezjańskim układzie współrzędnych w postaci trzech funkcji skalarnych o dwóch parametrach (patrz rys. 1)

$$X_1 = f_1(\theta^1, \theta^2) \quad X_2 = f_2(\theta^1, \theta^2) \quad X_3 = f_3(\theta^1, \theta^2) \quad (1)$$

lub jako funkcje wektorową w postaci

$$\mathbf{R} = \overrightarrow{0P} = f(\theta^1, \theta^2) = \sum_{k=1}^3 f_k(\theta^1, \theta^2) \mathbf{i}_k = X_k \mathbf{i}_k, \quad (2)$$

gdzie \mathbf{i}_k są wresorami kartezjańskiego układu współrzędnych.

Wektor \mathbf{R} jest nazywany wektorem pozycyjnym punktu P należącego do powierzchni. Współrzędne θ^β ($\beta = 1, 2$) tworzą krzywoliniowy układ współrzędnych leżący na powierzchni środkowej powłoki. Jego wektory bazowe \mathbf{G}_α można obliczyć jako

$$\mathbf{G}_\alpha = \mathbf{R}_{,\alpha} = X_{k,\alpha} \mathbf{i}_k, \quad (3)$$

natomiast wektor normalny \mathbf{N} powierzchni środkowej w punkcie P jest definiowany zależnością

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{G}_1 \times \mathbf{G}_2}{|\mathbf{G}_1 \times \mathbf{G}_2|} = N^k \mathbf{i}_k. \quad (4)$$

W ten sposób została określona kowariantna baza współrzędnych powierzchniowych, bazę kontrawariantną można wyznaczyć korzystając ze związku

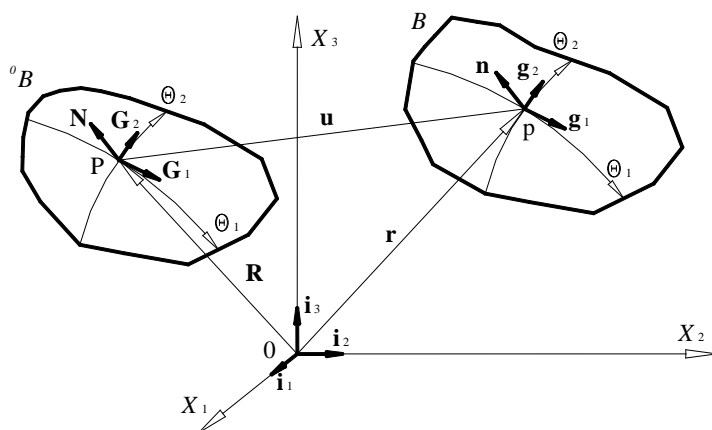
$$\mathbf{G}^\alpha \cdot \mathbf{G}_\beta = \delta^\alpha_\beta. \quad (5)$$

W każdym punkcie powierzchni środkowej zdefiniowano wzajemne bazy \mathbf{G}_α i \mathbf{G}^β spełniające zależność (5). Możemy tym samym wyznaczyć kowariantne, a następnie kontrawariantne współrzędne tensora metrycznego na powierzchni (nazywanego pierwszą podstawową formą powierzchni)

$$G_{\alpha\beta} = \mathbf{G}_\alpha \cdot \mathbf{G}_\beta = X_{i,\alpha} X_{j,\beta} \delta_{ij}, \quad (6)$$

$$G^{\alpha\gamma} G_{\beta\gamma} = \delta^\alpha_\beta. \quad (7)$$

Układem globalnym jest przyjęty kartezjański układ współrzędnych X_1, X_2, X_3 . Lokalnym układem początkowym jest krzywoliniowy układ θ^α . W konfiguracji aktualnej tB lokalnym układem będzie taki układ, w którym wszystkie punkty konfiguracji początkowej mają te same współrzędne, co w konfiguracji aktualnej. Tak przyjęty układ współrzędnych nosi nazwę układu konwekcyjnego (współobrotowego) odpowiadający uśrednionemu obrotowi ciała przy przejściu z jednej konfiguracji do drugiej. Układ ten jest sztywno związany z deformującym się ciałem i jest „zamrażany” w każdej chwili czasowej t , [28], patrz rys. 2.



Rys. 2. Konwekcyjny układ współrzędnych

W konfiguracji aktualnej tB zachodzą związki podobne jak w konfiguracji początkowej 0B , i tak zapisujemy

$$\mathbf{r} = X_k \mathbf{i}_k = \mathbf{R} + \mathbf{u}. \quad (8)$$

Wszystkie wielkości konfiguracji aktualnej wyznaczamy w odniesieniu do konfiguracji początkowej. Z zależności (8) otrzymujemy wektor przemieszczenia

$$\mathbf{u} = \mathbf{r} - \mathbf{R} = u^\alpha \mathbf{G}_\alpha + u_3 \mathbf{N} = u_\alpha \mathbf{G}^\alpha + u_3 \mathbf{N}. \quad (9)$$

Analogicznie korzystając z (6) w konfiguracji zdeformowanej wektory bazowe przyjmują postać

$$\mathbf{g}_\alpha = (X_{k,\alpha} + u_{,\alpha}^k) \mathbf{i}_k = \mathbf{G}_\alpha + \mathbf{u}_{,\alpha}. \quad (10)$$

Dokonując stosownych przekształceń możemy zapisać

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_\beta &= G_{\beta\alpha} \mathbf{G}^\alpha \\ u_{,\beta} &= (u_\alpha \mathbf{G}^\alpha + u_3 \mathbf{N})_{,\beta} = u_\alpha|_\beta \mathbf{G}^\alpha + u_\alpha \mathbf{G}^\alpha_{,\beta} + u_{3,\beta} \mathbf{N} + u_3 \mathbf{N}_{,\beta} =, \\ &= u_\alpha|_\beta \mathbf{G}^\alpha + u_{3,\beta} \mathbf{N} \end{aligned} \quad (11)$$

gdzie wyrażenie $u_\alpha|_\beta$ jest określone jako pochodna kowariantna [23]

$$u_\alpha|_\beta = u_{\alpha,\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma u_\gamma, \quad (12)$$

w której $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$ jest symbolem Christoffela.

Ze względu na przyjęty stan błonowy w powłoce membranowej odpowiednie pochodne w równaniu (10) są pomijane i nieistotne w dalszych rozważaniach (nie następują lokalne zmiany krzywizny). Ostatecznie zależność (10) przedstawiamy w postaci

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_\alpha &= \mathbf{G}_\alpha + \mathbf{u}_{,\alpha} = G_{\beta\alpha} \mathbf{G}^\beta + u_\alpha|_\beta \mathbf{G}^\beta + u_{3,\alpha} \mathbf{N} \\ &= (G_{\beta\alpha} + u_\alpha|_\beta) \mathbf{G}^\beta + u_{3,\alpha} \mathbf{N} =, \\ &= (G_{\alpha\beta} + \mathcal{G}_{\alpha\beta}) \mathbf{G}^\alpha + u_{3,\alpha} \mathbf{N} = \psi_{\lambda\alpha} \mathbf{G}^\lambda + \mathcal{G}_\alpha \mathbf{N} \end{aligned} \quad (13)$$

gdzie

$$\psi_{\alpha\beta} = G_{\alpha\beta} + \mathcal{G}_{\alpha\beta}, \quad \mathcal{G}_{\alpha\beta} = u_\alpha|_\beta = u_{\alpha,\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda u_\lambda, \quad \mathcal{G}_\alpha = u_{3,\alpha}. \quad (14)$$

Wykonując kolejne operacje możemy zapisać

$$\mathbf{g}_\alpha = \psi_{\beta\alpha} \mathbf{G}^\beta + \mathcal{G}_\alpha \mathbf{N} = G^{\beta\lambda} \psi_{\beta\alpha} \mathbf{G}_\lambda + \mathcal{G}_\alpha \mathbf{N} = \psi^\lambda_\alpha \mathbf{G}_\lambda + \mathcal{G}_\alpha \mathbf{N}. \quad (15)$$

Obliczymy teraz składowe tensora metrycznego konfiguracji aktualnej w postaci

$$g_{\alpha\beta} = \mathbf{g}_\alpha \cdot \mathbf{g}_\beta = \psi^\lambda_\alpha \psi_{\lambda\beta} + \mathcal{G}_\alpha \mathcal{G}_\beta = G_{\alpha\beta} + \mathcal{G}_{\alpha\beta} + \mathcal{G}_{\beta\alpha} + \mathcal{G}^\lambda_\alpha \mathcal{G}_{\lambda\beta} + \mathcal{G}_\alpha \mathcal{G}_\beta. \quad (16)$$

Kwadrat odległości dwóch dowolnych punktów w konfiguracji początkowej 0B we współrzędnych krzywoliniowych może być zapisany jako

$$(d\mathbf{R})^2 = G_{\alpha\beta} d\theta^\alpha d\theta^\beta. \quad (17)$$

Kwadrat długości liniowego elementu w konfiguracji zdeformowanej 1B we współrzędnych krzywoliniowych zapisujemy

$$(d\mathbf{r})^2 = g_{\alpha\beta} d\theta^\alpha d\theta^\beta. \quad (18)$$

Różnica kwadratów (18) i (17) wyraża się jako

$$(d\mathbf{r})^2 - (d\mathbf{R})^2 = 2\varepsilon_{\alpha\beta} d\theta^\alpha d\theta^\beta, \quad (19)$$

gdzie $\varepsilon_{\alpha\beta}$ są składowymi tensora odkształcenia Lagrange'a

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(g_{\alpha\beta} - G_{\alpha\beta}). \quad (20)$$

Podstawiając (16) do (20) otrzymujemy zależność postaci

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\psi^\lambda_\alpha \psi_{\lambda\beta} + \vartheta_\alpha \vartheta_\beta - G_{\alpha\beta}) = \frac{1}{2}(\vartheta_{\alpha\beta} + \vartheta_{\beta\alpha} + \vartheta^\lambda_\alpha \vartheta_{\lambda\beta} + \vartheta_\alpha \vartheta_\beta). \quad (21)$$

Dokonujemy podstawienia zgodnie z (7) i otrzymujemy analityczny zapis tensora odkształcenia dla cienkiej powłoki błonowej w postać

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left[u_\alpha|_\beta + u_\beta|_\alpha + u^\lambda|_\alpha u_{\lambda}|_\beta + u_{3,\alpha} u_{3,\beta} \right]. \quad (22)$$

Ze względu na przyjęty kartezjański układ współrzędnych ogólne zależności (6) i (7) mogą być zapisane jako

$$G_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}, \quad G^{\alpha\beta} = \delta^{\alpha\beta}. \quad (23)$$

Dodatkowo pochodne kowariantne $u_\alpha|_\beta$ oraz $u^\lambda|_\alpha$ przechodzą w zwykłe pochodne

$$u_\alpha|_\beta = u_{\alpha,\beta}, \quad u^\lambda|_\alpha = u^\lambda_{,\alpha}. \quad (24)$$

Wykorzystując (23) zależność (22) zapisujemy w formie



$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha} + u^{\lambda}_{,\alpha} u_{\lambda,\beta} + u_{3,\alpha} u_{3,\beta} \right). \quad (25)$$

Korzystając z zależności (24) możemy zapisać $u^{\lambda}_{,\alpha}$ w postaci

$$u^{\lambda}_{,\alpha} = G^{\lambda\rho} u_{\rho,\alpha} = \delta^{\lambda\rho} u_{\rho,\alpha}. \quad (26)$$

Tak więc tensor odkształceń Lagrange'a o składowych $\varepsilon_{\alpha\beta}$ jest wyrażony poprzez pochodne składowych wektora przemieszczeń w postaci

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha} + \delta^{\lambda\rho} u_{\rho,\alpha} u_{\lambda,\beta} + u_{3,\alpha} u_{3,\beta} \right). \quad (27)$$

Zgodnie z konwencją sumacyjną możemy zapisać składowe tensora Lagrange'a jako

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{1}{2} \left(u_{1,1} + u_{1,1} + u_{1,1} u_{1,1} + u_{2,1} u_{2,1} + u_{3,1} u_{3,1} \right) \\ \varepsilon_{22} &= \frac{1}{2} \left(u_{2,2} + u_{2,2} + u_{1,2} u_{1,2} + u_{2,2} u_{2,2} + u_{3,2} u_{3,2} \right) \\ \varepsilon_{21} = \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2} \left(u_{1,2} + u_{2,1} + u_{1,1} u_{1,2} + u_{2,1} u_{2,2} + u_{3,1} u_{3,2} \right) \end{aligned} \quad (28)$$

Dokonując dekompozycji składowych tensora odkształceń na część liniową i część nieliniową, wektor składowych tensora odkształceń zapisujemy w postaci

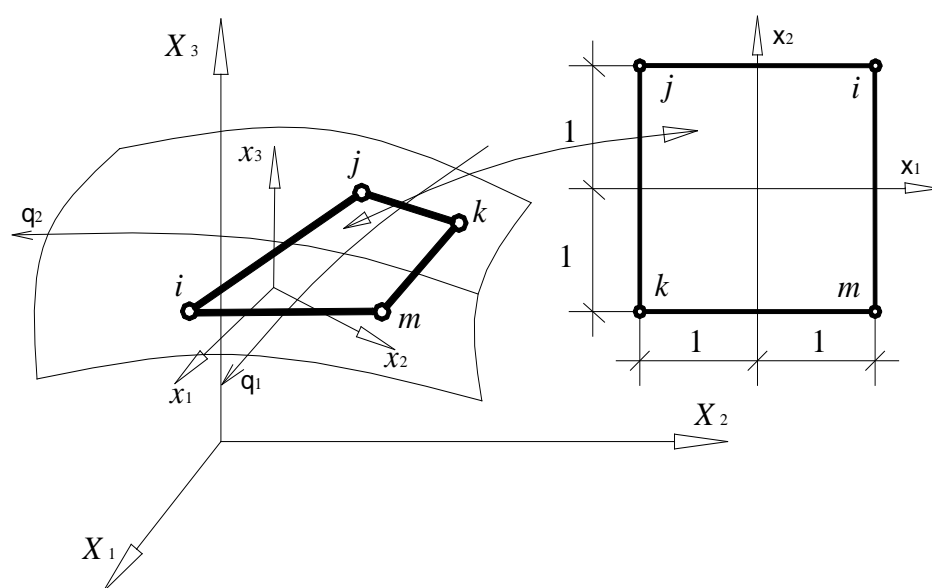
$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = \mathbf{e} + \mathbf{n} = \begin{Bmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,2} \\ u_{1,2} + u_{2,1} \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} (u_{1,1})^2 + (u_{2,1})^2 + (u_{3,1})^2 \\ (u_{1,2})^2 + (u_{2,2})^2 + (u_{3,2})^2 \\ 2(u_{1,1} u_{1,2} + u_{2,1} u_{2,2} + u_{3,1} u_{3,2}) \end{Bmatrix} \quad (29)$$

2.3. Czterowęzłowy trójwymiarowy izoparametryczny element membranowy

W analizie przekryć membranowych używane są zwykle trójkątne trójwęzłowe elementy skończone pracujące w płaskim stanie naprężenia oraz czterowęzłowe izoparametryczne elementy membranowe będące przedmiotem szczegółowej analizy. Pojęcie elementu skończonego związane jest z opisem kształtu geometrycznego oraz pola przemieszczeń, jeżeli geometria i przemieszczenia danego elementu skończonego opisane są tymi samymi funkcjami, za pomocą takiej samej liczby parametrów, wówczas element taki nazywamy izoparametrycznym. Idea elementów izoparametrycznych powstała na tle trudności występujących przy analizowaniu konstrukcji z brzegami zakrzywionymi. Uzyskanie odpowiedniej dokładności aproksymacji przy użyciu prostych elementów (np. trójkątny trzywęzłowy element) wymaga zastosowania większej liczby tych elementów. Główne trudności, jakie występują w analizie dotyczą opisu pola przemieszczeń, odkształceń i ustalenia macierzy sztywności. Warto zauważyć, że istnieje wiele prac dotyczących

przedmiotowego elementu skończonego ([9], [10], [12], [19], [24]), ale w pracach tych zawarte są jedynie ogólne opisy, bez jawnych postaci macierzy i transformacji, jakie muszą być wykonane. W dalszej części przedstawione zostaną implementacyjne formy macierzy, wraz z praktycznym przykładem analizy stanu odkształcenia dla czterowęzłowego membranowego elementu izoparametrycznego, co pozwala prześledzić wszystkie konieczne operacje.

W pierwszym kroku analizy niezbędna jest dyskretyzacja skończenie elementowa krzywoliniowego obszaru (powierzchni) opisanego współrzędnymi $X_i(\theta^\alpha)$. Określamy cztery węzły w przestrzeni i, j, k oraz m , rys. 3.



Rys. 3. Współrzędne krzywoliniowe

W tym wyróżnionym obszarze, elemencie skończonym, wprowadzamy współrzędne naturalne ξ_α , z elementem rodzimym (wzorcowym), w którym współrzędne ξ_1 i ξ_2 należą do zbioru

$$\xi = (\xi_1, \xi_2) \in [-1, +1] \times [-1, +1]. \quad (30)$$

Przyjmujemy w elemencie skończonym lokalny ortogonalny układ współrzędnych x_1, x_2, x_3 wraz z krzywoliniowym układem określającym współrzędne naturalne ξ_1, ξ_2 . Wektory współrzędnych i przemieszczeń węzłów dla dowolnego elementu prostokątnego z czterema węzłami w narożach, w lokalnym układzie współrzędnych zapisujemy w formie

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_1 &= \{x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4\}^T, \quad \mathbf{q}_1 = \{u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4\}^T \\ \mathbf{x}_2 &= \{x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4\}^T, \quad \mathbf{q}_2 = \{u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4\}^T \\ \mathbf{x}_3 &= \{x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4\}^T, \quad \mathbf{q}_3 = \{u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4\}^T\end{aligned} \quad (31)$$

Następnie poszukujemy związku pomiędzy elementem macierzystym a dowolną geometrią czterowęzłowego elementu skończonego. Ponieważ krawędzie elementu są liniami prostymi, więc płaszczyzna interpolowana przez te elementy jest prostokreślna, i współrzędne x_1, x_2, x_3 liniowo zależą od ξ_1, ξ_2 . Zakładając biliniową funkcję interpolacyjną, otrzymujemy współrzędne $x(\xi)$ w postaci

$$x(\xi) = \alpha_1 + \alpha_2 \xi_1 + \alpha_3 \xi_2 + \alpha_4 \xi_1 \xi_2. \quad (32)$$

Niewiadome współczynniki α_i wyznacza się rozwiązując układ równań względem α_i . Możemy, zatem wyrazić geometrie elementu skończonego poprzez znane współrzędne węzłów w postaci

$$x(\xi) = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_1 \xi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix}, \quad (33)$$

gdzie funkcje kształtu $N_i(\xi)$, możemy przedstawić w formie

$$\begin{aligned}N_2(\xi) &= \frac{(1-\xi_1)(1+\xi_2)}{4}, \quad N_1(\xi) = \frac{(1+\xi_1)(1+\xi_2)}{4} \\ N_3(\xi) &= \frac{(1-\xi_1)(1-\xi_2)}{4}, \quad N_4(\xi) = \frac{(1+\xi_1)(1-\xi_2)}{4}\end{aligned} \quad (34)$$

Właściwy dobór funkcji kształtu jest sprawą kluczową w metodzie elementów skończonych. Problematyka doboru funkcji kształtu jest szeroko opisywana w literaturze (patrz m.in. [33], [32]). Powtarzając podany sposób postępowania w odniesieniu do współrzędnych $x_1(\xi)$, $x_2(\xi)$ i $x_3(\xi)$ otrzymujemy

$$\begin{Bmatrix} x_1(\xi) \\ x_2(\xi) \\ x_3(\xi) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} {}_i x_1 \\ {}_i x_2 \\ {}_i x_3 \\ {}_j x_1 \\ {}_j x_2 \\ {}_j x_3 \\ {}_k x_1 \\ {}_k x_2 \\ {}_k x_3 \\ {}_m x_1 \\ {}_m x_2 \\ {}_m x_3 \end{Bmatrix} =, \quad (35)$$

$$= [N_1 \mathbf{I}_3 \quad N_2 \mathbf{I}_3 \quad N_3 \mathbf{I}_3 \quad N_4 \mathbf{I}_3] \mathbf{x} = \mathbf{N} \mathbf{x}$$

gdzie

$$\mathbf{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (36)$$

Do opisu składowych pola przemieszczeń elementu prostokątnego z czterema węzłami stosujemy tę samą liniową funkcję, która opisywała geometrię elementu

$$\begin{Bmatrix} u_1(\xi) \\ u_2(\xi) \\ u_3(\xi) \end{Bmatrix} = [N_1 \mathbf{I}_3 \quad N_2 \mathbf{I}_3 \quad N_3 \mathbf{I}_3 \quad N_4 \mathbf{I}_3] \mathbf{q} = \mathbf{N} \mathbf{q}, \quad (37)$$

gdzie $\mathbf{q} = \{ {}_i u_1 \quad {}_i u_2 \quad {}_i u_3 \quad {}_j u_1 \quad {}_j u_2 \quad {}_j u_3 \quad {}_k u_1 \quad {}_k u_2 \quad {}_k u_3 \quad {}_m u_1 \quad {}_m u_2 \quad {}_m u_3 \}^T$.

Macierz przemieszczenie – odkształcenie \mathbf{B} otrzymujemy drogą różniczkowania założonego pola przemieszczeń, musimy zatem znaleźć związek pomiędzy pochodnymi. Sformułujmy regułę transformacji pochodnych względem ξ_β i współrzędnymi x_α . Zatem różniczkując dowolną zależność względem ξ_β otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{\partial ()_i}{\partial \xi_1} &= \frac{\partial ()_i}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial ()_i}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1}, \\ \frac{\partial ()_i}{\partial \xi_2} &= \frac{\partial ()_i}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} + \frac{\partial ()_i}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2}, \end{aligned} \quad (38)$$

lub zapisując w formie

$$\begin{Bmatrix} ()_{,\xi_1} \\ ()_{,\xi_2} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_{1,\xi_1} & x_{2,\xi_1} \\ x_{1,\xi_2} & x_{2,\xi_2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}} \begin{Bmatrix} ()_{,x_1} \\ ()_{,x_2} \end{Bmatrix} = \mathbf{J} \begin{Bmatrix} ()_{,x_1} \\ ()_{,x_2} \end{Bmatrix}. \quad (39)$$

Jakobian przekształcenia \mathbf{J} przyjmuje postać

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} N_{1,\xi_1} & N_{2,\xi_1} & N_{3,\xi_1} & N_{4,\xi_1} \\ N_{1,\xi_2} & N_{2,\xi_2} & N_{3,\xi_2} & N_{4,\xi_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}_i x_1 & {}_i x_2 \\ {}_j x_1 & {}_j x_2 \\ {}_k x_1 & {}_k x_2 \\ {}_m x_1 & {}_m x_2 \end{bmatrix}, \quad (40)$$

gdzie odpowiednie pochodne funkcji kształtu wynoszą

$$\begin{bmatrix} N_{1,\xi_1} & N_{2,\xi_1} & N_{3,\xi_1} & N_{4,\xi_1} \\ N_{1,\xi_2} & N_{2,\xi_2} & N_{3,\xi_2} & N_{4,\xi_2} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} (1+\xi_2) & -(1+\xi_2) & (-1+\xi_2) & (1-\xi_2) \\ (1+\xi_1) & (1-\xi_1) & (-1+\xi_1) & -(1+\xi_1) \end{bmatrix}. \quad (41)$$

Zatem Jakobian otrzymuje formę

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix}, \quad (42)$$

gdzie

$$\begin{aligned} J_{11} &= \frac{1}{4} \cdot \{ {}_i x_1 (\xi_2 + 1) - {}_j x_1 (\xi_2 + 1) + {}_k x_1 (\xi_2 - 1) + {}_m x_1 (1 - \xi_2) \} \\ J_{12} &= \frac{1}{4} \cdot \{ {}_i x_2 (\xi_2 + 1) - {}_j x_2 (\xi_2 + 1) + {}_k x_2 (\xi_2 - 1) + {}_m x_2 (1 - \xi_2) \} \\ J_{21} &= \frac{1}{4} \cdot \{ {}_i x_1 (\xi_1 + 1) + {}_j x_1 (1 - \xi_1) + {}_k x_1 (\xi_1 - 1) - {}_m x_1 (\xi_1 + 1) \} \\ J_{22} &= \frac{1}{4} \cdot \{ {}_i x_2 (\xi_1 + 1) + {}_j x_2 (1 - \xi_1) + {}_k x_2 (\xi_1 - 1) - {}_m x_2 (\xi_1 + 1) \} \end{aligned} \quad (43)$$

Różniczkę względem współrzędnych x_1, x_2 zapisujemy jako

$$\begin{Bmatrix} ()_{,x_1} \\ ()_{,x_2} \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{Bmatrix} ()_{,\xi_1} \\ ()_{,\xi_2} \end{Bmatrix} = \bar{\mathbf{J}} \begin{Bmatrix} ()_{,\xi_1} \\ ()_{,\xi_2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{J}_{11} & \bar{J}_{12} \\ \bar{J}_{21} & \bar{J}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} ()_{,\xi_1} \\ ()_{,\xi_2} \end{Bmatrix}, \quad (44)$$

gdzie

$$\begin{aligned}\bar{J}_{11} &= \frac{J_{22}}{\det(\mathbf{J})} \quad , \quad \bar{J}_{12} = -\frac{J_{12}}{\det(\mathbf{J})} \\ \bar{J}_{21} &= -\frac{J_{21}}{\det(\mathbf{J})} \quad , \quad \bar{J}_{22} = \frac{J_{11}}{\det(\mathbf{J})}\end{aligned}\quad (45)$$

Powyższe wyprowadzenia pozwalają w jawny sposób zapisać część liniową wektora odkształceń w lokalnym układzie współrzędnych

$$\mathbf{e} = \begin{Bmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,2} \\ u_{1,2} + u_{2,1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} {}_i b & 0 & 0 & {}_j b & 0 & 0 & {}_k b & 0 & 0 & {}_m b & 0 & 0 \\ 0 & {}_i c & 0 & 0 & {}_j c & 0 & 0 & {}_k c & 0 & 0 & {}_m c & 0 \\ {}_i c & {}_i b & 0 & {}_j c & {}_j b & 0 & {}_k c & {}_k b & 0 & {}_m c & {}_m b & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} {}_i u_1 \\ {}_i u_2 \\ {}_i u_3 \\ {}_j u_1 \\ {}_j u_2 \\ {}_j u_3 \\ {}_k u_1 \\ {}_k u_2 \\ {}_k u_3 \\ {}_m u_1 \\ {}_m u_2 \\ {}_m u_3 \end{Bmatrix} = \mathbf{B}_e \mathbf{q} \quad , \quad (46)$$

gdzie

$$\begin{aligned}{}_j b &= \bar{J}_{11} \cdot N_{2,\xi_1} + \bar{J}_{12} \cdot N_{2,\xi_2} \quad , \quad {}_i b = \bar{J}_{11} \cdot N_{1,\xi_1} + \bar{J}_{12} \cdot N_{1,\xi_2} \\ {}_k b &= \bar{J}_{11} \cdot N_{3,\xi_1} + \bar{J}_{12} \cdot N_{3,\xi_2} \quad , \quad {}_m b = \bar{J}_{11} \cdot N_{4,\xi_1} + \bar{J}_{12} \cdot N_{4,\xi_2}\end{aligned}\quad (47)$$

$$\begin{aligned}{}_j c &= \bar{J}_{21} \cdot N_{2,\xi_1} + \bar{J}_{22} \cdot N_{2,\xi_2} \quad , \quad {}_i c = \bar{J}_{21} \cdot N_{1,\xi_1} + \bar{J}_{22} \cdot N_{1,\xi_2} \\ {}_k c &= \bar{J}_{21} \cdot N_{3,\xi_1} + \bar{J}_{22} \cdot N_{3,\xi_2} \quad , \quad {}_m c = \bar{J}_{21} \cdot N_{4,\xi_1} + \bar{J}_{22} \cdot N_{4,\xi_2}\end{aligned}\quad (48)$$

Elementy Jakobianu przekształcenia $\bar{J}_{\alpha\beta}$ wyznaczamy z zależności (45). Następnie część nieliniową wektora odkształceń wyznaczamy z zależności

$$\mathbf{n} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} (u_{1,1})^2 + (u_{2,1})^2 + (u_{3,1})^2 \\ (u_{1,2})^2 + (u_{2,2})^2 + (u_{3,2})^2 \\ 2(u_{1,1} u_{1,2} + u_{2,1} u_{2,2} + u_{3,1} u_{3,2}) \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u_{1,1} & 0 & u_{2,1} & 0 & u_{3,1} & 0 \\ 0 & u_{1,2} & 0 & u_{2,2} & 0 & u_{3,2} \\ u_{1,2} & u_{1,1} & u_{2,2} & u_{2,1} & u_{3,2} & u_{3,1} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_{1,1} \\ u_{1,2} \\ u_{2,1} \\ u_{2,2} \\ u_{3,1} \\ u_{3,2} \end{Bmatrix} \quad (49)$$

Budując pomocnicze macierze **A** i **G** w formie

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} B_u & 0 & B_v & 0 & B_w & 0 \\ 0 & C_u & 0 & C_v & 0 & C_w \\ C_u & B_u & C_v & B_v & C_w & B_w \end{bmatrix}, \quad (50)$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} {}_i b & 0 & 0 & {}_j b & 0 & 0 & {}_k b & 0 & 0 & {}_m b & 0 & 0 \\ {}_i c & 0 & 0 & {}_j c & 0 & 0 & {}_k c & 0 & 0 & {}_m c & 0 & 0 \\ 0 & {}_i b & 0 & 0 & {}_j b & 0 & 0 & {}_k b & 0 & 0 & {}_m b & 0 \\ 0 & {}_i c & 0 & 0 & {}_j c & 0 & 0 & {}_k c & 0 & 0 & {}_m c & 0 \\ 0 & 0 & {}_i b & 0 & 0 & {}_j b & 0 & 0 & {}_k b & 0 & 0 & {}_m b \\ 0 & 0 & {}_i c & 0 & 0 & {}_j c & 0 & 0 & {}_k c & 0 & 0 & {}_m c \end{bmatrix}, \quad (51)$$

gdzie

$$\begin{aligned} B_u &= [{}_i b {}_i u_1 + {}_j b {}_j u_1 + {}_k b {}_k u_1], & C_u &= [{}_i c {}_i u_1 + {}_j c {}_j u_1 + {}_k c {}_k u_1] \\ B_v &= [{}_i b {}_i u_2 + {}_j b {}_j u_2 + {}_k b {}_k u_2], & C_v &= [{}_i c {}_i u_2 + {}_j c {}_j u_2 + {}_k c {}_k u_2], \\ B_w &= [{}_i b {}_i u_3 + {}_j b {}_j u_3 + {}_k b {}_k u_3], & C_w &= [{}_i c {}_i u_3 + {}_j c {}_j u_3 + {}_k c {}_k u_3] \end{aligned} \quad (52)$$

możemy zapisać część nieliniową wektora odkształceń w formie

$$\mathbf{n} = \underbrace{\frac{1}{2} \mathbf{A} \mathbf{G} \mathbf{q}}_{\mathbf{B}_N} = \mathbf{B}_N \mathbf{q}. \quad (53)$$

2.3. Przykład analizy stanu odkształcenia w czterowęzłowym izoparametrycznym elemencie membranowy 3D

Przyjęto następujące współrzędne węzłów czterowęzłowego element skończonego w globalnym układzie współrzędnych

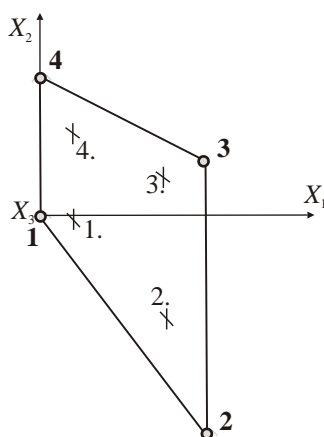
$$\left\{ \begin{matrix} {}_1 X_1 \\ {}_1 X_2 \\ {}_1 X_3 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{matrix} {}_2 X_1 \\ {}_2 X_2 \\ {}_2 X_3 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 6 \\ -8 \\ 5 \end{matrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{matrix} {}_3 X_1 \\ {}_3 X_2 \\ {}_3 X_3 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 6 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{matrix} {}_4 X_1 \\ {}_4 X_2 \\ {}_4 X_3 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{matrix} \right\}. \quad (54)$$

Założono stan przemieszczenia węzłów elementu w globalnym układzie współrzędnych

$$\left\{ \begin{matrix} {}_1 U_1 \\ {}_1 U_2 \\ {}_1 U_3 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{matrix} {}_2 U_1 \\ {}_2 U_2 \\ {}_2 U_3 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{matrix} {}_3 U_1 \\ {}_3 U_2 \\ {}_3 U_3 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{matrix} {}_4 U_1 \\ {}_4 U_2 \\ {}_4 U_3 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\}. \quad (55)$$



Przyjęto konwencję numeracji węzłów i punktów całkowania przedstawioną na rys. 4.



Rys. 4. Konwencja numeracji węzłów i punktów całkowania

Ograniczono się do kwadratury Gaussa, która jest bardzo użyteczna w metodzie elementów skończonych [13]. Pozwala uwzględnić zmienność cech fizycznych i geometrycznych w obszarze elementu skończonego. Daną funkcję zmienności cech określamy przez interpolację wartości węzłowych. Natomiast końcową funkcję aproksymujemy za pomocą wartości funkcji interpolacyjnych w punktach całkowania Gaussa. Całkowanie przy wyznaczeniu macierzy sztywności przebiega względem współrzędnych ξ_1, ξ_2 w obszarze elementu rodzimego. W ogólnym przypadku, całkę

$$\text{dowolnej funkcji } \mathfrak{F} \text{ obliczamy w postaci sumy } \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathfrak{F}(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{i=1}^{n_i} \sum_{j=1}^{n_j} \varpi_i \varpi_j \mathfrak{F}(h_i, h_j)$$

gdzie: ϖ_i jest wagą, h_i odcięta, n_i stopniem całkowania w kierunku ξ_1 ; ϖ_j jest wagą, h_j odcięta, n_j stopniem całkowania w kierunku ξ_2 . Przyjęte funkcje interpolacyjne są tego samego rzędu względem argumentów ξ_1, ξ_2 , zatem stopnie całkowania w tych kierunkach są równe $n_1 = n_2$. Dla rozpatrywanego przypadku funkcji biliniowych przyjmujemy kwadraturę rzędu 2×2 z wagami $\varpi_1 = \varpi_2 = 1$.

Obliczenia wykonujemy dla 4 punktów całkowania. I tak dla $\xi_1 = +0,57735$, $\xi_2 = +0,57735$ – punkt całkowania nr 1, otrzymujemy następujące wartości funkcji kształtu i ich pochodnych

$$\mathbf{N} = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] = [0,62201 \quad 0,16667 \quad 0,04466 \quad 0,16667], \quad (56)$$

$$\begin{bmatrix} N_{1,\xi_1} & N_{2,\xi_1} & N_{3,\xi_1} & N_{4,\xi_1} \\ N_{1,\xi_2} & N_{2,\xi_2} & N_{3,\xi_2} & N_{4,\xi_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,39434 & -0,39434 & -0,10566 & 0,10566 \\ 0,39434 & 0,10566 & -0,10566 & -0,39434 \end{bmatrix}. \quad (57)$$

Wyznaczamy wektor wodzący w punkcie całkowania elementu $\mathbf{R}(\xi)$

$$\begin{aligned}\mathbf{R}(\xi) &= (\mathbf{N} \cdot \mathbf{X}_1) \mathbf{i}_1 + (\mathbf{N} \cdot \mathbf{X}_2) \mathbf{i}_2 + (\mathbf{N} \cdot \mathbf{X}_3) \mathbf{i}_3 = \\ &= 1,26795 \mathbf{i}_1 - 0,41068 \mathbf{i}_2 + 1,3006 \mathbf{i}_3.\end{aligned}\quad (58)$$

Następnie określamy pochodne wektora wodzącego $\mathbf{R}(\xi)$ po współrzędnych ξ_1

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_{,\xi_1} &= (\mathbf{N}_{,\xi_1} \cdot \mathbf{X}_1) \mathbf{i}_1 + (\mathbf{N}_{,\xi_1} \cdot \mathbf{X}_2) \mathbf{i}_2 + (\mathbf{N}_{,\xi_1} \cdot \mathbf{X}_3) \mathbf{i}_3 = \\ &= -3 \mathbf{i}_1 + 3,47169 \mathbf{i}_2 - 2,07735 \mathbf{i}_3,\end{aligned}\quad (59)$$

oraz po współrzędnych ξ_2

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_{,\xi_2} &= (\mathbf{N}_{,\xi_2} \cdot \mathbf{x}_1) \mathbf{i}_1 + (\mathbf{N}_{,\xi_2} \cdot \mathbf{x}_2) \mathbf{i}_2 + (\mathbf{N}_{,\xi_2} \cdot \mathbf{x}_3) \mathbf{i}_3 = \\ &= 0 \mathbf{i}_1 - 3,028313 \mathbf{i}_2 - 0,57735 \mathbf{i}_3.\end{aligned}\quad (60)$$

Budujemy pomocnicze wektory niezbędne do wyznaczenia lokalnego kartezjańskiego układu współrzędnych

$$\mathbf{t}_1 = \frac{\mathbf{R}_{,\xi_1}}{|\mathbf{R}_{,\xi_1}|}, \mathbf{t}_2 = \frac{\mathbf{R}_{,\xi_2}}{|\mathbf{R}_{,\xi_2}|}, \quad \mathbf{s}_1 = \mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_2, \mathbf{s}_2 = \mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_2, \quad \mathbf{d}_1 = \frac{\mathbf{s}_1}{\sqrt{2}|\mathbf{s}_1|}, \mathbf{d}_2 = \frac{\mathbf{s}_2}{\sqrt{2}|\mathbf{s}_2|}. \quad (61)$$

Ostatecznie lokalna baza w ortogonalnym układzie współrzędnych w punkcie całkowania przyjmuje postać

$$\begin{aligned}\mathbf{j}_1 &= \mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_2 = -0,70625 \mathbf{i}_1 + 0,42917 \mathbf{i}_2 - 0,56304 \mathbf{i}_3 \\ \mathbf{j}_2 &= \mathbf{d}_1 - \mathbf{d}_2 = -0,23534 \mathbf{i}_1 - 0,892397 \mathbf{i}_2 - 0,38502 \mathbf{i}_3. \\ \mathbf{j}_3 &= \mathbf{j}_1 \times \mathbf{j}_2 = -0,677 \mathbf{i}_1 - 0,139416 \mathbf{i}_2 + 0,73126 \mathbf{i}_3.\end{aligned}\quad (62)$$

Łatwo można sprawdzić, że $|\mathbf{j}_1| = 1$, $|\mathbf{j}_2| = 1$, $|\mathbf{j}_3| = 1$ oraz np. $\mathbf{j}_3 \times \mathbf{j}_1 = \mathbf{j}_2 = -0,23534 \mathbf{i}_1 - 0,892397 \mathbf{i}_2 - 0,38502 \mathbf{i}_3$.

Następnym krokiem jest wykonanie transformacji współrzędnych i przemieszczeń z globalnego układu współrzędnych do lokalnego wyznaczonego w punkcie całkowania przy pomocy macierz transformacji

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \{\mathbf{j}_1\}^T \\ \{\mathbf{j}_2\}^T \\ \{\mathbf{j}_3\}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,70625 & 0,4291746 & -0,56304 \\ -0,23534 & -0,892397 & -0,38502 \\ -0,6677 & -0,139416 & 0,73126 \end{bmatrix}. \quad (63)$$

Otrzymujemy, zatem następujące wartości współrzędnych

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} {}_1x_1 \\ {}_1x_2 \\ {}_1x_3 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 1,8041 \\ 0,4327 \\ -0,1617 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} {}_2x_1 \\ {}_2x_2 \\ {}_2x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -8,6821 \\ 4,2346 \\ 0,60369 \end{Bmatrix}, \\ \begin{Bmatrix} {}_3x_1 \\ {}_3x_2 \\ {}_3x_3 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} -3,2642 \\ -3,9192 \\ -2,2530 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} {}_4x_1 \\ {}_4x_2 \\ {}_4x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2,8238 \\ -4,7993 \\ 0,60369 \end{Bmatrix}, \end{aligned} \quad (64)$$

i składowych przemieszczeń w lokalnym układzie współrzędnych

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \begin{Bmatrix} {}_1u_1 \\ {}_1u_2 \\ {}_1u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{Bmatrix} {}_2u_1 \\ {}_2u_2 \\ {}_2u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \\ \mathbf{u}_3 &= \begin{Bmatrix} {}_3u_1 \\ {}_3u_2 \\ {}_3u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,56304 \\ -0,385021 \\ 0,731261 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{u}_4 = \begin{Bmatrix} {}_4u_1 \\ {}_4u_2 \\ {}_4u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (65)$$

Wyznaczamy następnie macierze \mathbf{B}_e , \mathbf{A} oraz \mathbf{G} zdefiniowane zależnościami (46), (51) i (51)

$$\mathbf{B}_e = \begin{bmatrix} 0,1434 & 0 & 0 & -0,0793 & 0 & 0 & -0,0384 & 0 & 0 & -0,0256 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1826 & 0 & 0 & 0,0097 & 0 & 0 & -0,0489 & 0 & 0 & -0,1434 & 0 \\ 0,1826 & 0,1434 & 0 & 0,0097 & -0,0793 & 0 & -0,0489 & -0,0384 & 0 & -0,1434 & -0,0256 & 0 \end{bmatrix}, \quad (66)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0,02163 & 0 & 0,01479 & 0 & -0,02809 & 0 \\ 0 & 0,02755 & 0 & 0,01884 & 0 & -0,03578 \\ 0,02755 & 0,02163 & 0,01884 & 0,01479 & -0,03578 & -0,02809 \end{bmatrix}, \quad (67)$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0,14337 & 0 & 0 & -0,0793 & 0 & 0 & -0,0384 & 0 & 0 & -0,02567 & 0 & 0 \\ 0,18260 & 0 & 0 & 0,0097 & 0 & 0 & -0,0489 & 0 & 0 & -0,1434 & 0 & 0 \\ 0 & 0,14337 & 0 & 0 & -0,0793 & 0 & 0 & -0,0384 & 0 & 0 & -0,02567 & 0 \\ 0 & 0,18260 & 0 & 0 & 0,0097 & 0 & 0 & -0,0489 & 0 & 0 & -0,1434 & 0 \\ 0 & 0 & 0,14337 & 0 & 0 & -0,0793 & 0 & 0 & -0,0384 & 0 & 0 & -0,02567 \\ 0 & 0 & 0,18260 & 0 & 0 & 0,0097 & 0 & 0 & -0,0489 & 0 & 0 & -0,1434 \end{bmatrix}. \quad (68)$$

Za pomocą tych macierzy wyznaczamy stan odkształcenia w elemencie

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{e} + \mathbf{n} = \mathbf{B}_e \mathbf{q} + \frac{1}{2} \mathbf{A} \mathbf{G} \mathbf{q} = \begin{Bmatrix} 0,021630 \\ 0,018838 \\ 0,042340 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0,000738 \\ 0,001197 \\ 0,001880 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,022368 \\ 0,020035 \\ 0,044220 \end{Bmatrix}. \quad (69)$$

Powtarzając tę samą procedurę obliczeniową dla pozostałych punktów całkowania otrzymujemy

Dla $\xi_1 = -0,57735$, $\xi_2 = +0,57735$ – punkt całkowania nr 2

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{e} + \mathbf{n} = \begin{Bmatrix} 0,038749 \\ 0,009405 \\ 0,068848 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0,003231 \\ 0,008559 \\ 0,010517 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,0419799 \\ 0,0179642 \\ 0,0793649 \end{Bmatrix}, \quad (70)$$

dla $\xi_1 = -0,57735$, $\xi_2 = -0,57735$ – punkt całkowania nr 3

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{e} + \mathbf{n} = \begin{Bmatrix} 0,037077 \\ -0,00826 \\ 0,024506 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0,01191 \\ 0,009789 \\ 0,021596 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,0489875 \\ 0,0015318 \\ 0,0461014 \end{Bmatrix}, \quad (71)$$

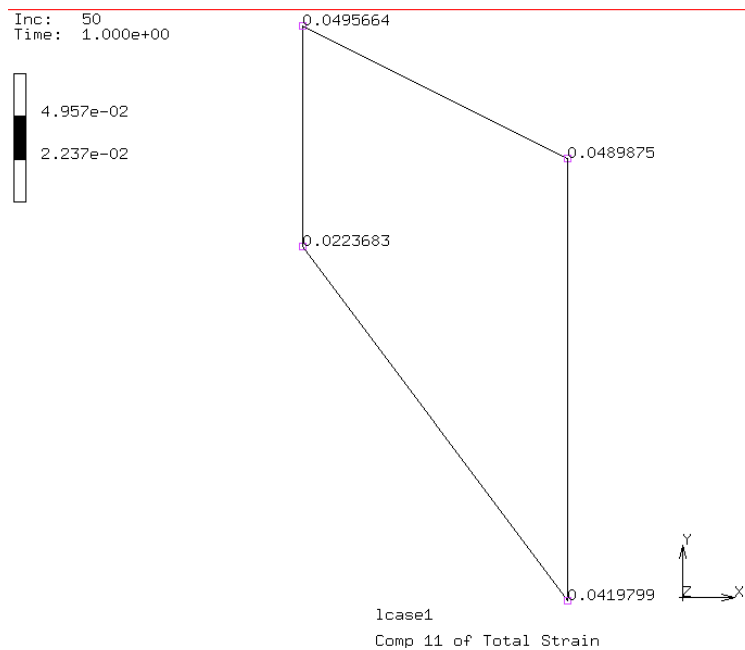
dla $\xi_1 = +0,57735$, $\xi_2 = -0,57735$ – punkt całkowania nr 4

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{e} + \mathbf{n} = \begin{Bmatrix} 0,041528 \\ 0,019049 \\ 0,057720 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0,008039 \\ 0,002337 \\ 0,008669 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,0495664 \\ 0,0213861 \\ 0,0663889 \end{Bmatrix}. \quad (72)$$

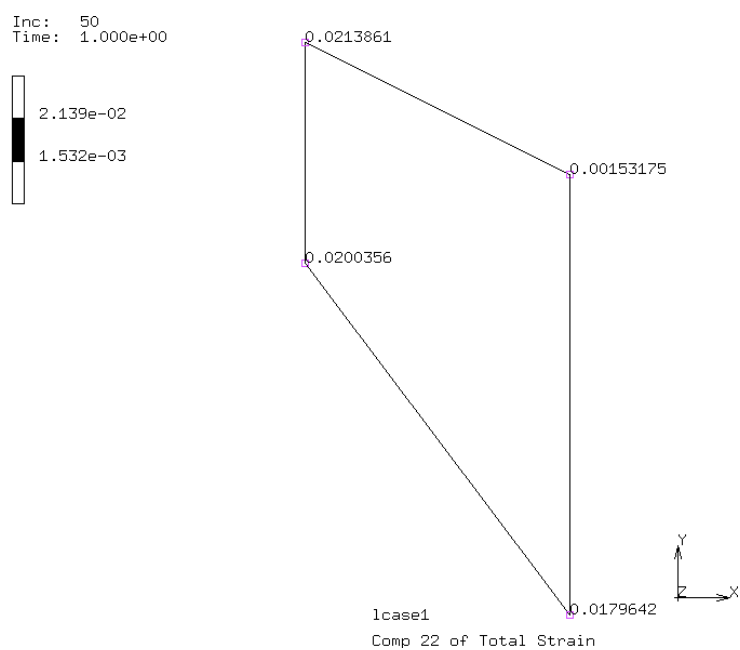
Celem weryfikacji otrzymanych analitycznie wyników analizy stanu odkształcenia w elemencie membranowym wykonano geometrycznie nieliniową analizę porównawczą w komercyjnym programie dysponującym w swojej bibliotece elementów skończonych czterowęzłowym izoparametrycznym trójwymiarowym elementem membranowym. Przedstawione wyniki z programu obliczeniowego odnoszą się do punktów całkowania, pomimo iż ich wartości pokazane są w węzłach.

Porównując otrzymane wyniki z analizy numerycznej z wykorzystaniem komercyjnego oprogramowania (patrz rys. 5, rys. 6 i rys. 7) i przedstawione powyżej rezultaty obliczeń możemy stwierdzić, że przedstawiony sposób analizy cztero-węzłowego membranowego elementu skończonego jest poprawny.



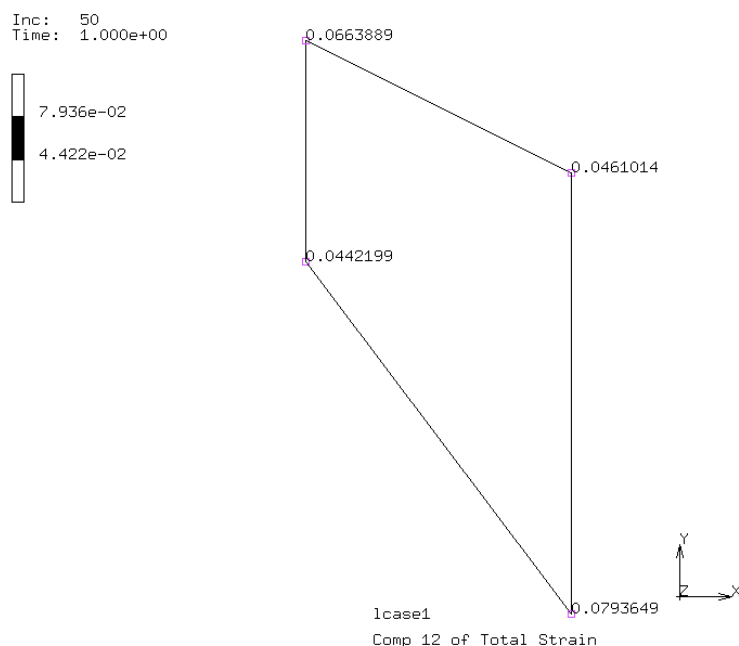


Rys. 5. Wartości odkształceń ε_{11} w punktach całkowania



Rys. 6. Wartości odkształceń ε_{22} w punktach całkowania





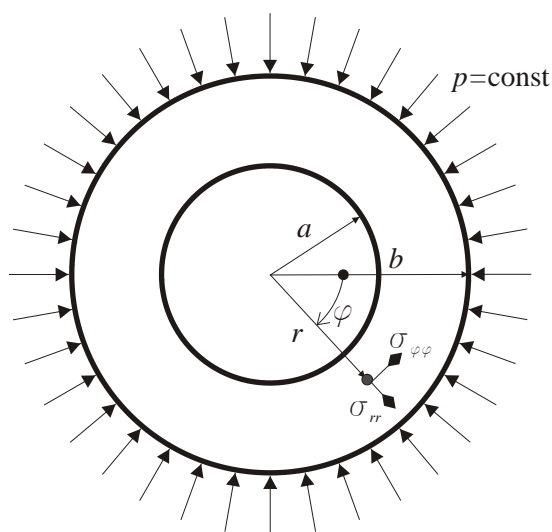
Rys. 7. Wartości odkształceń $\gamma_{12} = 2\varepsilon_{12}$ w punktach całkowania

3. Przykłady analizy układów powierzchniowych

3.1. Analiza stanu naprężeń w betonowej rurze grubościenniej

Przykład dotyczy analizy stanu naprężeń w betonowej rurze grubościenniej obciążonej równomiernym obciążeniem $p = 200$ kPa. Rura o wymiarach $a = 2$ m, $b = 3$ m, wykonana z betonu C25/30, rys. 8.

W tym celu niezbędne będzie wyznaczenie wartości maksymalnych naprężeń obwodowych $\sigma_{\varphi\varphi}$ i radialnych σ_{rr} w ścianie grubościenniej rury betonowej.



Rys. 8. Geometra rury grubościennej

W analizowanym przypadku możemy wykonać obliczenia analityczne. W tym celu niezbędne będzie wyznaczenie wartości maksymalnych naprężeń

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}(r=b) &= -p \\ \sigma_{rr}(r=a) &= 0\end{aligned} \quad (73)$$

Naprężenia w ścianie obliczamy z następujących relacji [1]

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = \frac{A}{r^2} + 2 \cdot C \\ \sigma_{\varphi\varphi} = -\frac{A}{r^2} + 2 \cdot C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{A}{r^2} + 2 \cdot C = -p \\ -\frac{A}{r^2} + 2 \cdot C = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{p \cdot a^2 \cdot b^2}{b^2 - a^2} \\ C = -\frac{1}{2} \frac{p \cdot b^2}{b^2 - a^2} \end{cases}, \quad (74)$$

otrzymujemy zatem

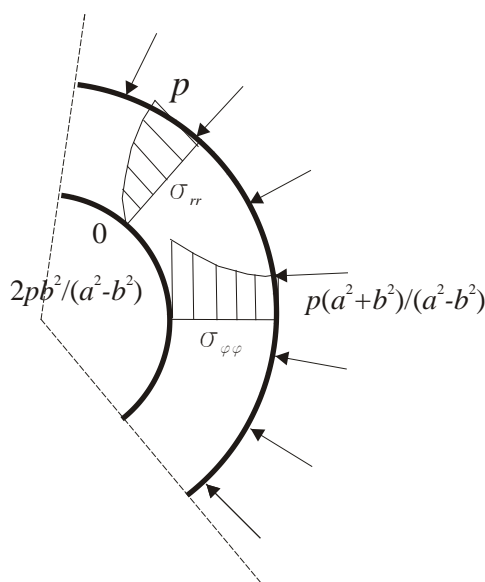
$$\sigma_{rr} = \frac{p \cdot b^2}{b^2 - a^2} \cdot \left(\frac{a^2}{r^2} - 1 \right), \quad \sigma_{\varphi\varphi} = -\frac{p \cdot b^2}{b^2 - a^2} \cdot \left(\frac{a^2}{r^2} + 1 \right). \quad (75)$$

Dla przyjętej geometrii otrzymujemy następujące wyniki

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}(r=a) &= 0 & \sigma_{rr}(r=b) &= p = -0,2 \text{ MPa} \\ \sigma_{\varphi\varphi}(r=a) &= \frac{2 \cdot p \cdot b^2}{a^2 - b^2} = -0,72 \text{ MPa} & \sigma_{\varphi\varphi}(r=b) &= \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} \cdot p = -0,52 \text{ MPa}\end{aligned} \quad (76)$$



Wykresy i przebieg naprężeń w analizowanej rurze grubościenniej przedstawiono na rys. 9.



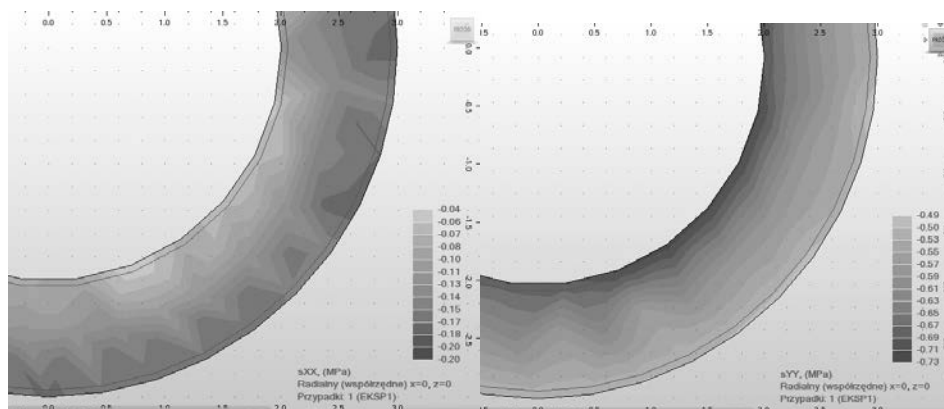
Rys. 9. Wykresy naprężeń

Metoda elementów skończonych jest metodą przybliżoną, w której w przypadku przyjęcia nieodpowiedniego podziału konstrukcji na elementy skończone (wielkości elementu skończonego) otrzymujemy błędne wyniki. Aby wykluczyć wpływ przyjętej wielkości elementu skończonego na otrzymane wyniki obliczeń przeprowadzimy szereg obliczeń, w których będziemy dokonywali zagęszczenia podziału siatki MES. W przypadku analizowanej konstrukcji określenie odpowiedniej gęstości siatki MES jest związane bezpośrednio z aproksymacją geometryczną okręgów zewnętrznego i wewnętrznego, które przybliżane są odcinkami prostymi. Należy unikać przypadku w którym dzielimy ten odcinek na mniejsze elementy bez zmiany podziału geometrii łuku. W tabelicy 1 dokonano porównania otrzymanych wyników dla poszczególnych podziałów z rozwiązaniem analitycznym. Prezentowane wyniki naprężeń z analizy numerycznej zamieszczone w tabelicy otrzymano z przecięcia panelu. Mapy naprężeń dla podział łuku 40x26 części i rozmiar elementu 0,47 oraz podział łuku 240x160 części i rozmiar elementu 0,08 przedstawiono na rys. 10 i 11. Warto zwrócić uwagę że przy małych podziałach np. 40/26 (patrz rys. 10), z uwagi na dość duży podział oraz automatyczny sposób generacji siatki, widoczny jest brak regularności w izoliniach naprężeń.

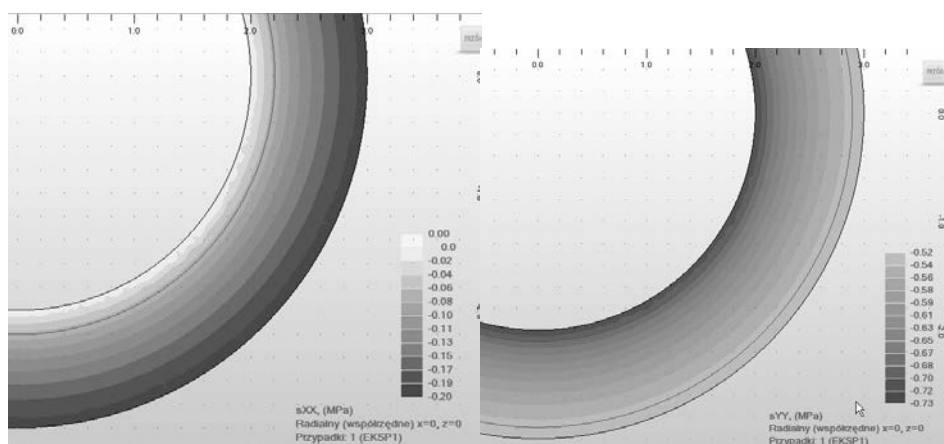
W przypadku przyjęcia rozmiaru elementów skończonych, które nie są powiązane z rozmiarem odcinków aproksymujących okręgi otrzymujemy nieprawidłowe wyniki naprężeń, patrz rys. 12. W przypadku analizy układów krzywoliniowych rozmiar elementów skończonych winien być powiązany z dobraną wielkością aproksymacji krzywoliniowych części konstrukcji.

Tablica 1. Wyniki analizy MES

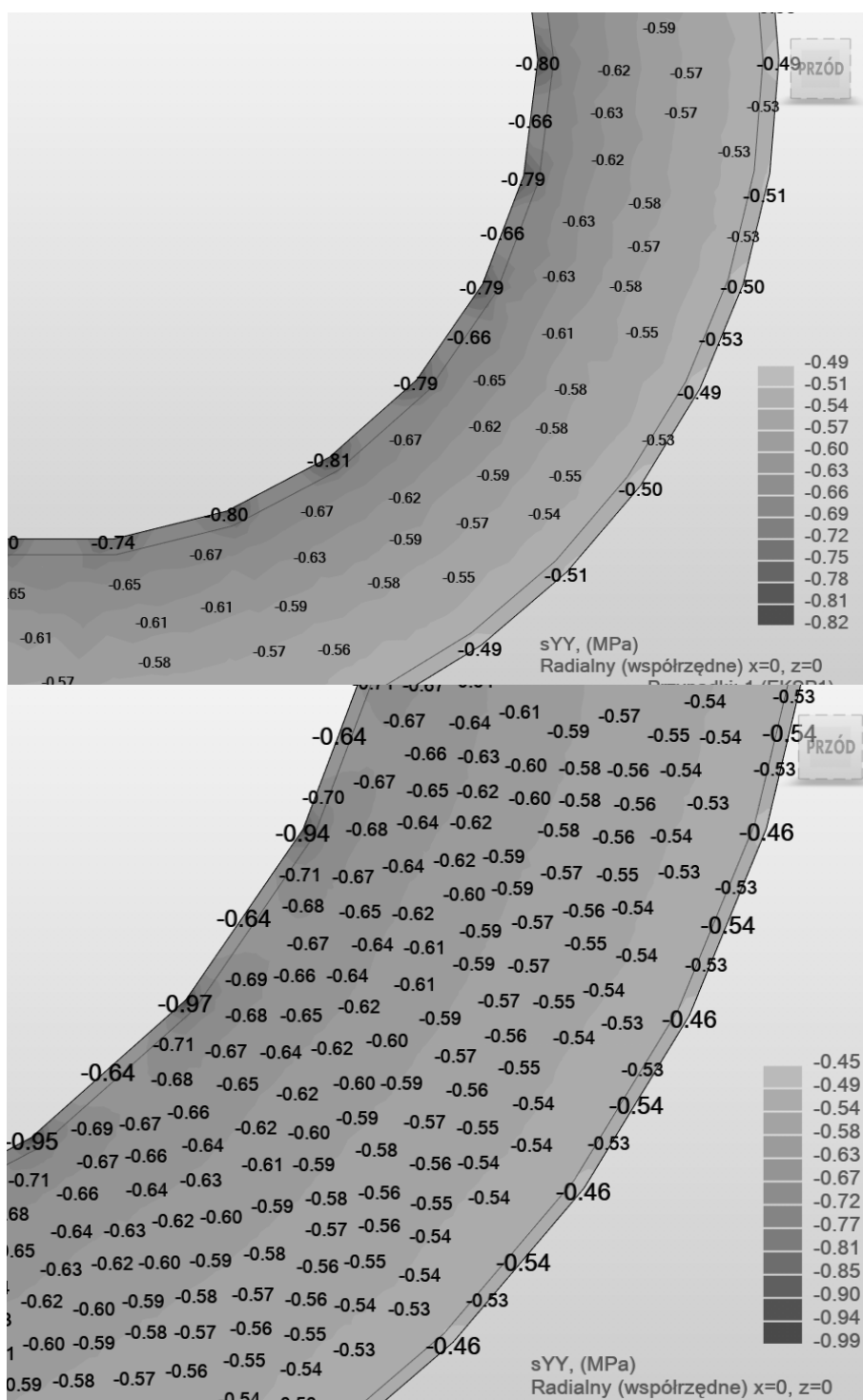
Podział okręgów // wielkość elementu skończonego	σ_{rr} MPa		$\sigma_{\varphi\varphi}$ MPa	
	2	3	4	5
1				
Wynik ścisły	-0,20	0,00	-0,52	-0,72
40x26//0,47	-0,20	-0,08	-0,51	-0,73
60x40//0,31	-0,18	-0,05	-0,51	-0,74
120x80//0,15	-0,19	-0,02	-0,52	-0,73
240x160//0,08	-0,20	-0,01	-0,52	-0,72



Rys. 10. Mapy naprężeń radialnych i obwodowych – podział łuku 40x26, rozmiar elementu 0,47



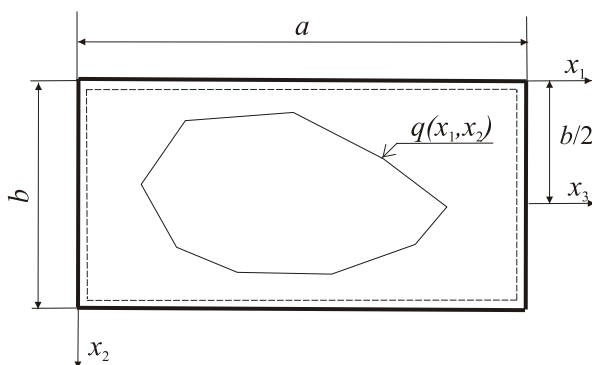
Rys. 11. Mapy naprężeń radialnych i obwodowych – podział łuku 240x160, rozmiar elementu 0,08



Rys. 12. Mapy naprężeń obwodowych – podział łuku 40x26, rozmiar elementu 0,08 i 0,02

3.2. Analiza płyty kwadratowej

Wyznacz wartości maksymalnych przemieszczeń oraz wykresy momentów zginających dla wolnopodpartej płyty kwadratowej (rys. 13) od obciążenia równomiernie rozłożonego przyłożonego na całej powierzchni płyty $q = 2 \text{ kPa}$. W obliczeniach pominąć wpływ ciężaru własnego. Płyta o grubości 15 cm ma wymiar boku $a = 4,2 \text{ m}$ i jest wykonana z betonu C25/30.



Rys. 13. Geometria płyty

W rozwiązaniu analitycznym płyty skorzystamy z rozwiązania typu Naviera za pomocą podwójnego szeregu Fouriera [2]. Dla dowolnej prostokątnej płyty o wymiarach $a \times b$ i dla dowolnego obciążenia $q(x_1, x_2)$ możemy je opisać następującą funkcją

$$q(x_1, x_2) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \cdot \sin \frac{m \cdot \pi \cdot x_1}{a} \cdot \sin \frac{n \cdot \pi \cdot x_2}{b}, \quad (77)$$

otrzymujemy zatem

$$a_{mn} = \frac{4}{a \cdot b} \int_0^a \int_0^b q(x_1, x_2) \cdot \sin \frac{m \cdot \pi \cdot x_1}{a} \cdot \sin \frac{n \cdot \pi \cdot x_2}{b} dx_1 dx_2. \quad (78)$$

Zakładamy w ogólnym przypadku rozwiązanie równania

$$\nabla^4 w(x_1, x_2) = \frac{q(x_1, x_2)}{D}, \quad (79)$$

gdzie $D = \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)}$ (sztywność płytowa),
w postaci

$$w(x_1, x_2) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \cdot \sin \frac{m \cdot \pi \cdot x_1}{a} \cdot \sin \frac{n \cdot \pi \cdot x_2}{b}, \quad (80)$$

spełniające warunki brzegowe swobodnego podparcia. Podstawiając do równania różniczkowego otrzymujemy związek

$$D \cdot \left[\left(\frac{m \cdot \pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n \cdot \pi}{b} \right)^2 \right]^2 \cdot w_{mn} = a_{mn}. \quad (81)$$

Dokonując przekształceń i podstawień otrzymujemy

$$w_{mn}(x_1, x_2) = \frac{a_{mn}}{D \cdot \left[\left(\frac{m \cdot \pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n \cdot \pi}{b} \right)^2 \right]^2} \cdot (82)$$

$$w_{mn}(x_1, x_2) = \frac{1}{D \cdot \pi^4} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{mn}}{\left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right]^2} \cdot \sin \frac{m \cdot \pi \cdot x_1}{a} \cdot \sin \frac{n \cdot \pi \cdot x_2}{b}$$

Przyjmując stałą wartość obciążenia $q(x_1, x_2) = q$ otrzymujemy

$$w_{mn}(x_1, x_2) = \frac{16 \cdot q}{D \cdot \pi^6} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m \cdot n \cdot \left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right]^2} \cdot \sin \frac{m \cdot \pi \cdot x_1}{a} \cdot \sin \frac{n \cdot \pi \cdot x_2}{b}, \quad (83)$$

dla $m, n = 1, 3, 5, 7, \dots$

Wyznaczamy zatem maksymalne przemieszczenie $w\left(x_1 = \frac{a}{2}, x_2 = \frac{b}{2}\right)$

$$w\left(x_1 = \frac{a}{2}, x_2 = \frac{b}{2}\right) = \frac{16 \cdot q}{D \cdot \pi^6} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m+n}{2}-1}}{m \cdot n \cdot \left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right]^2}. \quad (84)$$

Przyjmując dodatkowo, że $a = b$, oraz $m = n = 1$ otrzymujemy

$$w_{\max} = w\left(x_1 = \frac{a}{2}, x_2 = \frac{b}{2}\right) \approx \frac{16 \cdot q \cdot a^4}{D \cdot \pi^6} \cdot \frac{1}{4} = 0,00416 \cdot \frac{q \cdot a^4}{D}. \quad (85)$$

W pracy [3] można znaleźć inne rozwiązanie (zapisane w osiach x_3, x_2)

$$w(x_3, x_2) = \frac{4qa^4}{D\pi^5} \sum_n \frac{1}{n^5} \left\{ 1 - \frac{1}{2 \cosh \frac{\alpha_n b}{2}} \left[\left(2 + \frac{\alpha_n b}{2} \tanh \frac{\alpha_n b}{2} \right) \cosh \alpha_n x_2 - \alpha_n x_2 \sinh \alpha_n x_2 \right] \right\} \sin \alpha_n x_3, \quad (86)$$

gdzie:

$$n = 1, 3, 5 \dots \quad \alpha_n = \frac{n\pi}{a}. \quad (87)$$

Dla płyty kwadratowej ($a = b$) przyjmując jeden wyraz szeregu ($n = 1$) daje on wartość ugięcia w środku płyty ($x_3 = 1/2 a; x_2 = 0$) otrzymuje się z niego wartość ugięcia

$$n = 1, 3, 5 \dots \quad \alpha_n = \frac{n\pi}{a}, \quad (88)$$

$$w_{\max} = 0,00406 \frac{qa^4}{D}. \quad (89)$$

Z rozwiązania tego wartości momentów zginających zapisujemy jako

$$\begin{aligned} m_{x_3} &= \frac{4qa^2}{\pi^3} \sum_n \frac{1}{n^3} \left\{ 1 - \frac{1-\nu}{2 \cosh \frac{\alpha_n b}{2}} \left[\left(\frac{2}{1-\nu} + \frac{\alpha_n b}{2} \tanh \frac{\alpha_n b}{2} \right) \cosh \alpha_n x_2 - \alpha_n x_2 \sinh \alpha_n x_2 \right] \right\} \sin \alpha_n x_3 \\ m_{x_2} &= \frac{4qa^2}{\pi^3} \sum_n \frac{1}{n^3} \left\{ \nu - \frac{1-\nu}{2 \cosh \frac{\alpha_n b}{2}} \left[\left(\frac{2\nu}{1-\nu} + \frac{\alpha_n b}{2} \tanh \frac{\alpha_n b}{2} \right) \cosh \alpha_n x_2 - \alpha_n x_2 \sinh \alpha_n x_2 \right] \right\} \sin \alpha_n x_3 \\ m_{x_3 x_2} &= 2(1-\nu) \frac{qa^2}{\pi^3} \sum_n \frac{1}{n^3} \frac{\cos \alpha_n x_3}{\cosh \frac{\alpha_n b}{2}} \left[\left(1 + \frac{\alpha_n b}{2} \tanh \frac{\alpha_n b}{2} \right) \sinh \alpha_n x_2 - \alpha_n x_2 \cosh \alpha_n x_2 \right] \end{aligned} \quad (90)$$

Dla płyty kwadratowej obciążonej równomiernym obciążeniem q wartość przęsłowego momentu zginającego wynosi

$$m_{x_3 \max} = m_{x_2 \max} = -0,0475 qa^2. \quad (91)$$



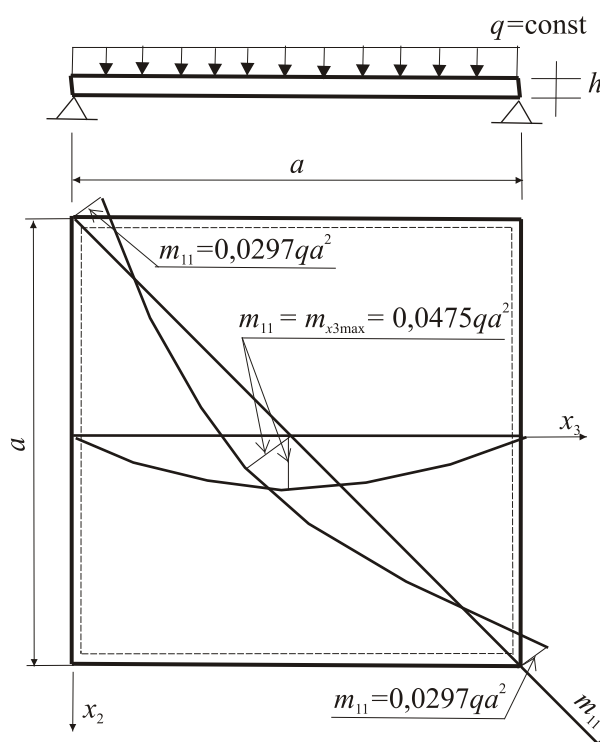
Główne momenty zginające można obliczyć ze wzoru

$$m_{11,22} = \frac{1}{2}(m_{x_3} + m_{x_2}) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(m_{x_3} - m_{x_2})^2 + 4(m_{x_3x_2})^2} . \quad (92)$$

Dla punktów na przekątnej płyty kwadratowej gdzie $m_{x_3} = m_{x_2}$ otrzymujemy

$$m_{11,22} = m_{x_3} \pm m_{x_3x_2} . \quad (93)$$

Wykres momentów zginających otrzymanych z powyższego analitycznego rozwiązania przedstawiono na rys. 14.



Rys. 14. Momenty zginające w płycie kwadratowej obciążonej równomiernie

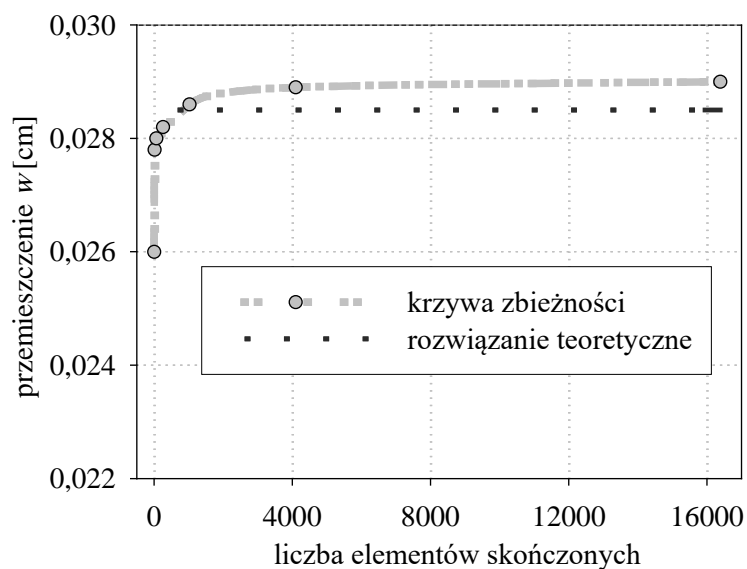
Dla przyjętego betonu C25/30 i grubości płyty $h = 0,15$ m sztywność płytowa wynosi

$$D = \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)} = \frac{31000000 \text{ kPa} \cdot (0,15 \text{ m})^3}{12(1 - 0,2^2)} = \frac{104625 \text{ kNm}}{11,52} = 9082 \text{ kNm} \quad (94)$$

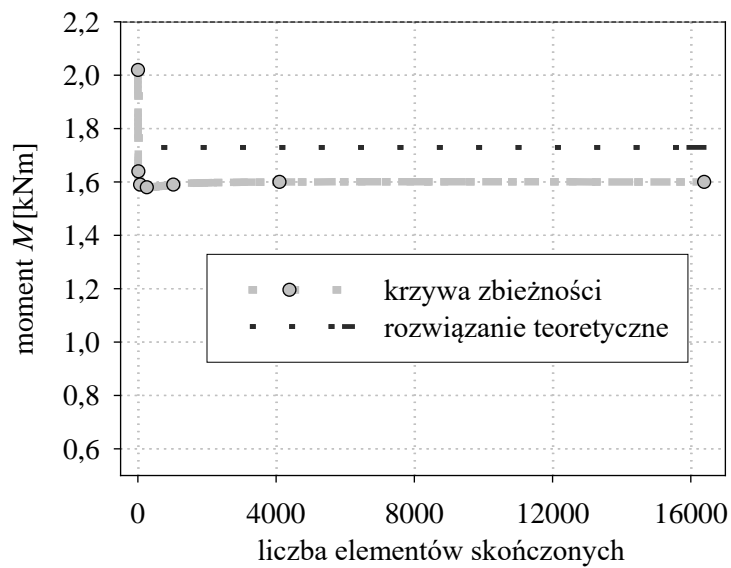
Dla przyjętych wymiarów płyty i obciążenia otrzymujemy wyniki

$$\begin{aligned}
 w_{\max} &= 0,00406 \cdot \frac{q \cdot a^4}{D} = 0,00406 \cdot \frac{2 \cdot 4,2^4}{9082} = 2,78 \cdot 10^{-4} \text{ m} \\
 m_{x_3 \max} &= -0,0475 \cdot q \cdot a^2 = -0,0475 \cdot 2 \cdot 4,2^2 = -1,68 \text{ kNm} \\
 m_{11} &= 0,0297 \cdot q \cdot a^2 = 0,0297 \cdot 2 \cdot 4,2^2 = 1,05 \text{ kNm}
 \end{aligned}
 \tag{95}$$

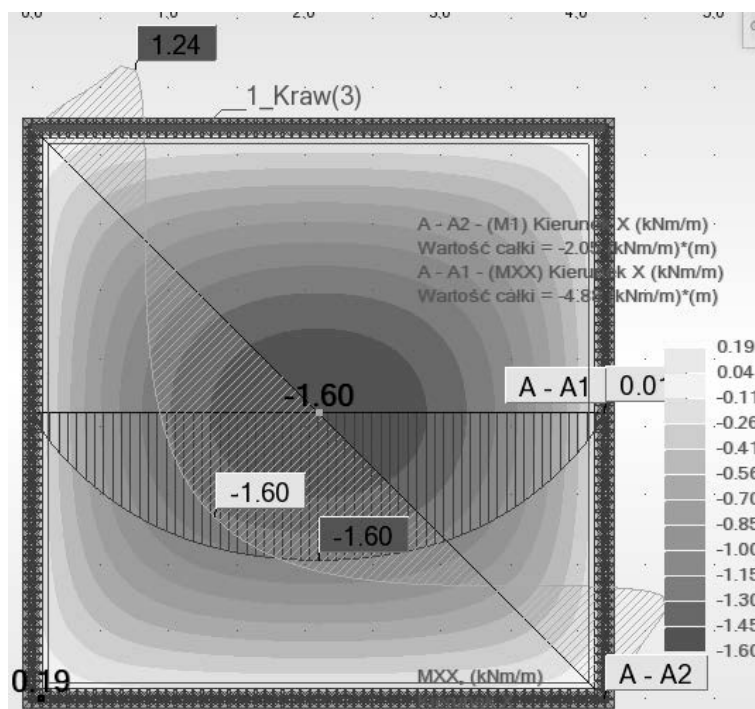
Na podstawie przeprowadzonej analizy zbieżności podziału konstrukcji na elementy skończone (patrz rys. 15 i 16) przyjęto jako miarodajny podział krawędzi płyty na 64 elementy (64x64). Ostateczne wyniki analizy numerycznej przedstawiono na rys. 17 i 18.



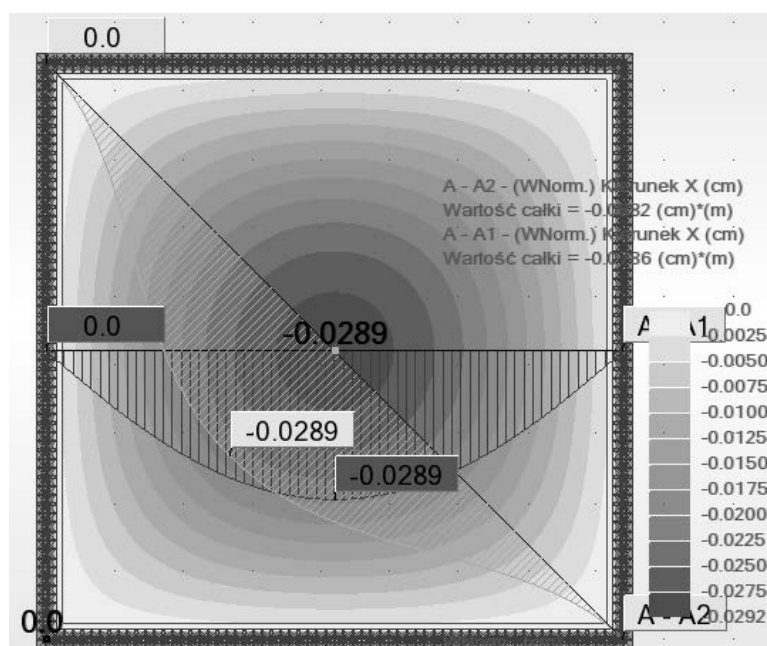
Rys. 15. Analiza zbieżności rozwiązania – przemieszczenia



Rys. 16. Analiza zbieżności rozwiązania – maksymalny moment przęsłowy



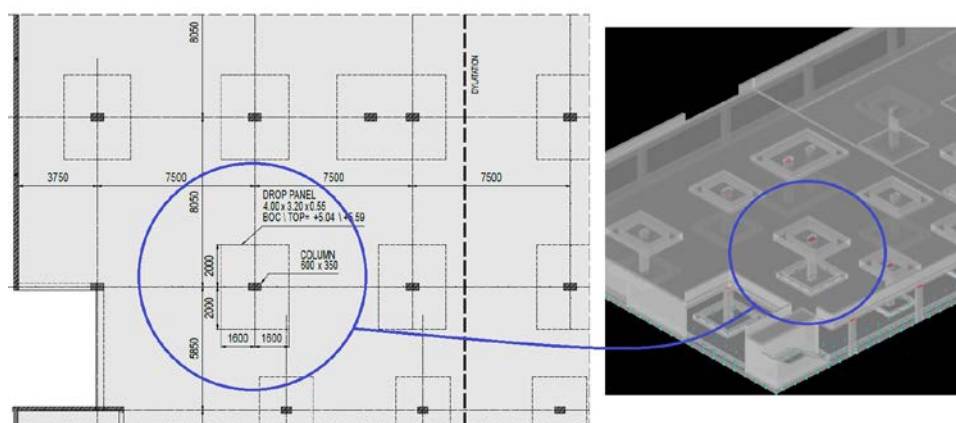
Rys. 17. Mapa i wykres momentów zginających m_{x_3} i m11 – Coons, podział 64x64



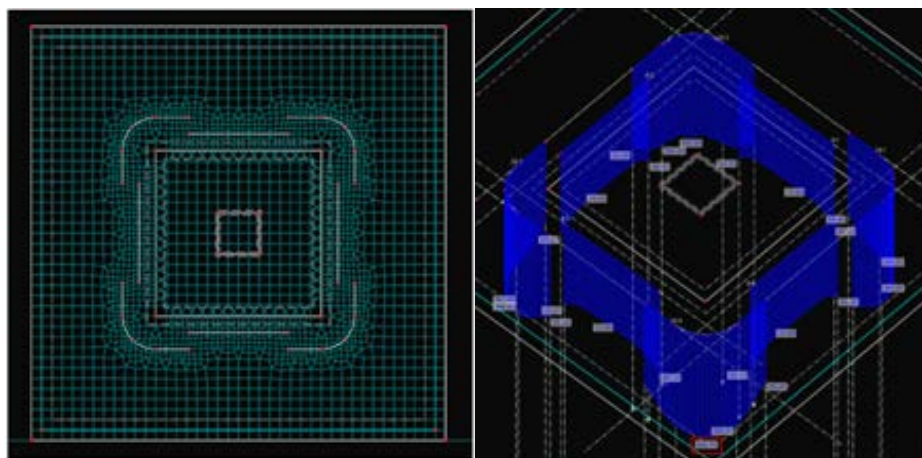
Rys. 18. Mapa i wykres przemieszczeń pionowych – Coons, podział 64x64

3.3. Analiza płyty stropowej

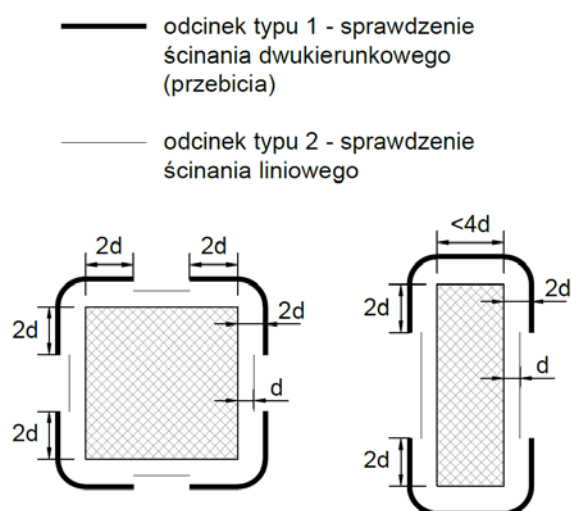
Przygotowując model obliczeniowy płyty stropowej (rys. 19), wykorzystując możliwości programów obliczeniowych, poprzez zabiegi i modyfikacje modelu można dokonywać sprawdzenia np. warunków przebicia w obrębie projektowanych głowic w obrębie słupów, patrz rys. 20.



Rys. 19. Widok na konstrukcję analizowanego stropu [22]



Rys. 20. Siatka MES w obrębie głowicy wraz z wykresami sił tnących w analizowanych odcinkach [22]

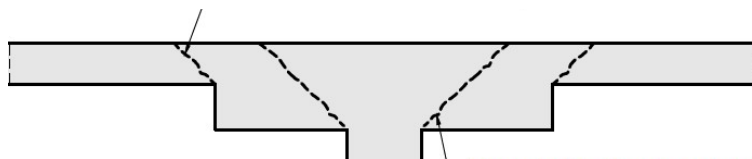


Rys. 21. Odcinki do sprawdzenia ścinania dwukierunkowego i ścinania jednokierunkowego [21]

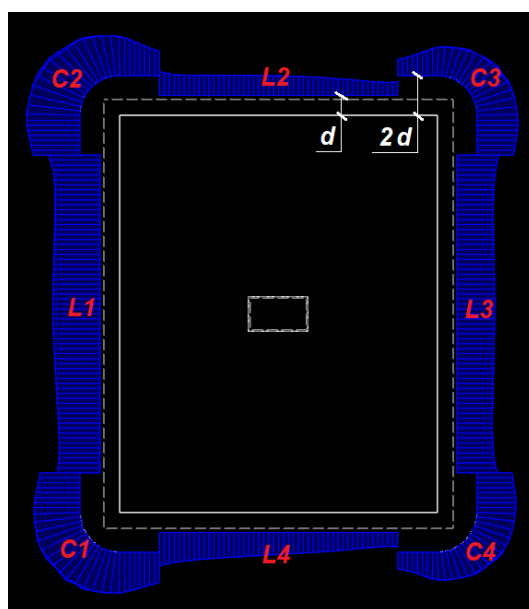
Szczegółowego opisu obliczania nośności na przebiecie połączenia głowicy ze słupem z wykorzystaniem tzw. metody bezpośredniej opisano w pracach [21, 22]. Metoda bezpośrednia polega na wydzieleniu odcinków tzw. typu 1 i typu 2 (rys. 21) oraz sprawdzeniu poprzez porównanie istniejących w płycie stropowej sił tnących, z dopuszczalnymi siłami tnącymi obliczonymi na podstawie podpunktu 6.4.4 normy EC2 [N1]. Siłę z modelu numerycznego $V_{\max, \text{MES}}$ należy odczytywać jako główną siłę tnącą.

W przypadku stosowania innych metod sprawdzenia warunków przebiecia w metodzie bezpośredniej ulega zmianie sposób obliczania $V_{R,c}$ oraz lokalizacja przekroju kontrolnego dopasowanego do wytycznych normowych.

W przypadku analizowanego stropu grubość głowicy została tak dobrana aby nie wystąpiło przebicie wewnątrz projektowanego pogrubienia, rys. 22. Przykładowy rozkład sił ścinających w analizowanych przekrojach kontrolnych przedstawiono na rys. 23. Natomiast rzeczywisty rozkład sił ścinających w odcinakach liniowych typu L i C przedstawiono na rys. 24 i 25. Porównania wartości wyznaczonych sił ścinających z wartościami dopuszczalnymi dokonano w tablicy 2. Przeprowadzone obliczenia wskazują poprawność przyjętych rozwiązań konstrukcyjnych.



Rys. 22. Potencjalne miejsca zniszczenia głowicy przez przebicie w układzie płyta-słup



Rys. 23. Rozkład sił ścinających w przekrojach kontrolnych [22]





Section L2, $v_{max,FEM,L2} = 25,66 \text{ kN/m}$

Section C2, $V_{max,FEM,C2} = 57,04 \text{ kN/m}$

Tablica 2. Porównanie wartości wyznaczonych sił ścinających z dopuszczalnymi wartościami

Odcinek	$v_{max,FEM}$	$v_R \cdot d$
1	2	3
L1	$v_{max,FEM} = 54.42 \text{ kN/m}$	$v_{R,EC2} \cdot d = 126 \text{ kN/m}$
L2	$v_{max,FEM} = 25.66 \text{ kN/m}$	$v_{R,EC2} \cdot d = 155 \text{ kN/m}$
L3	$v_{max,FEM} = 44.94 \text{ kN/m}$	$v_{R,EC2} \cdot d = 126 \text{ kN/m}$
L4	$v_{max,FEM} = 35.62 \text{ kN/m}$	$v_{R,EC2} \cdot d = 155 \text{ kN/m}$
C1	$v_{max,FEM} = 50.42 \text{ kN/m}$	$v_{R,EC2} \cdot d = 140 \text{ kN/m}$
C2	$v_{max,FEM} = 57.04 \text{ kN/m}$	$v_{R,EC2} \cdot d = 140 \text{ kN/m}$
C3	$v_{max,FEM} = 43.71 \text{ kN/m}$	$v_{R,EC2} \cdot d = 140 \text{ kN/m}$
C4	$v_{max,FEM} = 41.43 \text{ kN/m}$	$v_{R,EC2} \cdot d = 140 \text{ kN/m}$

4. Posumowanie

Rozwój narzędzi obliczeniowych otwiera nowe możliwości przed projektantami konstrukcji. Jest także impulsem do tworzenia coraz bardziej nietypowych konstrukcji [34]. W dostępnych na rynku programach MES zazwyczaj płytowe i powłokowe elementy skończone bazują na teorii płyt cienkich Kirchhoffa, średnio grubych Mindlina-Reisnera lub teorii Kirchhoffa-Love'a [35]. Świadomy i odpowiedzialny projektant/inżynier korzystający z narzędzi obliczeniowych winien być w pełni świadomy ograniczeń (zalet i wad) jakie niesie ze sobą stosowanie wybranego typu elementu skończonego zaimplementowanego w stosowanym programie obliczeniowym. Przykładowo w przykładzie 3.2 w obliczeniach numerycznych stosowany był element powierzchniowy \rightarrow płytowy \rightarrow czworokątny \rightarrow czterowęzłowy \rightarrow typu DKMQ (*the Discrete Kirchhoff – Mindlin Quadrilateral*, [36], [37]).

Wykonywanie obliczeń wymaga zapoznania się nie tylko z rodzajem konstrukcji, typem elementu skończonego i liczbą stopni swobody w węźle lecz także z konwencją znakową obowiązującą w danym programie obliczeniowym. Znajomość teorii i rozwiązań analitycznych jest niezbędna do tworzenia modeli w MES i przy wykonywaniu obliczeń [38]. Duży wpływ na poprawność analizy numerycznej oraz uzyskane wyniki symulacji mają takie parametry jak gęstość siatki elementów skończonych, sformułowanie elementu skończonego czy schemat całkowania równania ruchu [39].

Odwołując się do zapisów zawartych w normie do projektowania konstrukcji betonowych i żelbetowych z 1945 roku [N2] można stwierdzić, że modelowanie numeryczne jak i cały proces projektowania konstrukcji betonowych i żelbetowych wymaga specjalnego przygotowania zawodowego, wobec czego osoby projektujące powinny posiadać odpowiednią wiedzę i doświadczenie w tej dziedzinie [N2].

Bibliografia

- [1] Bodaszewski W., Wytrzymałość materiałów z elementami mechaniki konstrukcji. Wydawnictwo Politechniki Świętokrzyskiej, Kielce 2005.
- [2] Kączkowski Z., Płyty. Obliczenia statyczne. Arkady, Warszawa 2001.



- [3] Girkmann K., Dźwigary powierzchniowe. Arkady, Warszawa 1956.
- [4] Chróścielewski J., Rodzina elementów skończonych klasy C0 w nieliniowej sześcioparametrowej teorii powłok. Zeszyt Naukowy PG Nr.540, Gdańsk 1996.
- [5] Kleiber M., Wozniak Cz., Nonlinear mechanics of structures. PWN/Warszawa, Kulwer Academic Publisher/Dordrecht 1991.
- [6] Praca zbiorowa pod red. Woźniak Cz., Mechanika sprężystych płyt i powłok. Mechanika Techniczna t. VIII, Warszawa 2001, PWN.
- [7] Awrejcewicz J., Andrianov I.V., Płyty i powłoki w przyrodzie, mechanice i biomechanice. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 2001.
- [8] Bathe K.J., Ramm E., Wilson E.L., Finite element formulations for large deformation dynamic analysis. International Journal for Numerical Method in Engineering 1 (1975) 353–386.
- [9] Bletzinger K-U., Ramm E., Structural optimization and form finding of Ligot Wright structures. Computer & Structures 79 (2001), 2053-2062.
- [10] Bletzinger K-U., Wüchner R., Daoud F., Camprubi N., Computational methods for form finding and optimization of shells and membranes. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 194 (2005) 3438-3452.
- [11] Bess W. J., Design analysis, robust methods, and stress classification. The American Society of Mechanical Engineers, New York 1993.
- [12] Bonet J., Wood R.D., Mahaney J., Heywood P., Finite element analysis of air supported membrane structures. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 190 (2000), 579-595.
- [13] Chróścielewski J., Makowski J., Pietraszkiewicz W., Statyka i dynamika powłok wielkopłytowych. Nieliniowa teoria i metoda elementów skończonych.. Wydawnictwo Instytutu Podstawowych Problemów Techniki, Polskiej Akademii Nauk, Warszawa 2004.
- [14] Farshad M., Design and analysis of shell structures. Kluwer Academic Publishers, Dortmund/Boston/London: 1992.
- [15] Filin A.P., Elementy teorii obłoczek. Stojizdat, Leningrad 1987.
- [16] Fung Y. C., Foundations of solid mechanics. New Jersey 1965, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs.
- [17] Galimov K. Z., Osnovy nelinejnoj teorii obłoczek. Izd. Kazan. Univ., Kazan 1975.
- [18] Goldenveizer A. L., Teoria uprugich tonkich obłoczek. Nauka, Moskwa 1976.
- [19] Gosling P.D., Lewis W.J., Optimal structural membranes, Part I and Part II. Computer & Structures 5, (1996), 871-883; (1996) 885-895.
- [20] Grabiec K., Żelbetowe konstrukcje cienkościenne. Warszawa-Poznań 1999, PWN.
- [21] Grabski M., Nośność strefy przebicia w połączeniu płyty ze słupem zwieńczonym głowicą. Rozprawa Doktorska. Gdańsk 2022, Politechnika Gdańska.
- [22] Grabski M., Ambroziak A.: Verification of punching shear outside the shear cap by the direct method. Archive of Civil Engineering 68(4), (2022) .
- [23] Green A.E., Zerna W.: Theoretical elasticity. Oxford: Oxford of the Clarendon Press 1960
- [24] Gruttmann F., Taylor R.L., Theory and finite element formulation of rubberlike membrane shells using principal stretches. International Journal for Numerical in Engineering 35 (1992), 1111-1126.
- [25] Hartman F., The mathematical foundation of structural mechanics. Berlin Heidelberg New York Tokyo 1985, Springer-Verlag
- [26] Kujak J. F., Geometriceski nelinejnyje zadaci teorii plastin i obłoczek. Naukova Dumka, Kiev 1987.



- [27] Kłosowski P., Metoda elementów skończonych w problemie dużych przemieszczeń powłok błonowych. Praca Magisterska. Gdańsk 1978. Politechnika Gdańska.
- [28] Kmiecik M., Wismur M., Bielewicz E., Analiza nieliniowa tarcz i płyt. Politechnika Gdańska, Gdańsk 1995.
- [29] Olszak W., Thin shell theory: New trends and applications. CISM Udine, Springer – Verlag, Wien – New York 1980.
- [30] Pietraszkiewicz W., Geometrically non-linear theories of thin elastic shells. Polish Scientific Publishers. Advances in Mechanics 1 (1989) 52–130.
- [31] Praca zbiorowa pod redakcją Kleiber M., Komputerowe metody mechaniki ciał stałych. Mechanika Teoretyczna t. XI, PWN, Warszawa 1995.
- [32] Rakowski G., Kacprzyk Z., Metoda elementów skończonych w mechanice konstrukcji. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1993.
- [33] Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Finite element method. 5th edition, Butterworth-Heinemann, Oxford 2000.
- [34] Biliszczuk J., Inżynieria mostowa w Polsce Niepodległej (1918–2018). Inżynieria i Bud 2018;74:371–82.
- [35] Chelśowski Ł., Oleszek R., Radomski W., Skutki uproszczeń w modelowaniu mostowych przęseł płytowych z betonu. Drogownictwo 2022;9:311–321.
- [36] Katili I., A new discrete Kirchhoff - Mindlin element based on Mindlin – Reissner plate theory and assumed shear strain fields Int. J. Numer. Meth. Engng. 1993;36:1859-1908.
- [37] Ibrahimbegovic A., Wilson, E.L., A unified formulation for triangular and quadrilateral flat shell FE with six nodal dof. Commun. Numer. Meth. Engng. 1991;7: 1-9.
- [38] Radwańska M., Stankiewicz A., Wosatko A., Numerical Aspects of FEM Aanalysis of Plates and Shells in Recent Advances in Civil Engineering: Computational Methods Publisher: Politechnika Krakowska Editors: Witold Cecot, 2015.
- [39] Krzeszowiec M., Małachowski J., Badanie wpływu sformułowania elementu skończonego oraz schematu rozwiązywania równania ruchu na wyniki analizy MES na przykładzie niesymetrycznie obciążonej płyty. Bulletin of the Military University of Technology 2015;64:135–157.

Normy, instrukcje i wytyczne

- [N1] PN-EN 1992-1-1: 2008/NA:2010 Eurokod 2: *Projektowanie konstrukcji z betonu. Część 1-1: Reguły ogólne dla budynków*
- [N2] PN-B-195:1945 Konstrukcje Betonowe i Żelbetowe. Obliczenia statyczne i projektowanie

