

Potyczki algorytmiczne, czyli Alicja i Bogdan w nowych sytuacjach

*Marek Kubale
Joanna Raczek*

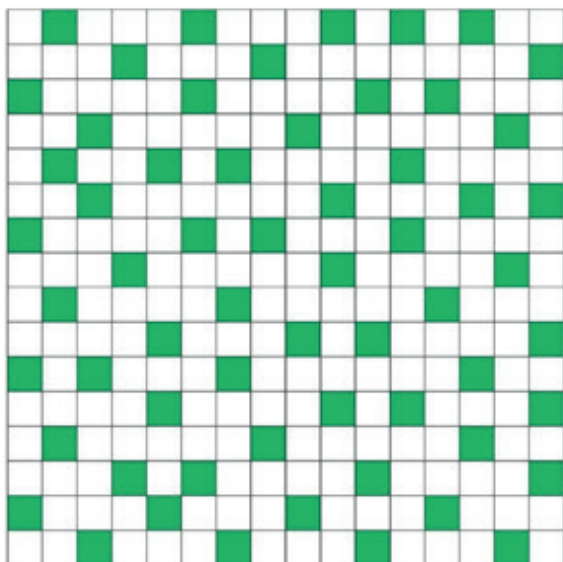
Wydział Elektroniki,
Telekomunikacji
i Informatyki

W kolejnym odcinku serii z Alicją i Bogdanem najpierw ilustrujemy problem dominowania w grafach (kratowych): klasyczny i rzymski. Następnie ilustrujemy znany fakt, że zachłanność nie zawsze się opłaca. Pokażemy mianowicie, że algorytmy zachłanne nie gwarantują uzyskania rozwiązania optymalnego, nawet wówczas gdy problem da się rozwiązać w czasie wielomianowym.

6. Alicja i Bogdan na działce

Zagadka 1

Alicja i Bogdan mają działkę kwadratową o boku 100 m, którą odziedziczyli po dziadku. Działka jest podzielona na identyczne grządki-poletka o wymiarze 6,25 m × 6,25 m. Chcą ją zazielenić, sadząc trawę na jak najmniejszej liczbie grządek. Wiedzą przy tym, że jeśli grządka przylega do dwóch obsianych (bezpośrednio lub narożnikowo), to po roku na niej również zaczyna rosnąć trawa. Jaka jest najmniejsza początkowa liczba grządek, na których mogą posiać trawę, tak by zaczęła ona rosnąć na całej działce?



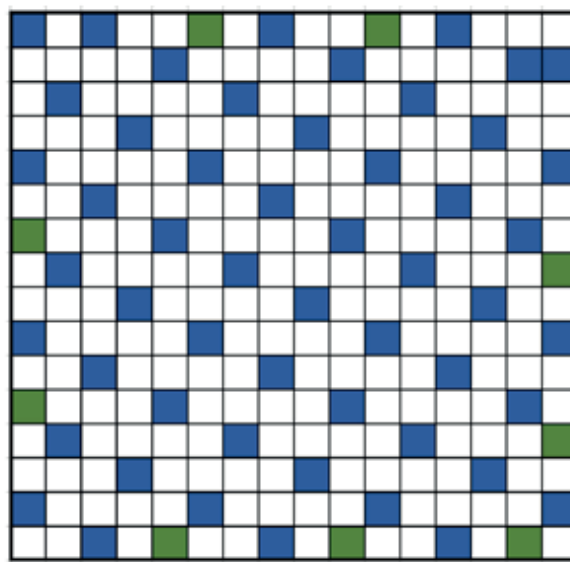
Rys. 1. Rozwiązanie dla zagadki 1

Rozwiązanie

Zadanie jest silnie związane z problemem tzw. dominowania w grafach kratowych. Na rysunku 1 podajemy jedno z możliwych rozwiązań. Współczynnik zazielenienia wynosi tutaj 23,4 proc.

Uwaga 1.

W tym rozwiązaniu każde poletko nieobsiane trawą sąsiaduje z dwoma obsianymi trawą położonymi w odległości co najwyżej 6,25 m (czyli przylega bezpośrednio do jednego, a z drugim sąsiaduje przez krawędź, styka się wierzchołkiem lub jest w odległości 6,25 m od niego),



Rys. 2. Rozwiązanie dla zagadki 2. Na niebieskich polach stoją dwa strachy na wróble, a na zielonych – jeden. Każde poletko, na którym nie ma stracha na wróble (białe), sąsiaduje z poletkiem z dwoma strachami na wróble

a zatem nasz problem będzie można sprowadzić do znalezienia najmniejszego zbioru $(1,2)$ -dominującego w kracie kwadratowej 16×16 , co w tym przypadku sprowadza się do znalezienia zwykłego zbioru dominującego.

Uwaga 2.
Jednakże gdyby okazało się, że trawa przenosi się na wszystkie grządki odległe o nie więcej niż 1 m, to grządki można by zmniejszyć do rozmiaru $1 \text{ m} \times 1 \text{ m}$. Wówczas problem sprowadzi się do znalezienia zbioru dominującego w kracie 100×100 . Ponieważ taki zbiór liczy 2076 węzłów, współczynnik koniecznego zazielenienia zmniejszy się do 20,8 proc.

Zagadka 2

Po posianiu trawy warto postawić strachy na wróble. Jeśli na poletku stoi jeden strach na wróble, to jego zasięg obejmuje tylko to poletko, na którym stoi. Jeśli dwa strachy na wróble, to ich zasięg jest większy, obejmuje także pola sąsiadujące z danym przez krawędź. W jaki sposób ustawić jak najmniejszą liczbę strachów, aby ptaki nie zjadły wysianego ziarna trawy?

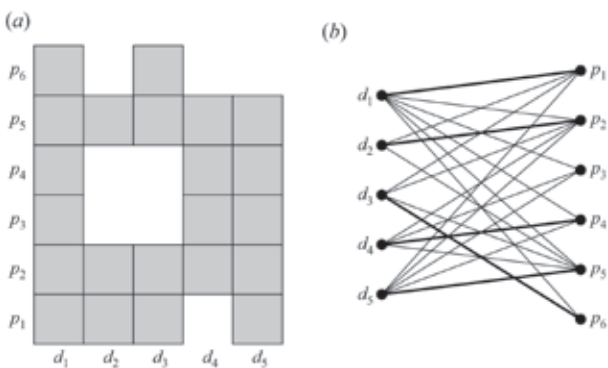
Rozwiązanie

Zadanie jest silnie związane z problemem tzw. dominowania rzymskiego w grafach kratowych. Na rysunku z podajemy jedno z możliwych rozwiązań optymalnych.

Uwaga 3.
Problemowi dominowania rzymskiego poświęcony był esej *Grafy w Imperium Rzymskim*, „Pismo PG” nr 3/2021, s. 30–31.

Zagadka 3

Bogdan zabrał się za malowanie płotu odgradzającego działkę od gminnej drogi. Płot składa się z pionowych desek jednakowej szerokości, ściśle przylegających do siebie. Deski mają rozmaite wysokości – po prostu taki płot postawił dziadek Alicji i nikt nie pomyślał, aby go wyrównać. Ponadto w płocie są otwory: na skrzynkę



Rys. 3. (a) Przykładowy płot; (b) odpowiadający mu graf dwudzielny wraz z maksymalnym skojarzeniem

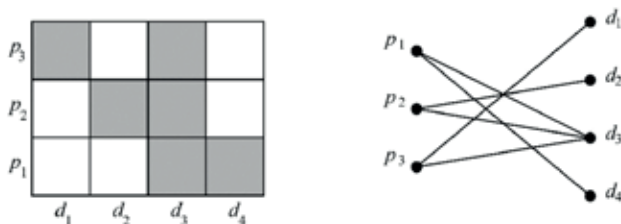
pocztową, na wejście dla kota itd. No trudno: równy, nierówny, ale pomalować trzeba. W tym celu Bogdan nabył spory pędzel – taki, że jego szerokość akurat odpowiada szerokości deski w płocie. Pędzel można prowadzić zarówno poziomo, jak i pionowo. Aby uzyskać dobry efekt, pędzel podczas prowadzenia musi przylegać całą szerokością do powierzchni płotu. Poszczególne partie płotu mogą być pomalowane więcej niż raz. Bogdan chciałby jak najszybciej wykonać to zadanie, wykonując jak najmniejszą liczbę pociągnięć pędzla.

Rozwiązanie

Nasz problem zamodelujemy za pomocą grafu dwudzielnego $G(V_1, V_2)$, w którym wierzchołki d_i pierwszej partycji V_1 będą odpowiadały poszczególnym deskom w płocie, zaś wierzchołki p_j z drugiej partycji V_2 – poziomymi pociągnięciami pędzla. Pomiedzy d_i i p_j będzie krawędź jedynie wtedy, gdy na przecięciu i -tej deski i j -tego poziomu będzie obszar do pomalowania (por. rys. 3a). Obecnie nasz problem sprowadza się do znalezienia najmniejszego pokrycia wierzchołkowego w grafie dwudzielnym, tj. takiego zbioru wierzchołków, że każda krawędź ma przynajmniej jeden koniec w tym zbiorze. Wówczas każdy taki wierzchołek dyktuje odpowiedni ruch pędzla (w pionie lub poziomie). Najmniejsze pokrycie wierzchołkowe można wyznaczyć efektywnie (wielomianowo), znajdując najpierw maksymalne skojarzenie w grafie $G(V_1, V_2)$, czyli najliczniejszy zbiór izolowanych krawędzi (rys. 3b). W tym celu najwygodniej posłużyć się metodą ścieżki powiększającej (patrz też algorytm węgierski). W efekcie otrzymamy kolekcję maksymalnych skojarzeń, którą następnie przekształcimy w pokrycie wierzchołkowe. W naszym przykładzie już samo maksymalne skojarzenie wyznacza pokrycie wierzchołkowe.

Zagadka 4

Obecnie chcemy pokazać, że algorytm zachłanny użyty do rozwiązania zagadki 3 (tj. zawsze wybieraj linię za-



Rys. 4. (a) Płot; (b) odpowiadający mu graf dwudzielny

wierającą najwięcej niepomalowanych jeszcze kratek) nie gwarantuje wyniku optymalnego.

Rozwiązanie

Kontrprzykład pokazano na rys. 4. Zgodnie z algorytmem zachłannym Bogdan musiałby rozpocząć malowa-

nie płotu od deski d_3 , po czym musiałby przejechać po płocie jeszcze 3 razy. Łatwo zauważyć, że rozwiązanie optymalne zawiera 3 warstwy poziome.

■ kubale@eti.pg.edu.pl

■ joanna.raczek@pg.edu.pl

SKAR in Japan 2023

*Damian Kąkol
Piotr Szabowski
Paweł Makarewicz
Błażej Jankowski
Jan Górski*

Wydział Elektroniki,
Telekomunikacji
i Informatyki

Studenci Studenckiego Koła Automatyków i Robotyków (SKAR) na WETI PG wzięli udział w ponadmiesięcznej wymianie naukowej z Kansai University w Osace w Japonii. Wymiana ta odbyła się w ramach umowy o współpracy zawartej pomiędzy Politechniką Gdańską i Kansai University. Członkowie koła brali udział w zajęciach laboratoryjnych i prowadzili badania w zakresie robotyki i automatyki, równocześnie poznając japońską kulturę.

Była to już druga edycja wymiany naukowej. Odbyła się ona w dniach 1 lipca – 6 sierpnia 2023 roku. Wyjazd był współfinansowany przez rektora PG, dziekana WETI, Samorząd Studentów PG oraz macierzyste katedry studentów.

Po przyjeździe na Kansai University studenci zostali przydzieleni do laboratoriów skupiających się na różnych zagadnieniach robotyki i automatyki.

Laboratorium KIS, prof. Tokumaru Masataka

Laboratorium KIS (*Kansei Information Systems*) zajmuje się implementacją filozofii Kansei (jap. uczucie) we współczesnej robotyce. Zakłada ona tworzenie robotów mogących symulować ludzkie uczucia i zachowania w celu poprawy ich interakcji z ludźmi. Przykładowe projekty realizowane w laboratorium to m.in.:

- roboty wspomagające naukę języków z implementacją rzeczywistych zachowań ludzi (gestykulacja, mimika, reakcja na zachowanie człowieka);
- projektowanie produktów na podstawie indywidualnych preferencji klienta;
- dobór zdrowej diety na podstawie preferencji smakowych użytkownika.

Studenci z Politechniki Gdańskiej zostali przydzieleni do zadań wykonywanych również przez zespół japońskich studentów. We współ-

Fot. 1. Uczestnicy wyjazdu na kampusie Kansai University
Fot. z archiwum prywatnego



1