



Imię i nazwisko autora rozprawy: Magdalena Oziębło  
Dyscyplina naukowa: Budownictwo

## ROZPRAWA DOKTORSKA

Tytuł rozprawy w języku polskim: Probabilistyczna ocena wrażliwości stanów granicznych konstrukcji inżynierskich na imperfekcje geometryczne i materiałowe.

Tytuł rozprawy w języku angielskim: Probabilistic assessment of limit state sensitivity of engineering structures with respect to geometrical and material imperfections.

|   |
|---|
| Promotor                                      |
| <i>podpis</i>                                 |
| dr hab. Inż. Jarosław Górski, prof. nadzw. PG |
| Promotor pomocniczy                           |
| <i>podpis</i>                                 |
| dr inż. Karol Winkelmann                      |



## OŚWIADCZENIE

Autor rozprawy doktorskiej: Magdalena Oziębło

Ja, niżej podpisana, wyrażam zgodę na bezpłatne korzystanie z mojej rozprawy doktorskiej „Probabilistyczna ocena wrażliwości stanów granicznych konstrukcji inżynierskich na imperfekcje geometryczne i materiałowe” do celów naukowych lub dydaktycznych.<sup>1</sup>

Gdańsk, dnia .....

.....  
*podpis doktoranta*

Świadoma odpowiedzialności karnej z tytułu naruszenia przepisów ustawy z dnia 4 lutego 1994 r. o prawie autorskim i prawach pokrewnych (Dz. U. z 2006 r., nr 90, poz. 631) i konsekwencji dyscyplinarnych określonych w ustawie Prawo o szkolnictwie wyższym (Dz. U. z 2012 r., poz. 572 z późn. zm.),<sup>2</sup> a także odpowiedzialności cywilno-prawnej oświadczam, że przedkładana rozprawa doktorska została napisana przeze mnie samodzielnie.

Oświadczam, że treść rozprawy opracowana została na podstawie wyników badań prowadzonych pod kierunkiem i w ścisłej współpracy z promotorem dr hab. Jarosławem Górskim, prof. nadzw. PG, promotorem pomocniczym dr inż. Karolem Winkelmannem.

Niniejsza rozprawa doktorska nie była wcześniej podstawą żadnej innej urzędowej procedury związanej z nadaniem stopnia doktora.

Wszystkie informacje umieszczone w ww. rozprawie uzyskane ze źródeł pisanych i elektronicznych, zostały udokumentowane w wykazie literatury odpowiednimi odnośnikami zgodnie z art. 34 ustawy o prawie autorskim i prawach pokrewnych.

Potwierdzam zgodność niniejszej wersji pracy doktorskiej z załączoną wersją elektroniczną.

Gdańsk, dnia .....

.....  
*podpis doktoranta*

Ja, niżej podpisana, wyrażam zgodę na umieszczenie ww. rozprawy doktorskiej w wersji elektronicznej w otwartym, cyfrowym repozytorium instytucjonalnym Politechniki Gdańskiej, Pomorskiej Bibliotece Cyfrowej oraz poddawania jej procesom weryfikacji i ochrony przed przywłaszczeniem jej autorstwa.

Gdańsk, dnia .....

.....  
*podpis doktoranta*

<sup>1</sup> Zarządzenie Rektora Politechniki Gdańskiej nr 34/2009 z 9 listopada 2009 r., załącznik nr 8 do instrukcji archiwalnej PG.

<sup>2</sup> Ustawa z dnia 27 lipca 2005 r. Prawo o szkolnictwie wyższym: Rozdział 7 Odpowiedzialność dyscyplinarna doktorantów, Art. 226.





## **OPIS ROZPRAWY DOKTORSKIEJ**

**Autor rozprawy doktorskiej:** Magdalena Oziębło

**Tytuł rozprawy doktorskiej w języku polskim:** Probabilistyczna ocena wrażliwości stanów granicznych konstrukcji inżynierskich na imperfekcje geometryczne i materiałowe.

**Tytuł rozprawy w języku angielskim:** Probabilistic assessment of limit state sensitivity of engineering structures with respect to geometrical and material imperfections.

**Język rozprawy doktorskiej:** polski

**Promotor rozprawy doktorskiej:** dr hab. inż. Jarosław Górski, prof. nadzw. PG

**Promotor pomocniczy rozprawy doktorskiej\*:** dr inż. Karol Winkelmann

**Data obrony:**

**Słowa kluczowe rozprawy doktorskiej w języku polski:** probabilistyczna analiza wrażliwości, niezawodność konstrukcji, metoda Monte Carlo, metoda estymacji punktowej, metoda powierzchni odpowiedzi, próbkowanie ukierunkowane

**Słowa kluczowe rozprawy doktorskiej w języku angielskim:** probabilistic sensitivity analysis, reliability of structures, Monte Carlo Method, Response Surface Method, Point Estimate Method, Targeted Random Sampling



## Streszczenie w języku polskim

Tematem niniejszej pracy jest analiza probabilistyczna wrażliwości mechanicznej odpowiedzi konstrukcji inżynierskich na imperfekcje geometryczne oraz zmianę własności materiałów. Z tematem tym ściśle związany jest problem estymacji niezawodności konstrukcji, również szeroko opisany w niniejszej rozprawie.

W pracy dokonano przeglądu metod wykorzystywanych w analizie probabilistycznej oraz zaproponowano procedury wykorzystujące te metody w analizie wrażliwości niezawodnościowej. Opisane zostały kolejno: metoda Monte Carlo (MC), metody redukcyjne próbkowania warstwowego (SS) i hipersześcianu łacińskiego (LHS), metoda estymacji punktowej (PEM) oraz metoda powierzchni odpowiedzi (RSM). Najwięcej uwagi poświęcono technice próbkowania ukierunkowanego (TRS – Targeted Random Sampling), na podstawie której stworzono program komputerowy w środowisku MATLAB, umożliwiający poszukiwanie próbek w otoczeniu stanu granicznego konstrukcji. Osobny rozdział poświęcono klasyfikacji i omówieniu technik analizy wrażliwości, m.in. analizy jednoczynnikowej, projektowania przesiewowego oraz analizy wariancji.

Przedstawione metody probabilistyczne wykorzystano w analizie kilku przykładów modeli prętowych: kratownicy von Misesa, kolumnie Zieglera, wieży telekomunikacyjnej i kopuły prętowej. Wskazano optymalne sposoby określania wrażliwości mechanicznej odpowiedzi układu na zmiany poszczególnych zmiennych losowych.

We wnioskach podsumowano przeprowadzone obliczenia oraz określono kierunki dalszych prac, których nadrzędnym celem powinna być implementacja metod probabilistycznych w standardowym projektowaniu konstrukcji.

## Streszczenie w języku angielskim

This dissertation concerns a probabilistic sensitivity analysis of mechanical response of engineering structures to geometrical imperfections as and to material parameter variation. The issue is closely related to the problem of reliability-based assessment of structures, broadly addressed in this dissertation too.

The thesis reviews the methods of probabilistic analysis and proposes procedures to apply them in the field of reliability sensitivity analysis. The thesis covers the following methods: Monte Carlo (MC), Stratified Sampling (SS), Latin Hypercube Sampling (LHS), the Point Estimate Method (PEM) and the Response Surface Method (RSM). However, most attention is focused on the Targeted Random Sampling technique, which constituted the basis for a computer program in the Matlab software environment, dedicated to samples search in the limit state vicinity of a given structure. A separate chapter deals with the classification and discussion of sensitivity analysis techniques, e.g. one at a time analysis, screening design and the analysis of variance.

The probabilistic methods presented in this paper were illustrated by selected worked examples of bar structures: von Mises truss, Ziegler's column, telecommunications tower and reticulated shell. Due to the analysed examples, alternative methods were pointed out to determine the sensitivity of the response to particular random variations.

The concluding chapter summarizes different types of analysis and indicates possible directions for further work, directed to implementation of probabilistic methods in standard engineering calculations should be an overarching objective.





# Spis treści

---

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Rozdział 1. Przedmiot, cel i zakres pracy</b>  | <b>5</b>  |
| 1.1 Przedmiot rozważań  | 5         |
| 1.2 Teza, cel i zakres pracy  | 7         |
| 1.3 Przegląd literatury   | 12        |
| <b>Rozdział 2. niezawodność konstrukcji inżynierskich -podstawowe pojęcia i definicje</b> | <b>17</b> |
| 2.1 Wprowadzenie  | 17        |
| 2.2 Poziomy metod probabilistycznej analizy konstrukcji                                   | 18        |
| 2.2.1 Metody poziomym I   | 18        |
| 2.2.2 Metody poziomym II  | 19        |
| 2.2.3 Metody poziomym III   | 20        |
| 2.3 Podstawowe pojęcia i definicje  | 21        |
| 2.4 Wybrane miary niezawodności   | 23        |
| 2.5 Losowe modele podstawowych zmiennych projektowych                                     | 25        |
| <b>Rozdział 3. Wybrane metody analizy niezawodności konstrukcji</b>                       | <b>29</b> |
| 3.1 Metoda Monte Carlo MC   | 29        |
| 3.1.1 Ogólne założenia metody   | 29        |
| 3.1.2 Teoretyczne podstawy metody Monte Carlo   | 30        |
| 3.2 Metoda powierzchni odpowiedzi (Response Surface Method RSM)                           | 32        |
| 3.2.1 Ogólne założenia metody   | 32        |
| 3.2.2 Teoretyczne podstawy metody powierzchni odpowiedzi                                  | 33        |
| 3.3 Metoda estymacji punktowej (Point Estimate Method PEM)                                | 34        |
| 3.4 Techniki redukcji wariancji   | 40        |
| 3.4.1 Próbkowanie warstwowe (Stratified Sampling SS)                                      | 40        |
| 3.4.2 Technika próbkowania hipersześcianem łacińskim (Latin Hypercube Sampling (LHS))     | 42        |
| 3.4.3 Technika próbkowania ukierunkowanego (Targeted Random Sampling TRS)                 | 44        |
| 3.4.4 Technika próbkowania (Refined Stratified Sampling RSS)                              | 48        |
| <b>Rozdział 4. Analiza wrażliwości konstrukcji</b>  | <b>50</b> |
| 4.1 Wprowadzenie  | 50        |
| 4.2 Klasyfikacja metod analizy wrażliwości  | 51        |
| 4.3 Wybrane metody analizy wrażliwości  | 54        |
| 4.3.1 Projektowanie przesiewowe (Screening Design)  | 54        |
| 4.3.2 Metody badania wrażliwości wykorzystujące analizę wariancji                         | 57        |
| <b>Rozdział 5. Probabilistyczna analiza wrażliwości - przykłady numeryczne</b>            | <b>62</b> |
| 5.1 Kratownica von Misesa   | 62        |
| 5.1.1 Przedstawienie modelu   | 62        |



|  |  |            |
|--|--|------------|
| 5.1.2                                      | Analiza wrażliwości kratownicy na podstawie histogramów stanu granicznego  | 63         |
| 5.2  | Kolumna Zieglera   | 68         |
| 5.2.1                                      | Prezentacja modelu   | 68         |
| 5.2.2                                      | Określenie wrażliwości kolumny na podstawie analizy rozproszenia wyników   | 69         |
| 5.2.3                                      | Określenie wrażliwości kolumny na podstawie wskaźników wrażliwości Sobola  | 71         |
| 5.2.4                                      | Określenie wrażliwości kolumny na podstawie analizy krawędzi przecięcia powierzchni odpowiedzi z płaszczyznami $k_{1g}$ i $k_{2g}$ | 71         |
| 5.3  | Wieża telekomunikacyjna  | 82         |
| 5.3.1                                      | Prezentacja modelu   | 83         |
| 5.3.2                                      | Wstępna analiza zmiany odpowiedzi konstrukcji  | 88         |
| 5.3.3                                      | Analiza wrażliwości konstrukcji na zmiany współczynników sprężystości podpór wieży $k_c$ , $k_t$ .                                 | 103        |
| 5.3.4                                      | Porównanie rezultatów analizy wrażliwości  | 117        |
| 5.4  | Kopuła – kratownica przestrzenna   | 118        |
| 5.4.1                                      | Prezentacja modelu   | 118        |
| 5.4.2                                      | Wybór metody obliczeniowej   | 119        |
| 5.4.3                                      | Analiza wrażliwości  | 122        |
| <b>Rozdział 6. Wnioski</b>                 |  | <b>128</b> |
| <b>Bibliografia</b>                        |  | <b>132</b> |
| Monografie, artykuły oraz inne publikacje: |  | 132        |

# Rozdział 1. Przedmiot, cel i zakres pracy

---

## 1.1 Przedmiot rozważań

Proces projektowania oraz budowania konstrukcji inżynierskich powinien być przeprowadzony w sposób gwarantujący jej bezpieczeństwo oraz odpowiedni komfort użytkownika. Trzema podstawowymi warunkami, które musi spełnić każdy obiekt są kryteria: nośności, sztywności oraz stateczności. Innymi słowy, posługując się definicją zawartą w normie PN-ISO-2394, konstrukcja musi być zaprojektowana w sposób zapewniający jej niezawodność czyli zdolność do wypełniania funkcji przewidzianych w projekcie w danych warunkach eksploatacji. Obliczenia deterministyczne, dominujące w inżynierskiej analizie konstrukcji, nie dają zadowalającej odpowiedzi dotyczącej niezawodności danego układu. Jedynie metody probabilistyczne, będące przedmiotem niniejszej pracy, pozwalają na uwzględnienie faktu podlegania przez wielkości wykorzystywane w projektowaniu wpływom czynników losowych oraz umożliwiają oszacowanie ich bezpieczeństwa.

Dostępne i powszechnie stosowane inżynierskie narzędzia obliczeniowe nie pozwalają na przeprowadzenie pełnej analizy niezawodnościowej. Należy podkreślić, że w przeciwieństwie do programów inżynierskich wykorzystujących liniową a nawet nieliniową analizę konstrukcji, programy umożliwiające przeprowadzenie obliczeń probabilistycznych wymagają od użytkownika rozległej wiedzy z zakresu rachunku prawdopodobieństwa oraz statystyki matematycznej, przez co prawdopodobnie jeszcze długo nie zostaną w pełni zautomatyzowane. Na chwilę obecną inżynier nie dysponuje „czarną skrzynką” za pomocą której, po wprowadzeniu według odpowiedniego wzorca danych, uzyska wyniki bezpośrednio wykorzystywane w projektowaniu. Z uwagi na błyskawiczny rozwój możliwości obliczeniowych komputerów możliwe (a nawet konieczne) jest jednak włączenie metod probabilistycznych do standardowych analiz inżynierskich. Pytaniem otwartym pozostaje w jakim zakresie takie obliczenia powinny być wykonywane?

Oczywistą odpowiedzią na to pytanie jest: określenie prawdopodobieństwa przekroczenia stanów granicznych konstrukcji lub utraty przez nią stateczności. Badając dostępne metody i algorytmy z łatwością można jednak stwierdzić, że właśnie takie obliczenia są najbardziej skomplikowane gdyż dotyczą tzw. ogonów rozkładów





prawdopodobieństwa, matematycznie trudnych do zdefiniowania i wyznaczenia. Nawet pobieżny przegląd literatury z zakresu niezawodności uzmysławia jak wiele różnych metod zostało zaproponowanych przy braku wiodących, powszechnie akceptowanych i uniwersalnych algorytmów. Właśnie ta mnogość możliwych rozwiązań świadczy o trudnościach obliczeniowych. Ponadto z uwagi na brak precyzyjnych danych wejściowych dotyczących rozrzutów wymiarów konstrukcji, parametrów materiałowych, a także (a może przede wszystkim) obciążeń, obliczenia niezawodności lub prawdopodobieństwa zniszczenia konstrukcji obarczone są dużą niepewnością.

Zastosowanie metod probabilistycznych obejmuje szerokie spektrum zagadnień. Wśród nich istotne miejsce zajmuje analiza badań doświadczalnych materiałów i elementów konstrukcyjnych. Podejście takie umożliwia ich wszechstronny opis, obniża koszty badań, a także pozwala na uogólnienie opisu równań konstytutywnych lub mechanicznego zachowania się elementów konstrukcyjnych. Innym obszarem wykorzystania metod probabilistycznych jest zastosowanie budowanych obecnie algorytmów sprawdzających niezawodność istniejących, wzniesionych wiele lat temu konstrukcji. Dotyczy to szczególnie będących w nieustannym użytkowaniu obiektów zabytkowych, w których do czynienia mamy zarówno z nieuchronnym procesem degradacji wykorzystanych materiałów jak również ewolucją działających obciążeń. Należy podkreślić, że realistyczne ujęcie w obliczeniach procesów starzenia i korozji jest niezwykle trudne i podejście probabilistyczne jest w takich przypadkach szczególnie uzasadnione. Także rozwój produkcji nowych materiałów, np. kompozytów, z uwagi na ich niejednorodne cechy, wskazuje na konieczność stosowania opisu probabilistycznego.

Kolejnym istotnym obszarem zastosowań metod probabilistycznych jest optymalizacja konstrukcji z uwzględnieniem jej niezawodności. Włączenie opisu niezawodnościowego do algorytmów optymalizacyjnych pozwala na ulepszenie procesu ekonomicznego projektowania konstrukcji z jednoczesnym uwzględnieniem niezbędnego poziomu jej bezpieczeństwa. Z analizą optymalizacyjną nieodłącznie związane jest także badanie wrażliwości probabilistycznej parametrów wytrzymałościowych lub użytkowych na zmianę własności materiałowych, wymiarów lub innych parametrów opisujących konstrukcję. Zgodnie z zapisem zawartym w normie PN-ISO 2394, zmiana każdego czynnika mogącego zakłócić miarę niezawodności, powinna być połączona ze zbadaniem wpływu tej zmiany na ogólną niezawodność. Obliczenia takie umożliwiają wskazanie „słabych” elementów konstrukcji lub



czynników, które w projektowaniu mają największe znaczenie i wymagają szczególnej uwagi projektanta.

Jak wspomniano wcześniej, narzędzia probabilistyczne nie są obecnie powszechnie stosowane w analizie problemów inżynierskich. Wynika to przede wszystkim z ich poziomu skomplikowania uniemożliwiającego wykonywanie analizy niezawodnościowej bez odpowiedniego przygotowania matematycznego. Zautomatyzowanie obliczeń z zakresu analizy niezawodności, optymalizacji lub wrażliwości w stopniu zbliżonym do od dawna stosowanych i rozwijanych programów wykorzystujących metodę elementów skończonych prawdopodobnie jeszcze długo nie będzie możliwe. Wydaje się jednak istotne wykazanie, że proste i jednocześnie skuteczne metody probabilistyczne można z łatwością zastosować w celu wzmocnienia i udokładnienia procesu projektowania.

W pracy podjęto próbę sformułowania metod łączących opis probabilistyczny z analizą wrażliwości odpowiedzi mechanicznej konstrukcji na imperfekcje geometryczne i materiałowe. Wykorzystano metody, które można scharakteryzować jako inżynierskie, a więc takie, które jednocześnie nie wymagają zaawansowanego oprogramowania i są łatwe w zastosowaniu.

## **1.2 Teza, cel i zakres pracy**

### **Teza pracy**

Tezę pracy sformułowano następująco: Możliwe jest oszacowanie wrażliwości stanów granicznych nieliniowych modeli konstrukcji inżynierskich na imperfekcje geometryczne i materiałowe przy zastosowaniu metody symulacyjnej Monte Carlo wraz z odpowiednio sformułowanymi technikami redukcyjnymi, próbkowaniem ukierunkowanym, metodą powierzchni odpowiedzi oraz metodą estymacji punktowej.

### **Cel pracy**

W Katedrze Mechaniki Budowli, Wydziału Inżynierii Lądowej, Politechniki Gdańskiej od wielu lat rozwijane są metody analizy probabilistycznej. Wykorzystywane były one nie tylko w problemach dotyczących konstrukcji inżynierskich ale również w zagadnieniach z dziedziny ochrony środowiska. Zbudowano własne programy służące m.in.: generacji pól losowych, zastosowania metody perturbacyjnej w analizie powłok czy też wykorzystaniu metod: estymacji punktowej (PEM), Monte Carlo (MC), powierzchni odpowiedzi (RSM) i innych. Zaproponowane algorytmy i narzędzia



obliczeniowe są więc uniwersalne i można je stosować do analizy praktycznie każdego problemu inżynierskiego. Kluczowym jest jednak właściwy wybór metody a także przyjęcie odpowiedniego algorytmu obliczeniowego - czynniki te zależne są od charakteru konkretnego zadania.

Ogólnym celem niniejszej rozprawy jest zaadoptowanie istniejących algorytmów do analizy wrażliwości stanów granicznych nośności i użytkowania wybranych konstrukcji inżynierskich na imperfekcje geometryczne i materiałowe. Dodatkowo, istniejące procedury wzbogacono o własne narzędzia, których głównym zadaniem jest uproszczenie i przyspieszenie procesu obliczeń. Przedstawione w rozprawie przykłady ograniczono do prostych układów prętowych, ilustrujących zagadnienie.

W pracy pod pojęciem wrażliwość konstrukcji będzie rozumiana zmiana parametrów nośności lub użytkowalności pod wpływem imperfekcji geometrycznych lub materiałowych, a także obciążenia zewnętrznego. Wychodząc z założenia, że każde obciążenie oraz imperfekcje mogą (a nawet powinny) być zdefiniowane jako zmienne losowe o określonej zmienności, zdecydowano się zbadać wpływ tej zmienności, opisaney w sposób probabilistyczny, na odpowiedź mechaniczną konstrukcji. Efektem końcowym analizy jest zatem estymacja zmiany niezawodności konstrukcji. Nie należy więc zaproponowanego podejścia traktować jako standardowej analizy wrażliwości, można je określić jako niezawodnościową lub probabilistyczną wrażliwość konstrukcji.

Podsumowując, cele niniejszej pracy można sformułować następująco:

- przegląd probabilistycznych metod obliczeniowych pozwalających na analizę niezawodnościowej wrażliwości konstrukcji,
- dobór i adaptacja wybranych metod właściwych dla proponowanej analizy,
- zaproponowanie własnych algorytmów optymalizujących obliczenia,
- przetestowanie zaproponowanych algorytmów przy wykorzystaniu odpowiednio dobranych przykładów;

W pracy przyjęto szereg ograniczeń i założeń:

- praca nie obejmuje analizy wrażliwości rozumianej w standardowy sposób, analizowane są jedynie metody wrażliwości niezawodnościowej,
- przykłady obliczeniowe dotyczą jedynie statyki konstrukcji, chociaż możliwe jest bezpośrednie rozszerzenie algorytmów o analizy dynamiczne,



- algorytm sformułowano za pomocą narzędzi obliczeniowych umożliwiających ich bezpośrednie zastosowanie w analizie konstrukcji rzeczywistych,
- obliczenia wykonano dla prętowych modeli teoretycznych oraz przykładów rzeczywistych konstrukcji inżynierskich - kratownic.

### Zakres pracy

Pracę podzielono na 6 rozdziałów.

**W pierwszym rozdziale** przedstawiono tezę pracy oraz dokonano przeglądu literatury. Głównym celem tego przeglądu było zdefiniowanie zakresu pracy, na tle wielu zagadnień związanych z zastosowaniem probabilistyki w problemach inżynierskich. Obszerne fragmenty poświęcono publikacji polskich autorów, a także, w węższym zakresie gdańskiemu ośrodkowi, który od lat rozwija tę dziedzinę mechaniki. Wydaje się to ważne, gdyż niniejsza praca jest twórczą kontynuacją wcześniejszych opracowań.

**W drugim rozdziale** przybliżono najważniejsze pojęcia związane z zagadnieniami probabilistycznymi a w szczególności niezawodnością konstrukcji. Rozdział stanowi pewne rozszerzenie przeglądu literatury i ma zdefiniować pojęcia związane z treścią pracy. Między innymi omówiono poziomy metody probabilistycznych oraz modele losowe zmiennych projektowych. Ponadto uszczegółowiono pojęcie funkcji stanu granicznego.

**Rozdział trzeci** omawia szczegółowo bezpośrednio wykorzystywane w pracy metody: Monte Carlo (MC), powierzchni odpowiedzi (RSM), estymacji punktowej (PEM) oraz techniki redukcyjne próbkowania warstwowego (SS) i hipersześcianu łacińskiego (LHS). Rozdział zamyka szerszy opis techniki próbkowania ukierunkowanego (TRS), która została wykorzystana w budowie autorskiego programu.

Pojęcia i metody analizy związane z badaniem wrażliwości mechanicznej odpowiedzi konstrukcji na zmianę jej parametrów projektowych przedstawiono **w rozdziale czwartym**. Na podstawie literatury dokonano klasyfikacji tych metod, przybliżając różnorodne definicje wrażliwości oraz szeroki wachlarz ich zastosowań w analizie zagadnień inżynierskich. Kilka pojęć opisano w szerszy sposób, gdyż zostały wykorzystane w obliczeniach w dalszej części pracy. Należą do nich m.in. projektowanie przesiewowe oraz metoda Monte Carlo (MC) ukierunkowana na estymacje indeksów wrażliwości Sobola.



W najobszerniejszy **rozdziale piątym** przedstawiono kilka przykładów wykorzystania omówionych wcześniej metod. W każdym z modeli starano się skupić uwagę na wybranych zagadnieniach estymacji niezawodności i wrażliwości konstrukcji, aby w miarę możliwości przetestować jak największą liczbę wariantów obliczeniowych. Należy podkreślić, że tylko praktyka obliczeniowa może wykazać przydatność poszczególnych metod w obliczeniach inżynierskich.

W pierwszym przykładzie (Rozdz. 5.1) wykorzystano standardową i powszechnie znaną **kratownicę von Misesa**. Dla takiego, obliczeniowo łatwego modelu można było uzyskać dokładne histogramy nośności granicznej, oddzielnie dla każdej zmiennej projektowej. Takie podejście nie jest możliwe w przypadku analizy rzeczywistych konstrukcji. Obliczono globalne oraz lokalne współczynniki opisujące wrażliwość konstrukcji, a także wskaźniki wrażliwości Sobola.

**Kolumna Ziglera**, drugi z teoretycznych modeli przedstawionych w pracy (Rozdz. 5.2), posłużył do wykonania analizy chmur rozproszenia wyników obliczeń i w efekcie scharakteryzowania wrażliwości układu. Przeprowadzono także wszechstronną analizę modelu przy wykorzystaniu metody Monte Carlo (MC) wersji bezpośredniej oraz stosując metody redukcyjne próbkowania warstwowego (SS) oraz hipersześcianu łącińskiego (LHS). Uzyskane wyniki porównano z obliczeniami wykonanymi za pomocą metody powierzchni odpowiedzi (RSM), przy wykorzystaniu tych samych, wcześniej wygenerowanych próbek. Podrozdział zamyka analiza przeprowadzona autorską metodą próbkowania ukierunkowanego (TRS).

Najobszerniejszym przykładem przedstawionym w pracy jest analiza **rzeczywistej wieży telekomunikacyjnej** (Rozdz. 5.3). Aby wykonać niezwykle kompleksowe i pracochłonne obliczenia porównawcze, przyjęto jedynie dwie zmienne opisujące sztywność podparcia wieży. Oprócz klasycznej metody Monte Carlo (MC) opracowano cztery warianty obliczeń za pomocą metody powierzchni odpowiedzi (RSM), wykonane każdorazowo dla populacji 200 próbek. Tak jak w poprzednich przykładach zastosowano także metodę próbkowania ukierunkowanego (TRS). Przeprowadzona analiza pozwoliła na określenie wrażliwości konstrukcji z uwagi na zmianę parametrów jej podparcia. Obszerne wyniki wykorzystano w aproksymacji funkcji opisujących wrażliwość, co stanowiło podstawę do wyznaczenia odpowiednich liczbowych parametrów. Dodatkowo przyjęto autorski opis współczynników wrażliwości bliski wynikom analizy wykonanej za pomocą komercyjnego programu. Końcowym



efektem obliczeń jest pewna forma powierzchni wrażliwości, którą można uzyskać jedynie w wyniku czasochłonnych obliczeń w otoczeniu punktu projektowego. Jej znaczenie jest więc ograniczone.

W ostatnim przykładzie (Rozdz. 5.4) zaprezentowano kompleksowe obliczenia standardowej **kopuły prętowej** [Sorn i inni, 2016]. W tym przypadku zastosowano przede wszystkim metodę estymacji punktowej (PEM). Za pomocą wstępnej analizy parametrycznej uzasadniono wybór tej metody. Wynikiem końcowym analizy wrażliwości było określenie minimalnego pola przekroju poprzecznego prętów przy założeniu 50-cio letniego normowego poziomu niezawodności.

Pracę zamykają wnioski (Rozdz. 6) oraz spis literatury obejmujący 204 pozycje. Ponieważ literatura z zakresu zastosowań probabilistyki jest niezwykle obszerna przedstawiony spis ma bardzo ograniczony charakter. Skupiono się na obszarze ściśle związanym z prezentowanymi tematami.

W opisie metod probabilistycznych zdecydowano się na równoległe wykorzystanie nazewnictwa angielskiego. Wynika to z braku odpowiedniej terminologii w języku polskim lub powszechnej zgody dotyczącej tego nazewnictwa. Formułowanie własnych określeń wprowadziłoby wiele nieporozumień i niejednoznaczności. Dotyczy to także przyjętych skrótów.

Za najważniejsze elementy pracy można uznać:

- sformułowanie algorytmów obliczeniowych umożliwiających badanie niezawodnościowej wrażliwości konstrukcji,
- zbudowanie własnego programu wykorzystującego technikę próbkowania ukierunkowanego, pozwalającego na właściwy dobór próbek, a w efekcie na znaczne przyspieszenie wykonywanych obliczeń,
- adaptacja wybranych metod (Monte Carlo, PEM, metoda powierzchni odpowiedzi), w taki sposób aby można było przeprowadzić analizę wrażliwości niezawodnościowej.

Stworzone procedury obliczeniowe mają szersze, uniwersalne znaczenie, gdyż rozwijają metody analizy probabilistycznej.

### 1.3 Przegląd literatury

Niezawodność konstrukcji inżynierskich jest dziedziną na pograniczu nauk podstawowych i stosowanych. Analiza probabilistyczna, wraz z matematycznymi podstawami, służy do wypracowania procedur o użytkowym charakterze, umożliwiających usprawnienie procesu projektowania w kierunku: obliczeniowej efektywności, właściwego modelowania oddziaływań, materiałów i struktur oraz ekonomii. Podstawy niezawodności konstrukcji jako nauki zawarte są w szeregu opracowań monograficznych [Hart, 1982; Thoft-Christensen i inni, 1982; Augusti i inni, 1984; Madsen i inni, 1985; Ditlevsen i inni, 1996; Melchers, 1999, Ang i inni, 2007; Raizer, 2004]. Istnieje bogata literatura poświęcona analizie niezawodności wybranych typów konstrukcji inżynierskich, ze względu na: materiał konstrukcyjny, własności fizyczne i przyjęty model losowy. Zagadnienia losowej analizy konstrukcji stalowych opisane są w np. pracach [Biegus, 1999; Guedes-Soares i Garbatov, 2002], analizie niezawodności konstrukcji drewnianych poświęcone są m.in. prace [Koechler, 2007; Pieniak i inni, 2011], a tematyka niezawodności konstrukcji betonowych ujęta jest w [Nowak i Szerszen, 2002]. Wyróżnione są także przypadki niszczącego działania zewnętrznego: wiatru [Simiu i Scanlan, 1996], oddziaływań sejsmicznych [Bołotin, 1961], łącznie działającego falowania morskiego i wiatru w przypadku budowli typu offshore, gdzie konieczna jest analiza w dziedzinie czasu [Reliability of Offshore, 1992].

W Polsce przez lata wiodącym na tym polu był ośrodek krakowski pod kierownictwem prof. Janusza Murzewskiego [Murzewski, 1970, 1989]. Wartościowe prace w zakresie niezawodności konstrukcji metalowych wniósł prof. Zbigniew Mendera [Mendera, 1987]. Pod egidą środowiska krakowskiego w latach 1967 – 1992 odbyły się wydarzenia naukowe prezentujące metody probabilistyczne w mechanice z udziałem prelegentów polskich i zagranicznych [Losowe obciążenia, 1979; Projektowanie konstrukcji, 1988; Podstawy projektowania, 1998]. Istotny wkład w rozwój dziedziny wniósł ośrodek wrocławski [Biegus, 1999; Śniady, 2000], z kolei elementy losowej teorii obciążeń zawarte są w opracowaniu [Engel i Sieczkowski, 1978]. Pionierskim w dziedzinie losowej mechaniki był także ośrodek świętokrzyski, kierowany przez prof. Zbigniewa Kowala [Kowal, 2003]. Należy także wymienić prace: [Sobczyk, 1973, 1991; Sobczyk i inni, 1996; Wilde, 1981; Skalmierski i inni, 1982; Tylikowski, 1991; Kleiber i inni, 1992; Hien, 2003; Stocki, 1999, 2010; Woliński i Wróbel, 2001; Kolanek, 2007;



Kamiński, 2001, 2013; Gwóźdź i inni, 2011]. Zastosowanie metod probabilistycznych propagowali w swoich pracach także Bryja i Śniady [Bryja i inni, 1988], Mazur-Śniady i Śniady [Mazur-Śniady i inni, 1986], Sieniawska i Śniady [Sieniawska i inni, 1990], Śniady, Sieniawska, Żukowski [Śniady i inni, 1998], Sieniawska, Wysocka, Żukowski [Sieniawska i inni, 2000]. Kleiber, Knabel i Rojek [Kleiber i inni, 2004], Kleiber, Siemaszko i Stocki [Kleiber i inni, 1999], Knabel [Knabel, 2004], Stocki, Kolanek, Jendo i Kleiber [Stocki i inni, 2001], Kowal [Kowal, 2011], Dudzik i Radoń [Dudzik i inni, 2015], Radoń [Radoń, 2011, 2015], Rzeszut, Folta i Garstecki [Rzeszut i inni, 2018].

Przeglądając wymienione pozycje literatury można zauważyć, że omawiają one bardzo różnorodne zagadnienia, począwszy od ogólnych podstaw teoretycznych i metodologii rozwiązania na analizie szczególnych konstrukcji lub ich fragmentów skończywszy.

Najbardziej znanym i najczęściej stosowanym narzędziem obliczeniowym, ukierunkowanym na numeryczną analizę zjawisk losowych jest metoda symulacyjna Monte Carlo (MC), zwana metodą prób statystycznych [Metropolis i Ulam, 1949; Hammersley i Handscomb, 1964; Rubinstein, 1981]. Z metodą Monte Carlo nierozzerwalnie związany jest Polski uczone Stanisław Ulam, który wykorzystał ją w projekcie Manhattan w ośrodku badań jądrowych w Los Alamos [Ulam, 1961]. Podstawowy algorytm symulacyjny zadania inżynierskiego polega na generacji zmiennych podstawowych w postaci liczb losowych, wykonaniu w symulacyjnej pętli deterministycznego zadania projektowego oraz opisanu wyników w formie histogramu, np. estymatora rozkładu prawdopodobieństwa stanu granicznego. Ważnym zagadnieniem numerycznym, ściśle związanym z metodą Monte Carlo, jest generacja liczb losowych o zadanym rozkładzie prawdopodobieństwa [Zieliński, 1970; Gentle, 1998]. W przypadku istnienia odwracalnej dystrybuanty, generacja ta jest możliwa poprzez transformację zbioru liczb losowych o rozkładzie równomiernym z przedziału  $[0, 1]$  [Devroye, 1986; Wieczorkowski i inni, 1997]. Podstawowa, bezpośrednia technika losowania prostego metodą Monte Carlo jest najłatwiejsza do oprogramowania, jednak przy dużych zadaniach pochłania znaczący czas obliczeniowy. Opracowano wiele algorytmów redukcji wariancji, ukierunkowujących losowanie na tzw. obszar krytyczny a więc estymacji niezawodności lub prawdopodobieństwa awarii. Rozwiniętymi, tak analitycznie jak i obliczeniowo, technikami redukcyjnymi są m.in.: próbkowanie z funkcją ważności (Importance Sampling), próbkowanie warstwowe (Stratified Sampling), próbkowanie kierunkowe, (Targeted Random Sampling) czy próbkowanie z





zastosowaniem tzw. hipersześcianu łacińskiego (Latin Hypercube Sampling) [Melchers, 1999; Hurtado i inni, 1998; Shields 2014, 2015].

Użytecznym narzędziem numerycznym w analizie probabilistycznej konstrukcji inżynierskich jest metoda powierzchni odpowiedzi (Response Surface Method - RSM) [Box i inni, 1987; Hurtado i inni, 1998]. Porównanie RSM z metodą sieci neuronowych a także innymi probabilistycznymi metodami można znaleźć np. w [Gomes i inni, 2004]. Ponawiane są próby zastosowania w zagadnieniach inżynierskich teorii zbiorów rozmytych (Interval Analysis) [Niczyj, 2003], jednak ich wykorzystanie w badaniach rzeczywistych konstrukcji wydaje się ciągle odsunięte w czasie. Taką samą uwagę można sformułować o metodach opartych na analizie zbiorów wypukłych [Au, 2003]. Należy także wspomnieć o metodzie stochastycznych elementów skończonych SFEM, jako rozszerzeniu klasycznej metody elementów skończonych [Stefanou 2009; Sudret i inni, 2002].

Na bazie różnych probabilistycznych metod wykształciły się dyscypliny pochodne, tworzące szeroką tematykę niezawodności. Jedną z nich jest optymalizacja niezawodnościowa. Jest to rozwijająca się od kilku dekad dziedzina, formułująca zadania teorii projektowania w kategoriach losowych - zarówno w losowej formacji integralnych składników funkcji celu jak i warunków ograniczających. Optymalizacja niezawodnościowa jest obecnie rozwiniętą dziedziną, zarówno w teoretycznych podstawach jak i aplikacjach numerycznych z dostępnymi pakietami oprogramowania inżynierskiego [Thoft-Christensen i inni, 1986; Der Kiureghian, 2003]. Ważna klasa zagadnień losowej optymalizacji niezawodnościowej jest ukierunkowana na koszt konstrukcji [Rackwitz, 2002, 2003; Augusti, 2003].

Z optymalizacją niezawodnościową związane jest pojęcie wrażliwości probabilistycznej stanów granicznych konstrukcji na rozrzut zmiennych podstawowych [Bjerager i inni, 1989; Melchers i inni, 2004]. Często stosowane jest specjalistyczne pojęcie „robust design”, spotykane w zakresie projektowania urządzeń technicznych czy elementów konstrukcyjnych. W ogólnym ujęciu podejście to kładzie nacisk na uwzględnienie w analizie niezawodności poszczególnych elementów składowych [Kececioglu, 2003; Lagaros, 2007].

Metodom analizy wrażliwości poświęcono wiele książek i publikacji, zarówno w zakresie deterministycznym jak i probabilistycznym, a także łączącym te dwa podejścia. W przypadku metod probabilistycznych zastosowanych w analizie wrażliwości należy



wymienić takie przeglądowe pozycje jak np. [Saltelli i inni, 2008] lub prace formułujące ogólne uwagi [Fang i inni, 2014]. Definicje i klasyfikacje metod związanych z analizą niezawodności konstrukcji można znaleźć m.in. w [Hamby, 1994; Saltelli i inni, 2000, 2004; Saltelli, 2002; Frey i inni, 2003; Heiselberg i inni, 2009; Cukier i inni, 1973; Bertrand i inni, 2015; Nguyen i inni, 2015; Woods i inni, 2015; Kleiber i inni, 1991].

Probabilistyczna analiza wrażliwości konstrukcji, podobnie jak analiza niezawodności czy optymalizacja niezawodnościowa, wykonywana jest przy zastosowaniu szerokiego spektrum metod. Do klasyki obliczeniowej należy metoda Monte Carlo [Melchers i inni, 2004; Ahammed i inni, 2006; Wang i inni 2010]. Stosowane są także metody redukcyjne [Feng i inni, 2010]. Do popularnych technik zaliczyć można również metodę rozwinięcia funkcji losowej w chaos wielomianowy [Crestaux i inni, 2009; Gratiet i inni 2016] czy programowanie liniowe [Castillo i inni, 2008; Hansson i-inni, 2006]. Poszukiwane są oryginalne rozwiązania [Wei i inni, 2012]. Osobny temat stanowi analiza wrażliwości układów nieliniowych [Kong, 2008].

Nie istnieje jedna zunifikowana miara opisująca wrażliwość. Sobol zaproponował jeden z najbardziej zaawansowanych sposobów prezentacji wrażliwości w postaci wskaźników [Sobol, 1990, 2001], których zastosowaniu poświęcone są m. in. prace [Homma i inni, 1996; Sudret, 2009]. Nowe propozycje wielkości opisujących wrażliwość można znaleźć w [Xiao i Lu, 2017]. Wrażliwości probabilistyczna stanów granicznych konstrukcji na zmienność losową zmiennych podstawowych przy wykorzystaniu histogramów można znaleźć w [Skowronek, 2006].

Za pomocą metod wrażliwości probabilistycznej analizowane są praktycznie wszystkie typy konstrukcji. Nacisk kładziony jest jednak na układy podatne na imperfekcje geometryczne, np. układy prętowe, analizowane w [Bojczuk; 1999; Silicki i inni 2010; Stocki i inni, 2001; Valdebenito i inni, 2012; Song i inni, 2009; Ma, 2011; Ikedaa, 2007], czy pręty cienkościenne [Kotełko i inni, 2017; Zeinoddini i inni, 2012; Kala, 2005; Papadopoulos i inni 2013]. Pominięto tutaj obszerną literaturę dotyczącą płyt i powłok. Warto wspomnieć także o innych dziedzinach jak np. mechanika pęknięcia [Sprung, 2007] lub analiza wrażliwości platform wiertniczych [Rozmarynowski i inni, 2018].

Równoległe z rozwojem dziedziny niezawodności wykształciła się losowa teoria podejmowania decyzji, obecnie ilustrowana bogatą literaturą [Benjamin i inni, 1977; Faber, 2002].



Szybki rozwój możliwości obliczeniowych komputerów umożliwił oprogramowanie wielu metod probabilistycznych. Powstały takie programy jak STRUREL [Gollwitzer i inni, 2006], Proban [Tvedt, 2006], COSSAN [Schueller i inni., 2006] a także Numpress Explore, opracowany w IPPT w Warszawie. Zdecydowana większość prac wykorzystuje jednak komercyjne programy metody elementów skończonych (MES), budowane są jedynie algorytmy opracowujące wyniki uzyskane za ich pomocą.

Na zakończenie tego krótkiego przeglądu należy podsumować pracę ośrodka gdańskiego, który od wielu lat zajmuje się zastosowaniami metod probabilistycznych w mechanice konstrukcji. Rozwój tych prac datuje się od lat 70-tych XX w.. Zespół badawczy przez ponad dwie dekady kierowany był przez prof. Eugeniusza Bielewicza. Działania środowiska gdańskiego ukierunkowane były na generację wielowymiarowych pól losowych do opisu geometrycznych imperfekcji konstrukcji powierzchniowych oraz ich oceny niezawodności: [Bielewicz i inni, 1985, 1987, 1994, 1997, 2002; Walukiewicz i inni, 1995; Skowronek, 1987; Górski 2006; Orlik 1976, Wilde 1981, Knabe i inni, 1998; Górski i inni 2008, 2015]. Ośrodek gdański był w latach 1980 i 1985 inicjatorem i organizatorem konferencji “Problemy losowe w mechanice konstrukcji”, stanowiącej ogólnokrajowe forum poświęcone metodom losowym w mechanice [Problemy losowe, 1980, 1985]. Wiele prac było także związanych z modelowaniem pól losowych opisujących różne materiały i zagadnienia, np. pękanie [Anders, 2009], ochronę środowiska [Jankowski i inni, 1997], mechanikę gruntów [Tejchman i inni, 2009(a), 2011; Przewłócki i inni 2001, 2016], elementy betonowe [Tejchman i inni, 2009(b); Korol 2012] a także betony asfaltowe [Szydłowski i inni, 2018]. W ostatnich latach główny nacisk położono na zastosowaniu metody powierzchni odpowiedzi (RSM) w zagadnieniach inżynierskich [Winkelmann, 2013; Winkelmann i inni, 2014].

Niniejsza praca jest kolejnym wkładem ośrodka gdańskiego w rozwój metod probabilistycznych w mechanice konstrukcji. Dotyczy rozwinięcia wcześniej opracowanych technik w kierunku badania wrażliwości mechanicznej odpowiedzi na losową zmianę parametrów opisujących geometrię i definiujących materiały.



## Rozdział 2. niezawodność konstrukcji inżynierskich - podstawowe pojęcia i definicje

---

### 2.1 Wprowadzenie

Losowa natura zjawisk zachodzących w przyrodzie od lat stanowi przedmiot zainteresowania zarówno filozofii jak i nauk ścisłych. Potrzeba odczuwania ładu i przewidywalności w życiu codziennym stała się dla uczonych motywacją do prowadzenia badań nad istotą losowości oraz próbą rozpoznawania tkwiących w zjawiskach losowych regularności dających przełożyć się na język matematyczny. Przypadający na lata trzydzieste ubiegłego wieku dynamiczny rozwój dwóch dziedzin matematyki: teorii prawdopodobieństwa oraz statystyki matematycznej umożliwił wypracowanie metod badania zjawisk losowych oraz zdefiniowanie ich w języku matematycznej teorii miary. Wypracowane techniki wydobywania i analizowania informacji zawartych w danych liczbowych pochodzących z obserwacji i badań doświadczalnych stanowią cenne narzędzie umożliwiające stworzenie modelu matematycznego jak najwierniej opisującego zmienność danego zjawiska. Obecnie teoria prawdopodobieństwa jest rozległą i dynamicznie rozwijającą się dziedziną matematyki ściśle związaną z różnorodnymi zastosowaniami. [Sobczyk 2010] W odniesieniu do zagadnień mechaniki konstrukcji procedury obliczeniowe oparte na rachunku prawdopodobieństwa oraz statystyce matematycznej stanowią naukową podstawę opisu zagadnień związanych z niezawodnością i bezpieczeństwem konstrukcji.

Niezależnie od ciągłego wzrostu możliwości obliczeniowych oraz stopnia złożoności współczesnych konstrukcji inżynierskich, główne założenia dotyczące ich projektowania nie uległy zmianie. Zgodnie z wytycznymi zawartymi w normie PN-EN 1990 konstrukcję należy zaprojektować tak, aby jej nośność, użyteczność oraz trwałość były należyte. Sprawdzenie czy konstrukcja spełnia powyższe wymagania odbywa się poprzez weryfikację tzw. stanów granicznych. Stany graniczne rozdzielają dopuszczalne i niedopuszczalne stany konstrukcji - ich przekroczenie może doprowadzić do zniszczenia układu (stan graniczny nośności) bądź utrudniać jego prawidłowe funkcjonowanie (stan graniczny użytkowania).

O tym w jakim stanie znajduje się konstrukcja decyduje zbiór wielkości tzw. zmiennych podstawowych, do których wg PN EN 1990 zalicza się: oddziaływania,



wpływy środowiskowe, właściwości materiałów i wyrobów oraz dane geometryczne. Wszystkie z wymienionych wielkości podlegają wpływom czynników losowych. Podstawowym problemem, przed którym stoi projektant jest uwzględnienie losowej natury zmiennych w taki sposób, aby obliczenia wykonywane z ich udziałem odzwierciedlały możliwie jak najlepiej rzeczywisty stan konstrukcji.

Ze względu na zmienny charakter parametrów projektowych, analiza stanu naprężenia i odkształcenia w konstrukcji musi się wiązać z właściwym osądem czy konstrukcja jest w stanie służyć wystarczająco niezawodnie, przy czym według PN ISO 239 przez niezawodność rozumie się zdolność układu technicznego do wypełniania funkcji przewidzianych w projekcie, w danych warunkach eksploatacji. W zależności od tego w jaki sposób szacowana jest niezawodność (co przyjmujemy za jej miarę a także w jaki uwzględniono losową naturę zmiennych projektowych) w literaturze można znaleźć definicję trzech poziomów metod probabilistycznej analizy konstrukcji [Madsen, 1979].

## 2.2 Poziomy metod probabilistycznej analizy konstrukcji

### 2.2.1 Metody poziomu I

Podstawy metod poziomu I podane zostały w latach 40-tych i 50-tych XX w. [Freudenthal, 1947, 1956]. Ich istotą jest zapewnienie niezawodności konstrukcji bądź jej elementu poprzez zastosowanie tzw. częściowych współczynników bezpieczeństwa, które modyfikują wartości nominalne bądź charakterystyczne zmiennych projektowych według zaleceń przedstawionych w normach. Zgodnie z klasyfikacją przyjętą według normy PN-ISO 2394 zmienne podstawowe można podzielić na wyrażające efekty oddziaływań  $S$  oraz wyrażające nośność  $R$ . Symboliczny warunek bezpieczeństwa przyjęty według metody częściowych współczynników w odniesieniu do stanu granicznej nośności ma następującą postać:

$$g(S_d, R_d) \geq 0 \quad (2.1)$$

przy czym  $S_d$  i  $R_d$  są wartościami obliczeniowymi odpowiednio: efektu działań na konstrukcję oraz jej odporności. Wielkości te stanowią iloczyn bądź iloraz wielkości nominalnych/charakterystycznych zmiennych projektowych oraz częściowych współczynników bezpieczeństwa (współczynniki obciążeń, współczynniki materiałowe współczynniki konwersji itp.).



W przypadku stanu granicznej użyteczności równanie ma postać:

$$S_d \leq C \quad (2.2)$$

gdzie  $C$  jest założonym ograniczeniem wynikającym z użyteczności elementu.

Metoda stanów granicznych w połączeniu z metodą częściowych współczynników bezpieczeństwa stanowi obecnie podstawę większości norm dotyczących projektowania konstrukcji. Proces obliczeń zgodnie z tą metodą przebiega szybko oraz nie wymaga zastosowania skomplikowanych procedur zawierających elementy rachunku prawdopodobieństwa. Do wad metody zaliczyć można brak informacji dotyczących wpływu zmiany poszczególnych współczynników bezpieczeństwa na niezawodność konstrukcji (metody probabilistyczne umożliwiają ilościową ocenę prawdopodobieństwa osiągnięcia stanów granicznych w założonym okresie eksploatacji) oraz fakt, iż dobór właściwych współczynników bezpieczeństwa wymaga przyjęcia określonych założeń i nie jest wolne od decyzji arbitralnych. [Lewicki, 1995]

Procedury projektowania metodami poziomu I mają charakter deterministyczny, jednak kalibracja częściowych współczynników przeprowadzana jest na podstawie zasad rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej, dlatego metody poziomu I określa się często mianem półprobabilistycznych. [Skowronek, 2006]

### 2.2.2 Metody poziomu II

W szacowaniu niezawodności metodami probabilistycznymi uwzględnienie zmiennej natury parametrów projektowych (np. wymiarów elementów, obciążenia, wytrzymałości materiału itp.) uzyskuje się poprzez przedstawienie ich jako zmiennych losowych  $\{X_i\}$ . W przypadku metod poziomu II, zwanych bezrozkładowymi, nie jest wymagana pełna identyfikacja typu rozkładu zmiennych projektowych – wystarczającą podstawę obliczeń stanowią dwa pierwsze momenty tych rozkładów będące miarą wartości centralnej i rozrzutu.

W procedurach metod probabilistycznych poziomu II jako miarę niezawodności przyjmuje się tzw. wskaźnik niezawodności  $\beta$  (określany często mianem wskaźnika niezawodności „drugiego momentu”). Wraz z rozwojem przybliżonych metod analizy niezawodności, ewolucji ulegał również wskaźnik  $\beta$ , przyjmując w swej nazwie rozszerzenie oznaczające sposób jego szacowania [Knabel, 2004].



Gdy wszystkie zmienne podstawowe opisane są rozkładem Gaussa możliwe jest algebraiczne sformułowanie kryterium stanu granicznego, czyli tzw. funkcji stanu granicznego  $g(\mathbf{X})$ , której argumentami są zmienne podstawowe. W przypadku liniowej funkcji stanu granicznego jest ona automatycznie zmienną o rozkładzie normalnym, natomiast estymacja prawdopodobieństwa awarii jest standardowym matematycznym zadaniem w zakresie zmiennych Gaussa. Nieliniową funkcję stanu granicznego można linearyzować np. w punkcie wartości średnich, dochodząc do podobnego rezultatu. Powyższe działania prowadzą do tzw. wskaźnika niezawodności Cornella [Cornell, 1969] – ilorazu estymatorów wartości średniej i odchylenia standardowego funkcji stanu granicznego  $g(\mathbf{X})$ . Ogólne sformułowanie wskaźnika Cornella obciążone jest wadą – przy różnych matematycznych formach funkcji  $g(\mathbf{X})$  opisujących to samo zadanie można otrzymać różne wskaźniki niezawodności, a tym samym różne prawdopodobieństwa awarii. Rozwiązanie nie jest więc niezmiennicze [Putresza i inni, 1995].

Propozycję rozwiązania niezmienniczego względem transformacji funkcji stanu granicznego podali Hasofer i Lind [Hasofer i inni, 1974]. W koncepcji tej nieliniowa funkcja stanu granicznego linearyzowana jest w tzw. punkcie projektowym, o najmniejszej odległości od początku układu w przestrzeni zmiennych podstawowych standaryzowanych. Kolejne koncepcje wskaźników niezawodności podali Rackwitz i Fiessler [Rackwitz i inni, 1978] oraz Ditlevsen [Ditlevsen, 1979].

W zakresie metod poziomu II wyróżniamy dwa podejścia szacowania wskaźników niezawodności: FORM (First-Order Reliability Methods), w którym funkcja stanu granicznego aproksymowana jest funkcją liniową oraz SORM (Second-Order Reliability Methods), o aproksymacji kwadratowej [Melchers, 1999; Nowak, 2000]

### 2.2.3 Metody poziomu III

Analiza niezawodności przeprowadzona metodami poziomu III pozbawiona jest wszelkich uproszczeń, przez co, w przypadku rzeczywistych problemów inżynierii, nie jest możliwe zastosowanie zamkniętych rozwiązań analitycznych. Dotyczy to zarówno zmiennych projektowych (w metodach poziomu III wymagana jest pełna wiedza odnośnie ich rozkładu) jak również samej miary niezawodności, którą w tym przypadku

stanowi wprost prawdopodobieństwo, że w założonym procesie eksploatacji nie zostaną osiągnięte stany graniczne.

Do zadań metod poziomu III, poza wymiarowaniem i weryfikacją niezawodności konstrukcji a także kalibrowaniem miar niezawodności metod niższych poziomów należy również optymalizacja zadań niezawodności ustrojów.

Należy podkreślić, że w literaturze można znaleźć inne definicje poziomu III niezawodności, np. [Murzewski, 1989].

### 2.3 Podstawowe pojęcia i definicje

Celem probabilistycznej analizy konstrukcji jest oszacowanie prawdopodobieństwa awarii (rozumianej jako przekroczenie stanu granicznego) na podstawie przyjętego matematycznego modelu, w którym wybrane bądź też wszystkie zmienne projektowe przyjęte są jako zmienne losowe. Podstawowe parametry losowe grupowane są w wektorze kolumnowym  $\mathbf{X} = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  zwanym wektorem losowym podstawowych zmiennych projektowych. Wektor  $\mathbf{X}$  przyjmuje wartości w  $n$ -wymiarowej przestrzeni liczb rzeczywistych  $R^n$ . Pojedynczy zbiór wartości poszczególnych zmiennych podstawowych nazywamy realizacją zmiennej losowej  $\mathbf{X}$  i oznaczamy jako  $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ .

Stany graniczne w analizie niezawodności wyrażone są poprzez tzw. uogólnioną funkcję stanu granicznego  $g(\mathbf{X})$ , która dzieli przestrzeń zmiennych następująco:

$$\begin{aligned} g(\mathbf{X}) \leq 0: & \quad \text{obszar awarii } \Omega_f \\ g(\mathbf{X}) = 0: & \quad \text{powierzchnia graniczna} \\ g(\mathbf{X}) > 0: & \quad \text{obszar bezpieczny } \Omega_s \end{aligned} \quad (2.3)$$

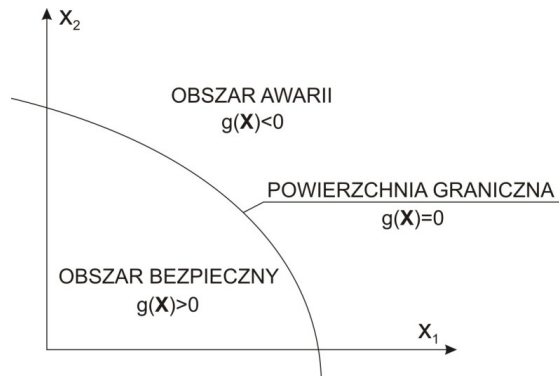
Ilustrację powierzchni granicznej oraz obszarów: bezpiecznego i awarii dla przypadku dwuwymiarowego przedstawiono na rys 2.1.

Na podstawie zapisanego warunku stanu granicznego prawdopodobieństwo awarii wyraża się następująco:

$$p_f = p(\Omega_f) = p(g(\mathbf{X}) \leq 0) \quad (2.4)$$







Rysunek 2.1 Ilustracja powierzchni granicznej oraz obszarów: bezpiecznego ( $\Omega_s$ ) i awarii ( $\Omega_f$ ) - przypadek dwuwymiarowy

W przypadku gdy dla danego rozkładu prawdopodobieństwa istnieje funkcja gęstości to prawdopodobieństwo awarii można zapisać w postaci całki:

$$p_f = \int_{\Omega_f} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (2.5)$$

Wyznaczenie całki wyrażonej wzorem (2.5) może być kłopotliwe ze względu na to, że:

- funkcja gęstości prawdopodobieństwa  $f(\mathbf{x})$  może nie być dobrze znana (dane statystyczne lub eksperymentalne mogą być niekompletne),
- funkcja graniczna  $g(\mathbf{X})$  może zawierać w sobie pewne niedokładności związane z przyjętym modelem zachowania się konstrukcji,
- całkowanie numeryczne wyrażenia 2.5 w przypadku dużej liczby zmiennych losowych ( $n > 5$ ) jest bardzo trudne, a czasem wręcz niemożliwe do przeprowadzenia.

Ze względu na wyżej wymienione ograniczenia szacowania prawdopodobieństwa awarii  $p_f$  szerokie zastosowanie znalazła metoda symulacyjna Monte Carlo, która umożliwia wykonanie całkowania wielowymiarowego poprzez zastosowanie odpowiednio dużej liczby symulacji polegających na generowaniu, zgodnie z przyjętym rozkładem prawdopodobieństwa, zmiennych projektowych o charakterze losowym. Metoda Monte Carlo została szczerzej opisana w dalszej części pracy.

Alternatywą dla prawdopodobieństwa awarii  $p_f$ , przy określaniu bezpieczeństwa konstrukcji, jest wskaźnik niezawodności  $\beta$ . Poniżej przedstawiono wybrane definicje miar niezawodności wykorzystane w niniejszej rozprawie. Szczegółowy opis tych miar można znaleźć m.in. w [Winkelmann, 2013].



## 2.4 Wybrane miary niezawodności

Przyjmując założenie, że całkowita wytrzymałość materiałów konstrukcji  $R$  oraz suma obciążeń  $S$  na nią działających są zmiennymi losowymi o rozkładzie normalnym, prawdopodobieństwo awarii  $p_f$  można opisać następująco:

$$p_f = P(R - S \leq 0) = P(M \leq 0) \Phi\left(\frac{E[M]}{D[M]}\right) \quad (2.6)$$

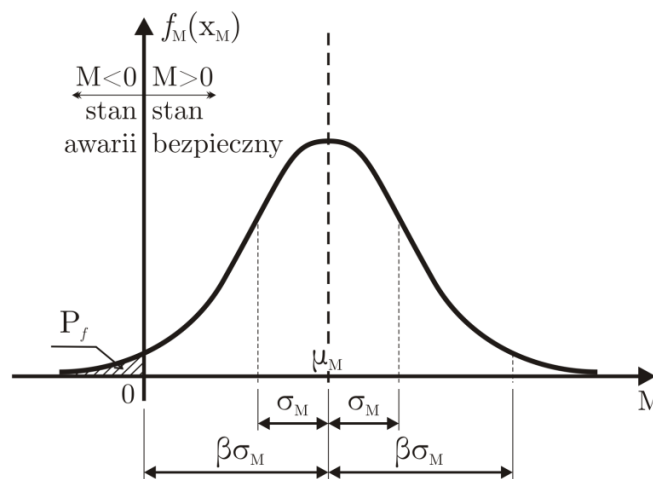
gdzie:  $M$  jest zapasem bezpieczeństwa (także opisanym rozkładem normalnym),  $\Phi(\cdot)$  jest funkcją dystrybuanty rozkładu normalnego o zerowej wartości średniej i jednostkowym odchyleniu standardowym,  $E[M]$  reprezentuje wartość oczekiwaną (średnią) zapasu bezpieczeństwa, a  $D[M]$  – jego odchylenie standardowe.

Wskaźnik niezawodności  $\beta$ , określany jest jako odwrotność współczynnika zmienności zapasu bezpieczeństwa [Cornell, 1969]:

$$\beta = \frac{1}{v_M} = \frac{D[M]}{E[M]} \quad (2.7)$$

gdzie:  $v_M$  to współczynnik zmienności zapasu bezpieczeństwa.

Interpretację graficzną wskaźnika niezawodności Cornella przedstawia rys. 2.2.



Rysunek 2.2 Graficzna interpretacja wskaźnika niezawodności wg Cornella [Winkelmann, 2013]

Związek pomiędzy wskaźnikiem niezawodności  $\beta$  a prawdopodobieństwem zniszczenia można więc przedstawić następująco:

$$\beta = -\Phi^{-1}(p_f) \quad (2.8)$$

gdzie  $\Phi^{-1}(\cdot)$  jest funkcją odwrotną dystrybuanty rozkładu normalnego o zerowej wartości średniej i jednostkowym odchyleniu standardowym.

Jeżeli zmienne  $R$  i  $S$  są nieskorelowane, to wskaźnik niezawodności  $\beta$  można zapisać w postaci:

$$\beta = \frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \quad (2.9)$$

gdzie  $\mu_R$  to wartość oczekiwana zmiennej losowej opisującej wytrzymałości materiałów,  $\mu_S$  to wartość oczekiwana zmiennej losowej obciążenia,  $\sigma_R$  oraz  $\sigma_S$  to odchylenia standardowe tych zmiennych.

W szczególnych przypadkach funkcję stanu granicznego  $g(\mathbf{x})$  można zdefiniować jako  $n$ -wymiarową płaszczyznę:

$$g(\mathbf{x}) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i x_i = a_0 + \mathbf{a}^T \mathbf{x} \quad (2.10)$$

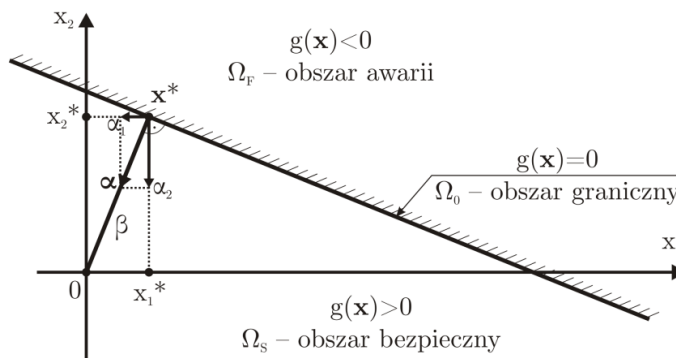
gdzie:  $a_0$  jest wyrazem wolnym,  $n$  wymiarem płaszczyzny,  $\mathbf{a} = \{a_1, a_1, \dots, a_n\}$  wektorem kolumnowym współczynników kierunkowych  $n$ -wymiarowej płaszczyzny, a  $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  wektorem zmiennych losowych.

W takim przypadku wskaźnik niezawodności będzie przedstawiał wzór:

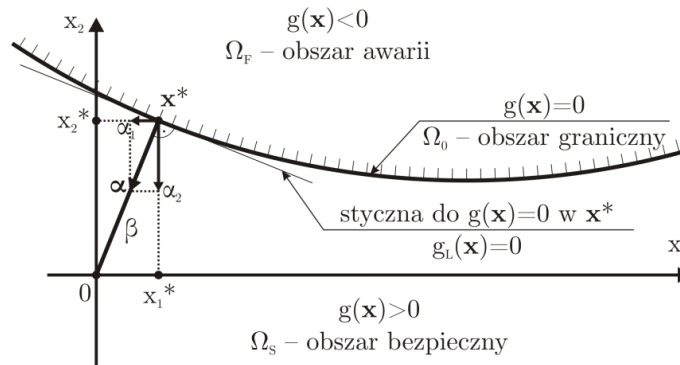
$$\beta = \frac{a_0 + \mathbf{a}^T E[\mathbf{x}]}{\sqrt{\mathbf{a}^T C_x \mathbf{a}}} \quad (2.11)$$

gdzie:  $E[\mathbf{x}]$  jest wektorem wartości oczekiwanych zmiennej losowej  $\mathbf{x}$ , a  $C_x$  jest macierzą kowariancyjną zmiennej losowej  $\mathbf{x}$ .

Interpretację graficzną indeksu niezawodności przedstawiono na rys. 2.3 oraz rys. 2.4.



Rysunek 2.3 Graficzna interpretacja wskaźnika niezawodności Cornella - liniowa  $n$ -wymiarowa płaszczyzna stanu granicznego [Winkelmann, 2013]



Rysunek 2.4 Graficzna interpretacja wskaźnika niezawodności – nieliniowa  $n$ -wymiarowa powierzchnia stanu granicznego [Winkelmann, 2013]

Jedną z możliwych interpretacji wskaźnika niezawodności, zaproponowaną przez Hasofera i Linda w 1974 roku [Hasofer i inni, 1974] jest w tym przypadku:

$$\beta_{HL} = \min_{g(\mathbf{x})=0} \beta(\mathbf{x}) = \min_{g(\mathbf{x})=0} \sqrt{(\mathbf{x} - E[\mathbf{x}])^T C_x^{-1} (\mathbf{x} - E[\mathbf{x}])}, \quad \mathbf{x} \in \Omega_0^{(x)} \quad (2.12)$$

Punkt  $\mathbf{x}^*$  leżący na powierzchni granicznej nazywa się punktem projektowym (obliczeniowym).

Jeżeli powierzchnia graniczna zdefiniowana jest jako płaszczyzna  $n$  – wymiarowa (rys. 2.4), to wartości liczbowe wskaźnika niezawodności Hasofera – Linda  $\beta_{HL}$  oraz wskaźnika niezawodności Cornella  $\beta$  są jednakowe. Wskaźnik niezawodności Hasofera – Linda jest więc uogólnieniem wskaźnika niezawodności Cornella dla nieliniowych powierzchni granicznych.

Poszukiwanie wskaźnika niezawodności Hasofera – Linda  $\beta_{HL}$  można zdefiniować jako proces optymalizacji z jedną funkcją celu. Celem optymalizacji jest oczywiście znalezienie właściwego punktu projektowego  $\mathbf{x}^*$ . Rozwiązania tego problemu dostarcza wiele algorytmów iteracyjnych, jednak nie można mieć pewności czy algorytmy te będą zbieżne we wszystkich przypadkach funkcji stanów granicznych.

## 2.5 Losowe modele podstawowych zmiennych projektowych

Przyjęcie właściwego modelu losowego i związanych z nim zmiennych podstawowych w procesie analizy i projektowania zależy od dostępności takich czynników jak: bazy rzeczywistych danych pomiarowych, programów obliczeniowych oraz podstaw teoretycznych dostępnych badaczowi na gruncie teorii

prawdopodobieństwa. Proces budowania modelu losowego w ogromnej mierze zależy również od celu działania, którym może być praca badawcza o charakterze naukowym bądź też zastosowanie inżynierskie. W przypadku analiz inżynierskich dąży się do maksymalnego uproszczenia stosowanych algorytmów. Podstawowymi kategoriami w modelowaniu losowym parametrów są:

- zmienna losowa jednowymiarowa - wielkość jednowartościowa (pojedynczy wynik pomiaru), funkcja zdarzenia elementarnego;
- zmienna losowa wielowymiarowa (wektor losowy) - kilka wyników pojedynczego pomiaru (np. granica plastyczności, wytrzymałości, moduł sprężystości w statycznej próbie rozciągania);
- jednowartościowy proces stochastyczny (losowy) - pojedynczy, losowy wynik doświadczenia, w funkcji czasu - funkcja zdarzenia elementarnego i czasu [Augusti i inni, 1984; Ditlevsen i inni, 1996; Bucher, 2009];
- wielowymiarowy proces stochastyczny (losowy) - wektor składający się z procesów składowych, funkcji zdarzenia elementarnego i czasu [Wen i inni, 1981];
- pole losowe - zmienna losowa zdefiniowana w każdym punkcie dwu- lub trójwymiarowej przestrzeni. Przykładem są losowe odchyłki płaszcza zbiornika walcowego [Adler, 1981; Vanmarcke, 1983],
- czasoprzestrzenne pole losowe – funkcja zdarzenia elementarnego i czasu, zdefiniowana w każdym punkcie dwu- lub trójwymiarowej przestrzeni.

Warto podkreślić, że modele procesów losowych stosowane są w zagadnieniach związanych z dominującym wpływem funkcji czasu (zagadnienia dynamiki stochastycznej związanej z losowymi drganiami) na mechaniczną odpowiedź układu [Augusti, 1984; Bucher, 2009]. Z kolei modele pól losowych, o rozkładzie przestrzennym stosuje się w przypadku znaczącego wpływu geometrii układu [Vanmarcke, 1983; Adler, 1981; Górski i inni, 2011].

Pierwszym etapem analizy niezawodności konstrukcji jest zdefiniowanie zmiennych podstawowych problemu. Na podstawie statystycznej bazy danych, w zależności od postawionego zadania, można poszukiwać estymatorów wartości średniej, wariancji, momentów wyższych rzędów, czy też estymatora funkcji gęstości prawdopodobieństwa. Ten ostatni zawiera najwięcej informacji, gdyż umożliwia przypisanie danej zmiennej podstawowej znanej funkcji gęstości prawdopodobieństwa, a



tym samym odpowiada poziomowi III analizy niezawodności. Analiza na poziomie estymatorów wartości średniej i wariancji prowadzi do poziomu II, wykorzystującego wskaźniki niezawodności.

Odpowiednie przypisanie właściwego typu rozkładu prawdopodobieństwa poszczególnym zmiennym podstawowym w problemach inżynierii było i jest celem wielu prac badawczych. Wykorzystywane są w tym celu zazwyczaj bazy danych pomiarowych lub analiza statystyczna wyników badań eksperymentalnych. Próba podsumowania tych prac zawarta jest między innymi w książkach Nowaka i Collinsa [Nowak i inni, 2000] oraz Melchersa [Melchers, 1999]. Przykładowo:

- w modelowaniu obciążeń stałych oraz długotrwałych składników obciążeń zmiennych adekwatną jest zmienna o rozkładzie normalnym [Nowak i inni, 2000];
- obciążenia zmienne modelowane są zazwyczaj rozkładem gamma [Corotis i inni, 1977], przy czym obciążenie maksymalne można modelować rozkładem ekstremów typu I (Gumbela) [Gumbel, 1958; Chalk i inni, 1980; Kotz i inni, 2000]. Odrębne podejście, ściśle powiązane z eksperymentami w przypadku zmiennego obciążenia mostów, zaproponowali Nowak i Hong [Nowak i inni, 1991];
- obciążenie wiatrem - w uproszczonym modelu zmiennej losowej prędkości wiatru przypisywany jest rozkład ekstremów typu I (Gumbela) [Ellingwood i inni, 1999]. W pełnej analizie obciążenie wiatrem winno być modelowane procesem stochastycznym lub czasoprzestrzennym polem losowym [Żurański, 1978; Simiu i inni, 1996; Nowak i inni, 2000];
- obciążenie śniegiem modelowane jest rozkładem logarytmiczno-normalnym, rozkładami ekstremów typu I (Gumbel) lub typu II (Frechet) [Ellingwood i inni, 1983]. Kalibracja obliczeniowych wartości obciążenia śniegiem na podstawie odpowiednich statystyk przedstawiona jest w pracach [Ellingwood, 1981; Ellingwood i inni, 2017];
- obciążenie sejsmiczne (dynamiczne) a ściślej przyspieszenie podłoża gruntowego, jako skomplikowany proces losowy o długim okresie powrotu (rzędu 50 lat), z możliwym uproszczonym opisem quasistatycznym, może być modelowane rozkładem ekstremów typu II [Bołotin, 1961; Augusti i inni, 1984];
- imperfekcje geometryczne i materiałowe modelowane są na podstawie statystycznej bazy pomiarów odchyłek wymiarów geometrycznych; w przypadku



układów powierzchniowych konieczny jest model pola losowego odchyłek [Biegus, 1999];

- obciążenie wiatrem i falowaniem morskim (obiekty offshore) modelowane są jako wielowymiarowe procesy losowe [Wen i inni, 1981; Simiu i Scanlan, 1996];
- parametry wytrzymałościowe (np. granica plastyczności stali) – modelowane są rozkładem logarytmiczno- normalnym lub rozkładem ekstremów typu III [Weibull, 1951; Thoft-Christensen i inni, 1986]. Rozkład Weibulla użyteczny jest w modelowaniu wytrzymałości zmęczeniowej oraz w zagadnieniach mechaniki pękania,

Odrębnym i trudnym w swej ilościowej analizie jest problem szacowania prawdopodobieństwa błędu ludzkiego [Nowak i inni, 2000]

## Rozdział 3. Wybrane metody analizy niezawodności konstrukcji

---

### 3.1 Metoda Monte Carlo MC

#### 3.1.1 Ogólne założenia metody

Oficjalne narodziny metody Monte Carlo miały miejsce w 1949 roku, kiedy to w „Journal of the American Statistical Association” zamieszczono publikację Nicolasa Metropolisa i Stanisława Ulama pt. : „The Monte Carlo Method”. Rozważania zawarte w pracy dotyczyły wykorzystania liczb pseudolosowych do symulacji rozpraszania i absorpcji neutronów w ramach prowadzonego w latach czterdziestych ubiegłego stulecia programu budowy pierwszej bomby atomowej [Chłopek, 2009].

Wraz z intensywnym wzrostem mocy obliczeniowych komputerów, przypadającym na lata 70. XX wieku, metoda Monte Carlo zyskała na znaczeniu i znalazła zastosowanie w szerokiej gamie dziedzin nauk technicznych, w tym również w zagadnieniach dotyczących niezawodności układów konstrukcyjnych. Główną ideą podejścia Monte Carlo jest modelowanie matematyczne zjawisk poprzez zastosowanie algorytmów wykorzystujących generację liczb losowych. Podstawową zaletą metody jest możliwość zastosowania jej do procesów, których znaczna złożoność uniemożliwia przewidzenie ich wyników za pomocą podejścia analitycznego.

Algorytm symulacji Monte Carlo, w dużym uproszczeniu można przedstawić następująco:

- Etap 1:* wybór zmiennych projektowych opisanych losowo oraz wygenerowanie ciągu liczb dla każdej zmiennej zgodnie z przyjętym dla niej rozkładem prawdopodobieństwa,
- Etap 2:* sformułowanie deterministycznej miary niezawodności układu,
- Etap 3:* rozwiązanie dla każdej realizacji zmiennych podstawowych formuły logicznej stanowiącej miarę niezawodności układu oraz zapisanie rezultatu liczbowego,
- Etap 4:* interpretacja zbioru wyników - rezultatem symulacji jest unormowany histogram będący estymatorem gęstości rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej wynikowej. Na jego podstawie szacowane są charakterystyki statystyczne zmiennej wyjściowej.





Efektywne wykorzystanie symulacji Monte Carlo w analizie niezawodności wymaga po pierwsze przyjęcia modeli losowych parametrów projektowych w taki sposób, aby jak najwierniej opisywały daną wielkość, a po drugie opracowania efektywnej metody ich symulacji (wiarygodne oszacowanie prawdopodobieństwa awarii powinno być możliwe dla jak najmniejszej liczby symulacji).

### 3.1.2 Teoretyczne podstawy metody Monte Carlo

Bezpośrednia symulacja Monte Carlo polega na wygenerowaniu zgodnie z założoną dla rozpatrywanego problemu funkcją gęstości rozkładu prawdopodobieństwa  $f_X(\mathbf{x})$  zbioru realizacji  $\mathbf{x}_i$ ,  $i = 1, \dots, N$  zmiennych losowych, a następnie zweryfikowaniu czy dana realizacja należy do obszaru awarii  $\Omega_f$  czy też nie [Knabel, 2004]. Celem dokonanego sprawdzenia jest określenie funkcji charakterystycznej zbioru  $\Omega_f$  zdefiniowanej w następujący sposób:

$$I_{\Omega_f}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } \mathbf{x} \in \Omega_f \\ 0 & \text{gdy } \mathbf{x} \notin \Omega_f \end{cases} \quad (3.1)$$

Funkcja  $I_{\Omega_f}(\mathbf{X})$  jest zmienną losową o rozkładzie dwupunktowym:

$$p[I_{\Omega_f}(\mathbf{X}) = 1] = p_f, \quad p[I_{\Omega_f}(\mathbf{X}) = 0] = 1 - p_f \quad (3.2)$$

Wartość średnią i wariancję zmiennej  $I_{\Omega_f}(\mathbf{X})$  opisują następujące zależności:

$$\bar{I}_{\Omega_f}(\mathbf{X}) = E(I_{\Omega_f}(\mathbf{X})) = 1 \cdot p_f + 0 \cdot (1 - p_f) = p_f \quad (3.3)$$

$$Var[I_{\Omega_f}(\mathbf{X})] = E\left[\left(I_{\Omega_f}(\mathbf{X})\right)^2\right] - \left(E[I_{\Omega_f}(\mathbf{X})]\right)^2 = p_f(1 - p_f) \quad (3.4)$$

W metodzie Monte Carlo wyznaczenie stosunku liczby realizacji należących do obszaru awarii do całkowitej liczby realizacji  $N$  umożliwia estymację prawdopodobieństwa awarii  $\hat{p}_f$ . Wielkość ta równa jest estymatorowi wartości średniej funkcji charakterystycznej zbioru  $\Omega_f$ :

$$\hat{p}_f = \hat{I}_{\Omega_f} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I_{\Omega_f}(\mathbf{X}_i) \quad (3.5)$$

Błąd estymatora prawdopodobieństwa awarii wyraża się poprzez jego wariancję

$$\text{Var}(\hat{p}_f) = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \text{Var}(I_{\Omega_f}(\mathbf{X}_i)) = \frac{1}{N^2} N p_f (1 - p_f) = \frac{1}{N} p_f (1 - p_f) \quad (3.6)$$

Z powyższego zapisu wynika, że wraz ze wzrostem liczby realizacji  $N$  zmniejsza się błąd estymatora prawdopodobieństwa awarii  $\hat{p}_f$ . Miarą błędu jest tzw. współczynnik zmienności estymatora:

$$v_{\hat{p}_f} = \sqrt{\frac{1 - p_f}{N p_f}} \quad (3.7)$$

Powyższe równanie nasuwa następujące wnioski: po pierwsze współczynnik zmienności estymatora zmierza do zera wraz ze wzrostem liczby symulacji  $N$ , a po drugie nie zależy on od rozmiaru wektora zmiennej losowej  $\mathbf{X}$ , a jedynie od wielkości szacowanego prawdopodobieństwa awarii. W przypadku rzeczywistych konstrukcji inżynierskich, dla których prawdopodobieństwo awarii oscyluje w granicach  $10^{-7} \div 10^{-4}$ , oznacza to, że wymagana liczba symulacji powinna mieścić się w przedziale  $N = 10^6 \div 10^9$ . W praktyce stosowany jest szereg technik, mających na celu zredukowanie liczby symulacji przy jednoczesnym zachowaniu ustalonego poziomu współczynnika zmienności wyników. Do technik tych zaliczamy między innymi: próbkowanie ukierunkowane (TRS - Targeted Random Sampling), próbkowanie warstwowe (SS - Stratified Sampling), próbkowanie hipersześcianu łacińskiego (LHS - Latin Hypercube Sampling), próbkowanie wagowe (IS - Importance Sampling), próbkowanie chybił-trafił (Hit-or-Miss Sampling), próbkowanie rosyjskiej ruletki (Russian Roulette Sampling) oraz wiele innych. W pracy ograniczono się do opisu trzech pierwszych z wymienionych technik.

Do niewątpliwych zalet metody Monte Carlo należą:

- możliwość zastosowania w zaawansowanych problemach, także nieliniowych (o dużej liczbie zmiennych lub skomplikowanej funkcji stanu granicznego);
- możliwość pominięcia skomplikowanych wzorów i procedur stosowanych w innych metodach szacowania niezawodności;
- brak wymogu użycia skomplikowanego specjalistycznego oprogramowania,
- w przypadku zadań o niewielkim czasie wykonania pojedynczej symulacji metoda Monte Carlo w klasycznej postaci może być stosowana do weryfikacji wyników analizy niezawodności otrzymanych innymi metodami (np. w przypadku



stosowania metod FORM lub SORM metoda Monte Carlo umożliwia wykrycie znacznych błędów wynikających z nieuwzględnienia wielokrotnych punktów projektowych).

Wadami metody są m. in.:

- duża czasochłonność obliczeń;
- brak pewności co do otrzymanego wyniku - dokonując nawet bardzo dużej liczby iteracji otrzymane wyniki zawsze będą stanowiły jedynie próbę wszystkich możliwości,
- rezultaty otrzymane za pomocą metody Monte Carlo są zależne od jakości generatora liczb pseudolosowych (w przypadku pojedynczych zmiennych losowych) oraz programów symulujących pola losowe (w przypadku zagadnień wielowymiarowych).

## 3.2 Metoda powierzchni odpowiedzi (Response Surface Method RSM)

### 3.2.1 Ogólne założenia metody

Metodą powierzchni odpowiedzi (RSM) w ogólności określa się zbiór matematycznych i statystycznych technik, mających na celu określenie interakcji pomiędzy wielkością objaśniającą interesujące nas zjawisko a zmianą wartości składających się na nie czynników.

W pełnym procesie wykorzystania metody powierzchni odpowiedzi można wyróżnić trzy etapy. Pierwszym z nich jest wyodrębnienie spośród wszystkich badanych czynników tych, które w istotny sposób wpływają na powierzchnię odpowiedzi. Wstępna interpretacja interakcji pomiędzy badanymi czynnikami a ich wpływem na odpowiedź układu nazywana jest fazą zerową metody powierzchni odpowiedzi. Odpowiednie zaplanowanie eksperymentu daje możliwość przeglądu przestrzeni realizacji zmiennych zadania co umożliwia uzyskanie możliwie jak największej ilości informacji o badanym procesie, przy jednoczesnej minimalizacji kosztów obliczeń. Kolejne stadium metody skupia się na takim wymodelowaniu odwzorowania układu aby jak najlepiej przybliżyło rzeczywiste zachowanie konstrukcji pod wpływem zmiany rozpatrywanych czynników. Ostatni etap metody związany jest z poszukiwaniem założeń optymalizacji mających na celu minimalizację liczby realizacji zmiennych zadania przy jednoczesnym zachowaniu

pożądaney wartości odpowiedzi konstrukcji [Bogucki i inni, 2003], [Montgomery, 1997], [Hill i inni, 1966].

### 3.2.2 Teoretyczne podstawy metody powierzchni odpowiedzi

W analizie niezawodności zależność  $y = g(\mathbf{X})$  opisująca stan konstrukcji ma zwykle postać niejawną. Głównym celem metody powierzchni odpowiedzi jest zastąpienie powyższej relacji adekwatną aproksymacją  $\hat{y} = \hat{g}(\mathbf{X})$ , umożliwiającą efektywne oszacowanie prawdopodobieństwa awarii  $p_f$ . Funkcja  $\hat{y}(\mathbf{x})$  jest odzwierciedleniem relacji odpowiedzi układu w zależności od założonych w zadaniu losowych zmiennych projektowych.

$$\hat{y}(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \varepsilon \quad (3.8)$$

W powyższej formule  $\mathbf{x} = [x_1; x_2; \dots, x_n]$  oznacza wektor realizacji zmiennych projektowych, natomiast  $\varepsilon$  jest statystycznym błędem obliczeniowym, uwzględniającym fakt, że pewne źródła zmienności nie zostały zawarte w funkcji  $f(\mathbf{x})$ . Błąd ten charakteryzuje się rozkładem normalnym o średniej  $\mu_\varepsilon = 0$

Funkcja  $f(\mathbf{x})$  zwykle ma postać wielomianu pierwszego bądź drugiego stopnia. Jeżeli obszar, na którym poszukuje się odpowiedzi układu jest wąski, bądź charakteryzuje się niskim współczynnikiem skośności, wówczas powierzchnia odpowiedzi może być aproksymowana wielomianem stopnia pierwszego - mówimy wtedy o modelu pierwszego rzędu. Jego ogólna postać jest następująca:

$$\hat{y}(\mathbf{x}) = B_0 + \sum_{i=1}^n B_i x_i + \varepsilon \quad (3.9)$$

Jeżeli krzywizna powierzchni odpowiedzi jest na tyle znacząca, że nie można jej przybliżyć wielomianem stopnia pierwszego, wówczas do jej opisu zaleca się użycie wielomianu stopnia drugiego- model taki nazywa się modelem drugiego rzędu i zapisuje następująco:

$$\hat{y}(\mathbf{x}) = \beta_0 + \sum_{i=1}^n B_i x_i + \sum_{i=1}^n B_{ii} x_i^2 + \sum_{i < j}^n \sum_{j=2}^n B_{ij} x_i x_j + \varepsilon \quad (3.10)$$

W celu dopasowania współczynników  $B$  wielomianu (nazywanych także współczynnikami regresji) stosuje się najczęściej metodę najmniejszych kwadratów.



Na ogół wszystkie rozwiązania metodą powierzchni odpowiedzi wykonane są przy użyciu jednego z powyższych modeli lub ich kombinacji. Przyjęty model powinien najdokładniej jak to możliwe odzwierciedlać wszelkie występujące w odpowiedzi układu nieliniowości (jeśli takie w ogóle istnieją).

Mało prawdopodobnym jest aby model wielomianu był wiarygodnym przybliżeniem wyjściowej odpowiedzi układu na całej przestrzeni zmiennych, natomiast na ograniczonym obszarze pozwala on osiągnąć zadowalające dopasowanie [Montgomery, 2012].

Wykorzystanie metody powierzchni odpowiedzi w szacowaniu niezawodności stanowi skuteczne narzędzie w pozyskiwaniu interesujących informacji o badanym modelu przy jednoczesnym niskim nakładzie obliczeń numerycznych. Stosując tę metodę należy mieć jednak na uwadze, iż bazuje ona jedynie na aproksymacyjnie wygenerowanej powierzchni odpowiedzi układu a zatem wyniki uzyskane przy jej użyciu są przybliżone i jednocześnie zależne od poprawności przyjętej powierzchni.

Gładka natura przyjętej aproksymacji wielomianem pozwala wyeliminować trudności obliczeniowe jakie pojawiają się w przypadku dyskretnego zbioru punktów obliczeniowych. Ma to znaczenie np. w obliczeniach wykorzystujących pochodne funkcji - założone aproksymowane odwzorowanie odpowiedzi układu umożliwia wyznaczenie pochodnych w miejscach, w których wyjściowo byłaby ona trudna do oszacowania bądź w ogóle nie istniała [Sobieski i inni, 1997].

Ograniczeniem metody jest brak możliwości stworzenia jednej odpowiedzi układu. Problem ten może pojawić się już na etapie planowania doświadczenia (dobrze dyskretnych punktów na podstawie których przeprowadza się aproksymację). Liczba tych punktów stanowi obliczeniowy problem w przypadku skomplikowanych konstrukcji. Do ich ograniczenia stosuje się techniki redukcji wariancji.

### 3.3 Metoda estymacji punktowej (Point Estimate Method PEM)

Głównym założeniem metody estymacji punktowej (Point Estimate Method), po raz pierwszy zaproponowanej przez Rosenblueth'a w 1975 roku, jest zastąpienie ciągłej zmiennej losowej  $X$  o funkcji gęstości rozkładu  $f_X(x)$  zmienną losową dyskretną składającą się z  $N$  impulsów o rozkładzie prawdopodobieństwa opisanym następująco:



$$p_x(x) = \sum_{i=1}^N \delta(x-x_i) p(x_i) \quad (3.11)$$

W powyższej formule  $\delta(x-x_i)$  oznacza deltę Diraca, natomiast  $p(x_i)$  są prawdopodobieństwami przypisanymi pewnym ustalonym punktom  $x_i$ . Wzór 3.11 opisuje nieskończenie dużą liczbę rozkładów. W metodzie PEM dąży się do znalezienia możliwie małej liczby  $N$  punktów, dla której momenty rzędu  $k$  wyznaczone dla  $p_x(x)$  będą takie same jak funkcji gęstości  $f_x(x)$ . Liczba punktów  $N$  wybranych do oszacowania zależy od rzędu  $k$  momentów probabilistycznych uwzględnionych w analizie. Najczęściej wybierane są dwa punkty, które w dość dokładny sposób umożliwiają oszacowanie wartości średniej oraz wariancji funkcji losowej.

Porównując trzy pierwsze momenty probabilistyczne określone dla ciągłej oraz dyskretnej zmiennej losowej otrzymamy:

$$\begin{aligned} m_x &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_x(x) dx = \sum_{i=1}^N x_i p(x_i) \\ \sigma_x^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} (x-m_x)^2 f_x(x) dx = \sum_{i=1}^N (x_i-m_x)^2 p(x_i) \\ \gamma_1 \sigma_x^3 &= \int_{-\infty}^{\infty} (x-m_x)^3 f_x(x) dx = \sum_{i=1}^N (x_i-m_x)^3 p(x_i) \end{aligned} \quad (3.12)$$

gdzie  $m_x$  oznacza wartość średnią,  $\sigma_x$  - odchylenie standardowe a  $\gamma_1$  jest współczynnikiem asymetrii zmiennej losowej  $X$ .

W przypadku gdy istnieje zmienna  $Y$  będąca pewnym przekształceniem zmiennej  $X$  takim, że:  $y = g(x)$ , możliwe jest wyznaczenie w prosty sposób momentów rozkładu  $p_y(y)$ , przybliżających funkcję rozkładu zmiennej ciągłej  $f_y(y)$ .

Wartość oczekiwaną  $k$ -tej potęgi dyskretnej zmiennej  $Y$  zastępującej ciągłą zmienną  $f_y(y)$  można przybliżyć w następujący sposób:

$$E[Y^k] \approx \sum_{i=1}^N g^k(x_i) p(x_i) \quad (3.13)$$

W najbardziej ogólnym przypadku, kiedy funkcja  $Y$  jest funkcją zmiennej losowej  $X$ , której wartość średnia, odchylenie standardowe oraz współczynnik skośności są znane, przy zastąpieniu ciągłej zmiennej losowej  $X$  zmienną dyskretną, reprezentowaną przez



prawdopodobieństwa  $p(x_1) = P_-$  oraz  $p(x_2) = P_+$  (zwane wagami) przypisane punktom:

$x_1 \equiv x_-$  i  $x_2 \equiv x_+$  zapisać można następujące równania:

$$\begin{aligned} P_- + P_+ &= 1 \\ m_x &= x_- P_- + x_+ P_+ \\ \sigma_x^2 &= (x_- - m_x)^2 P_- + (x_+ - m_x)^2 P_+ \\ \gamma_1 \sigma_x^3 &= (x_- - m_x)^3 P_- + (x_+ - m_x)^3 P_+ \end{aligned} \quad (3.14)$$

Przekształcając powyższy układ równań otrzymujemy wartości współrzędnych punktów oraz przypisane im wagi:

$$\begin{aligned} x_- &= m_x + \left[ \frac{\gamma_1}{2} - \sqrt{1 + \left(\frac{\gamma_1}{2}\right)^2} \right] \sigma_x, \quad x_+ = m_x + \left[ \frac{\gamma_1}{2} + \sqrt{1 + \left(\frac{\gamma_1}{2}\right)^2} \right] \sigma_x \\ P_- &= \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{\gamma_1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\gamma_1}{2}\right)^2}} \right], \quad P_+ = 1 - P_- \end{aligned} \quad (3.15)$$

W przypadku kiedy współczynnik skośności  $\gamma_1 = 0$  (rozkład zmiennej  $X$  jest symetryczny) rozwiązanie upraszcza się i ma następującą postać:

$$x_- = m_x - \sigma_x, \quad x_+ = m_x + \sigma_x, \quad P_- = P_+ = \frac{1}{2} \quad (3.16)$$

Jeżeli do równania (3.11) wstawimy uzyskane wielkości, oraz przyjmiemy  $N = 2$  to otrzymamy :

$$E[Y^k] \approx g^k(x_-) P_- + g^k(x_+) P_+, \quad (3.17)$$

a zatem dwa pierwsze momenty probabilistyczne mają następującą postać:

$$\begin{aligned} m_y &= E[Y^1] \approx y_- P_- + y_+ P_+ \\ \sigma_y^2 &= E[Y^2] - m_y^2 \approx y_-^2 P_- + y_+^2 P_+ - m_y^2 \end{aligned} \quad (3.18)$$

gdzie  $y_+ = g(x_+)$  oraz  $y_- = g(x_-)$ .

W przypadku gdy  $Y$  jest funkcją  $n$  nieskorelowanych, ciągłych zmiennych:  $X_1, X_2, \dots, X_n$  (każda o zerowym współczynniku skośności), możliwe jest zastąpienie każdej z nich zmienną dyskretną. Prawdopodobieństwo (wagę) wyznacza się dla dwóch wartości:  $x_-$  i  $x_+$  (mniejszej i większej od wartości oczekiwanej o wielkość odchylenia standardowego) dla każdej ze zmiennych - łącznie do wyznaczenia potrzebne jest  $2^n$



punktów. Każdemu z tych punktów przypisane jest prawdopodobieństwo, które oblicza się następująco [Christian i inni, 1999]:

$$P_{(s_1, s_2, \dots, s_n)} = \frac{1}{2^n} \left[ 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n (s_i)(s_j)r_{x_i, x_j} \right] \quad (3.19)$$

gdzie :  $s_i = \begin{cases} -1 & \text{dla } x_{i-} = m_{x_i} - \sigma_{x_i} \\ +1 & \text{dla } x_{i+} = m_{x_i} + \sigma_{x_i} \end{cases}$  , a  $r_{X_i, X_j}$  oznacza współczynnik wzajemnej

korelacji pomiędzy zmiennymi  $X_i$  a  $X_j$ .

W przedstawionym podejściu momenty probabilistyczne losowych funkcji w przybliżeniu stanowią sumę wszystkich możliwych kombinacji iloczynów wartości funkcji  $y_i$  i przypisanej jej wagi (prawdopodobieństwa):

$$E[Y^k] \approx \sum (y_i)^k P_i \quad (3.20)$$

W przypadku dwóch ( $n=2$ ) zmiennych:  $X_1, X_2$  wartości prawdopodobieństw wyznaczone zgodnie z formułą 3.19 wynoszą:

$$P_{(s_1, s_2)} = \frac{1}{4} \left[ 1 + (s_1)(s_2)r_{x_1, x_2} \right] \quad (3.21)$$

Prawdopodobieństwa wyznacza się dla lokalizacji punktów pomniejszonych (–) i powiększonych (+) o wartość odchylenia standardowego względem wartości średniej, dlatego też w przypadku dwóch zmiennych konieczne jest wyznaczenie 4 wartości prawdopodobieństwa :  $P_{--}$  dla punktu o współrzędnych  $(m_{x_1} - \sigma_{x_1}, m_{x_2} - \sigma_{x_2})$ ,  $P_{+-}$  dla  $(m_{x_1} + \sigma_{x_1}, m_{x_2} - \sigma_{x_2})$ ,  $P_{-+}$  dla  $(m_{x_1} - \sigma_{x_1}, m_{x_2} + \sigma_{x_2})$  oraz  $P_{++}$  dla  $(m_{x_1} + \sigma_{x_1}, m_{x_2} + \sigma_{x_2})$ .

Zgodnie z formułą 3.21 prawdopodobieństwa wynoszą:

$$P_{++} = P_{--} = \frac{1}{4} \left[ 1 + r_{x_1, x_2} \right] , \quad P_{+-} = P_{-+} = \frac{1}{4} \left[ 1 - r_{x_1, x_2} \right] \quad (3.22)$$

W przypadku, jeśli zmienne  $X_1$  i  $X_2$  nie są skorelowane ( $r_{X_i, X_j} = 0$ ), prawdopodobieństwa dla wszystkich punktów są takie same i równe 0,25.

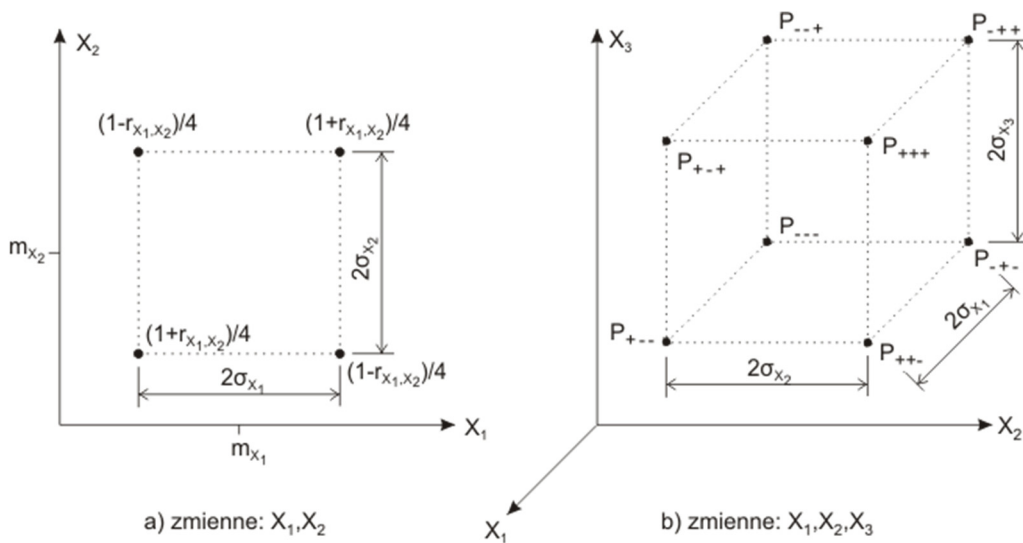
Wartość oczekiwaną oraz wariancję zmiennej  $Y$ , wyznaczone na podstawie formuły 3.20, można wyrazić następująco:

$$\begin{aligned} m_y &\approx y_{++}P_{++} + y_{+-}P_{+-} + y_{-+}P_{-+} + y_{--}P_{--} \\ \sigma_y^2 &\approx y_{++}^2P_{++} + y_{+-}^2P_{+-} + y_{-+}^2P_{-+} + y_{--}^2P_{--} - m_y^2 \end{aligned} \quad (3.23)$$

gdzie  $y_{++} = g(x_{1+}, x_{2+})$ ,  $y_{+-} = g(x_{1+}, x_{2-})$ ,  $y_{-+} = g(x_{1-}, x_{2+})$ ,  $y_{--} = g(x_{1-}, x_{2-})$ .



Lokalizacja punktów oraz przypisane im wagi dla przypadków: dwóch i trzech zmiennych są przedstawione na rysunku 3.1.



Rysunek 3.1 Lokalizacja punktów oraz przypisane im wagi dla przypadków: dwóch (a) i trzech (b) zmiennych losowych

W przedstawionym standardowym podejściu Rosenblueth'a liczba punktów potrzebnych do oszacowania wynosi  $2^n$ . W przypadku dużej liczby  $n$  zmiennych procedura PEM przestaje stanowić efektywną alternatywę dla innych metod ze względu na pracochłonność obliczeń.

Rosenblueth zaproponował, aby w przypadku gdy zmienne nie są skorelowane obliczenia wykonać dla  $(2n+1)$  punktów (wyznacza się trzy wartości funkcji  $Y$  dla każdej ze zmiennych) [Nowak i inni, 2000]:

$$\begin{aligned}
 y_0 &= y(m_{X_1}, m_{X_2}, \dots, m_{X_n}) \\
 y_i^+ &= g(m_{X_1}, m_{X_2}, \dots, m_{X_i} + \sigma_{X_i}, \dots, m_{X_n}) \\
 y_i^- &= g(m_{X_1}, m_{X_2}, \dots, m_{X_i} - \sigma_{X_i}, \dots, m_{X_n})
 \end{aligned}
 \quad (3.24)$$

Na ich podstawie szacuje się wartość średnią  $\bar{Y}$  oraz wariancję  $V_Y$  wykorzystując następujące procedury:

$$\frac{\bar{Y}}{y_0} = \frac{\bar{Y}_1}{y_0} \frac{\bar{Y}_2}{y_0} \dots \frac{\bar{Y}_n}{y_0}
 \quad (3.25)$$

$$1 + V_Y^2 = (1 + V_{Y_1}^2)(1 + V_{Y_2}^2) \dots (1 + V_{Y_n}^2)
 \quad (3.26)$$

W powyższych równaniach  $\bar{Y}_i$  oznacza wartość średnią wyznaczoną dla wszystkich zmiennych poza  $i$ -tą, która przyjęta jest jako stała i równa jej wartości oczekiwanej, natomiast  $V_{Y_i}$  jest współczynnikiem wariancji wyznaczonym w ten sposób, że  $i$ -ta zmienna przyjęta jest jako losowa a wszystkie poza nią są stałe i równe ich wartościom oczekiwany.

Redukcję liczby szacowanych punktów z  $2^n$  do  $2n$ , umożliwia zastosowanie algorytmu zaproponowanego w pracy [Hong, 1998]. Metoda ta może być zastosowana tylko w przypadku, gdy zmienne nie są skorelowane, natomiast ich rozkłady może charakteryzować brak symetrii. Dla każdej ze zmiennych wyznacza się wielkości:

$$\begin{aligned} y_i^- &= g(m_{x_1}, m_{x_2}, \dots, x_i^-, \dots, m_{x_n}) \\ y_i^+ &= g(m_{x_1}, m_{x_2}, \dots, x_i^+, \dots, m_{x_n}) \end{aligned} \quad (3.27)$$

na podstawie których szacuje się punkty oraz przypisane im prawdopodobieństwa:

$$x_i = m_{x_i} + \sigma_{x_i} \left[ \frac{\gamma_{x_i}}{2} \pm \sqrt{n + \left( \frac{\gamma_{x_i}}{2} \right)^2} \right] \quad (3.28)$$

$$P_i = \frac{1}{2n} \left[ 1 \pm \frac{\gamma_{x_i}}{2} \frac{1}{\sqrt{n + \left( \frac{\gamma_{x_i}}{2} \right)^2}} \right] \quad (3.29)$$

Zaletą metody estymacji punktowej (PEM) jest niewielka, w porównaniu np. do metody Monte Carlo, liczba realizacji potrzebnych do otrzymania estymatorów poszukiwanych wielkości. To, jak duża liczba realizacji jest wymagana zależy od liczby zmiennych losowych. W przypadku występowania większej liczby zmiennych możliwe jest zastosowanie modyfikacji pierwotnego podejścia Rosenblueth'a umożliwiających zmniejszenie liczby próbek z  $2^n$  do  $2n$  lub  $2n+1$ . Ponadto metoda PEM nie wymaga pełnej wiedzy o rozkładach zmiennych- wystarczy znajomość kilku pierwszych momentów statystycznych (w podejściu Honga).

Wadą metody jest brak możliwości weryfikacji wyników obliczeń. Wykonywanie analizy jakiegokolwiek problemu inżynierskiego jedynie za pomocą metody PEM wiąże się z dużym prawdopodobieństwem uzyskania błędnych rozwiązań. Konieczna jest dodatkowa weryfikacja dokonana innymi metodami.

### 3.4 Techniki redukcji wariancji

#### 3.4.1 Próbkowanie warstwowe (Stratified Sampling SS)

W przypadku techniki próbkowania warstwowego przestrzeń zmiennych losowych  $\Omega$  podzielona jest na pewną ilość rozłącznych podprzestrzeni  $\Omega_l$  ( $l = 1, 2, \dots, L$ ) spełniających warunek:

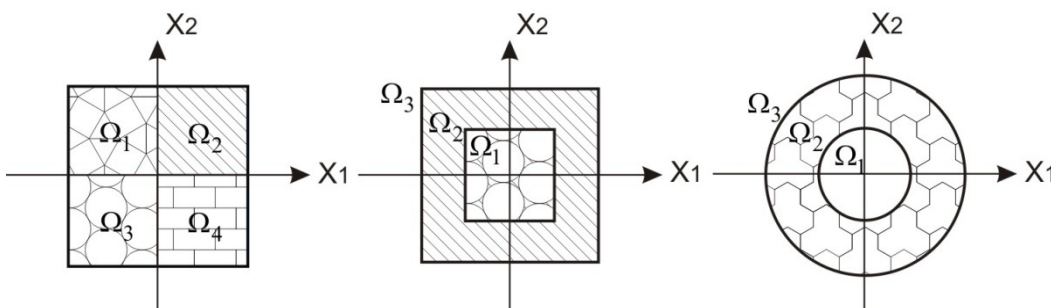
$$\Omega = \bigcup_{l=1}^L \Omega_l, \quad \Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset, \quad (i \neq j; \quad i, j = 1, 2, \dots, n; \quad l = 1, 2, \dots, L) \quad (3.30)$$

W powyższej formule  $L$  oznacza liczbę wydzielonych podprzestrzeni.

Rozmiar i kształt warstw przestrzeni  $\Omega$  mogą być dobrane na 3 sposoby [Shields i inni, 2015]:

1. Symetrically Balanced Stratified Design (SBSD): przypadek, gdy występuje równe prawdopodobieństwo znalezienia się w danej warstwie oraz przestrzeń zdarzeń podzielona została na warstwy o równych wymiarach (warstwy są  $n$ -wymiarowymi hipersześcianami).
2. Asymmetrically Balanced Stratified Design (ABSD): przypadek, gdy występuje równe prawdopodobieństwo znalezienia się w danej warstwie natomiast warstwy mają różne wymiary (warstwy są  $n$ -wymiarowymi hiperprostopadłościanami).
3. Unbalanced Stratified Design (UBSD): przypadek, w którym występują różne prawdopodobieństwa znalezienia się w danej warstwie oraz wymiary warstw nie są sobie równe.

Przykładowy podział przestrzeni zdarzeń  $\Omega$  na warstwy dla przypadku zagadnienia dwuwymiarowego) przedstawiono na rysunku 3.2.



Rysunek 3.2 Przykładowe sposoby wyodrębnienia warstw z dwuwymiarowej przestrzeni  $\Omega$  zmiennych [Zhang i inni, 2010]

Jeżeli przez  $p_l$  ( $l=1,2,\dots,L$ ) oznaczone zostało prawdopodobieństwo znalezienia się w warstwie  $\Omega_l$ , natomiast  $p_{f_l}$  wyraża prawdopodobieństwo awarii realizacji pochodzącej z tej warstwy, to całkowite prawdopodobieństwo awarii dla  $l$ -tej podprzestrzeni można wyrazić jako:

$$p_l = \int_{\Omega_l} f(\mathbf{x})d\mathbf{x}, \quad (l=1,2,3,\dots,L) \quad (3.31)$$

Dla warstwy  $\Omega_l$  funkcja gęstości rozkładu prawdopodobieństwa ma postać:

$$f_l(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & \text{dla } \mathbf{x} \notin \Omega_l \\ \frac{f(\mathbf{x})}{p_l} & \text{dla } \mathbf{x} \in \Omega_l \end{cases}, \quad (l=1,2,3,\dots,L) \quad (3.32)$$

W przypadku tak zdefiniowanej funkcji  $f_l(\mathbf{x})$ , prawdopodobieństwo awarii realizacji pochodzącej z podprzestrzeni  $\Omega_l$  szacuje się jako:

$$\hat{p}_{f_l} = \sum_{l_j=1}^{N_l} \frac{I_{\Omega_{f_l}}(\mathbf{x}_{l_j}) \cdot f(\mathbf{x}_{l_j})}{f_l(\mathbf{x}_{l_j}) \cdot N_l} \quad (l=1,2,3,\dots,L) \quad (3.33)$$

W powyższej formule  $\mathbf{x}_{l_j}$  oznacza  $j$ -tą wygenerowaną (zgodnie z funkcją  $f_l(\mathbf{x})$ ) próbkę pochodzącą z wektora realizacji, z podprzestrzeni  $\Omega_l$ , natomiast  $N_l$  oznacza całkowitą liczbę realizacji w obrębie  $l$ -tej warstwy.

Całkowite prawdopodobieństwo awarii szacowane dla podprzestrzeni wyraża formuła:

$$\hat{p}_f^{SS} = \sum_{l=1}^L \hat{p}_{f_l} = \sum_{l=1}^L \left( \sum_{l_j=1}^{N_l} \frac{I_{\Omega_{f_l}}(\mathbf{x}_{l_j}) \cdot f(\mathbf{x}_{l_j})}{f_l(\mathbf{x}_{l_j}) \cdot N_l} \right), \quad (l=1,2,3,\dots,L) \quad (3.34)$$

Błąd powyższego estymatora prawdopodobieństwa awarii wyraża się poprzez jego wariancję, analogicznie jak miało to miejsce w przypadku bezpośredniej metody Monte Carlo (formuła 3.6).

Należy podkreślić, że losowanie warstwowe jest techniką umożliwiającą w znacznym stopniu zredukowanie czasu obliczeń numerycznych, jednak aby tak się stało proces podziału przestrzeni na warstwy musi być właściwie przeprowadzony.

### 3.4.2 Technika próbkowania hipersześcianem łacińskim (Latin Hypercube Sampling (LHS))

W metodzie próbkowania hipersześcianem łacińskim, podobnie jak w próbkowaniu warstwowym, przestrzeń zmiennych dzielona jest na rozłączne podprzestrzenie  $\Omega_l$  ( $l = 1, 2, \dots, L$ ), jednak w przypadku próbkowania LHS generowanie próbek z utworzonych podprzestrzeni podlega pewnemu ograniczeniu. Jeżeli przestrzeń jest  $n$ -wymiarowa oraz dla każdego  $i$ -tego wymiaru następuje podział na  $l$  podprzedziałów, to z każdej utworzonej w ten sposób podprzestrzeni wylosowana może być pojedyncza próbka pozyskana na zasadzie kombinatoryki pomiędzy wszystkimi  $n$  wymiarami wektora zmiennych [McKay i inni, 1979].

Określenie „hipersześcian łaciński” jest rozszerzeniem pojęcia kwadratu łacińskiego Eulera, czyli  $l$ -poziomowej dwuwymiarowej tablicy wypełnionej liczbą  $L$  wartości usytuowanych w taki sposób, że żaden wiersz ani kolumna nie zawiera dwóch tych samych wartości. Przykłady kwadratów łacińskich przedstawiono na rys. 3.3.

|  |  |  |
|--|--|--|
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| d | a | c | b |
| c | d | b | a |
| b | c | a | d |
| a | b | d | c |

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 9 | 8 | 6 | 2 | 5 | 7 | 3 | 1 |
| 2 | 6 | 5 | 7 | 1 | 3 | 9 | 8 | 4 |
| 7 | 1 | 3 | 8 | 9 | 4 | 2 | 5 | 6 |
| 8 | 3 | 7 | 2 | 6 | 1 | 4 | 9 | 5 |
| 6 | 4 | 9 | 5 | 3 | 7 | 1 | 2 | 8 |
| 5 | 2 | 1 | 9 | 4 | 8 | 6 | 7 | 3 |
| 3 | 7 | 4 | 1 | 8 | 9 | 5 | 6 | 2 |
| 1 | 5 | 2 | 3 | 7 | 6 | 8 | 4 | 9 |
| 9 | 8 | 6 | 4 | 5 | 2 | 3 | 1 | 7 |

Rysunek 3.3 Przykłady kwadratów łacińskich [źródło: [www.bing.com/images](http://www.bing.com/images), 2018]

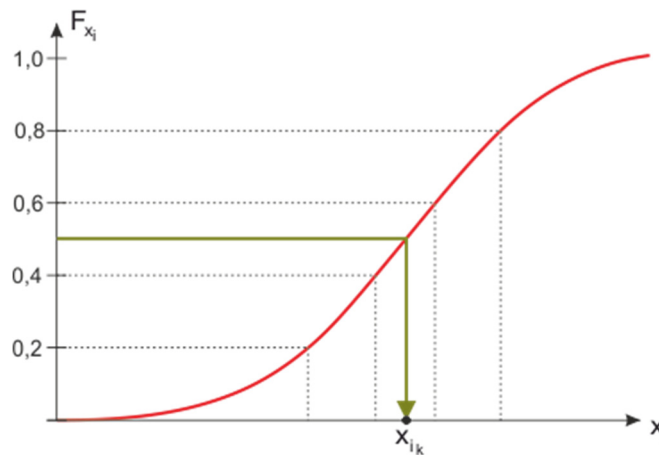
W metodzie LHS, w przypadku  $n$ -wymiarowej przestrzeni realizacji, w której każdy z wymiarów podzielony został na  $l$  równie prawdopodobnych podprzedziałów, liczbę możliwych kombinacji próbkowania wyznaczyć można z następującej formuły:

$$L_x = \left( \prod_{j=0}^{l-1} (l-j) \right)^{n-1} = (l!)^{n-1} \quad (3.35)$$

Próbki z poszczególnych podprzedziałów każdego z  $n$  wymiarów przestrzeni realizacji można dobrać jako odwrotność dystrybuanty rozkładu prawdopodobieństwa kolejnych składowych wektora  $X_i$  (rys.3.4). Związek ten opisuje następujący wzór:

$$x_{i_k} = F_i^{-1}\left(\frac{k-0,5}{L}\right) \quad (3.36)$$

W powyższej formule  $x_{i_k}$  oznacza  $k$ -tą próbkę  $i$ -tej składowej wektora  $X_i$ , natomiast  $L$  jest całkowitą liczbą próbek możliwych do uzyskania dla  $i$ -tego wymiaru wektora realizacji zmiennych [Helton i inni, 2003].



Rysunek 3.4 Schemat wyboru  $k$ -tej próbki  $i$ -tej zmiennej wektora  $X_i$  ( $x_{i_k}$ ) na podstawie dystrybuanty jej rozkładu prawdopodobieństwa

W przypadku liczby  $L_x$  próbek wektora zmiennych losowych  $X$ , wyznaczonych na drodze próbkowania metodą LHS, estymator prawdopodobieństwa awarii szacuje się następująco:

$$\hat{p}_f^{LHS} \cong \frac{n(g(\mathbf{x}_{i_k}) \leq 0)}{N_x} \quad (3.37)$$

gdzie  $n(g(\mathbf{x}_{i_k}) \leq 0)$  oznacza liczbę symulacji, dla których konstrukcja uległa awarii natomiast  $N_x$  oznacza całkowitą liczbę symulacji ( $N_x \leq L_x$ ).

Tak jak w przypadku innych metod probabilistycznych radykalnie ograniczających liczbę próbek obliczenia wykonane za pomocą LHS nie dają możliwości weryfikacji wyników i powinny być sprawdzane innymi dostępnymi algorytmami szacującymi niezawodność oraz inne parametry opisujące konstrukcję.

### 3.4.3 Technika próbkowania ukierunkowanego (Targeted Random Sampling TRS)

Jednym z wyzwań we współczesnej analizie inżynierskiej jest ocena prawdopodobieństwa awarii systemów, których funkcja stanu granicznego jest złożona (nieliniowa, nieciągła, niemonotoniczna). Przez ostatnie dekady opracowano szereg metod umożliwiających oszacowanie niezawodności takich układów. Ważnym czynnikiem przeważającym o ich stosowalności jest łatwe zaaplikowanie danej metody w programie komputerowym.

W poniższym rozdziale zaprezentowano podejście tzw. ukierunkowanego losowego pobierania próbek (TRS), zaproponowane przez [Shields i inni 2015 a]. Metoda ta umożliwia oszacowanie prawdopodobieństwa awarii w przypadku problemów ze złożonym stanem granicznym. Metoda wykorzystuje tzw. doskonałą warstwową koncepcję pobierania próbek RSS (Refined Stratified Sampling) opisaną w [Shields i inni, 2015 b], której szczegółowy algorytm przedstawiono w dalszej części pracy.

Technika próbkowania ukierunkowanego umożliwia wyodrębnienie spośród początkowo przyjętej populacji tych próbek, które skoncentrowane są w bezpośrednim sąsiedztwie stanu granicznego. Pozwala to na określenie obszaru awarii  $\Omega_f$  a co za tym idzie oszacowanie prawdopodobieństwa  $p_f$ , przy użyciu niewielkiej liczby symulacji.

Wydzielenie docelowej populacji próbek w technice TRS odbywa się poprzez kolejne podziały wstępnie założonych, rozłącznych warstw. Rozpatrując dwuwymiarową przestrzeń zmiennych losowych  $\mathbf{X}=[X_1, X_2]$ , algorytm techniki TRS można przedstawić następująco:

1. Wstępny podział przestrzeni zdarzeń  $\Omega$  na rozłączne warstwy (rysunek (3.6a)) wykorzystujący technikę próbkowania warstwowego oraz klasyfikacja zdarzeń z poszczególnych warstw jako awaryjne ( $^f \mathbf{x}_i$ ) lub bezawaryjne ( $^s \mathbf{x}_i$ ). Początkowy podział musi być przeprowadzony w taki sposób, aby istniała co najmniej jedna warstwa zawierająca zdarzenie awaryjne  $^f \Omega_i$ .
2. Identyfikacja podprzestrzeni próbkowania celowego: poszukiwanie sąsiadujących ze sobą (w dowolnym ortogonalnym kierunku) par warstw, z których jedna zawiera zdarzenie awaryjne  $^f \Omega_i$ , druga zaś zdarzenie bezawaryjne  $^s \Omega_j$ , jeżeli obszar, jaki



zajmuje dana para warstw oznaczmy jako  $\Theta_{ij} = {}^f\Omega_i \cup {}^s\Omega_j$ , to całkowity zasięg próbkowania celowego wynosi  $\Gamma = \bigcup_{ij} \Theta_{ij}$ . Na rysunku 3.6b obszar  $\Gamma$  uwydatniono

poprzez zakreskowanie.

3. Podział warstw zgodny z następującą procedurą: spośród wszystkich wyznaczonych par warstw  $\Theta_{ij}$  wybrana zostaje taka  $\Theta^{\max} = \Theta_{kl}$ , dla której zachodzi:

$$P[\Theta^{\max}] = P[\Theta_{kl}] = P[{}^f\Omega_k \cup {}^s\Omega_l] \geq P[\Theta_{ij}] = P[{}^f\Omega_i \cup {}^s\Omega_j] \quad (3.38)$$

a następnie konstruowany jest wektor łączący punkty próbek danej pary warstw

$${}^{fs}\mathbf{x}_{kl} = {}^f\mathbf{x}_k - {}^s\mathbf{x}_l \quad (3.39)$$

oraz wyznaczone są jego rzuty na dwa ortogonalne kierunki:

$$\left| {}^{fs}\mathbf{x}_{kl} \right|_{e_i} = \hat{\mathbf{e}}_i \cdot {}^{fs}\mathbf{x}_{kl} \quad (3.40)$$

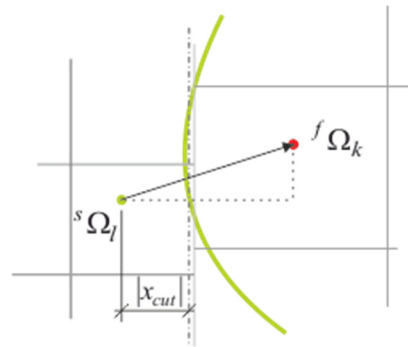
Rzut wektora  ${}^{fs}\mathbf{x}_{kl}$  o większej długości wyznacza kierunek podziału warstwy. Odbywa się on poprzez poprowadzenie prostej prostopadłej do dłuższego z rzutów, przechodzącej przez punkt przecięcia odcinka  ${}^{fs}\mathbf{x}_{kl}$  z funkcją stanu granicznego  $G(\mathbf{x}) = 0$  (rysunek 3.5):

$$\left| \mathbf{x}_{cut} \right|_{e_m} = G({}^f\mathbf{x}_k) \cdot \frac{\left| {}^s\mathbf{x}_l \right|_{e_m} - \left| {}^f\mathbf{x}_k \right|_{e_m}}{G({}^s\mathbf{x}_l) - G({}^f\mathbf{x}_k)} + \left| {}^f\mathbf{x}_k \right|_{e_m} \quad (3.41)$$

Warstwa zawierająca wyznaczony punkt przecięcia zostaje podzielona a obszar próbkowania zwiększa się o kolejną podprzestrzeń a zatem również o kolejny wynik symulacji. Proces ten jest powtarzany tak długo, aż wyznaczona zostanie funkcja stanu granicznego i obszar awarii. Koncepcję podziału warstw przedstawiono na rysunku 3.6 g-i.







Rysunek 3.5 Ilustracja długości odcinka  $x_{cut}$  wyznaczającej lokalizację podziału warstwy (na podstawie [Shields i Sundar, 2015])

4. Oszacowanie prawdopodobieństwa awarii :

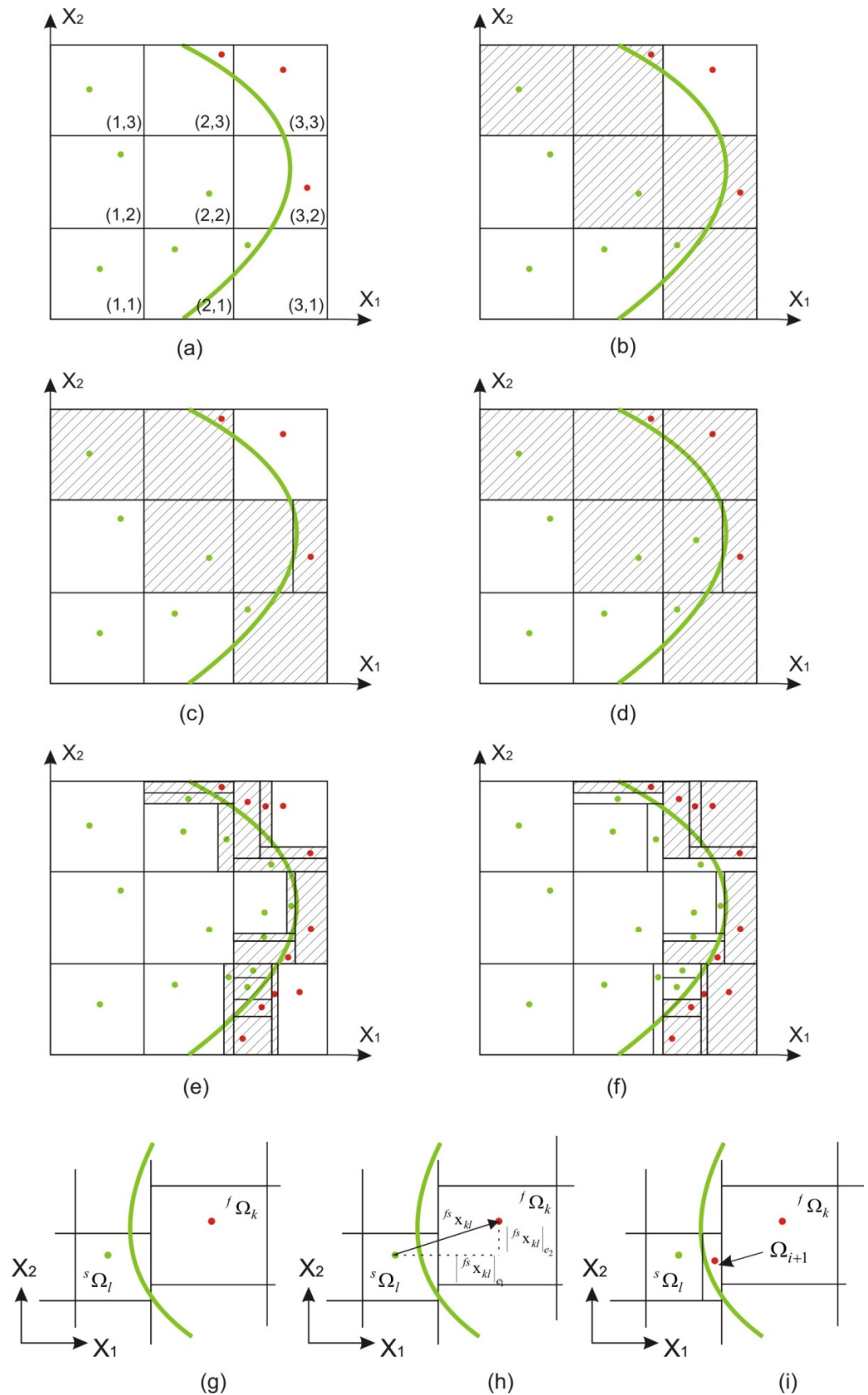
$$p_f = \sum_{i=1}^{N_f} P[f \Omega_i] \quad (3.42)$$

W powyższej formule  $N_f$  oznacza całkowitą liczbę zdarzeń awaryjnych pochodzących z rozpatrywanego zbioru próbek.

Podstawą właściwie przeprowadzonej techniki TRS jest wstępny podział przestrzeni próbkowania na warstwy oraz poprawne sklasyfikowanie pochodzących z nich zdarzeń.

Awaria konstrukcji nie zawsze jest zjawiskiem łatwo przewidywalnym- ważne jest, ażeby wyjściowe uwarstwienie zostało przeprowadzone w taki sposób, aby uwzględniło możliwość wystąpienia zdarzeń będących kombinacją różnych wartości zmiennych (niekoniecznie wartości ekstremalnych, pochodzących z ogonów ich rozkładów prawdopodobieństwa) [Shields, 2014].

Zastosowanie techniki próbkowania ukierunkowanego, nawet dla przypadków nieliniowej funkcji stanu granicznego prowadzi do szybkiego wzrostu dokładności szacowanego prawdopodobieństwa awarii przy stosunkowo niewielkiej liczbie próbek. Istotne ograniczenie stanowi natomiast wymiar wektora zmiennych losowych- technika ta sprawdza się w problemach o małej liczbie zmiennych.



Rysunek 3.6 Technika próbkowania ukierunkowanego dla przypadku dwuwymiarowego: ogólna koncepcja metody(a-f), szczegółowa prezentacja podziału warstw (g-i) [Shields i Sundar, 2015]

### 3.4.4 Technika próbkowania (Refined Stratified Sampling RSS)

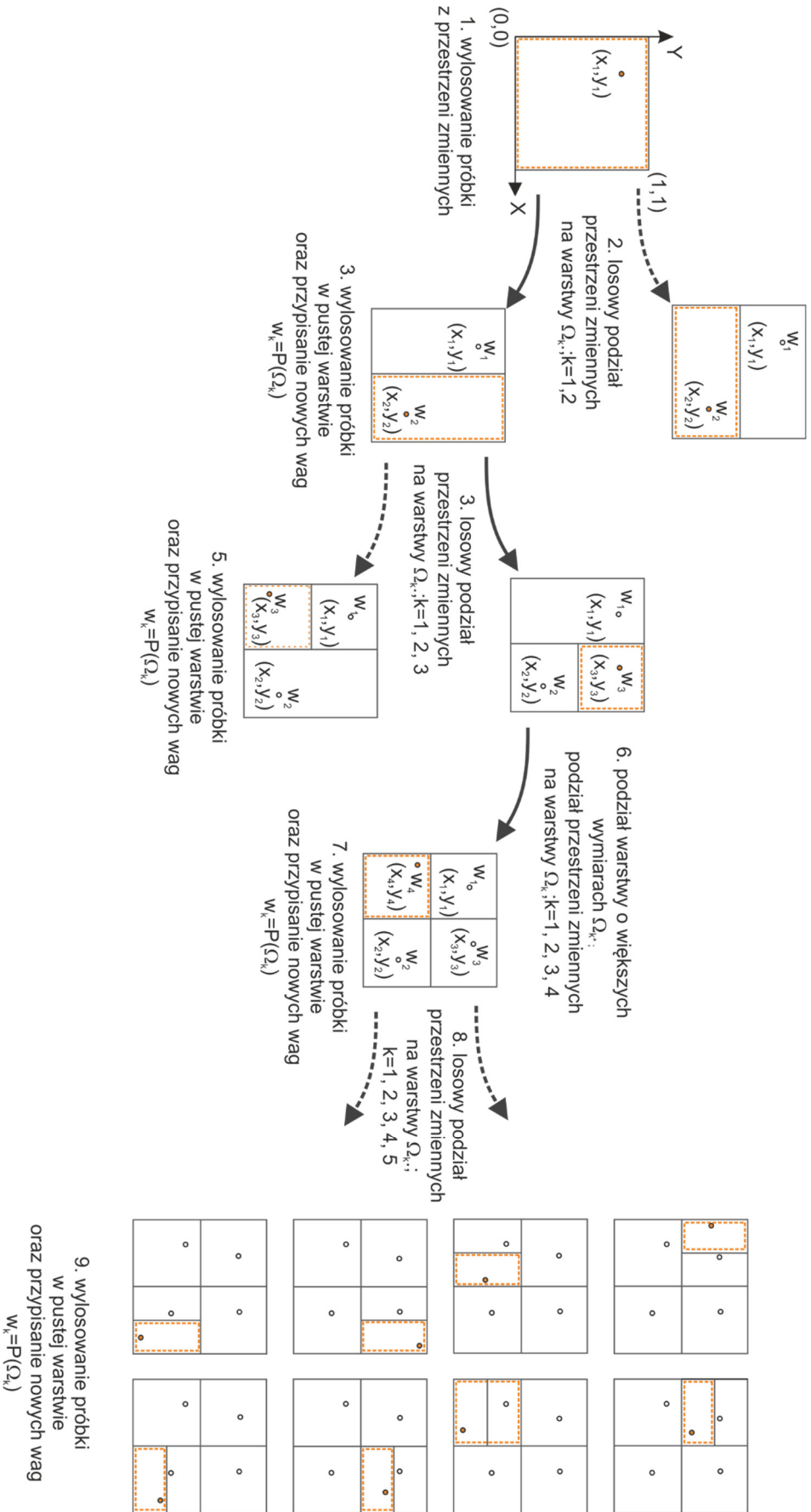
Zastosowanie metody RSS (Refined Stratified Sampling) ma na celu zagęszczenia próbek w przestrzeni zmiennych  $\Omega$ .

Rozpatrywany jest wektor zmiennych losowych  $\mathbf{x}$  zawierający  $n$  nieskorelowanych zmiennych projektowych zdefiniowanych w przestrzeni  $\Omega$ . Biorąc pod uwagę zbiór  $N$  próbek podzielonych na  $M$  warstw ( $M=N$ ) metodologia RSS przebiega w następujący sposób [Shields i inni, 2015 b]:

1. Wybór warstwy, która zostanie podzielona -  $\Omega_k$ ; spełnione muszą być następujące warunki:
  - jeżeli istnieje jedna warstwa  $\Omega_k$ , taka, że  $w_k > w_j \quad \forall j \neq k$  to może ona zostać podzielona,
  - jeżeli istnieje  $N_s$  warstw  $\Omega_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, N_s$ , których waga  $w_k = \max_j (w_j)$  to jedna z nich zostaje wybrana do podziału w sposób losowy z równym prawdopodobieństwem równym  $P[D(\Omega_k)] = 1 / N_s$
2. Podział wybranej warstwy  $\Omega_k$  na pół zgodnie z następującymi wytycznymi:
  - wyznaczenie długości krawędzi warstwy przed podzieleniem we wszystkich jej kierunkach:  $\lambda_{ik} = \xi_{ik}^{hi} - \xi_{ik}^{lo}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,
  - wybór najdłuższego boku warstwy przed podziałem  $\lambda_k = \max_i (\lambda_{ik})$ ,
  - podział warstwy na pół w kierunku prostopadłym do najdłuższego wymiaru warstwy -  $\lambda_k$ ; jeżeli istnieje  $N_c$  krawędzi warstwy, których długość równa jest  $\lambda_{i^*k} = \lambda_k$ ,  $i = 1, 2, \dots, N_c$ , to wybór jednej z nich następuje w sposób losowy z prawdopodobieństwem równym  $P[D(i^*)] = 1 / N_c$ .
3. Ponowne wyznaczenie wag warstw po podziale.
4. Powtórzenie procedury opisanej w punktach 1-3 aż do uzyskania pożądanej liczby próbek

Przykład podziału metodą RSS dla przypadku dwóch zmiennych i podziału rozpoczynającego się od jednej warstwy ( $M=N=1$ ) przedstawiono na rys. 3.7. Schemat przedstawia przebieg czterech pierwszych podziałów.





Rysunek 3.7 Metoda RSS (Refined Stratified Sampling) - schemat kolejnego podziału przestrzeni na warstwy

## Rozdział 4. Analiza wrażliwości konstrukcji

---

### 4.1 Wprowadzenie

Analizą wrażliwości nazywamy badanie wpływu zmiany parametrów wejściowych modelu matematycznego na zmienność jego wyników. Pojęcie analizy wrażliwości często myłone jest z pojęciem analizy niepewności modelu. Zadaniem pierwszej jest badanie w jaki sposób niepewność odpowiedzi układu można przypisać różnym jej źródłom zawartym w danych wejściowych, natomiast druga zajmuje się charakterystyką niepewności odpowiedzi. Bardzo często analiza niepewności stanowi wstęp do analizy wrażliwości (najpierw wyznacza się charakterystyki zmiennej wyjściowej, po czym próbuje się podzielić źródła jej niepewności według wagi).

Analiza wrażliwości konstrukcji możliwa jest do przeprowadzenia zarówno metodami deterministycznymi jak również probabilistycznymi. Obecnie powszechnie stosowane w projektowaniu są obliczenia deterministyczne. Przeprowadza się je jako analizy parametryczne, wykorzystuje się również metody wariancji lub określa efekt wpływu pojedynczych parametrów na zmienne wyjściowe. Tego typu podejście nie daje jednak pełnej informacji o wpływie imperfekcji geometrycznych i materiałowych elementów, a także niepewności opisu obciążenia na mechaniczną odpowiedź konstrukcji. Poszukiwany jest szerszy – globalny opis wrażliwości uwzględniający możliwą zmienność wszystkich parametrów definiujących konstrukcję [Chan i inni, 1997]. Wydaje się więc istotne włączenie metod probabilistycznych a także stochastycznych do procesu bezpiecznego i ekonomicznego projektowania. Tego typu analizę można określić jako wrażliwość probabilistyczną lub niezawodnościową, poszukującą wpływu zmienności losowej każdej ze zmiennych podstawowych zadania na losową niezawodność elementu/układu. Takie sformułowanie umożliwia przeprowadzenie zarówno analizy poziomu II, zdefiniowanej na poziomie wartości oczekiwanych i odchyłeń standardowych, jak również poziomu III, opisaną uzyskanymi na drodze numerycznej histogramami.

W metodach poziomu II funkcja stanu granicznego (liniowa lub zlinearyzowana) zawiera wpływy liniowe poszczególnych zmiennych podstawowych. Współczynniki wrażliwości (sensitivity factors) utożsamiane są zazwyczaj ze współczynnikami związanymi z liniowymi zmiennymi podstawowymi. Można je również zdefiniować jako pochodne cząstkowe funkcji stanu względem danej zmiennej w punkcie wartości



średnich lub w punkcie projektowym [Nowak, 2000]. Ocena wrażliwości przeprowadzana na podstawie uzyskanych histogramów funkcji stanu granicznego (poziom III), uzależnionych od poszczególnych zmiennych projektowych, nie jest łatwa. Wynikowy histogram zazwyczaj nie ma charakteru funkcji Gaussa, a każda próba aproksymacji nie jest jednoznaczna i zmienia rozwiązanie problemu. Ten kierunek badania wrażliwości wymaga dalszych analiz.

Analiza wrażliwości wykonywana w procesie tworzenia modelu matematycznego umożliwia m.in. [Hamby, 1994], [Saltelli i inni, 2000]:

- wyeliminowanie spośród często licznej grupy parametrów projektowych tych, które nie wpływają znacząco na wynik. Pominięcie tego kroku prowadzi do zwiększenia czasu obliczeniowego i nieuzasadnionego wydłużenia obliczeń;
- wyodrębnienie spośród wszystkich parametrów tych, których zmiana w największym stopniu wpływa na wynik;
- określenia wpływu korelacji pomiędzy poszczególnymi parametrami;
- sprawdzenie czy stworzony model matematyczny jest wiarygodny np. poprzez skontrolowanie czy na skutek zmiany przypuszczalnie nieistotnych parametrów nie występują silne wahnięcia wyniku lub zweryfikowanie czy zakres tej zmiany jest racjonalny.

Celem analizy wrażliwości jest zatem rozpoznanie mechanicznego zachowania się konstrukcji i możliwe uproszczenie modelu matematycznego.

## 4.2 Klasyfikacja metod analizy wrażliwości

Obecnie istnieje obszerne spektrum metod służących analizie wrażliwości, wykorzystujących rozwiązania analityczne bądź różnego rodzaju techniki probabilistyczne. W literaturze spotkać się można z różnymi klasyfikacjami metod analizy wrażliwości, w zależności od charakterystyki rozpatrywanego problemu. W pracy [Hamby, 1994] wyróżniono trzy grupy metod:

1. te, które oceniają wynik w przypadku zmiany jednego parametru na raz, między innymi : analiza różniczkowa DA (ang. Differential Analysis), technika OAT (One-



At-a-Time), metody: FA (Factorial Analysis), IF (Importance Factors) oraz SI (Sensitivity Index);

2. te, które opierają się na generacji próbek wektorów zmiennych wejściowych i identyfikacji powiązanych z nimi odpowiedzi układu, m. in.: metody analizy regresji, stosowanie wykresów rozproszenia, wyznaczanie współczynników: korelacji Pearsona lub korelacji cząstkowej;
3. te, które wymagają odpowiedniego podziału wektora zmiennych wejściowych na podstawie uzyskanego wektora odpowiedzi, m in. test Kołomogrowa-Smirnowa, test Cramera-von Misesa, test Manna-Whitneya.

Inną klasyfikację metod znaleźć można w [Frey i inni, 2003]. Rozróżnia ona:

1. **Matematyczne metody analizy wrażliwości**, umożliwiające analizę modeli deterministycznych, polegające na przeprowadzaniu serii badań numerycznych uwzględniających zmienność pojedynczego czynnika (w jego możliwym zakresie) i badaniu wpływu tej zmiany na wynikową odpowiedź układu. W metodach matematycznych wrażliwość jest najczęściej wyrażona poprzez wartość względną zmiany odpowiedzi układu. Głównym celem stosowania tej grupy metod jest szacowanie wpływu zakresu zmienności parametrów wejściowych na odpowiedź układu oraz identyfikacja parametrów, których zmiana ma największe oddziaływanie na końcowy rezultat [Morgan i inni, 1990]. Do metod matematycznych zaliczyć można między innymi: NRSA (Nominal Range Sensitivity Analysis) oraz DSA (Differential Sensitivity Analysis).
2. **Probabilistyczne (lub statystyczne) metody oceny wrażliwości** wykorzystujące zbiór wyników symulacji, przeprowadzonych na podstawie zmiennych wejściowych, charakteryzujących się założonymi rozkładami prawdopodobieństwa. W zależności od przyjętej metody badana jest odpowiedź układu na zmianę jednej bądź kilku zmiennych wejścia na raz. Metody probabilistyczne umożliwiają ilościową ocenę wpływu jednoczesnej zmiany kilku parametrów na odpowiedź układu. Wśród metod probabilistycznych wymienić można m.in.: analizę regresji liniowej LRA (Linear Regression Analysis), analizę wariancji ANOVA (ANalysis Of VAriance) metodę powierzchni odpowiedzi RSM (Responce Surface Method), metodę FAST (Fourier Amplitude Sensitivity Test).



3. **Graficzne metody oceny wrażliwości** wykorzystywane często jako uzupełnienie metod matematycznych i statystycznych, umożliwiające łatwiejszą interpretację uzyskanych wyników. Użycie graficznej reprezentacji danych (w postaci np.: wykresów, map lub powierzchni) może stanowić metodę przesiewową przed dalszą analizą modelu jak również służyć obrazowaniu zależności pomiędzy zmianą poszczególnych parametrów a odpowiedzią układu [Frey i inni, 2003]. Przykładem wykorzystania metody graficznej jest stosowanie histogramów, wykresów rozproszenia (scatterplots) lub wykresów pudełkowych (boxplot).

Trzecim rodzajem klasyfikacji metod analizy wrażliwości przedstawionym między innymi w [Heiselberg i inni, 2009 ] oraz [Saltelli i inni, 2004] jest podział na:

1. **Lokalne metody analizy wrażliwości**, wykorzystujące często na podejście OAT (One-At-A-Time), skupiające się na badaniu wpływu odchylenia pojedynczego parametru od jego wartości nominalnej (może to być np. wartość średnia) na odpowiedź układu przy zachowaniu stałych wartości pozostałych czynników. Metody lokalne, w przypadku gdy model jest nieliniowy lub jeśli różnice zaobserwowane w odpowiedzi układu powstałe na skutek modyfikacji poszczególnych parametrów znacząco różnią się od siebie, powinny być zastąpione metodami globalnymi [Cukier i inni, 1973]. Przykładem metody lokalnej jest podejście DA (Differential Analysis) wykorzystujące obliczenie (lub oszacowanie) pochodnych cząstkowych funkcji stanu modelu w konkretnym punkcie przestrzeni zmiennych [Bertrand i inni, 2015].
2. **Globalne metody analizy wrażliwości**, których celem jest badanie, w jaki sposób niepewność występująca w danych wyjściowych modelu może być pogrupowana według źródeł niepewności uwzględnionych w danych wejściowych [Saltelli, 2002]. Metody te umożliwiają analizę zachowania się odpowiedzi modelu na skutek modyfikacji dowolnej liczby jego parametrów wejściowych w całej przestrzeni ich zmienności. W podejściu opartym na globalnej analizie wrażliwości wpływ danego parametru początkowego na odpowiedź modelu jest oceniany przy jednoczesnej zmianie wszystkich innych czynników wejściowych [Nguyen i inni, 2015]. Do grupy metod globalnej analizy wrażliwości zaliczyć można między innymi: analizę FAST (Fourier Amplitude Sensitivity Test), techniki mające za podstawę m. in. metodę Monte Carlo lub metodę powierzchni odpowiedzi.





Niezależnie od przyjętej metody, proces globalnej analizy wrażliwości można sprowadzić do następujących etapów:

*Etap 1:* definicja modelu oraz ustalenie, które spośród zmiennych wejściowych zostaną poddane analizie;

*Etap 2:* dobór parametrów probabilistycznych lub zakresów zmienności każdej ze zmiennych wejściowych. Podstawą do ustaleń może być m.in.: wiedza zaczerpnięta z literatury, dane doświadczalne lub opinia ekspertów [Saltelli i inni, 2008];

*Etap 3:* generacja wektora (lub macierzy) zmiennych wejściowych;

*Etap 4:* obliczenia numeryczne modelu;

*Etap 5:* ocena wpływu zmiany rozpatrywanego parametru na podstawie danych wyjściowych modelu, wyciągnięcie wniosków i decyzja o ewentualnym rozpoczęciu nowej iteracji analizy.

### 4.3 Wybrane metody analizy wrażliwości

#### 4.3.1 Projektowanie przesiewowe (Screening Design)

Terminem „projektowanie przesiewowe” określa się eksperymenty numeryczne, wykonywane na wstępie właściwej analizy modelu, mające na celu wyodrębnienie (spośród często licznych zbioru) tych czynników, które w największym stopniu wpływają na odpowiedź układu. Szeroki opis metod badań przesiewowych można znaleźć m.in. w pracy [Woods i inni, 2015].

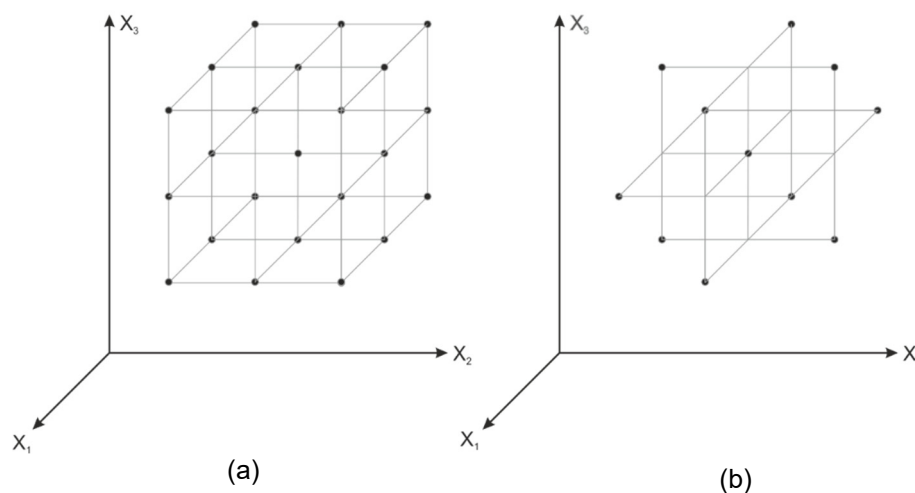
Algorytmy obliczeniowe metod przesiewowych powinny być zorganizowane w taki sposób aby umożliwiały analizę dużej liczby zmiennych, a więc powinny być obliczeniowo i czasowo wydajne. Często metody te dostarczają jedynie informacji o tym, w jaki sposób parametry projektowe szeregują się pod względem ważności, natomiast nie udzielają odpowiedzi na pytanie o ile dany czynnik jest bardziej istotny niż pozostałe [Saltelli i inni, 2000].

W badaniach przesiewowych przeważnie wykorzystują podejście OAT. W tego typu analizie eksperymenty wykonuje się dla ustalonych trzech poziomów rozpatrywanej zmiennej: wartości ekstremalnych oraz wartości środkowej (znajdującej się „w połowie drogi” pomiędzy wartościami ekstremalnymi). Eksperyment przeprowadzony z wykorzystaniem wartości środkowych zmiennych zwany jest eksperymentem



kontrolnym. Ocena parametrów, na zmianę których model jest wrażliwy polega na wyznaczeniu i porównaniu ze sobą różnic między wynikami uzyskanymi dla ekstremalnych poziomów zmiennych z tymi uzyskanymi w eksperymencie kontrolnym [Saltelli i inni,2000]. Istotnym ograniczeniem podejścia OAT jest fakt, że w tego typu analizie szacuje się jedynie efekt główny danej zmiennej - wpływ potencjalnie występującej między dwoma lub więcej czynnikami interakcji jest całkowicie pominięty.

Inną metodą badań przesiewowych jest zastosowanie tzw. eksperymentowania czynnikowego (Factorial Experimentation), które umożliwia wyznaczenie odpowiedzi układu dla wszystkich możliwych kombinacji przyjętych poziomów zmiennych. Wyróżnia się badanie czynnikowe pełne i frakcyjne. W przypadku pełnego eksperymentu czynnikowego dla przyjętych  $k$  poziomów każdej z  $N$  zmiennych losowych całkowita liczba eksperymentów wynosi  $N^k$ . W przypadku eksperymentowania frakcyjnego wykorzystuje się tylko wybrane poziomy poszczególnych zmiennych. Dobór punktów ustalonych w badaniu czynnikowym: pełnym i frakcyjnym dla przypadku trójwymiarowego zobrazowano na rys. 4.1.

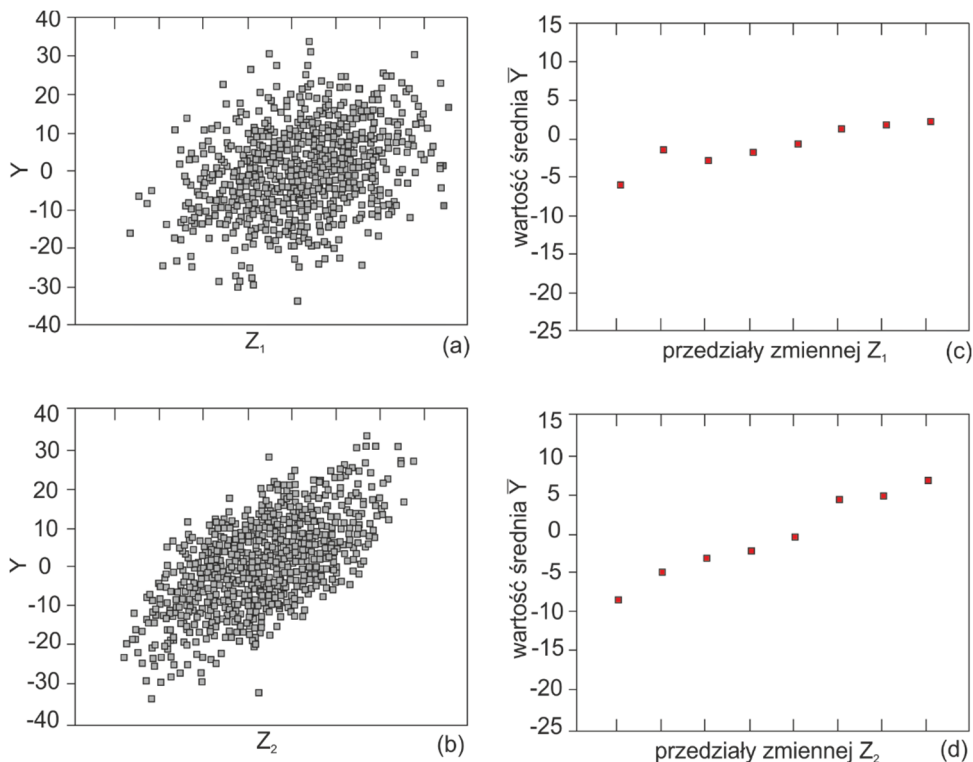


Rysunek 4.1 Przykładowy wybór punktów eksperymentowania czynnikowego pełnego (a) i frakcyjnego (b) – przypadek trójwymiarowy [źródło: <https://www.slideshare.net/maheshmarathe4/factorial-design-69296752>, 2018]

Kolejną gałęzią metod przydatnych w badaniach przesiewowych są metody graficzne, obrazujące wrażliwość modelu na zmianę rozpatrywanych parametrów w postaci m.in. wykresów, map punktów czy też histogramów.

Metody graficzne stanowią formę jakościowego określania wrażliwości modelu na zmianę rozpatrywanych parametrów wejściowych. Mogą być one stosowane zarówno

jako metoda przesiewowa stosowana przed dalszą analizą modelu w celu lepszego rozpoznania zależności pomiędzy zmiennymi wejścia i wyjścia, jak również jako uzupełnienie metod matematycznych i statystycznych analizy wrażliwości [Frey i inni, 2003]. Często stosowanym w ramach metod graficznych podejściem jest wykorzystanie tzw. chmur rozproszenia punktów. Metoda ta polega na naniesieniu na wykres punktów, których pierwszą współrzędną jest wartość wejściowa analizowanej zmiennej, natomiast drugą współrzędną jest wynik symulacji (np. bezpośredniej metody Monte Carlo). Wykres rozproszenia dostarcza informacji o zakresie wartości dla zmiennych wejścia i wyjścia oraz umożliwia identyfikację relacji pomiędzy nimi. Ograniczeniem w stosowaniu chmur rozproszenia jest po pierwsze czas ich generacji w przypadku skomplikowanych modeli zawierających wiele zmiennych, a po drugie fakt, że ich interpretacja oparta jest jedynie na subiektywnym osądzie i może prowadzić do błędów. Przykładowy obraz chmur rozproszenia wyników, zaczerpnięty z [Saltelli i inni, 2008] przedstawiono na rysunku (4.2a) oraz (4.2b). Zaprezentowane wykresy dotyczą dwóch spośród czterech znormalizowanych zmiennych wejściowych  $Z_i$ , od których zależy zmienna wyjścia  $Y$ .



Rysunek 4.2 Przykładowy obraz chmur rozproszenia zmiennej  $Y$  w zależności od wartości zmiennych  $Z_1$  oraz  $Z_2$  wygenerowanych za pomocą bezpośredniego próbkowania Monte Carlo (rys. a i b) oraz wartości średnie zmiennej  $Y$  wyznaczone na podstawie zbiorów próbek z wydzielonych przedziałów zmiennych  $Z_1$  i  $Z_2$  (rys. c i d) [Saltelli i inni, 2008]

W przedstawionym przykładzie chmury a i b dotyczą tych samych punktów obliczeniowych, różnica w ich kształcie zależy jedynie od tego na jakiej rzutni ( $Z_1Y$  czy  $Z_2Y$ ) zostały one wykreślone. Za najbardziej istotne dla analizowanego problemu uważa się te zmienne, których rozproszone punkty charakteryzują się widocznym uporządkowaniem oraz największym zakresem zmienności na osi zmiennej wejściowej. W tym przypadku zmienną, na którą odpowiedź układu  $Y$  jest najbardziej wrażliwa jest zmienna  $Z_2$ .

Uszeregowanie zmiennych wejściowych pod względem istotności ich zmiany na odpowiedź układu odbywać się może zarówno bezpośrednio na podstawie kształtu chmury jak również poprzez wyznaczenie linii trendu wartości średniej zmiennej  $Y$  dla punktów z wydzielonych podprzedziałów rozpatrywanej zmiennej  $Z_i$  (punkty widoczne na rys. 4.2 c i d).

#### 4.3.2 Metody badania wrażliwości wykorzystujące analizę wariancji

Metodę badania wrażliwości wykorzystującą analizę wariancji po raz pierwszy zastosował chemik R. I. Cukier we wczesnych latach siedemdziesiątych ubiegłego stulecia. Metoda ta, znana pod nazwą FAST (Fourier Amplitude Sensitivity Test) umożliwiała określenie głównego efektu rozpatrywanego czynnika na wariancję odpowiedzi układu. W latach 90tych rosyjski matematyk I. M. Sobol, rozwijając koncepcję, którą zaproponował Cukier, przedstawił procedurę wykorzystującą próbkowanie Monte Carlo, umożliwiającą szacowanie miar wrażliwości dla dowolnie wybranych grup czynników a przez to uwzględnienie wszelkich interakcji zachodzących między czynnikami poddanymi analizie.

##### Procedura obliczenia indeksów wrażliwości Sobola metodą Monte Carlo

Jeżeli model matematyczny opisany jest funkcją  $f(x)$ , gdzie  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  jest wektorem zmiennych losowych zdefiniowanych w  $n$ -wymiarowej przestrzeni  $K^n$ , takiej że:

$$K^n = \{x \mid 0 \leq x_i \leq 1, i = 1, 2, \dots, n\} \quad (4.1)$$

to funkcję  $f(x)$  przedstawić można jako następującą sumę:

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_0 + \sum_{i=1}^n f_i(x_i) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n f_{ij}(x_i, x_j) + \dots + f_{1,2,\dots,n}(x_1, \dots, x_n) \quad (4.2)$$

Istotną cechą równania (4.2) jest fakt, że wszystkie czynniki w nim zawarte są ortogonalne, np. jeżeli  $(i_1, \dots, i_s) \neq (j_1, \dots, j_l)$  to zachodzi:

$$\int_{K^n} f_{i_1, \dots, i_s} f_{j_1, \dots, j_l} d\mathbf{x} = 0 \quad (4.3)$$

Całkowita oraz częściowa wariancja odpowiedzi modelu zdefiniowane są następująco:

$$D = \int_{K^n} f^2(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - f_0^2 \quad (4.4)$$

$$D_{i_1, \dots, i_s} = \int_0^1 \dots \int_0^1 f_{i_1, \dots, i_s}^2(x_1, \dots, x_s) dx_{i_1} \dots dx_{i_s} \quad (4.5)$$

gdzie  $1 \leq i_1 < \dots < i_s \leq n$  oraz  $s = 1, 2, \dots, n$ .

Całkowitą wariancję odpowiedzi modelu przedstawić można w postaci następującej sumy:

$$D = \sum_{i=1}^n D_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n D_{ij} + \dots + D_{1,2,\dots,n} \quad (4.6)$$

Na podstawie powyższego równania wyznacza się indeksy wrażliwości:

$$S(i_1, \dots, i_s) = \frac{D_{i_1, \dots, i_s}}{D} \quad (4.7)$$

Suma wszystkich indeksów wrażliwości równa jest 1:

$$\sum_{i=1}^n S(i) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n S(i, j) + \dots + S(1, 2, \dots, n) = 1 \quad (4.8)$$

Całki (4.4) oraz 4.5 można wyznaczyć stosując całkowanie Monte Carlo. Oszacowane w ten sposób estymatory wielkości  $f_0$ ,  $D$  i  $D_i$  wyrażone są następująco:

$$\hat{f}_0 = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N f(\mathbf{x}_m) \quad (4.9)$$

$$\hat{D} = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N f^2(\mathbf{x}_m) - \hat{f}_0^2 \quad (4.10)$$

$$\hat{D}_i = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N f(\mathbf{x}_{-im}^{(1)}, x_{im}^{(1)}) f(\mathbf{x}_{-im}^{(2)}, x_{im}^{(1)}) - \hat{f}_0^2 \quad (4.11)$$

W równaniach 4.9 – 4.11,  $N$  oznacza liczbę generacji,  $x_m$  jest punktem obliczeniowym określonym w  $K^n$ , natomiast  $x_{-m} = (x_{1m}, \dots, x_{(i-1)m}, x_{(i+1)m}, \dots, x_{nm})$ .

Indeksy górne <sup>(1)</sup> i <sup>(2)</sup> wskazują, że generowane są dwie macierze o wymiarze  $N \times n$  każda, zawierające wylosowane elementy wektora  $\mathbf{x}$ .

Przedstawiona w pracy [Saltelli i inni, 2008] procedura wyznaczenia indeksów wrażliwości Sobola zakłada:

1. generację dwóch macierzy, każda o wymiarze  $N \times n$  ( $n$  oznacza liczbę zmiennych losowych zadania) zawierających wylosowane elementy wektora zmiennych (wzory 4.12 i 4.13).

$$A = \begin{bmatrix} x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & \dots & x_i^{(1)} & \dots & x_n^{(1)} \\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & \dots & x_i^{(2)} & \dots & x_n^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{(N-1)} & x_2^{(N-1)} & \dots & x_i^{(N-1)} & \dots & x_n^{(N-1)} \\ x_1^{(N)} & x_2^{(N)} & \dots & x_i^{(N)} & \dots & x_n^{(N)} \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

$$B = \begin{bmatrix} x_{n+1}^{(1)} & x_{n+2}^{(1)} & \dots & x_{n+i}^{(1)} & \dots & x_{2n}^{(1)} \\ x_{n+1}^{(2)} & x_{n+2}^{(2)} & \dots & x_{n+i}^{(2)} & \dots & x_{2n}^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n+1}^{(N-1)} & x_{n+2}^{(N-1)} & \dots & x_{n+i}^{(N-1)} & \dots & x_{2n}^{(N-1)} \\ x_{n+1}^{(N)} & x_{n+2}^{(N)} & \dots & x_{n+i}^{(N)} & \dots & x_{2n}^{(N)} \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

2. Zdefiniowanie macierzy  $C_i$ , której wszystkie kolumny poza  $i$ -tą pochodzą z macierzy  $B$ , natomiast kolumna  $i$  pobrana jest z macierzy  $A$ .

$$C_i = \begin{bmatrix} x_{n+1}^{(1)} & x_{n+2}^{(1)} & \dots & x_i^{(1)} & \dots & x_{2n}^{(1)} \\ x_{n+1}^{(2)} & x_{n+2}^{(2)} & \dots & x_i^{(2)} & \dots & x_{2n}^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n+1}^{(N-1)} & x_{n+2}^{(N-1)} & \dots & x_i^{(N-1)} & \dots & x_{2n}^{(N-1)} \\ x_{n+1}^{(N)} & x_{n+2}^{(N)} & \dots & x_i^{(N)} & \dots & x_{2n}^{(N)} \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

3. Wyznaczenie wektorów odpowiedzi modelu dla danych zawartych w macierzach:  $A$ ,  $B$  i  $C$ . Każdy z wektorów posiada wymiar  $N \times 1$ .

$$y_A = f(\mathbf{A}), y_B = f(\mathbf{B}), y_C = f(\mathbf{C}) \quad (4.15)$$

4. Oszacowanie indeksów wrażliwości pierwszego rzędu  $S_i$  oraz indeksów wrażliwości całkowitej  $S_{Ti}$ . Indeks wrażliwości pierwszego rzędu ( $S_i$ ) wyraża bezpośredni wpływ parametru  $i$  na odpowiedź modelu (indeksy wrażliwości wyższych rzędów wyrażają wpływ interakcji między parametrami na odpowiedź

układu), natomiast indeks wrażliwości całkowitej ( $S_{T_i}$ ) określa całkowity wpływ parametru  $i$  oraz jego interakcji z innymi parametrami na odpowiedź modelu.

Wskaźniki wrażliwości: pierwszego rzędu oraz całkowitej wyznaczyć można korzystając z następujących formuł:

$$S_i = \frac{V[E(Y|X_i)]}{V(Y)} = \frac{y_A \cdot y_{C_i} - f_0^2}{y_A \cdot y_A - f_0^2} = \frac{(1/N) \sum_{j=1}^N y_A^{(j)} y_{C_i}^{(j)} - f_0^2}{(1/N) \sum_{j=1}^N (y_A^{(j)})^2 - f_0^2} \quad (4.16)$$

$$S_{T_i} = \frac{V[E(Y|X_{\sim i})]}{V(Y)} = 1 - \frac{y_B \cdot y_{C_i} - f_0^2}{y_A \cdot y_A - f_0^2} = 1 - \frac{(1/N) \sum_{j=1}^N y_B^{(j)} y_{C_i}^{(j)} - f_0^2}{(1/N) \sum_{j=1}^N (y_A^{(j)})^2 - f_0^2} \quad (4.17)$$

gdzie:

$$f_0^2 = \left( \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N y_A^{(j)} \right)^2 \quad (4.18)$$

5. Interpretacja uzyskanych wyników. Podczas interpretacji uzyskanych wartości indeksów wrażliwości należy zwrócić uwagę na ich następujące właściwości [Saltelli i inni, 2004]:

- wartość indeksu wrażliwości całkowitej  $S_{T_i}$  powinna być większa niż wartość indeksu wrażliwości pierwszego rzędu  $S_i$ . Możliwa jest sytuacja, w której indeksy te są sobie równe - dzieje się tak w jeżeli nie istnieje żadna interakcja pomiędzy zmienną  $X_i$  i pozostałymi czynnikami. Różnica  $S_{T_i} - S_i$  jest miarą tego, jak bardzo zmienna  $X_i$  wplątana jest w interakcję z którąkolwiek z pozostałych zmiennych;
- wartość indeksu  $S_{T_i} = 0$  oznacza, że zmienna  $X_i$  nie ma wpływu wariancję odpowiedzi układu niezależnie od tego, z którymi zmiennymi wchodzi w interakcję;
- suma wszystkich indeksów  $S_i$  jest równa 1 w przypadku modeli addytywnych lub mniejsza od 1 w przypadku modeli nieaddytywnych (zgodnie z definicją z modelem addytywnym mamy do czynienia wtedy, kiedy w ramach dekompozycji wariancji możliwe jest oddzielenie efektu jego zmiennych



wejściowych, np. model  $Y_1 = \sum_i Z_i^2$  jest przykładem modelu addytywnego, natomiast  $Y_2 = \prod_i Z_i$  jest przykładem modelu nieaddytywnego);

- suma wszystkich indeksów wrażliwości całkowitej jest zawsze większa niż 1. Wyjątkowo może być równa 1 w przypadku modeli idealnie addytywnych.

Do zalet metody badania wrażliwości na podstawie wskaźników Sobola można zaliczyć:

- brak zależności między uzyskanymi wynikami a poziomem skomplikowania modelu,
- możliwość uchwycenia wpływu pełnego zakresu zmiany każdego z czynników wejściowych na odpowiedź układu,
- możliwość uwzględnienia w obliczeniach wpływu interakcji pomiędzy poszczególnymi czynnikami,
- możliwość łączenia czynników w grupy i badania wariacji (niepewności jaką dana grupa czynników wywołuje) grup czynników.

Do wad metod zaliczyć należy koszt obliczeniowy - w metodzie MC liczba obliczeń potrzebna do wyznaczenia indeksów wrażliwości  $S_i$  oraz  $S_{Ti}$ , w przypadku  $k$  parametrów, wynosi  $N(k+2)$ . Jeżeli liczba  $k$  jest duża (parametrów wejścia jest dużo) zaleca się przed właściwą analizą zastosować techniki przesiewowe (Screening Designs).



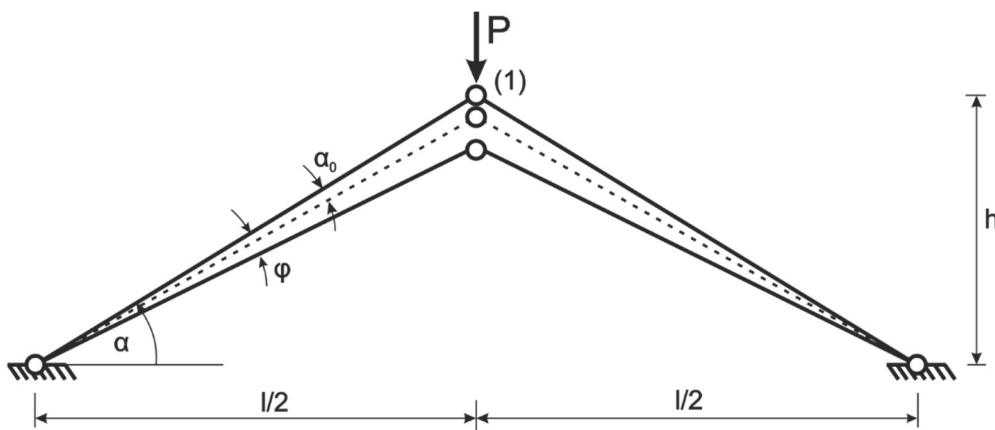
# Rozdział 5. Probabilistyczna analiza wrażliwości - przykłady numeryczne

W niniejszym rozdziale przedstawiono kilka przykładów wykorzystania omówionych wcześniej metod i algorytmów. W każdym z nich starano się zaprezentować różne aspekty analizy probabilistycznej, uzupełnionej o szacowanie wrażliwości spowodowanej zmianą opisujących konstrukcję losowych parametrów. Przykłady zaprezentowano w określonej kolejności, począwszy od prostych systemów, a kończąc na modelach rzeczywistych konstrukcji. Pomimo tego, iż prezentowane metody mają charakter uniwersalny, w pracy ograniczono się jedynie do analizy systemów kratowych. Ograniczenie to wynika wyłącznie z nakładu czasu obliczeniowego. W przypadku testowania algorytmów probabilistycznych, konieczne jest porównanie kilku metod, a więc wykonanie obliczeń dla kilkudziesięciu lub nawet kilkuset realizacji wektora zmiennych losowych. Tego typu rozbudowane analizy są praktycznie możliwe jedynie dla uproszczonych modeli jakimi są kratownice. Należy jednak podkreślić, że w zakresie metodologicznym, obliczeniach innych konstrukcji, np. układów cienkościennych, powłok czy płyt można wykonać wykorzystując te same algorytmy.

## 5.1 Kratownica von Misesa

### 5.1.1 Przedstawienie modelu

Pierwszy przykład dotyczy symetrycznej kratownicy von Misesa, przedstawionej na rys. 5.1. Rozpatrywany model został szczegółowo opisany w [Kleiber i inni, 1997].



Rysunek 5.1 Model kratownicy von Misesa

Punkty podparcia elementów oddalone są od siebie o  $l = 93,969$  m, natomiast obciążony węzeł kratownicy znajduje się na wysokości  $h = 34,202$  m. Pole poprzeczne prętów wynosi  $A = 1,0$  m<sup>2</sup> a moduł Young'a  $E = 50,0$  kN/m<sup>2</sup>. Kratownica obciążona jest siłą pionową przyłożoną w węźle nr 1. Usytuowanie prętów kratownicy opisane zostało za pomocą jednego stopnia swobody- kąta obrotu  $\varphi$  [rad] nachylenia pręta względem kierunku poziomego. W modelu założono wstępną imperfekcję związaną z przyjęciem wysokości punktu styku prętów. Imperfekcja wyrażona została poprzez kąt  $\alpha_0$  [rad], zawarty pomiędzy kierunkami: założonym i rzeczywistym nachylenia prętów do poziomu.

### 5.1.2 Analiza wrażliwości kratownicy na podstawie histogramów stanu granicznego

Na podstawie równania równowagi sił w węźle 1 wyznaczona została zależność obciążenia od kąta obrotu elementów:

$$P(\varphi) = -2 \cdot N \cdot \sin(\alpha - (\alpha_0 + \varphi)) \quad (5.1)$$

W stanie granicznym powyższa zależność przyjmuje postać:

$$P(\varphi_y) = -2 \cdot E \cdot A \cdot \varepsilon_y \cdot \sin(\alpha - (\alpha_0 + \varphi_y)) \quad (5.2)$$

gdzie  $\varphi_y$  jest kątem wychylenia w przypadku maksymalnego skrócenia elementów  $\Delta L_{extr}$  wyrażonego następująco:

$$\Delta L_{extr} = \varepsilon_y \cdot L \quad (5.3)$$

Do dalszych rozważań kąt wstępnej imperfekcji  $\alpha_0$ , obciążenie  $P$  oraz odkształcenie pręta w stanie granicznym  $\varepsilon_y$  założono jako zmienne losowe. Dla każdej z wymienionych zmiennych wygenerowano zbiór  $N = 1000$  realizacji zgodnie z rozkładem normalnym. Wartości średnie oraz odchylenia standardowe zmiennych  $P$ ,  $\varepsilon_y$  oraz  $\alpha_0$  wynoszą:

$$m_P = 0,4, \sigma_P = 0,05 \text{ [kN]} \quad (5.4)$$

$$m_{\varepsilon_y} = 0,02, \sigma_{\varepsilon_y} = 0,005 \text{ [-]} \quad (5.5)$$

$$m_{\alpha_0} = 0,00, \sigma_{\alpha_0} = 0,00875 \text{ [rad]} \quad (5.6)$$

Procedurę przedstawionej poniżej analizy wrażliwości w uproszczeniu można opisać w następujący sposób:



*Etap 1:* Wybór analizowanego parametru:  $P$ ,  $\varepsilon_y$ ,  $\alpha_0$

*Etap 2:* Generacja zbioru  $N$  wartości zmiennych zgodnie z rozkładem normalnym.

*Etap 3:* Obliczenie dla każdej realizacji zmiennych wartości mnożnika  $\alpha_i$  [–] analizowanego parametru. W zależności od tego, która zmienna jest analizowana, mnożnik  $\alpha_i$  przyjmuje wartości:

$$\alpha_i = \frac{N_{gr}^i}{P^i}, \quad \alpha_i = \frac{\varepsilon_{ygr}^i}{\varepsilon_y^i}, \quad \alpha_i = \frac{\alpha_{0gr}^i}{\alpha_0^i}, \quad (5.7)$$

gdzie:  $N_{gr}^i$ ,  $\varepsilon_{ygr}^i$  oraz  $\alpha_{0gr}^i$  są wartościami poszczególnych zmiennych w stanie granicznym, wyznaczonymi dla  $i$ -tej realizacji na podstawie formuły 5.2.

*Etap 4:* Analiza wyników: na podstawie wyznaczonego zbioru bezwymiarowych mnożników  $\alpha_i$  tworzony jest histogram stanu granicznego. W przypadku analizy wrażliwości obciążenia  $P$  oraz kąta imperfekcji  $\alpha_0$  pole histogramu dla  $\alpha_i < 1,0$  odpowiada estymatorowi prawdopodobieństwa awarii  $\hat{p}_f$ , który wyraża formuła:

$$\hat{p}_f = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I(\alpha_i) \quad (5.8)$$

gdzie:

$$I(\alpha_i) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } \alpha_i \leq 1,0 \\ 0 & \text{gdy } \alpha_i > 1,0 \end{cases} \quad (5.9)$$

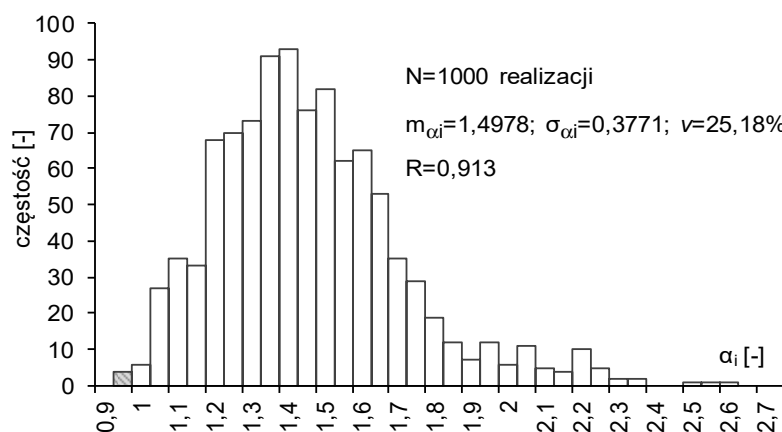
W przypadku odkształcenia pręta w stanie granicznym  $\varepsilon_y$  estymatorowi prawdopodobieństwa awarii  $\hat{p}_f$  odpowiada pole histogramu dla  $\alpha_i > 1,0$ .

Wynik przeprowadzonej analizy w postaci histogramu stanu granicznego konstrukcji dostarcza probabilistycznej informacji o zachowaniu się układu przy uwzględnieniu losowego charakteru jego parametrów projektowych.

Pierwszą analizowaną zmienną było obciążenie  $P$ . Wygenerowano zbiory 1000 próbek kąta  $\alpha_0$  oraz odkształcenia  $\varepsilon_y$ . Przy założeniu stanu granicznego konstrukcji, dla każdej  $i$ -tej realizacji zmiennych  $\varepsilon_y$  i  $\alpha_0$ , obliczono wartość obciążenia granicznego  $N_{gr}^i$  według formuły 5.2, a następnie po wygenerowaniu zbioru obciążeń losowych  $P_i$ , dla

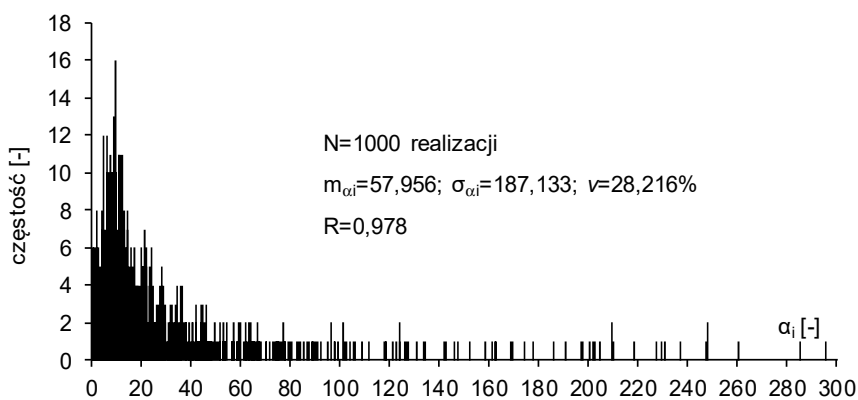


każdej realizacji wyznaczono mnożnik  $\alpha_i$  zgodnie z 5.7. Histogram stanu granicznego konstrukcji przedstawia rysunek 5.2. Niezawodność ( $R = 1 - P_f$ ) wyznaczone zgodnie z: 5.8 i 5.9 wyniosła  $R = 0,913$ .

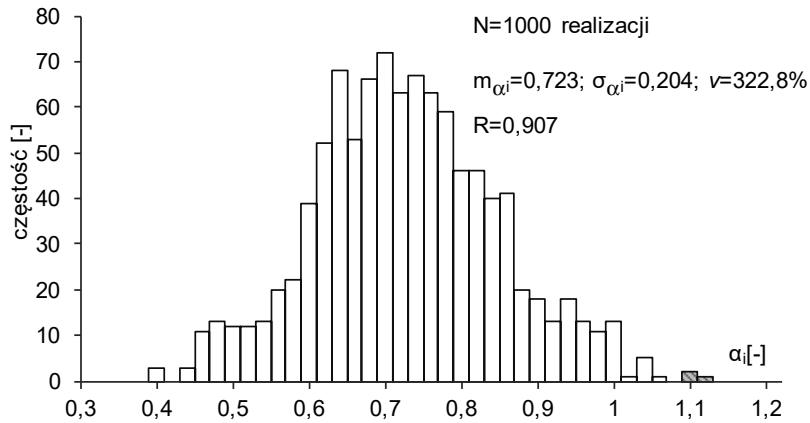


Rysunek 5.2 Histogram stanu granicznego - analiza wrażliwości zmiennej obciążenia  $P$

Analogiczne obliczenia wykonano dla zmiennych początkowego kąta  $\alpha_0$  oraz odkształcenia w stanie granicznym  $\varepsilon_y$ . Rezultaty – histogramy mnożnika  $\alpha_i$  przedstawiono na rys. 5.3 oraz 5.4.

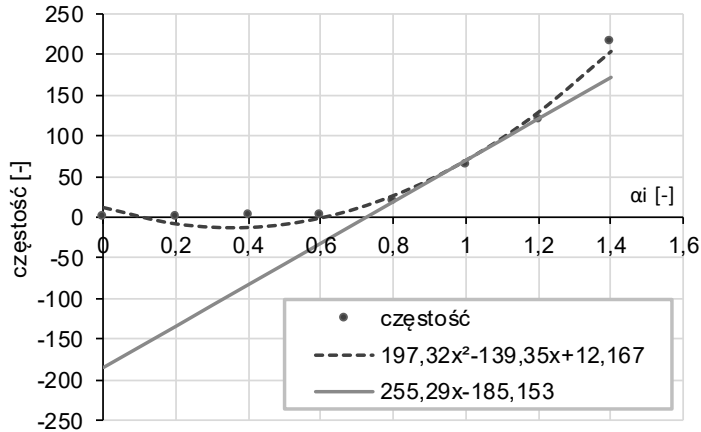


Rysunek 5.3 Histogram stanu granicznego - analiza wrażliwości zmiennej kąta imperfekcji  $\alpha_0$

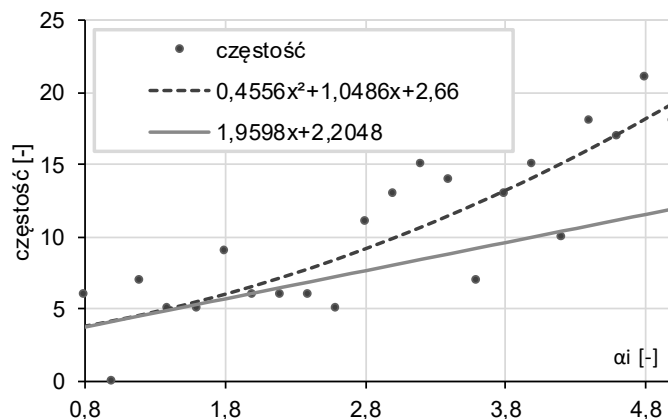


Rysunek 5.4 Histogram stanu granicznego - analiza wrażliwości zmiennej odkształcenia  $\varepsilon_y$

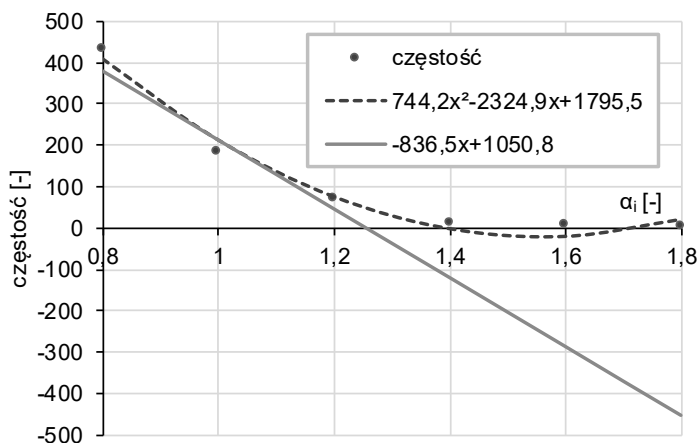
Na podstawie wyników histogramów zmiennej  $\alpha_i$  w każdym z rozpatrywanych przypadków wyznaczono aproksymowaną wielomianem 2 stopnia funkcję w obszarze stanu granicznego a następnie wyznaczono moduł kąta nachylenia  $|\phi|$  stycznej do wykresu w punkcie  $\alpha_i = 1,0$ . Wartości te, uszeregowane malejąco, dostarczają informacji o wkładzie analizowanych zmiennych w zmianę odpowiedzi układu.



Rysunek 5.5 Obciążenie  $P$ - kąt nachylenia stycznej do wykresu w punkcie  $\alpha_i = 1 - |\phi| = 89^\circ 46'$



Rysunek 5.6 Imperfekcja  $\alpha_0$  - kąt nachylenia stycznej do wykresu w punkcie  $\alpha_i = 1$  -  $|\phi| = 62^\circ 58'$



Rysunek 5.7 Odształcenie  $\varepsilon_y$  - kąt nachylenia stycznej do wykresu w punkcie  $\alpha_i = 1$  -  $|\phi| = 89^\circ 55'$

Dodatkowej ilościowej informacji o wpływie zmiany analizowanego czynnika na odpowiedź układu dostarczają wskaźniki wrażliwości: pierwszego rzędu oraz całkowitej Sobola wyznaczone na podstawie wzorów: 4.16 oraz 4.17. W analizowanym przypadku, po wygenerowaniu miliona realizacji wyniosły one odpowiednio:  $S_p = 0,1866$ ,  $S_{TP} = 0,1943$ ,  $S_{\varepsilon_y} = 0,7934$ ,  $S_{\varepsilon_y} = 0,8196$ ,  $S_{\alpha_0} = 0,0024$ ,  $S_{T\alpha_0} = 0,0055$ . Otrzymane wartości wskazują, że największy wpływ na zmianę odpowiedzi konstrukcji ma zmienna odkształcenia  $\varepsilon_y$ , natomiast wpływ imperfekcji początkowej (kąta wychylenia prętów  $\alpha_0$ ) jest znikomy. Te same wnioski można sformułować na podstawie histogramów przedstawionych na rys. 5.2, 5.3 oraz 5.4.

W prezentowanym przykładzie uzyskano pełne rozkłady stanu graniczne uzależnione od przyjętych zmiennych opisujących model kratownicy. Na ich podstawie wyznaczono wrażliwość modelu na zmianę poszczególnych parametrów. Opisujące te stany zmienne mogą mieć charakter globalny (wartość oczekiwana oraz odchylenia standardowe rozkładów stanu granicznego) jak i lokalne – dotyczące punktu projektowego funkcji stanu granicznego. Dodatkowych informacji dostarczają także wskaźniki wrażliwości Sobola. Należy jednak podkreślić, że pełen opis – histogramy stanu granicznego są możliwe tylko w przypadku stosunkowo prostych problemów obliczeniowych.

## 5.2 Kolumna Zieglera

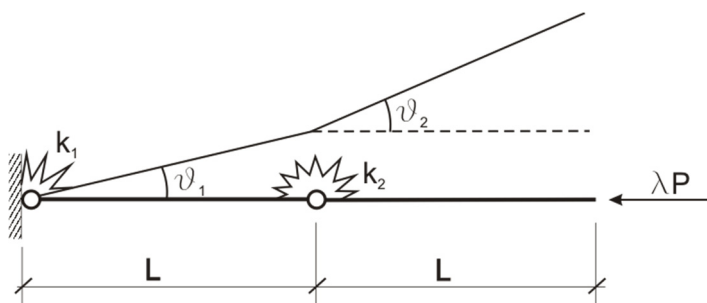
Celem analizy jest określenie wrażliwości odpowiedzi modelu na zmianę jej parametrów projektowych, opisanych zmiennymi losowymi. Kolumna analizowana była w wielu pracach, np. [Alibrandi i inni, 2009; Challamel i inni 2010; Winkelmann, 2013]. Przy określaniu wrażliwości kolumny na zmianę jej parametrów projektowych przyjęto trzy ścieżki postępowania:

1. Określenie wrażliwości modelu na podstawie tzw. chmur rozproszenia wyników oraz porównaniu współczynników korelacji pomiędzy analizowaną zmienną a odpowiedzią układu.
2. Wyznaczenie wskaźników wrażliwości: pierwszego rzędu oraz całkowitej Sobola.
3. Określenie wskaźników wrażliwości na podstawie krzywych będących przecięciem powierzchni odpowiedzi układu z płaszczyznami zdefiniowanymi poprzez przyjęcie wartości badanych zmiennych jako stałe. Powierzchnia mechanicznej odpowiedzi modelu wyznaczona została na podstawie punktów pochodzących z próbkowania ukierunkowanego TRS opisanego w rozdziale 3.4.3 niniejszej pracy. Na potrzebę analizy stworzona została procedura w środowisku MATLAB umożliwiająca pozyskanie próbek znajdujących się w bezpośrednim sąsiedztwie stanu granicznego  $g(k_1, k_2) = 0$ .

### 5.2.1 Przedstawienie modelu

Analizowanym modelem jest utwierdzony u podstawy słup obciążony osiową siłą  $\lambda P$ . W konstrukcji znajdują się dwa przeguby wewnętrzne (u podstawy i w środku

długości słupa) wzmocnione sprężynami o stałych sprężystości  $k_1$  i  $k_2$  (rys. 5.8). Przyjęto, że obydwie wielkości są zmiennymi losowymi:  $k_1 = \bar{k}_1(1 + \alpha_1)$ ,  $k_2 = \bar{k}_2(1 + \alpha_2)$ . Zarówno  $\alpha_1$  jak i  $\alpha_2$  opisano rozkładem normalnym o wartości średniej równej  $m_{\alpha_1} = 0,0$  i odchyleniu standardowym równym  $\sigma_{\alpha_1} = 0,2$ .



Rysunek 5.8 Model kolumny Zieglera [Alibrandi i inni, 2009]

Funkcja graniczna ma w tym przypadku postać jawną i opisana jest następującym równaniem:

$$g(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{1}{2} \bar{k}_1(1 + \alpha_1) + \bar{k}_2(1 + \alpha_2) - \frac{1}{2} \sqrt{\bar{k}_1^2(1 + \alpha_1)^2 + 4\bar{k}_2^2(1 + \alpha_2)^2} - \lambda \quad (5.10)$$

Przy założeniu, że  $k_1 = k_2 = \bar{k}_1 = \bar{k}_2 = 1$  [kNm/rad],  $L = 1$  m oraz  $P = 1$  kN mnożnik obciążenia powodującego wyboczenie konstrukcji wyniósł  $\lambda = \lambda_E = 0,5(3 - \sqrt{5})$ .

Ostatecznie przyjęto, że  $\lambda = 0,75\lambda_E = 0,375(3 - \sqrt{5})$  oraz założono, że zmienne  $\alpha_1$  i  $\alpha_2$  nie są skorelowane.

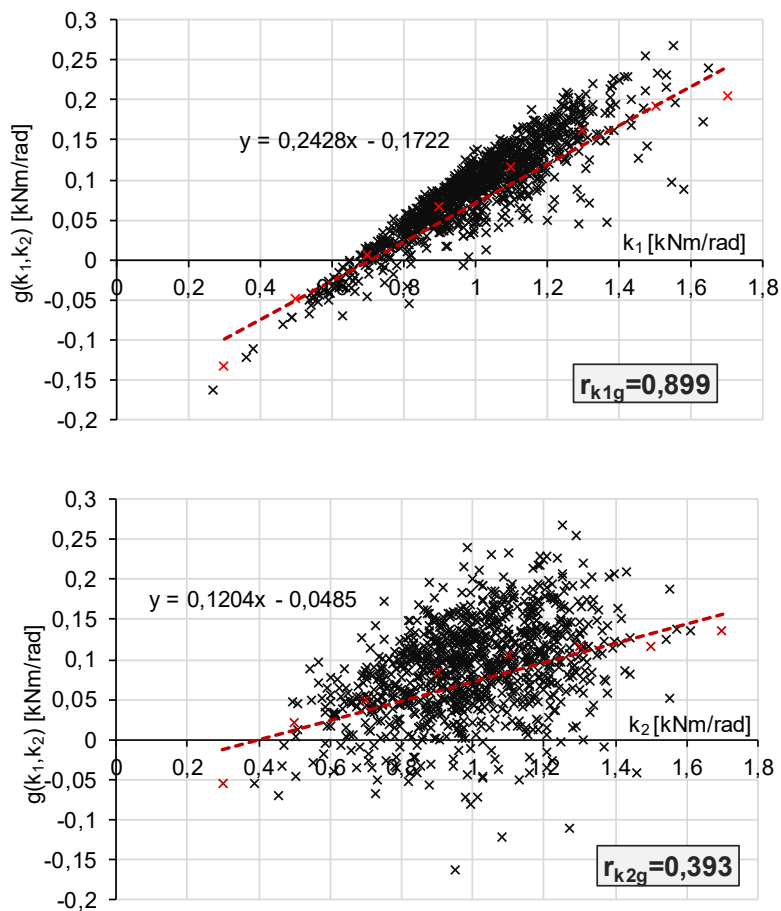
### 5.2.2 Określenie wrażliwości kolumny na podstawie analizy rozproszenia wyników

Pierwsza z metod, umożliwiająca szybką i łatwą w przeprowadzeniu analizę zachowania modelu jest technika tzw. obrazów rozproszenia, opisana w rozdziale 4.3.1 niniejszej pracy. Na rysunku 5.9 przedstawiono zależności pomiędzy zmienną odpowiedzi układu  $g$  a sztywnościami:  $k_1$  i  $k_2$ . W przypadku każdej z chmur punktów wyznaczono estymator współczynnika korelacji liniowej opisany zależnością:

$$r_{k_m g} = \frac{\sum_{i=1}^N (k_{mi} - \bar{k}_m)(g_i - \bar{g}_i)}{\sqrt{\sum_{i=1}^N (k_{mi} - \bar{k}_m)^2} \sqrt{\sum_{i=1}^N (g_i - \bar{g}_i)^2}}, \quad m = 1, 2 \quad (5.11)$$



Wartości współczynników w przypadku chmur rozproszenia zmiennych  $k_1$  i  $k_2$  wyniosły odpowiednio:  $r_{k_1g}=0,899$  oraz  $r_{k_2g}=0,393$ .



Rysunek 5.9 Kształt chmury rozproszenia wyników wyznaczone dla zmiennych  $k_1$  i  $k_2$

Na rysunku 5.9 czerwonym kolorem zaznaczono wartości średnie zmiennej odpowiedzi układu wyznaczone na podstawie próbek pochodzących z wydzielonych zakresów analizowanej sztywności. Zakres zmienności sztywności podzielono na 8 równych przedziałów. Nachylenie poprowadzonej na podstawie tych punktów prostej aproksymacji może stanowić wizualną metodę określenia wrażliwości modelu – wraz ze wzrostem kąta nachylenia prostej wzrasta wrażliwość układu na zmianę rozpatrywanego parametru.

Na podstawie wyznaczonych chmur oraz współczynników korelacji można wnioskować, że zmienną, na modyfikację której układ jest bardziej wrażliwy jest sztywność  $k_1$  - chmura punktów na pierwszym wykresie „charakteryzuje się stosunkowo

łatwym w interpretacji kształtem”, podczas gdy rozkład punktów na drugim wykresie jest bardziej zbliżony do jednorodnego.

### 5.2.3 Określenie wrażliwości kolumny na podstawie wskaźników wrażliwości Sobola

Kolejnym krokiem analizy jest określenie wskaźników (indeksów) wrażliwości Sobola: pierwszego rzędu ( $S_i$ ) oraz wrażliwości całkowitej ( $S_{T_i}$ ) wyznaczone dla rozpatrywanych sztywności  $k_1$  i  $k_2$ . Indeks wrażliwości pierwszego rzędu  $S_i$  wyraża bezpośredni wpływ  $i$ -tego parametru na odpowiedź modelu, natomiast indeks wrażliwości całkowitej  $S_{T_i}$  określa całkowity wpływ  $i$ -tego parametru oraz jego interakcji z innymi parametrami na odpowiedź końcową. Im większa wartość indeksu wrażliwości tym wpływ rozpatrywanego parametru na odpowiedź układu jest większy. Wymienione wskaźniki wrażliwości zmiennych  $k_1$  i  $k_2$ , wyznaczone na podstawie procedur 4.16 - 4.17, wyniosły odpowiednio:  $S_{k_1} = 0,7974$ ,  $S_{T_{k_1}} = 0,8369$ ,  $S_{k_2} = 0,1898$ ,  $S_{T_{k_2}} = 0,2292$ . Uzyskane wyniki świadczą o znacząco większym wpływie sztywności sprężyny przypodporowej  $k_1$  na odpowiedź mechaniczną układu, a więc zostały potwierdzone wnioski sformułowane na podstawie analizy chmur rozproszenia.

### 5.2.4 Określenie wrażliwości kolumny na podstawie analizy krawędzi przecięcia powierzchni odpowiedzi z płaszczyznami $k_1g$ i $k_2g$

Trzeci sposób określenia wrażliwości zakłada wyznaczenie powierzchni odpowiedzi układu  $\hat{g}(\mathbf{k})$  a następnie wyznaczeniu krzywych przecięcia tej powierzchni z płaszczyznami  $k_1g$  oraz  $k_2g$ . Powierzchnię odpowiedzi aproksymowano na podstawie punktów pochodzących z próbkowania ukierunkowanego, a więc takich, które znajdują się w bezpośrednim sąsiedztwie stanu granicznego. Na potrzeby analizy stworzono w środowisku MATLAB procedurę, która po wpisaniu zakresu oraz liczby kolejnych podziałów przestrzeni zmiennych znajduje współrzędne punktów próbkowania. Należy podkreślić, że przedstawiona analiza ma charakter jedynie jakościowy – pozwala uszeregować zmienne zadania według ich wpływu na odpowiedź układu.



Pierwszym etapem analizy było sprawdzenie efektywności próbkowania ukierunkowanego. W tym celu porównano ze sobą rezultaty (wartości wskaźnika niezawodności Hasofera – Linda  $\beta_{HL}$  wyznaczone na podstawie wzoru 2.12) otrzymane na drodze próbkowania TRS z wynikami uzyskanymi poprzez zastosowanie technik: próbkowania: warstwowego (MC-SS) oraz hipersześcianu łacińskiego (MC-LHS).

Wskaźniki niezawodności  $\beta_{HL}$  wyznaczono zarówno stosując metodę Monte Carlo poszerzoną o w/w techniki redukcji populacji jak również wykorzystując powierzchnie odpowiedzi zbudowane na podstawie wyników tych symulacji.

### Metoda Monte Carlo

Prawdopodobieństwo awarii oszacowane bezpośrednio metodą symulacji Monte Carlo, na podstawie  $10^6$  próbek, wyniosło  $P_f = 0,0737$ . Wskaźnik niezawodności, wyznaczony zgodnie z formułą 2.8, wyniósł  $\beta = 1,449$ .

W przypadku próbkowania warstwowego Monte Carlo obliczenia wykonano dla podziału przestrzeni zmiennych na :  $2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2, 8^2, 9^2, 10^2, 15^2, 20^2, 25^2$  oraz  $30^2$  warstw o jednakowych wymiarach. Wartości wskaźników niezawodności wyznaczone dla założonych wariantów podziału przestrzeni zawarto w tabeli 5.1.

W próbkowaniu Monte Carlo poszerzonym o technikę hipersześcianu łacińskiego przestrzeń zmiennych została podzielona na  $2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2, 8^2, 9^2, 10^2, 15^2, 20^2$  oraz  $25^2$  warstw o jednakowych wymiarach. Losowanie wartości zmiennych przebiegało w ten sposób, iż z każdego pojedynczego pasma osi zmiennej  $k_1$  i każdego pojedynczego pasma osi  $k_2$  dobrana mogła być tylko jedna próbka. Konfiguracja rozkładu pobranych w ten sposób punktów utworzona jest w sposób losowy. Wartości wskaźników niezawodności Hasofera - Linda uzyskanych dla poszczególnych przypadków zagęszczenia warstw w przestrzeni zmiennych zamieszczono w tabeli 5.1.



| Technika próbkowania |             |                  |              |                   |                |
|----------------------|-------------|------------------|--------------|-------------------|----------------|
| Monte Carlo          |             | Monte Carlo + SS |              | Monte Carlo + LHS |                |
| $N_{SAMPL}$          | $\beta$ [-] | $N_{SAMPL}$      | $\beta_{HL}$ | $N_{SAMPL}$       | $\beta_{HL}$   |
| 10 <sup>6</sup>      | 1,449       | 1                | -            | 1                 |                |
|                      |             | 4                | -            | 5                 |                |
|                      |             | 9                | -            | 6                 | <b>1,19348</b> |
|                      |             | 16               | -            | 7                 | -              |
|                      |             | 25               | 1,350137     | 8                 | <b>1,23007</b> |
|                      |             | 36               | 1,382901     | 9                 | <b>1,24413</b> |
|                      |             | 49               | 1,666002     | 10                | -              |
|                      |             | 64               | 1,306824     | 15                | <b>1,22215</b> |
|                      |             | 81               | 1,308085     | 20                | <b>1,25631</b> |
|                      |             | 100              | 1,295158     | 25                | <b>1,35014</b> |
|                      |             | 225              | 1,281014     | 30                | <b>1,30022</b> |
|                      |             | 400              | 1,298934     | 40                | <b>1,28791</b> |
|                      |             | 625              | 1,299395     | 50                | <b>1,35014</b> |
|                      |             | 900              | 1,295158     | 100               | <b>1,25631</b> |
|                      |             | -                | -            | 200               | <b>1,29516</b> |
|                      |             | -                | -            | 300               | <b>1,28557</b> |
|                      |             | -                | -            | 400               | <b>1,28791</b> |
|                      |             | -                | -            | 500               | <b>1,28101</b> |
|                      |             | -                | -            | 1000              | <b>1,29970</b> |

Tablica 5.1 Wartości wskaźników niezawodności Hasofer-Linda wyznaczone na podstawie bezpośredniego próbkowania Monte Carlo (MC), metody Monte Carlo rozszerzonej o techniki próbkowania: warstwowego (MC - SS) i hipersześcianem łacińskim (MC - LHS)

### Metoda Powierzchni Odpowiedzi

Przy założeniu, że krzywizna rzeczywistej powierzchni odpowiedzi konstrukcji jest duża, w obliczeniach wykorzystuje się model drugiego rzędu z członami interakcyjnymi, opisanego w przypadku dwóch zmiennych następująco:

$$\hat{g}(\mathbf{k}) = B_0 + B_1 k_1 + B_2 k_2 + B_{11} k_1^2 + B_{22} k_2^2 + B_{12} k_1 k_2 \quad (5.12)$$

Aproksymowaną powierzchnię odpowiedzi wyznaczano na podstawie punktów obliczeniowych uzyskanych na drodze próbkowania Monte Carlo (zarówno bezpośredniego jak również poszerzonego o techniki MC- SS oraz MC- LHS). W celu wyznaczenia powierzchni odpowiedzi użyto programu RSM-Win, którego algorytm został szerzej opisany w pracy [Winkelmann, 2013].

W przypadku bezpośredniego próbkowania Monte Carlo powierzchnia odpowiedzi została wyznaczona w 19 wariantach, przy użyciu 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900 i 1000 punktów obliczeniowych. Wartości



współczynników wielomianu 5.12 oraz wskaźników niezawodności Hasofera- Linda wyznaczonych dla każdego przypadku zestawiono w tabeli 5.2.

| $N_{SAMPL}$ | $B_0$  | $B_1$ | $B_2$ | $B_{11}$ | $B_{22}$ | $B_{12}$ | $\beta_{HL}$   |
|-------------|--------|-------|-------|----------|----------|----------|----------------|
| <b>10</b>   | -0,277 | 0,272 | 0,086 | -0,091   | -0,080   | 0,184    | <b>1,54489</b> |
| <b>20</b>   | -0,295 | 0,311 | 0,084 | -0,096   | -0,064   | 0,155    | <b>1,53122</b> |
| <b>30</b>   | -0,354 | 0,294 | 0,211 | -0,090   | -0,125   | 0,161    | <b>1,54149</b> |
| <b>40</b>   | -0,344 | 0,305 | 0,175 | -0,091   | -0,101   | 0,151    | <b>1,52312</b> |
| <b>50</b>   | -0,343 | 0,306 | 0,174 | -0,091   | -0,100   | 0,150    | <b>1,52484</b> |
| <b>60</b>   | -0,343 | 0,305 | 0,176 | -0,090   | -0,101   | 0,149    | <b>1,52610</b> |
| <b>70</b>   | -0,335 | 0,303 | 0,165 | -0,092   | -0,099   | 0,153    | <b>1,53774</b> |
| <b>80</b>   | -0,317 | 0,279 | 0,152 | -0,091   | -0,102   | 0,175    | <b>1,54716</b> |
| <b>90</b>   | -0,317 | 0,279 | 0,152 | -0,091   | -0,102   | 0,174    | <b>1,54712</b> |
| <b>100</b>  | -0,319 | 0,281 | 0,155 | -0,091   | -0,103   | 0,173    | <b>1,54830</b> |
| <b>200</b>  | -0,301 | 0,270 | 0,134 | -0,089   | -0,098   | 0,180    | <b>1,55492</b> |
| <b>300</b>  | -0,302 | 0,270 | 0,135 | -0,086   | -0,097   | 0,175    | <b>1,55249</b> |
| <b>400</b>  | -0,301 | 0,267 | 0,137 | -0,085   | -0,098   | 0,176    | <b>1,55375</b> |
| <b>500</b>  | -0,305 | 0,270 | 0,140 | -0,086   | -0,100   | 0,176    | <b>1,55047</b> |
| <b>600</b>  | -0,305 | 0,271 | 0,139 | -0,086   | -0,099   | 0,175    | <b>1,54962</b> |
| <b>700</b>  | -0,309 | 0,278 | 0,141 | -0,088   | -0,098   | 0,172    | <b>1,54602</b> |
| <b>800</b>  | -0,310 | 0,278 | 0,143 | -0,089   | -0,100   | 0,174    | <b>1,54704</b> |
| <b>900</b>  | -0,308 | 0,278 | 0,139 | -0,089   | -0,099   | 0,175    | <b>1,54684</b> |
| <b>1000</b> | -0,312 | 0,279 | 0,147 | -0,089   | -0,102   | 0,173    | <b>1,54656</b> |

Tablica 5.2 Współczynniki powierzchni odpowiedzi wyznaczone na podstawie zbioru  $N_{SAMPL}$  punktów obliczeniowych (próbkowanie Monte Carlo) oraz wyznaczone na ich podstawie wskaźniki niezawodności Hasofera-Linda

Aproksymacja powierzchni w przypadku punktów obliczeniowych pochodzących z próbkowania warstwowego Monte Carlo wykonana została dla 12 wariantów podziału przestrzeni zmiennych. Wartości współczynników regresji dla poszczególnych przypadków podziału oraz uzyskane wskaźniki niezawodności  $\beta_{HL}$  zamieszczono w tabeli 5.3.

Podobne obliczenia wykonano w przypadku powierzchni odpowiedzi wyznaczonej na podstawie punktów uzyskanych z próbkowania Monte Carlo poszerzonego o technikę hipersześcianu łacińskiego. W tym wypadku przestrzeń zmiennych została podzielona na  $2^2$ ,  $3^2$ ,  $4^2$ ,  $5^2$ ,  $6^2$ ,  $7^2$ ,  $8^2$ ,  $9^2$ ,  $10^2$ ,  $15^2$ ,  $20^2$  oraz  $25^2$  warstw o jednakowych wymiarach. Zestawienie wyników dla tego typu próbkowania zawiera tabela 5.4.

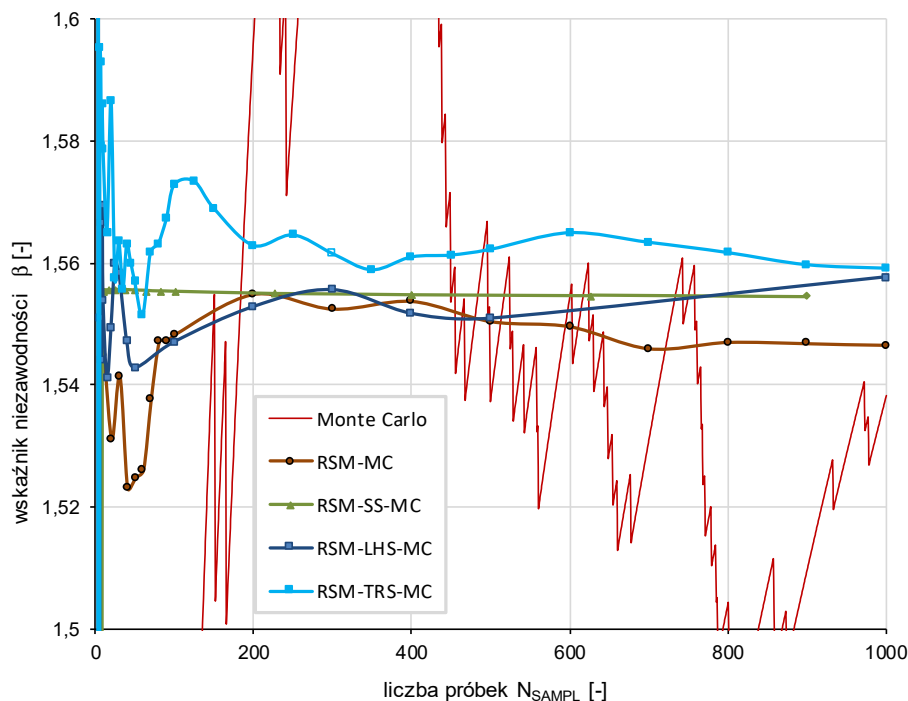
| $N_{SAMPL}$ | $B_0$  | $B_1$ | $B_2$ | $B_{11}$ | $B_{22}$ | $B_{12}$ | $\beta_{HL}$   |
|-------------|--------|-------|-------|----------|----------|----------|----------------|
| <b>1</b>    | -      | -     | -     | -        | -        | -        | -              |
| <b>4</b>    | -      | -     | -     | -        | -        | -        | -              |
| <b>9</b>    | -0,287 | 0,271 | 0,111 | -0,089   | -0,091   | 0,180    | <b>1,55537</b> |
| <b>16</b>   | -0,289 | 0,271 | 0,114 | -0,089   | -0,092   | 0,181    | <b>1,55559</b> |
| <b>25</b>   | -0,290 | 0,270 | 0,115 | -0,089   | -0,093   | 0,181    | <b>1,55570</b> |
| <b>36</b>   | -0,290 | 0,270 | 0,117 | -0,089   | -0,093   | 0,181    | <b>1,55567</b> |
| <b>49</b>   | -0,291 | 0,270 | 0,118 | -0,089   | -0,094   | 0,181    | <b>1,55563</b> |
| <b>64</b>   | -0,292 | 0,270 | 0,119 | -0,089   | -0,094   | 0,181    | <b>1,55553</b> |
| <b>81</b>   | -0,292 | 0,269 | 0,120 | -0,089   | -0,095   | 0,181    | <b>1,55545</b> |
| <b>100</b>  | -0,293 | 0,269 | 0,121 | -0,089   | -0,095   | 0,182    | <b>1,55542</b> |
| <b>225</b>  | -0,294 | 0,269 | 0,124 | -0,089   | -0,096   | 0,182    | <b>1,55505</b> |
| <b>400</b>  | -0,295 | 0,269 | 0,125 | -0,089   | -0,097   | 0,182    | <b>1,55484</b> |
| <b>625</b>  | -0,296 | 0,269 | 0,127 | -0,089   | -0,097   | 0,182    | <b>1,55467</b> |
| <b>900</b>  | -0,296 | 0,269 | 0,128 | -0,089   | -0,098   | 0,182    | <b>1,55455</b> |

Tablica 5.3 Współczynniki powierzchni odpowiedzi wyznaczone na podstawie zbioru  $N_{SAMPL}$  punktów obliczeniowych pochodzących z próbkowania warstwowego Monte Carlo oraz wyznaczone na ich podstawie wskaźniki niezawodności Hasofer-Linda

Na rys 5.10 przedstawiono graficzne porównanie uzyskanych zbieżności iteracyjnych obliczeń wskaźnika niezawodności  $\beta_{HL}$  w przypadku powierzchni odpowiedzi aproksymowanej na podstawie punktów pochodzących z wyżej opisanych rodzajów próbkowania. Uzyskane wyniki wskazują, że w przypadku analizowanego modelu za pomocą metody Monte Carlo, przy 1000 realizacji, nie otrzymano ustabilizowanego rozwiązania. Spośród analiz wykorzystujących metodę RSM próbkowanie SS pozwala na uzyskanie wiarygodnych wyników już na poziomie kilku próbek. We wszystkich pozostałych przypadkach analizy RSM, zwiększanie liczby próbek nie prowadzi to stabilizacji rozwiązania. Należy jednak podkreślić, że różnice wyników dotyczą drugiego lub nawet trzeciego miejsca po przecinku, a więc zastosowane różne podejścia prowadzą do rozwiązań, które można generalnie określić jako powtarzalne i ustabilizowane z inżynierskiego punktu widzenia.

| $N_{SAMPL}$ | $B_0$  | $B_1$ | $B_2$  | $B_{11}$ | $B_{22}$ | $B_{12}$ | $\beta_{HL}$   |
|-------------|--------|-------|--------|----------|----------|----------|----------------|
| 3           | -1,250 | 0,750 | 0,500  | -0,250   | -0,250   | 0,500    | <b>0,00000</b> |
| 4           | -0,594 | 1,438 | -0,234 | -0,344   | 0,102    | -0,117   | <b>1,65922</b> |
| 5           | -0,875 | 0,250 | 0,289  | -0,375   | 0,031    | 0,000    | <b>0,87465</b> |
| 6           | -0,275 | 0,256 | 0,100  | -0,083   | -0,089   | 0,187    | <b>1,55090</b> |
| 7           | -0,283 | 0,250 | 0,123  | -0,080   | -0,099   | 0,184    | <b>1,56646</b> |
| 8           | -0,286 | 0,257 | 0,119  | -0,088   | -0,102   | 0,196    | <b>1,54398</b> |
| 9           | -0,285 | 0,265 | 0,112  | -0,072   | -0,079   | 0,154    | <b>1,56939</b> |
| 10          | -0,301 | 0,287 | 0,122  | -0,102   | -0,097   | 0,188    | <b>1,55393</b> |
| 15          | -0,297 | 0,284 | 0,117  | -0,100   | -0,099   | 0,190    | <b>1,54111</b> |
| 20          | -0,294 | 0,269 | 0,123  | -0,087   | -0,095   | 0,179    | <b>1,54945</b> |
| 25          | -0,298 | 0,256 | 0,144  | -0,085   | -0,110   | 0,189    | <b>1,55991</b> |
| 30          | -0,292 | 0,267 | 0,121  | -0,086   | -0,091   | 0,177    | <b>1,55845</b> |
| 40          | -0,284 | 0,265 | 0,108  | -0,090   | -0,094   | 0,190    | <b>1,54712</b> |
| 50          | -0,301 | 0,266 | 0,139  | -0,096   | -0,115   | 0,203    | <b>1,54281</b> |
| 100         | -0,297 | 0,278 | 0,119  | -0,088   | -0,089   | 0,173    | <b>1,54701</b> |
| 200         | -0,310 | 0,272 | 0,149  | -0,089   | -0,106   | 0,180    | <b>1,55280</b> |
| 300         | -0,301 | 0,262 | 0,143  | -0,089   | -0,109   | 0,190    | <b>1,55557</b> |
| 400         | -0,301 | 0,270 | 0,134  | -0,087   | -0,099   | 0,179    | <b>1,55170</b> |
| 500         | -0,305 | 0,272 | 0,140  | -0,089   | -0,102   | 0,181    | <b>1,55087</b> |
| 1000        | -0,303 | 0,261 | 0,146  | -0,085   | -0,106   | 0,183    | <b>1,55767</b> |

Tablica 5.4 Współczynniki powierzchni odpowiedzi wyznaczone na podstawie zbioru  $N_{SAMPL}$  punktów obliczeniowych (próbkowanie Monte Carlo wraz z techniką hipersześcianu łącińskiego) oraz wyznaczone na ich podstawie wskaźniki niezawodności Hasofer-Linda



Rysunek 5.10 Zbieżność obliczeń wskaźnika niezawodności  $\beta_{HL}$  oszacowanego w przypadku bezpośredniego próbkowania Monte Carlo a także na podstawie powierzchni odpowiedzi aproksymowanych przy użyciu punktów pochodzących z 4 różnych technik próbkowania

### Technika próbkowania ukierunkowanego (TRS)

W celu wyznaczenia punktów próbkowania TRS, w środowisku MATLAB stworzono procedurę, która w sposób automatyczny zagęszcza punkty w przestrzeni zmiennych a następnie z całego zbioru wybiera te, które znajdują się w pobliżu stanu granicznego. Struktura procedury zbudowana została na podstawie algorytmu przedstawionego w rozdziale 3.4.3 pracy. Całość składa się z następujących modułów:

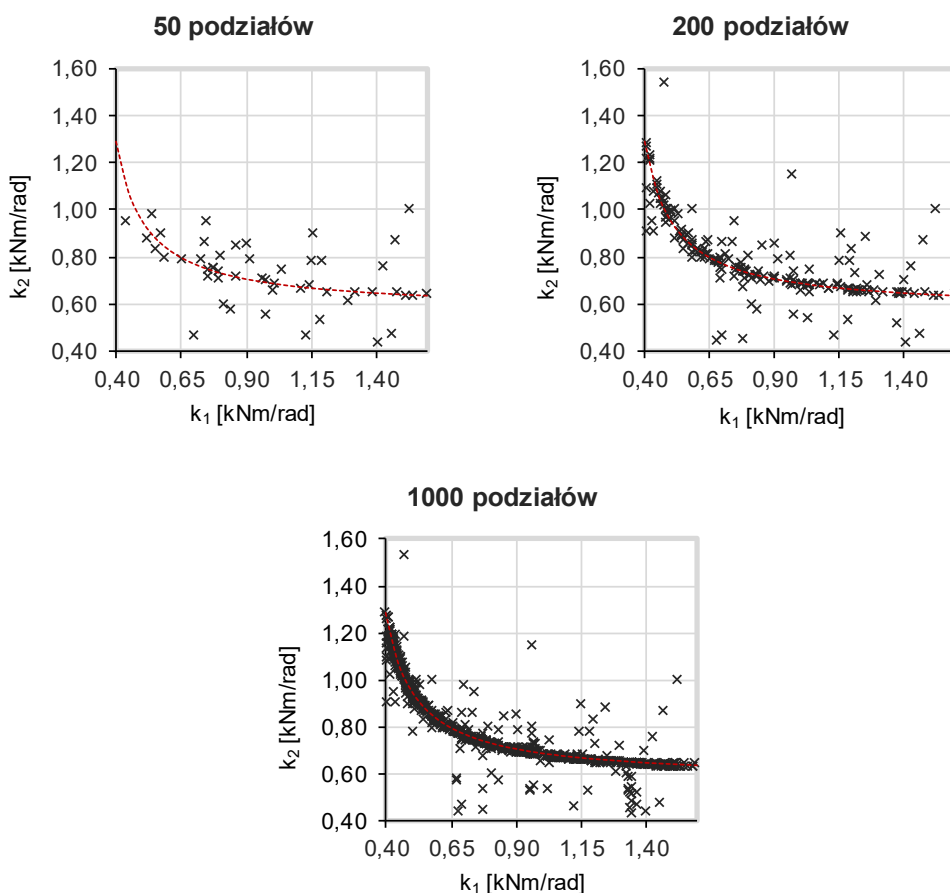
1. Wczytanie danych wejściowych: liczby zmiennych zadania, maksymalnej liczby podziałów przestrzeni podczas której poszukiwana jest para warstw, z której jedna zawiera zdarzenie  $f$  (takie dla którego funkcja stanu granicznego  $g(\mathbf{x}) < 0$ ), druga zaś zdarzenie  $s$  (takie dla którego zachodzi  $g(\mathbf{x}) > 0$ ), ostatecznej liczby podziałów przestrzeni  $\Omega$ , wektora zawierającego zakresy dla poszczególnych sztywności oraz funkcji stanu granicznego. Przyjęto, że sztywności  $k_1$  i  $k_2$  mogą przyjmować wartości z zakresu  $(k_i - 3\sigma; k_i + 3\sigma)$  a zatem  $(0, 4; 1, 2)$  [kNm/m].
2. Pierwotny podział przestrzeni przy użyciu techniki RSS, do momentu uzyskania minimum jednej pary sąsiadujących ze sobą warstw zawierających zdarzenia  $f$  -  $s$ . W przypadku gdy program osiągnie liczbę podziałów przyjętą przez użytkownika jako maksymalną, nie znalazłszy pary  $f$  -  $s$  wyświetlony zostaje stosowny komunikat o konieczności zwiększenia liczby podziałów. Losowania próbki z wydzielonej warstwy odbywa się zgodnie z rozkładem równomiernym.
3. Wybór spośród wyłonionych par  $f$  -  $s$  tej, której waga jest największa  $w_{\max} = w_f + w_s$ . Przez wagę danej warstwy ( $w_s$  lub  $w_f$ ) określa się iloczyn długości jej boków we wszystkich wymiarach (np. w problemie dwuwymiarowym będzie to pole danej warstwy). Jeżeli więcej niż jedna para warstw ma taką samą wagę  $w_{\max}$  następuje losowy wybór jednej z par.
4. Wyznaczenie długości odcinka łączącego próbki z danej pary warstw oraz jego dłuższego rzutu (zgodnie z formułami: 3.39 oraz 3.40). W przypadku wystąpienia kilku rzutów o tej samej długości wybierany jest losowo jeden z nich.
5. Wyznaczenie współrzędnej  $|x_{cut}|$  (rys.3.5) - punktu przecięcia prostej prostopadłej do dłuższego rzutu odcinka łączącego próbki w warstwach  $f$ - $s$ , zgodnie z formułą (3.41).





6. Sprawdzenie w której spośród warstw ( $f$  czy  $s$ ) nastąpi podział. W przypadku gdy punkt przecięcia pokrywa się z krawędzią podziału warstw program jako miejsce podziału przyjmuje połowę dłuższego rzutu odcinka łączącego próbki  $f-s$ .
7. Kolejno wykonywane są: podział warstwy, wylosowanie nowej próbki oraz powtórzenie całej procedury zadaną liczbę razy.
8. Wyznaczenie prawdopodobieństwa awarii rozumianego jako objętość warstw zawierających zdarzenie awaryjne (wzór 3.42).
9. Utworzenie pliku zawierającego współrzędne uzyskanych próbek oraz wartość funkcji stanu granicznego wyznaczoną dla tych współrzędnych.

Wykorzystując procedurę TRS przestrzeń zmiennych podzielono na warstwy, z których wylosowano po jednej próbce. Przykłady wygenerowanych punktów obliczeniowych w przypadku pośrednich podziałów na 50 i 200 warstw oraz ostatecznego podziału na 1000 warstw przedstawiono na rys. 5.11.



Rysunek 5.11 Punkty obliczeniowe pochodzące z: 50, 200 oraz 1000 warstw wyznaczonych na podstawie procedury TRS



Na podstawie współrzędnych uzyskanych na drodze kolejnych podziałów aproksymowano powierzchnię odpowiedzi  $\hat{g}(k_1, k_2)$ . Wartości współczynników regresji dla kolejnych podziałów przestrzeni oraz uzyskane wskaźniki niezawodności Hasofera – Linda zamieszczono w tabeli 5.5.

| $N_{SAMPL}$ | $B_0$  | $B_1$  | $B_2$  | $B_{11}$ | $B_{22}$ | $B_{12}$ | $\beta_{HL}$    |
|-------------|--------|--------|--------|----------|----------|----------|-----------------|
| 3           | 0,250  | -0,750 | 0,625  | 1,688    | -0,219   | -0,555   | <b>-1,64814</b> |
| 4           | -0,250 | 0,180  | 0,094  | -0,024   | -0,078   | 0,199    | <b>1,73232</b>  |
| 5           | 0,375  | -1,125 | -0,188 | 0,438    | -0,095   | 0,562    | <b>-0,40183</b> |
| 6           | -0,136 | -0,074 | 0,075  | 0,086    | -0,097   | 0,250    | <b>1,59534</b>  |
| 7           | -0,151 | -0,043 | 0,079  | 0,071    | -0,096   | 0,243    | <b>1,59281</b>  |
| 8           | -0,153 | -0,022 | 0,070  | 0,060    | -0,088   | 0,233    | <b>1,57906</b>  |
| 9           | -0,234 | 0,148  | 0,100  | -0,030   | -0,092   | 0,208    | <b>1,58618</b>  |
| 10          | -0,175 | 0,023  | 0,078  | 0,038    | -0,089   | 0,226    | <b>1,57873</b>  |
| 20          | -0,352 | 0,413  | 0,127  | -0,185   | -0,093   | 0,184    | <b>1,58659</b>  |
| 30          | -0,313 | 0,299  | 0,134  | -0,102   | -0,088   | 0,165    | <b>1,56349</b>  |
| 40          | -0,313 | 0,337  | 0,107  | -0,132   | -0,076   | 0,167    | <b>1,56310</b>  |
| 50          | -0,308 | 0,349  | 0,090  | -0,143   | -0,070   | 0,171    | <b>1,55695</b>  |
| 60          | -0,302 | 0,338  | 0,086  | -0,137   | -0,069   | 0,173    | <b>1,55156</b>  |
| 70          | -0,259 | 0,236  | 0,073  | -0,096   | -0,077   | 0,217    | <b>1,56169</b>  |
| 80          | -0,254 | 0,231  | 0,066  | -0,095   | -0,076   | 0,220    | <b>1,56320</b>  |
| 90          | -0,256 | 0,232  | 0,072  | -0,096   | -0,078   | 0,221    | <b>1,56720</b>  |
| 100         | -0,250 | 0,227  | 0,065  | -0,095   | -0,077   | 0,225    | <b>1,57278</b>  |
| 150         | -0,241 | 0,217  | 0,055  | -0,095   | -0,076   | 0,233    | <b>1,56898</b>  |
| 200         | -0,241 | 0,224  | 0,049  | -0,100   | -0,074   | 0,236    | <b>1,56289</b>  |
| 250         | -0,226 | 0,210  | 0,029  | -0,102   | -0,070   | 0,252    | <b>1,56462</b>  |
| 300         | -0,214 | 0,201  | 0,011  | -0,102   | -0,064   | 0,261    | <b>1,56159</b>  |
| 350         | -0,202 | 0,192  | -0,004 | -0,101   | -0,058   | 0,266    | <b>1,55890</b>  |
| 400         | -0,197 | 0,189  | -0,011 | -0,102   | -0,057   | 0,270    | <b>1,56100</b>  |
| 450         | -0,195 | 0,190  | -0,017 | -0,104   | -0,055   | 0,272    | <b>1,56129</b>  |
| 500         | -0,184 | 0,191  | -0,021 | -0,106   | -0,054   | 0,275    | <b>1,56223</b>  |
| 600         | -0,187 | 0,182  | -0,023 | -0,102   | -0,053   | 0,274    | <b>1,56494</b>  |
| 700         | -0,181 | 0,174  | -0,029 | -0,100   | -0,051   | 0,276    | <b>1,56340</b>  |
| 800         | -0,174 | 0,168  | -0,037 | -0,098   | -0,048   | 0,279    | <b>1,56172</b>  |
| 900         | -0,169 | 0,163  | -0,043 | -0,097   | -0,046   | 0,281    | <b>1,55971</b>  |
| 1000        | -0,166 | 0,162  | -0,048 | -0,098   | -0,044   | 0,284    | <b>1,55913</b>  |

Tablica 5.5 Współczynniki powierzchni odpowiedzi wyznaczone na podstawie zbioru  $N_{SAMPL}$  punktów obliczeniowych (próbkowanie TRS) oraz onliczone na ich podstawie wskaźniki niezawodności Hasofera-Linda

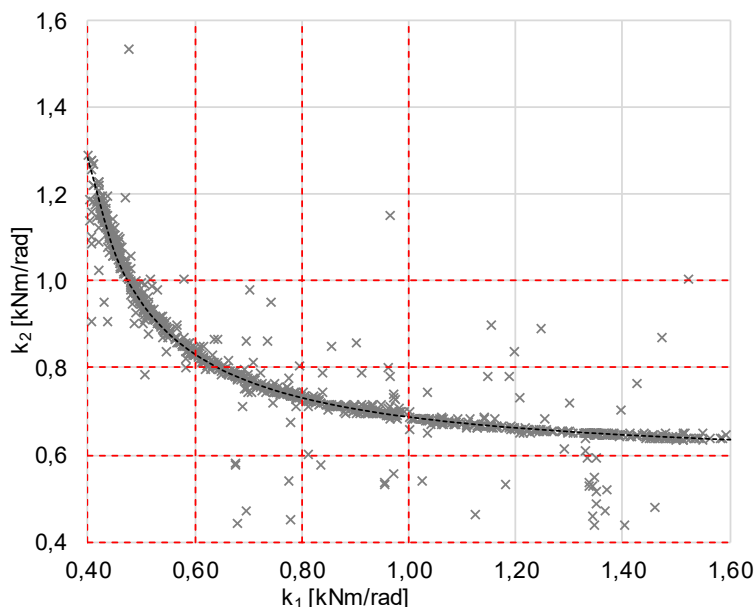
W przypadku analizowanego modelu próbkowanie TRS nie poprawiło rozwiązania, szczególnie jeżeli porównać je do wyników uzyskanych za pomocą próbkowania warstwowego. Trudno też dostrzec stabilizację wyników w przypadku wzrastającej liczby próbek. Jednakże, podobnie jak miało to miejsce we wcześniejszych

rozwiązaniach, różnice we wszystkich uzyskanych wynikach są niewielkie i dotyczą drugiej lub nawet trzeciej liczby po przecinku. Metodę TRS należy ocenić jako bardziej wiarygodną, gdyż generacja punktów dotyczy jedynie obszaru funkcji stanu granicznego (rys. 5.11). Należy spodziewać się, iż tego typu analiza będzie miała większe znaczenie w przypadku bardziej skomplikowanych modeli, które charakteryzują się znacznie większymi rozrzutami rozwiązań.

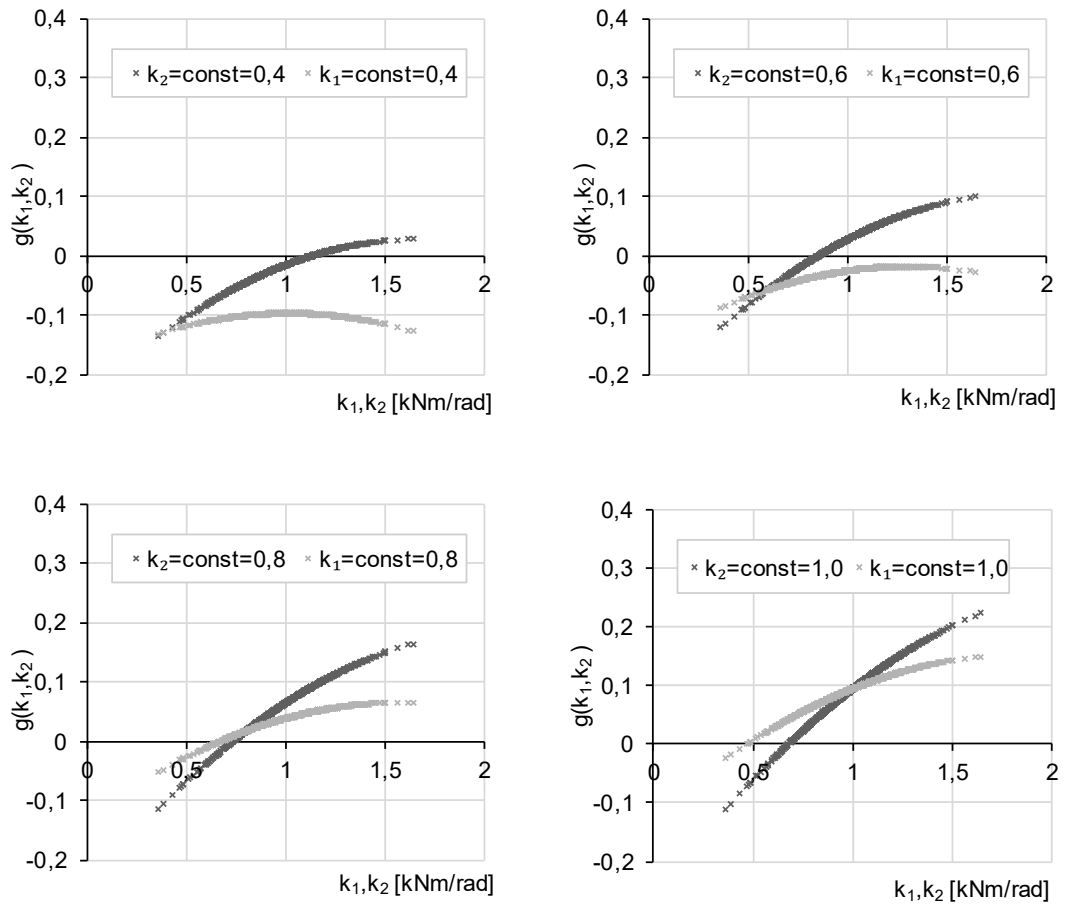
Podstawą badanie wrażliwości odpowiedzi układu w tym przypadku jest obserwacja przebiegu powierzchni odpowiedzi w poszczególnych obszarach przestrzeni zmienności parametrów  $k_1$  i  $k_2$ . Szacowania wrażliwości układu dokonano na podstawie 1000 punktów pochodzących z próbkowania TRS. Równanie powierzchni opisane jest następująco:

$$\hat{g}(k_1, k_2) = -0,166 + 0,162k_1 - 0,048k_2 - 0,098k_1^2 - 0,044k_2^2 + 0,248k_1k_2 \quad (5.13)$$

Na rys. 5.13 przedstawiono krawędzie przecięcia powierzchni odpowiedzi z płaszczyznami poprowadzonymi dla 4 różnych wartości zmiennych  $k_1$  i  $k_2$ . Schemat przyjętych płaszczyzn przecięcia zaprezentowano na rys. 5.12.



Rysunek 5.12 Schemat przyjętych płaszczyzn przecięcia (linie czerwone, przerywane) powierzchni odpowiedzi kolumny

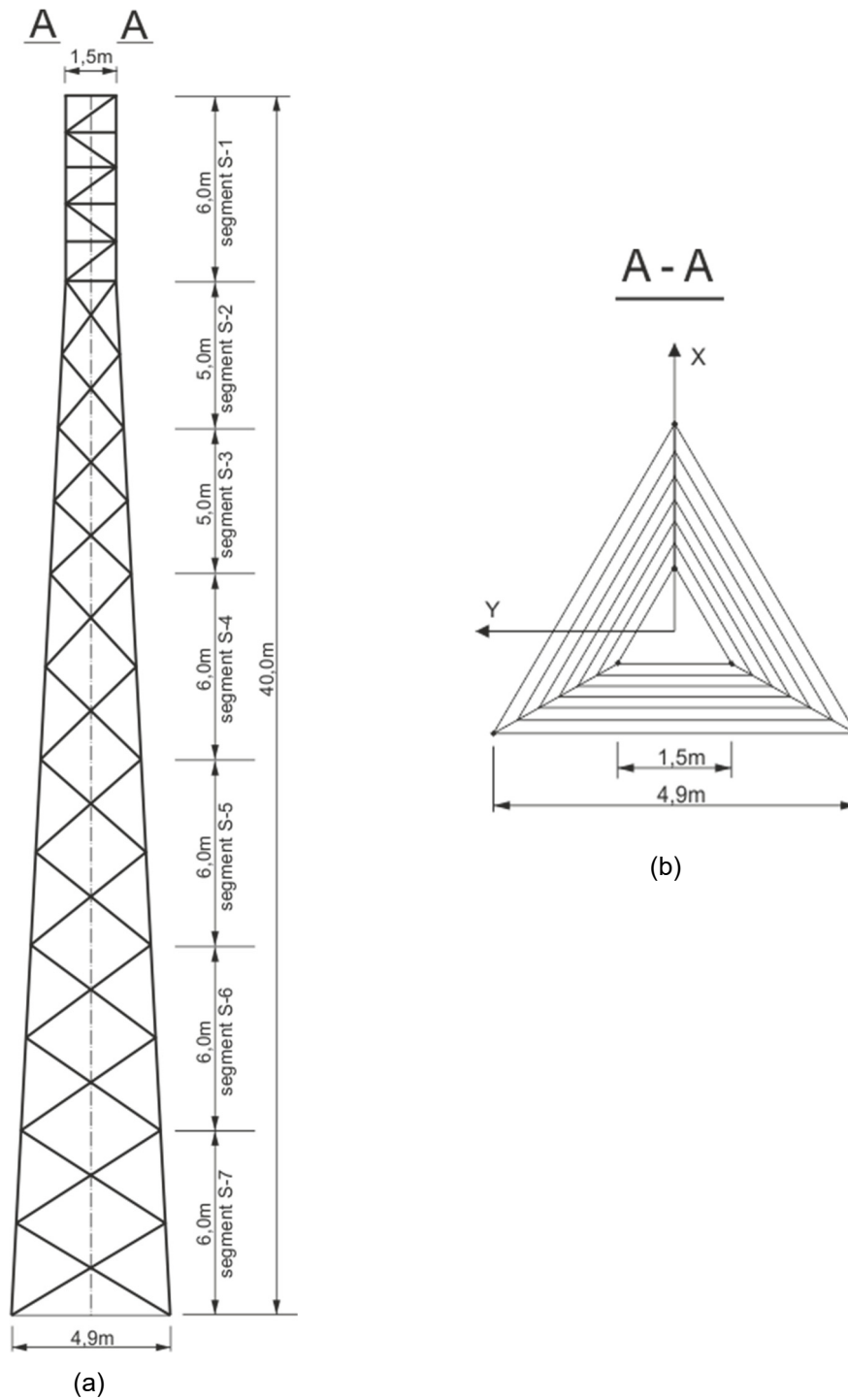


Rysunek 5.13 Krawędzie przecięcia powierzchni odpowiedzi układu z płaszczyznami  $k_1g$  i  $k_2g$

Na podstawie zamieszczonych na rys.5.13 wykresów zaobserwowano, że przy stałej wartości zmiennej  $k_1$  powierzchnia odpowiedzi układu charakteryzuje się mniejszym nachyleniem do poziomu. Należy zatem uznać, że jest to parametr, na który zmienna wyjściowa jest wrażliwsza. Wnioski te znajdują potwierdzenie we wcześniejszych obliczeniach wskaźników wrażliwości Sobola.

### 5.3 Wieża telekomunikacyjna

W niniejszym rozdziale rozpatrywana jest przestrzenna wieża kratownicowa będąca elementem infrastruktury sieci telekomunikacyjnej, opisana szerzej w [Szafran i inni, 2016], przedstawiona na rysunku 5.14.



Rysunek 5.14 Schemat wieży telekomunikacyjnej - widok z boku (a) oraz z góry (b) (na podstawie [Szafran i inni, 2016])

### 5.3.1 Przedstawienie modelu

Wieża o całkowitej wysokości 40m, podzielona jest na 7 segmentów. Dolna część konstrukcji (segmenty 2-7, znajdujące się poniżej 34m) ma kształt ściętej piramidy o stałym nachyleniu równym 5% . Długość boku podstawy piramidy zmienia się od 4,9m do 1,5m. Elementy segmentu nr 1 tworzą pryzmat o długości boku podstawy równej 1,5 m. Widok wieży przedstawiono na rysunku 5.14.

Elementy nośne konstrukcji (krawężniki) zostały wykonane z okrągłych prętów pełnych, natomiast elementy wykratowania wykonano z gorącowalcowanych kątowników równoramiennych i nierównoramiennych. Szczegóły dotyczące przekrojów poszczególnych elementów wieży zestawiono w tabelicy 5.6 .

System ukośnych stężeń wieży stanowi wykratowanie typu X. Elementy na przecięciu połączone są ze sobą za pomocą odstępnika i pojedynczej śruby, natomiast elementy wykratowania połączone są z nogami wieży za pomocą blachy węzłowej oraz dwóch śrub. W modelu matematycznym system odstępników i blach węzłowych nie jest ujęty – pręty łączą się w węzłach bezpośrednio, tworząc przestrzenne połączenia przegubowe. Zestawienie właściwości mechanicznych stali, z której wykonana jest wieża, przedstawia tablica 5.7. Podstawą do ich ustalenia były wyniki badań rozciągania 18 próbek (12 o przekroju kołowym oraz 6 o przekroju kątowym), zaprezentowane w [Szafran i inni, 2016].

| Numer segmentu | Elementy nośne | Elementy wykratowania |
|----------------|----------------|-----------------------|
| S-1            | Ø 65           | L 60x60x5             |
| S-2            | Ø 65           | L 60x60x5             |
| S-3            | Ø 80           | L 60x60x6             |
| S-4            | Ø 80           | L 90x60x8             |
| S-5            | Ø 90           | L 90x60x8, L 100x75x8 |
| S-6            | Ø 90           | L 100x75x8            |
| S-7            | Ø 100          | L 120x80x8            |

Tablica 5.6 Profile wybranych elementów wieży (wszystkie wymiary podane są w mm) [Szafran i inni, 2016]

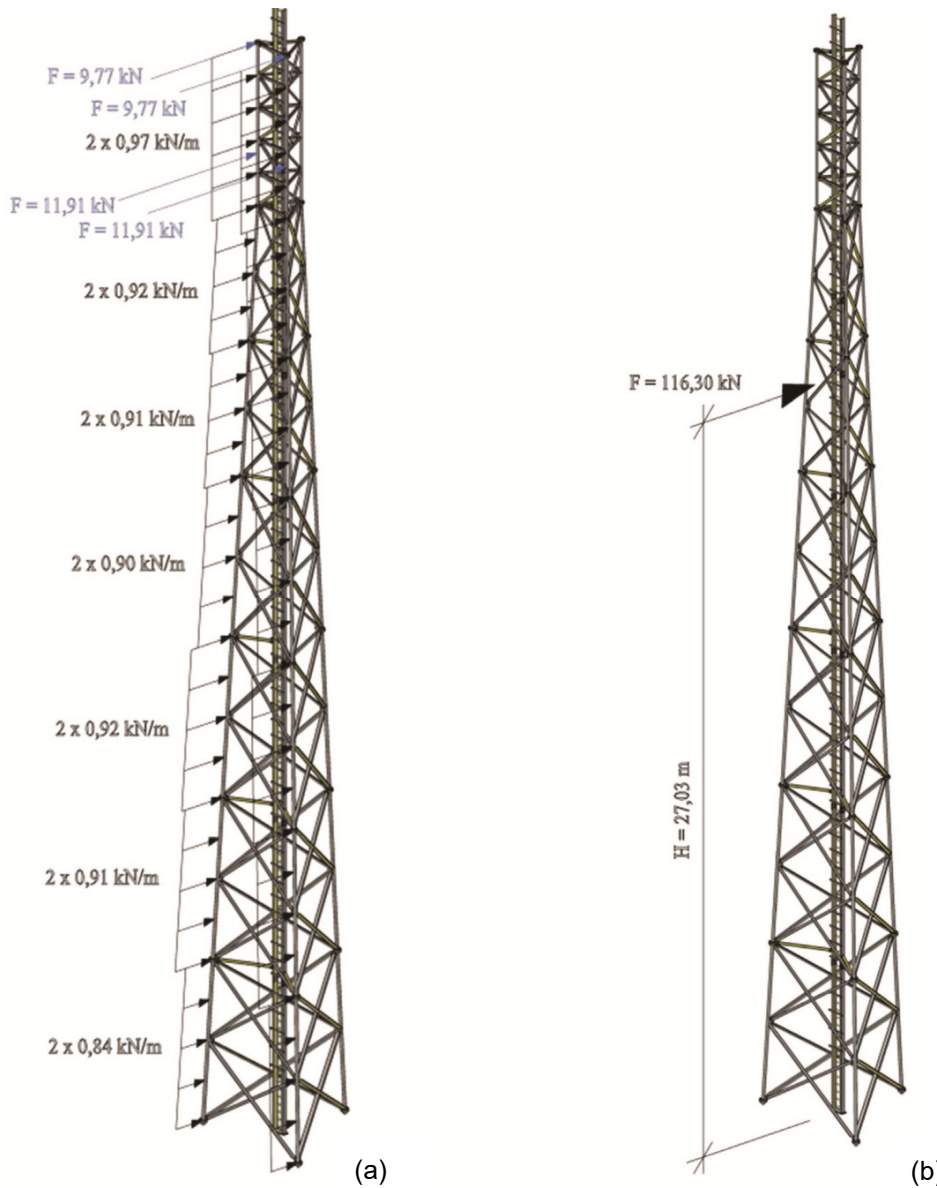
| właściwości mechaniczne     | przekrój kątowy | przekrój kołowy |
|-----------------------------|-----------------|-----------------|
| moduł Young'a               | 202,0 GPa       | 206,6 GPa       |
| granica plastyczności       | 294,2 MPa       | 273,2 MPa       |
| wytrzymałość na rozciąganie | 399,8 MPa       | 284,1 MPa       |

Tablica 5.7 Właściwości mechaniczne stali konstrukcyjnej elementów składowych wieży [Szafran i inni, 2016]

Wieża obciążona jest jedną siłą skupioną, modelującą:

- 1) wypadkową działania wiatru na wieżę, w przypadku, gdy kąt natarcia oraz wartość tego oddziaływania są najmniej korzystne,
- 2) wypadkową działania wiatru na elementy wyposażenia teletechnicznego wieży.

Punkt przyłożenia siły został ustalony po zredukowaniu przedstawionego na rysunku 5.15 układu sił do jednej wypadkowej. W pracy [Szafran i inni, 2016] udowodniono, iż rezultaty uzyskane na podstawie modelu numerycznego z uproszczonym schematem obciążenia są zbliżone z obliczeniami przeprowadzonymi przy wykorzystaniu modelu z obciążeniem rozłożonym na wysokości wieży.

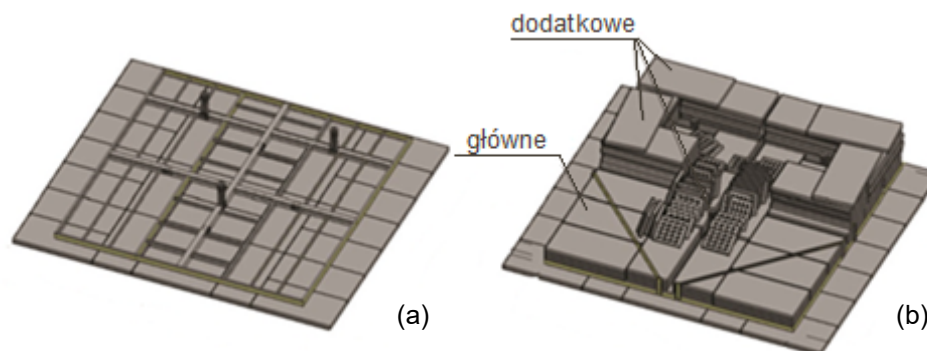


Rysunek 5.15 Schemat obciążenia wiatrem wieży telekomunikacyjnej i jej wyposażenia teletechnicznego – obciążenie pełne (a) oraz jego redukcja do wypadkowej (b)

Wieża posadowiona jest na gruncie w sposób pośredni, za pomocą stalowej ramy stelażowej, do której przymocowano węzły podstawy konstrukcji. Rama stalowa spoczywa na poduszce z płyt żelbetowych, co ma zapewnić odpowiednie przekazanie obciążeń z ramy na podłoże gruntowe. Dodatkowo, rama dociążona jest balastem z płyt żelbetowych.

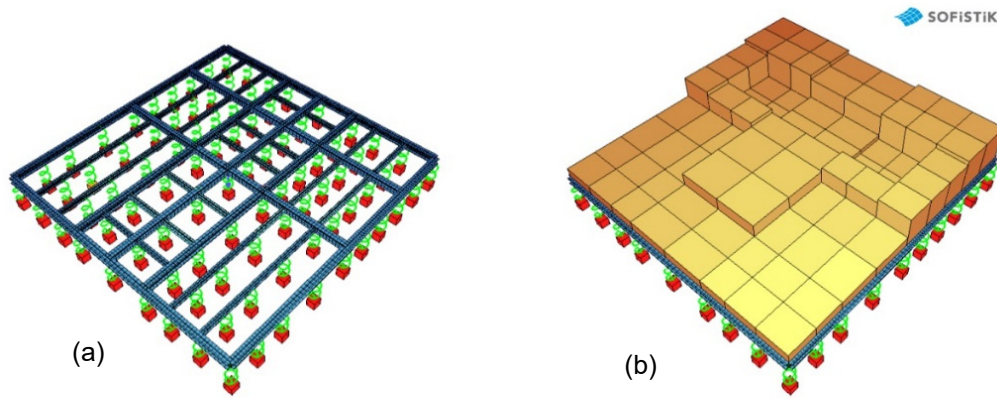
Badania przeprowadzone w pracy [Szafran i inni, 2016] wykazały jednoznacznie, iż sztywność układu: rama – podłoże gruntowe jest istotnym czynnikiem wpływającym na stany graniczne: stateczności i użyteczności wieży. Ustalono, że zmiany w sztywności podparcia węzłów podstawy wieży doprowadzić mogą do zmniejszenia mnożników: dopuszczalnego lub krytycznego obciążenia wieży, zarówno z uwagi na przekroczenie dopuszczalnego przemieszczenia jej górnego węzła ( $u_{dop} = H / 100 = 40 \text{ mm}$ ) jak również z uwagi na zmianę miejsca w konstrukcji, w którym dochodzi do utraty stateczności.

Istotnym problemem staje się wówczas obliczenie parametrów określających zmienność sztywności podparcia. Można tego dokonać badając podatność układu: rama – podłoże gruntowe na działanie jednostkowego obciążenia: ściskającego i rozciągającego. W tym celu w programie SOFiSTiK utworzono model numeryczny układu podpierającego bazując na wymiarach rzeczywistej konstrukcji, zamieszczonych w pracy [Szafran i inni, 2016]. Widok rzeczywistej ramy stelażowej – ramy na poduszce z płyt żelbetowych z balastem oraz bez przedstawiono na rys 5.16. Wizualizację modelu ramy stelażowej przedstawiono na rysunku 5.17. W modelu tym sztywność podłoża gruntowego (przyjęto piasek średni, średnio zagęszczony) oraz sztywność poduszki z płyt betonowych zostały przeliczone na zastępcze sztywności elementów sprężystych zgodnie z procedurami programu SOFiSTiK.



Rysunek 5.16 Ilustracja rzeczywistej ramy stelażowej podpierającej wieżę telekomunikacyjną – rama na poduszce z płyt żelbetowych (a) i dociążenie balastem (b) [Szafran i inni, 2016]



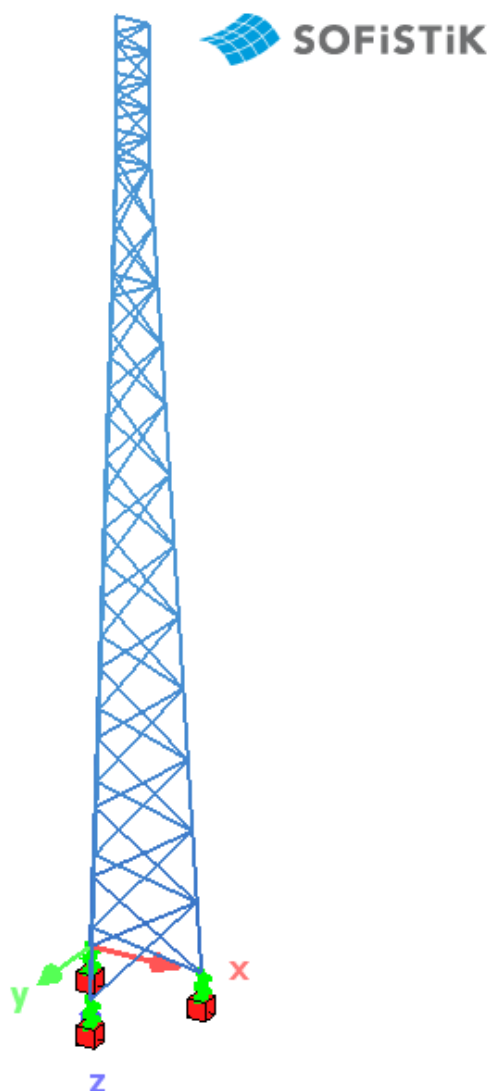


Rysunek 5.17 Model ramy stelażowej (a) oraz dociążenia balastem (b) wykonany w programie SOFiSTiK

W modelu ramy przyjęto następujące założenia o możliwych rozrzutach parametrów wejściowych modelu:

- rozrzut współczynnika sprężystości podłoża gruntowego, związana ze stopniem zagęszczenia piasku średniego, może wahać się w granicach od 22,5 do 67,5 MN/m<sup>2</sup>. Zgodnie z PN-81/B-03020-7 zmienna ta opisana jest rozkładem równomiernym;
- wartość modułu sprężystości stali  $E_s$ , może wahać się w granicach od 184,5 do 225,5 GPa. Zmienną opisano rozkładem normalnym;
- wartość modułu sprężystości betonu C20/25 -  $E_c$  może wahać się w granicach od 21 do 39 GPa. Zmienna ta również opisana jest rozkładem normalnym;
- zmienność obciążenia balastem, opisana rozkładem równomiernym, może wynosić do 25% wartości podstawowej. Związane jest to z możliwą lokalną zmianą objętości pasma balastu.

Dla wyżej zaproponowanych zmiennych, na podstawie wartości średniej naprężenia pod poduszką betonową ramy, obliczono zastępcze współczynniki  $k$  w dwóch wariantach: od jednostkowego obciążenia ściskającego pod słupem ściskany wieży oraz od pary jednostkowych obciążeń rozciągających pod słupami poddanymi rozciąganiu. Obliczone wartości zostały wprowadzone jako stałe sprężystości w podporach sprężystych, założonych w węzłach podporowych modelu wieży. Dzięki takiemu postępowaniu w modelu numerycznym w prosty sposób uwzględniono ramę podporową. Wizualizację modelu wieży punktowo sprężysto podpartej przedstawiono na rysunku 5.18.



Rysunek 5.18 Model rozważanej wieży telekomunikacyjnej punktowo sprężysto podpartej.

Na podstawie obliczeń statycznych modelu przedstawionego na rysunku 5.18, wyznaczono następujące wartości zastępczego współczynnika  $k$  podpory sprężystej:

- w przypadku sprężyny pod słupem ściskanym wartość średnia oraz odchylenie standardowe współczynnika  $k_c$  wyniosły odpowiednio:  $\mu_{k_c} = 240 \text{ MN/m}$ ,  $\sigma_{k_c} = 65 \text{ MN/m}$ , funkcja gęstości prawdopodobieństwa w przybliżeniu opisana jest rozkładem normalnym;
- w przypadku sprężyny pod słupami rozciągany – wartość średnia oraz odchylenie standardowe współczynnika  $k_t$  wyniosły:  $\mu_{k_t} = 360 \text{ MN/m}$ ,

$\sigma_{k_t} = 100$  MN/m, funkcja gęstości prawdopodobieństwa w przybliżeniu opisana jest rozkładem normalnym.

Można więc założyć, iż rozważany w zadaniu problem jest probabilistycznie dwuwymiarowy. Uproszczenie takie umożliwia graficzną prezentację zmiany odpowiedzi konstrukcji (wyrażonej poprzez mnożnik obciążenia dopuszczalnego  $m_{dop}$ ) na skutek wahanía wartości współczynników sprężystości podpór  $k_c$  i  $k_t$ .

### 5.3.2 Wstępna analiza zmiany odpowiedzi konstrukcji

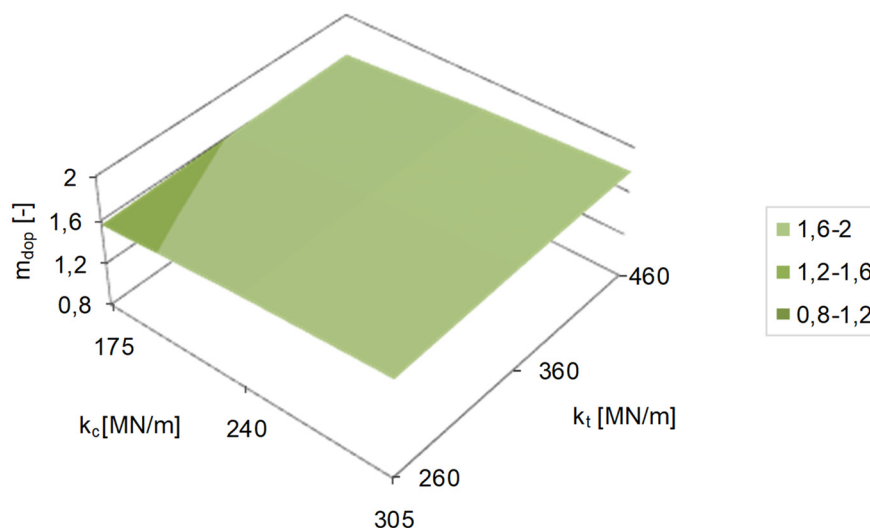
Pierwszym krokiem analizy modelu było przeprowadzenie tzw. eksperymentowania czynnikowego (opisanego w rozdziale 4.3.1 pracy), mającego na celu obserwację mechanicznego zachowania odpowiedzi modelu na skutek zmiany parametrów  $k_c$  i  $k_t$ . Analiza taka ma charakter jedynie szacunkowy, dlatego liczba użytych na jej potrzeby realizacji zmiennych powinna być mała. Jednocześnie istotnym jest właściwy dobór punktów w przestrzeni realizacji, dla których badana jest odpowiedź konstrukcji - niewłaściwie przyjęte punkty prowadzą do przekłamań w obrazie zachowania modelu. Właściwie przeprowadzone badania czynnikowego umożliwia rozpoznanie jaki charakter - liniowy czy nieliniowy ma odpowiedź konstrukcji oraz gdzie w przestrzeni zmiennych orientacyjnie znajduje się stan graniczny. Właściwie wyciągnięte wnioski umożliwiają określenie, które z metod próbkowania potencjalnie mogą być właściwe w bardziej szczegółowej analizie a które należy odrzucić.

W zadaniu rozpatrzono dwa warianty zbioru punktów. Pierwszy zawiera dziewięć próbek będących wynikami uzyskanymi na podstawie wartości zmiennych odpowiadających ich wartościom średnim oraz wartościom średnim pomniejszonym i powiększonym o jedno odchylenie standardowe ( $\mu - \sigma; \mu; \mu + \sigma$ ). Dla każdej próbki wykonano obliczenia numeryczne określając mnożnik obciążenia dopuszczalnego ze względu na kryteria: SGU i SGN. Wyniki obliczeń przedstawiono w tabeli 5.8. Ilustrację graficzną śledzonej zmiany zaprezentowano na rysunku 5.19.



| $y = m_{crit} [-]$        |                      | $x_1 = k_c [\text{MN/m}]$ |             |                      |
|---------------------------|----------------------|---------------------------|-------------|----------------------|
|                           |                      | $\mu - \sigma = 45$       | $\mu = 240$ | $\mu + \sigma = 435$ |
| $x_2 = k_t [\text{MN/m}]$ | $\mu - \sigma = 60$  | 1,562                     | 1,654       | 1,714                |
|                           | $\mu = 360$          | 1,602                     | 1,696       | 1,758                |
|                           | $\mu + \sigma = 660$ | 1,626                     | 1,722       | 1,785                |

Tablica 5.8 Wartości mnożnika obciążenia dopuszczalnego wieży ze względu na kryteria SGU i SGN wyznaczone dla dziewięciu próbek .

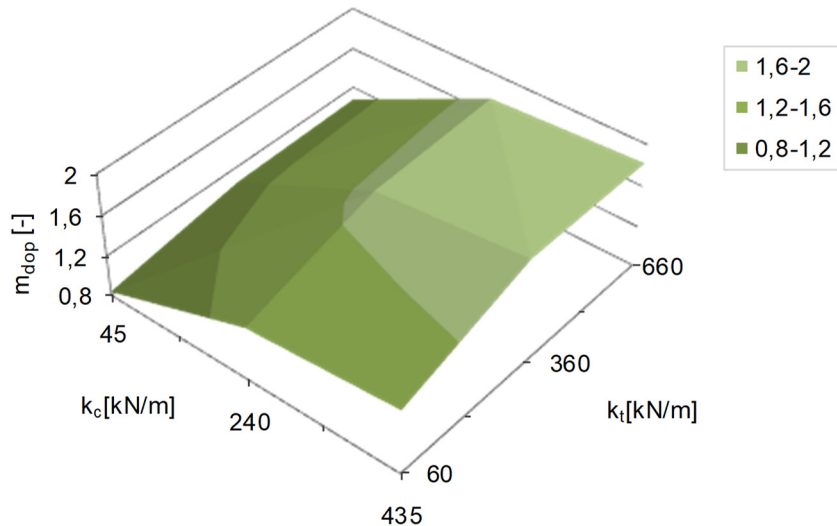


Rysunek 5.19 Zmiana mnożnika obciążenia dopuszczalnego wieży na skutek zmiany parametrów  $k_c$  i  $k_t$  - dobór zmiennych ze zbioru  $(\mu - \sigma; \mu; \mu + \sigma)$

Drugi wariant zakłada przyjęcie dziewięciu próbek zawierających wielkości: średnie oraz ekstremalne współczynników odpowiadające  $\mu - 3\sigma; \mu; \mu + 3\sigma$ . Dla każdej próbki ponownie wykonano obliczenia, określając mnożnik obciążenia dopuszczalnego. Wyniki obliczeń zestawiono w tabeli 5.9. Ilustrację graficzną śledzonej zmiany przedstawia rysunek 5.20.

| $y = m_{crit} [-]$        |                       | $x_1 = k_c [\text{MN/m}]$ |             |                       |
|---------------------------|-----------------------|---------------------------|-------------|-----------------------|
|                           |                       | $\mu - 3\sigma = 45$      | $\mu = 240$ | $\mu + 3\sigma = 435$ |
| $x_2 = k_t [\text{MN/m}]$ | $\mu - 3\sigma = 60$  | 0,836 (*)                 | 1,321       | 1,428                 |
|                           | $\mu = 360$           | 1,043                     | 1,696       | 1,822 (**)            |
|                           | $\mu + 3\sigma = 660$ | 1,071                     | 1,752       | 1,821 (**)            |

Tablica 5.9 Wartości mnożnika obciążenia dopuszczalnego wieży ze względu na kryteria SGU i SGN wyznaczone dla dziewięciu próbek zawierających wartości: średnie (odpowiadające  $\mu$ ) oraz ekstremalne (odpowiadające  $\mu \pm 3\sigma$ ) współczynników sprężystości  $k_c$  i  $k_t$ .



Rysunek 5.20 Zmiana mnożnika obciążenia dopuszczalnego  $m_{dop}$  wieży na skutek zmiany parametrów  $k_c$  i  $k_t$  - dobór zmiennych ze zbioru  $(\mu - 3\sigma; \mu; \mu + 3\sigma)$

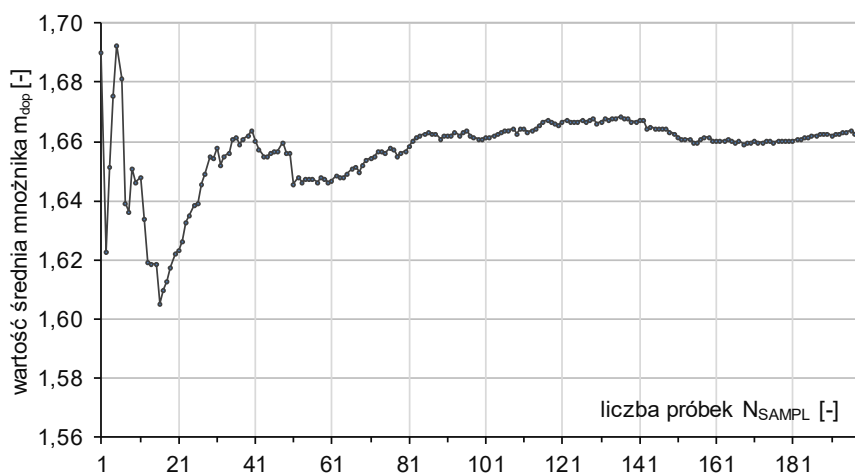
W przypadku pierwszego wariantu doboru punktów przebieg zmienności mnożnika dopuszczalnego wieży nie wskazuje na wyraźną miejscową nieliniowość zagadnienia (widoczną przy zastosowaniu drugiego wariantu obliczeń). Aproksymacja powierzchni odpowiedzi wielomianem stopnia pierwszego w tym przypadku wydaje się być wystarczającą. W drugiej wersji doboru punktów, jak można zaobserwować na rysunku 5.20, zmiana mnożnika obciążenia dopuszczalnego ma charakter nieliniowy, gdyż w przypadkach, w którym zmienne przyjmują minimalne wartości następuje zauważalny spadek mnożnika. Całość estymowanej powierzchni zdaje się być możliwa do aproksymacji jedynie wielomianami stopnia większego niż 1. Dodatkowo, na podstawie danych zebranych w tabelicy 5.9 można stwierdzić, iż wieża w analizowanych zakresach zmienności przekracza stan graniczny z uwagi na dwa kryteria. Wynik oznaczony symbolem (\*) wskazuje na sytuację, w której dla małych wartości współczynników  $k$  istnieje możliwość wystąpienia nadmiernego przechyłu wieży, przekraczającego wartość dopuszczalną ze względu na SGU. Wyniki oznaczone symbolem (\*\*) sygnalizują możliwość wystąpienia sytuacji, w której przy wysokich wartościach współczynników  $k$  następuje lokalna utrata stateczności elementów wieży. Obserwacja mnożnika  $m_{dop}$  z uwagi na kryterium stateczności wskazuje, że w przypadku małych wartości  $k$  mnożnik  $m_{dop}$  przyjmuje wartości większe (dochodzące do 1,832), a utrata stateczności pojawia się w górnych partiach wieży (związane jest to z nadmiernym

przechyłem konstrukcji oraz lokalizacją obciążenia zewnętrznego), natomiast dla średnich i dużych wartości  $k$  mnożniki krytyczne są mniejsze (wahają się w granicach 1,811 – 1,823), a utrata stateczności pojawia się wówczas w elementach wieży znajdujących się blisko punktów podparcia.

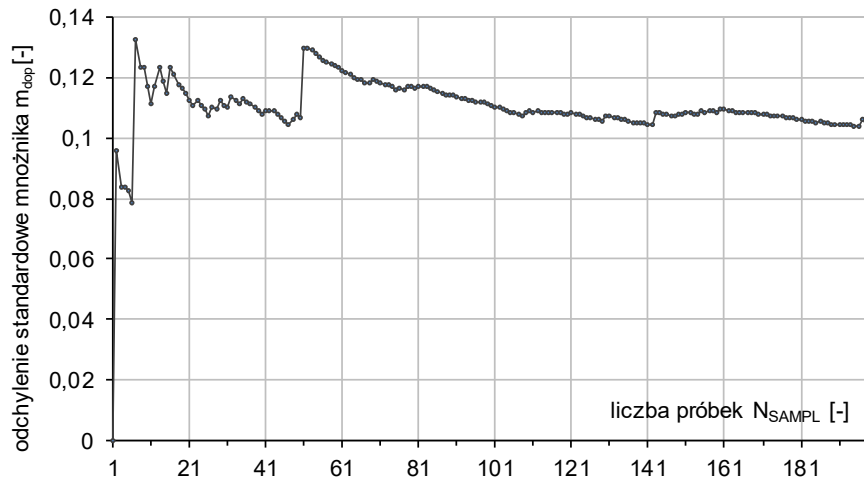
#### Analiza zmiany odpowiedzi konstrukcji wykorzystująca metodę Monte Carlo

Kolejny krok analizy zakładał obliczenie mnożnika  $m_{dop}$  w 200 modelach, w których współczynniki  $k$  przyjmują wartości wygenerowane zgodnie z metodą Monte Carlo, a więc całkowicie dowolnie i niezależnie. Otrzymano następujące ekstremalne wartości mnożnika:  $m_{dop}^{\min} = y_{\min} = 1,119$  oraz  $m_{dop}^{\max} = y_{\max} = 1,821$ , z czego druga z wymienionych wartości nie spełnia kryterium stateczności.

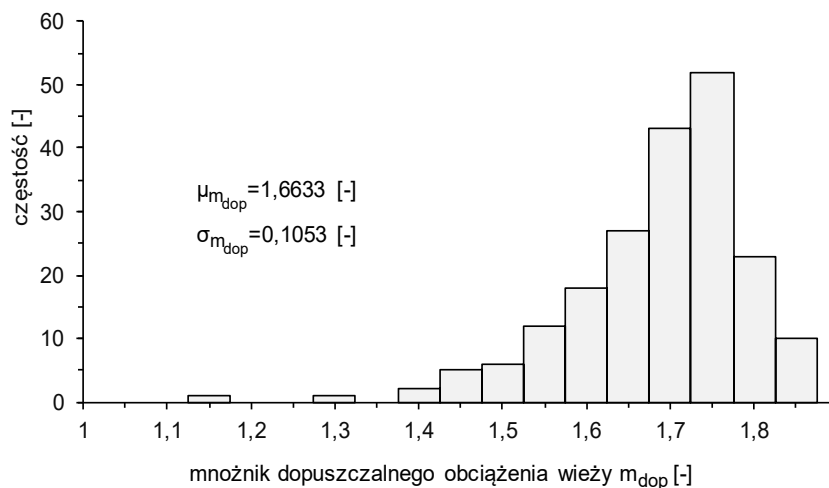
Na rysunkach: 5.21 oraz 5.22 przedstawiono proces zmiany wartości średniej oraz odchylenia standardowego mnożnika obciążenia dopuszczalnego wieży, a na rysunku 5.23 poglądowy histogram wyników mnożnika dopuszczalnego dla 200 realizacji zmiennych metodą MC.



Rysunek 5.21 Proces zmiany wartości średniej mnożnika obciążenia dopuszczalnego wieży dla 200 próbek wygenerowanych według metody Monte Carlo



Rysunek 5.22 Proces zmiany odchylenia standardowego mnożnika obciążenia dopuszczalnego wieży dla 200 próbek wygenerowanych według metody Monte Carlo.



Rysunek 5.23 Histogram mnożnika obciążenia dopuszczalnego wieży utworzony na podstawie 200 próbek wygenerowanych według metody Monte Carlo.

### **Analiza zmiany odpowiedzi konstrukcji wykorzystująca metodę próbkowania ukierunkowanego TRS**

W kolejnym kroku analizy, w związku z zauważalnym spadkiem powierzchni odpowiedzi, zdecydowano się prześledzić szczegółowo obszar przekroczenia funkcji stanu granicznego konstrukcji. W tym celu wykorzystano stworzoną na podstawie algorytmu metody TRS autorską procedurę generacji próbek.

Procedura ta wymaga podania przez użytkownika równania funkcji stanu granicznego, w pobliżu której mają być losowane próbki. Wykorzystano 15 realizacji wektora zmiennych metodą Monte Carlo, na podstawie których w programie RSM - WIN

wyznaczono współczynniki regresji powierzchni odpowiedzi konstrukcji. Aproksymowana powierzchnia dana jest równaniem:

$$\hat{y}(x_1, x_2) = -0,41779 + 4,4821 \cdot x_1 + 1,6654 \cdot x_2 - 6,6876 \cdot x_1^2 - 1,8618 \cdot x_2^2 - 1,059 \cdot x_1 x_2, \quad (5.14)$$

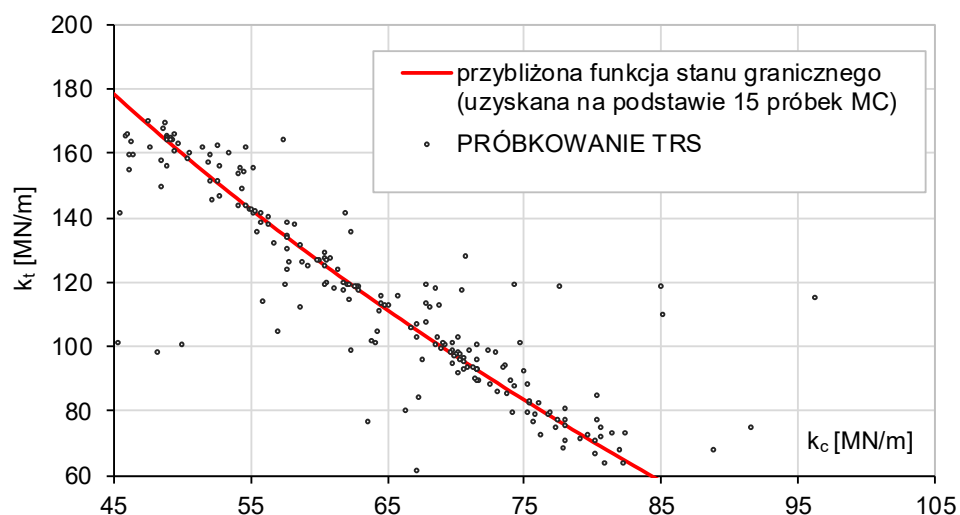
natomiast równanie jej przecięcia z płaszczyzną  $f(x_1, x_2) = y(x_1, x_2) = 1$  opisuje formuła:

$$x_2(x_1) = 268557 \cdot (*), \quad (5.15)$$

gdzie:

$$(*) = 0,00167 - 1,059 \cdot 10^{-6} x_1 - 6,98 \cdot 10^{-6} \cdot \sqrt{-6939,03 + 613,19 x_1 - x_1^2} \quad (5.16)$$

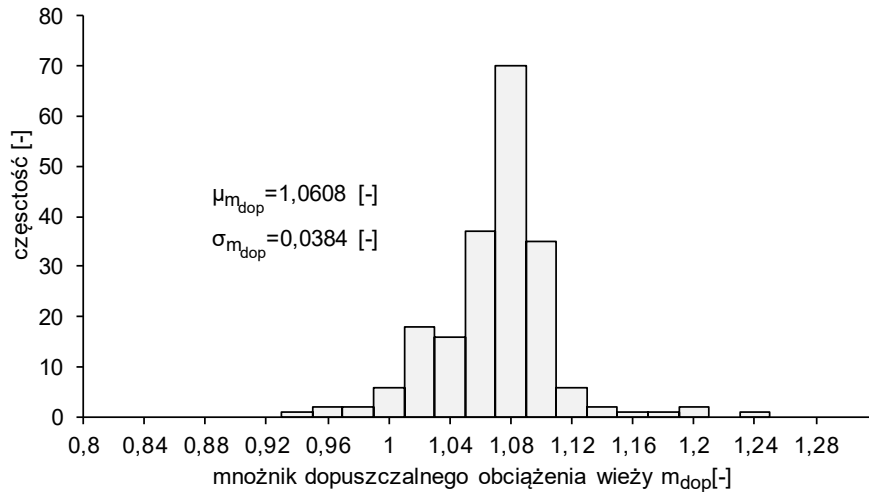
Przebieg przybliżonej funkcji stanu granicznego oraz rezultat generacji techniką próbkowania ukierunkowanego przedstawiono na rysunku 5.24.



Rysunek 5.24 Przybliżona funkcja stanu granicznego wyznaczona na podstawie 15 próbek symulacji MC oraz 200 punktów pochodzących z próbkowania techniką TRS

Podobnie jak w przypadku metody Monte Carlo w procesie TRS wygenerowano 200 próbek (modeli numerycznych). Otrzymano następujące wartości ekstremalne mnożnika obciążenia dopuszczalnego:  $m_{dop}^{\min} = 0,992$  oraz  $m_{dop}^{\max} = 1,225$ , z czego pierwsza z wymienionych wartości, jak większość w tej analizie, nie spełnia kryterium SGU. Rysunek 5.25 przedstawia poglądowy histogram utworzony na podstawie wyników mnożnika obciążenia dopuszczalnego dla 200 realizacji pochodzących z próbkowania TRS.





Rysunek 5.25 Histogram mnożnika obciążenia dopuszczalnego wieży utworzony na podstawie 200 próbek wygenerowanych zgodnie z metodologią TRS

### Analiza zmiany odpowiedzi konstrukcji wykorzystująca metodę powierzchni odpowiedzi (RSM)

Uzyskane w poprzednich punktach analizy następujące próbki: 1 próbka zawierająca wartości średnie zmiennych, 8 próbek zawierających wielkości ekstremalne (odpowiadające  $\mu \pm 3\sigma$ ) zmiennych, 8 próbek odpowiadających  $\mu \pm \sigma$ , 200 próbek symulacji Monte Carlo oraz 200 próbek techniki symulacji TRS zostały w tym kroku wykorzystane do określenia współczynników kierunkowych aproksymowanej powierzchni odpowiedzi konstrukcji

Z uwagi na widoczną nieliniowość pojawiającą się w obrębie „ogonów” rozkładów prawdopodobieństwa obydwu zmiennych, aproksymacja wykonana zostanie wielomianem drugiego stopnia. Równanie powierzchni odpowiedzi opisuje wówczas następująca formuła:

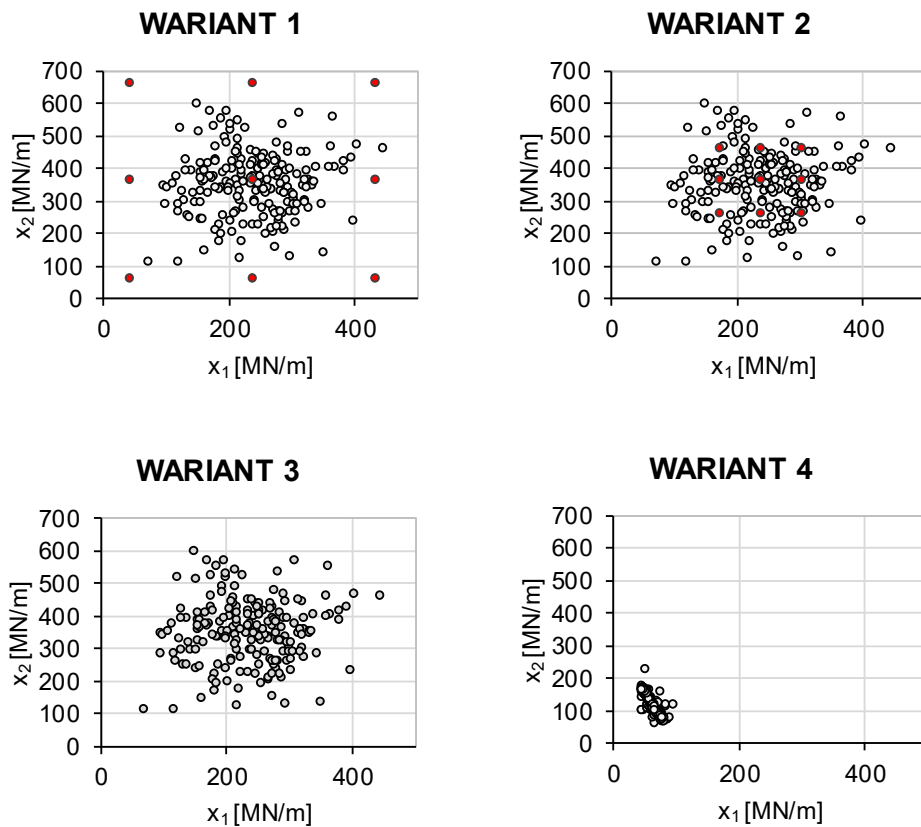
$$\hat{y}(x_1, x_2) = B_0 + B_1x_1 + B_2x_2 + B_{11}x_1^2 + B_{22}x_2^2 + B_{12}x_1x_2 \quad (5.17)$$

Należy podkreślić, że liczba próbek w zbiorach celowych (9 współrzędnych zmiennych  $x_1$  i  $x_2$ ) jest zbyt mała aby właściwie aproksymować powierzchnię odpowiedzi konstrukcji. Zdecydowano zatem aby próbki te zostały włączone do zbioru wyników pochodzących z symulacji Monte Carlo. Ostatecznie przyjęto 4 warianty obliczeniowe - ich opis zawarty jest w tabelicy 5.10.

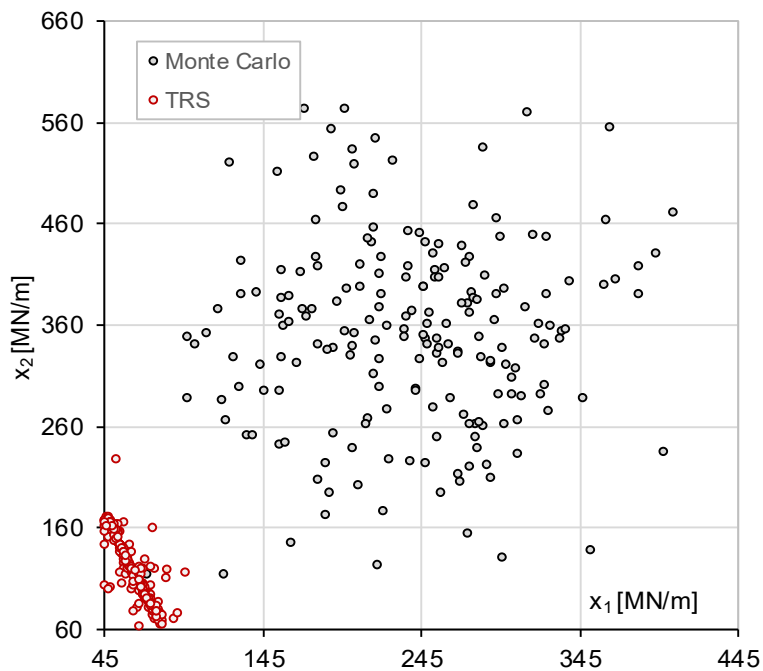
| NR WARIANTU<br>OBLICZENIOWEGO | SPOSÓB DOBORU PRÓBEK   |
|-------------------------------|--|
| 1.                            | 1 próbka zawierająca wartości średnie, 8 próbek zawierających wartości ekstremalne (odpowiadające $\mu \pm 3\sigma$ ), 200 próbek symulacji MC – łącznie 209 próbek; aproksymacja powierzchni odpowiedzi po 9 pierwszych i każdych 5 kolejnych próbkach; |
| 2.                            | 1 próbka zawierająca wartości średnie, 8 próbek zawierających wartości odpowiadające $\mu \pm \sigma$ , 200 próbek symulacji MC – łącznie 209 próbek; aproksymacja powierzchni odpowiedzi po 9 pierwszych i każdych 5 kolejnych próbkach;                |
| 3.                            | 200 próbek symulacji MC – aproksymacja powierzchni odpowiedzi po każdych 5 kolejnych próbkach;   |
| 4.                            | 200 próbek symulacji TRS – aproksymacja powierzchni odpowiedzi po każdych 5 kolejnych próbkach.  |

Tablica 5.10 Wartości mnożnika obciążenia dopuszczalnego wieży ze względu na kryteria SGU i SGN dla dziewięciu próbek dobranych wg metodologii PEM

Schemat doboru punktów w kolejnych wariantach obliczeniowych przedstawiono na rys. 5.26. Na rysunku 5.27 zaprezentowano zestawienie próbek wygenerowanych zgodnie z metodami: MC (wariant 3) oraz TRS (wariant 4). Widocznym jest, że zaledwie kilka próbek pochodzących z losowania Monte Carlo znajduje się w spodziewanym obszarze stanu granicznego. Można również zauważyć, że aproksymacja powierzchni w wariantach 2 i 3 przeprowadzona jest na podstawie punktów znajdujących się poza tym obszarem.



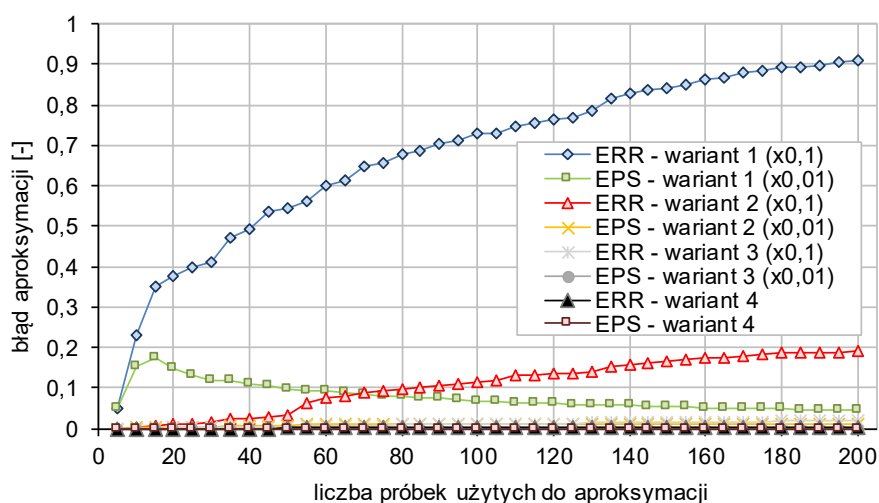
Rysunek 5.26 Schemat doboru punktów w czterech wariantach obliczeniowych



Rysunek 5.27 Schemat doboru punktów w czterech wariantach obliczeniowych



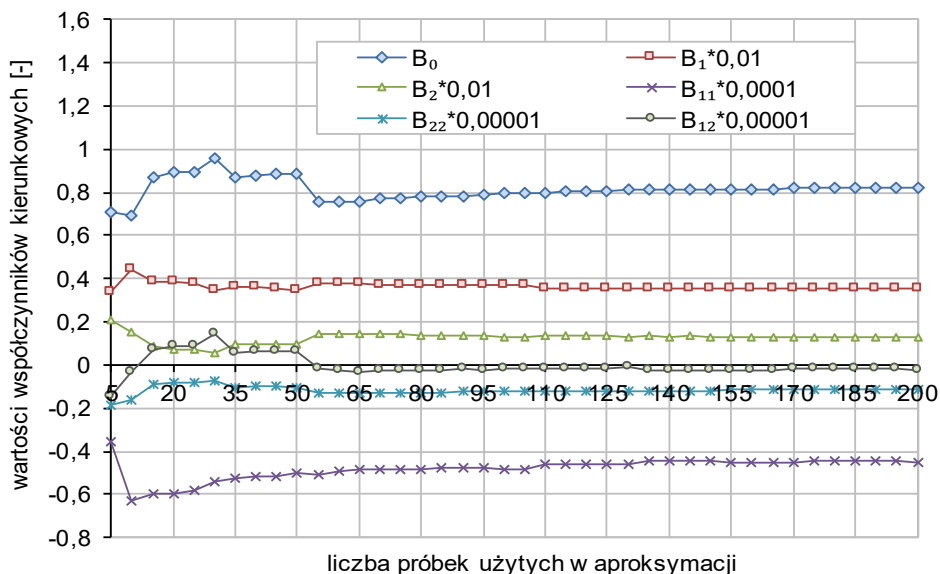
Jak wykazano w trakcie aproksymacji powierzchni odpowiedzi, dołączenie próbek celowych do tych, które pochodzą z symulacji MC okazało się całkowicie zbędne. W dwóch pierwszych wariantach obliczeń aproksymacja powierzchni odpowiedzi cechowała się wysokimi błędami dopasowania, nieprzystającymi do wyników, jakie prezentowały pozostałe dwa warianty. Przyrosty całkowitego błędu aproksymacji (ERR) oraz błędu aproksymacji w przeliczeniu na liczbę użytych próbek (EPS) przedstawiono na rysunku 5.28. Wyniki uzyskane w przypadku zastosowania 1 i 2 wariantu obliczeniowego będą w niniejszym rozdziale podawane jedynie w celu wykazania błędów oszacowania, jakie pojawiają się w tych wariantach w stosunku do oszacowania metodą MC i techniką TRS.



Rysunek 5.28 Całkowity błąd aproksymacji (ERR) oraz błąd aproksymacji w przeliczeniu na liczbę użytych próbek (EPS) wyników analizy metodą powierzchni odpowiedzi konstrukcji w czterech wariantach obliczeniowych

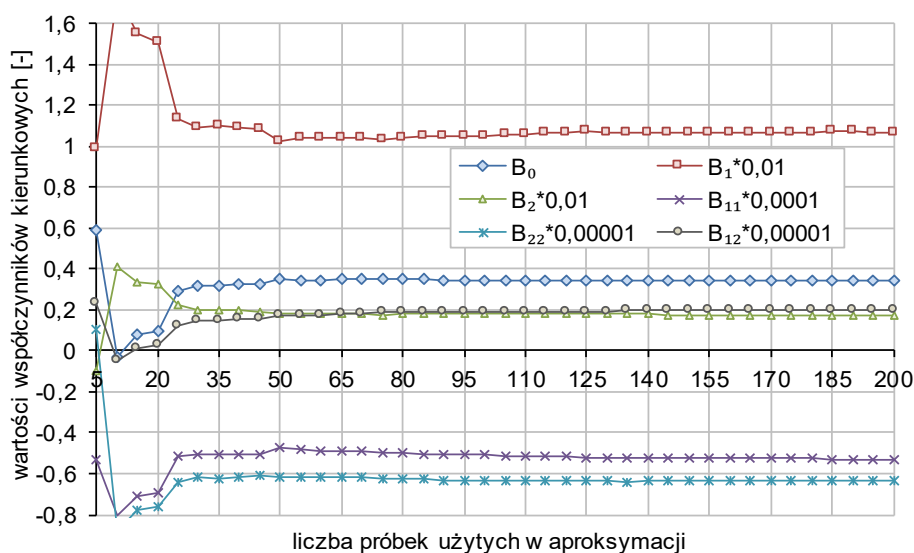
W obu wariantach: 3 i 4, prezentujących zadowalająco mały poziom błędów oszacowania, interesującym zagadnieniem jest szybkość osiągnięcia zbieżności wartości współczynników kierunkowych powierzchni odpowiedzi. Zmiany wartości współczynników kierunkowych, wyznaczonych na podstawie próbek symulacji Monte Carlo przedstawiono na rysunku 5.29. W przypadku wykorzystania 200 próbek pochodzących z symulacji Monte Carlo wartości współczynników kierunkowych stabilizują się po uwzględnieniu 55 próbek. Do tego momentu wahania uzyskanych rezultatów są niewielkie. Ponadto już przy minimalnej liczbie próbek (10-15) otrzymane wartości pozwalają przewidzieć rząd wielkości wartości współczynnika, jaki uzyska się po stabilizacji wyniku.





Rysunek 5.29 Stabilizacja wartości współczynników kierunkowych powierzchni odpowiedzi wyznaczonych na podstawie próbek symulacji Monte Carlo

W przypadku aproksymacji powierzchni odpowiedzi na podstawie próbek wygenerowanych za pomocą techniki TRS (wariant 4) wartości współczynników kierunkowych zaczynają się stabilizować już po wykonaniu obliczeń 30 próbek (rysunek 5.29). Jednocześnie, do tego momentu, wahania wartości oszacowanych współczynników są stosunkowo duże i nie dają podstaw do określenia rzędu wielkości współczynnika tak szybko, jak było to możliwe w przypadku wariantu 3.



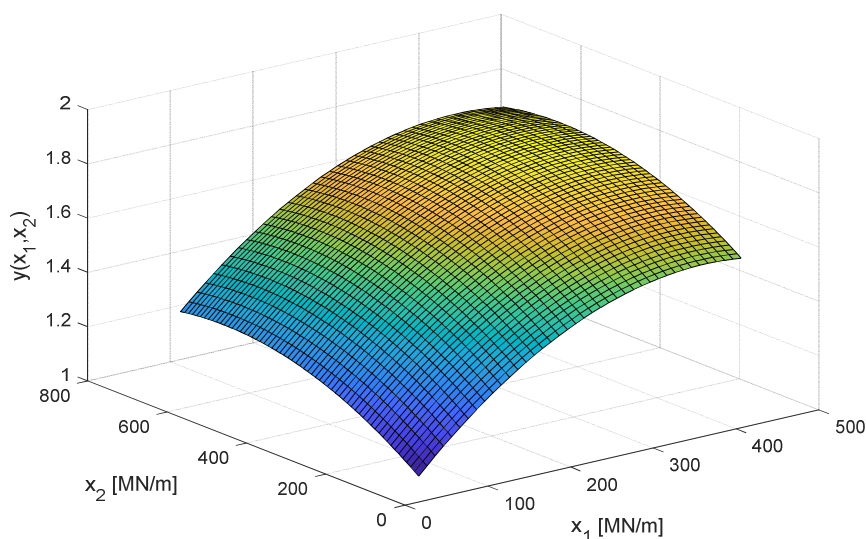
Rysunek 5.30 Stabilizacja wartości współczynników kierunkowych powierzchni odpowiedzi wyznaczonych na podstawie próbek wygenerowanych wg metody TRS

Wykorzystanie metody powierzchni odpowiedzi umożliwia dokonanie czytelnej graficznej interpretacji przebiegu zmienności mechanicznej odpowiedzi konstrukcji w zależności od wartości wejściowych zmiennych losowych zadania. Obrazowanie takie po pierwsze weryfikuje zasadność przyjęcia określonego stopnia wielomianu aproksymacyjnego, a po drugie dostarcza kluczowej wiedzy o topografii powierzchni odpowiedzi, jej ekstremach, a także o szacowanej wrażliwości odpowiedzi na wahania poszczególnych zmiennych wejściowych (można ją w przybliżeniu odczytać z nachyleń powierzchni). W przypadku dwóch zmiennych wejściowych obrazowanie takie jest możliwe w przestrzeni trójwymiarowej.

Poniżej przedstawione zostaną graficzne postacie powierzchni odpowiedzi dwóch wariantów obliczeniowych o największej jakości wyników (wariantów 3 i 4).

Na rysunku 5.31 przedstawiono powierzchnię odpowiedzi aproksymowaną w na podstawie 200 próbek uzyskanych metodą Monte Carlo (wariant 3). Współczynniki kierunkowe powierzchni wyznaczono przy użyciu programu RSM–Win. Po podstawieniu ich do wzoru 5.17 uzyskano następujące równanie aproksymowanej powierzchni:

$$\hat{y}(x_1, x_2) = 0,81976 + 3,5223x_1 + 1,2775x_2 - 4,4832x_1^2 - 1,1537x_2^2 - 2,1079x_1x_2 \quad (5.18)$$

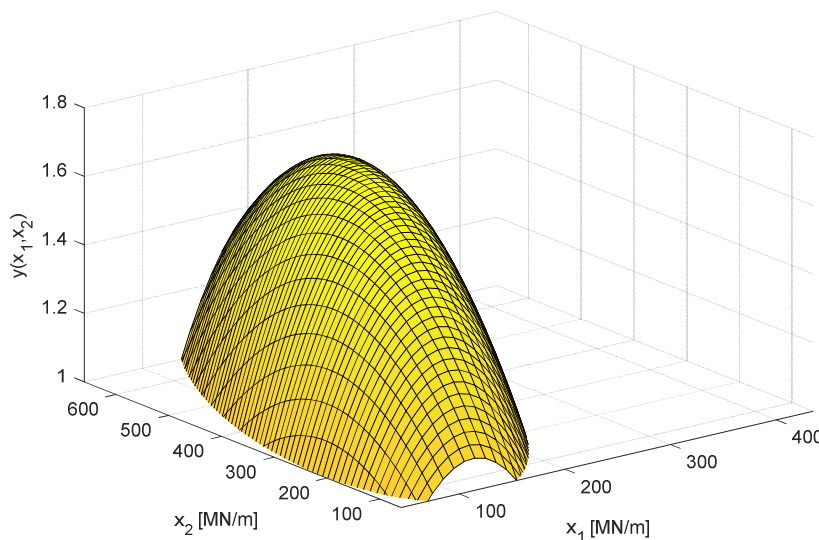


Rysunek 5.31 Powierzchnia odpowiedzi uzyskana na podstawie 200 próbek losowania bezpośredniego Monte Carlo (wariant 3)

Z uwagi na lokalizację w przestrzeni zmiennych większości próbek wykorzystanych w aproksymacji (rys. 5.27) można oczekiwać, że przedstawiona na rys.5.31 powierzchnia najwierniej odwzorowuje zachowanie się konstrukcji w okolicy wartości średnich zmiennych  $k_c$  i  $k_t$ . Należy podkreślić, że w rozpatrywanym przypadku żadna z próbek wykorzystanych do aproksymacji powierzchni nie pochodziła z obszaru przekroczenia przez konstrukcję stanu granicznego a zaledwie jedna z nich znajdowała się w sąsiedztwie tego obszaru. Można zatem podejrzewać, że wyniki miar niezawodności uzyskane przy użyciu powierzchni aproksymowanej na podstawie próbek metody Monte Carlo nie są dokładne i należy poszukiwać w przestrzeni zmiennych próbek zapewniających dokładniejsze odwzorowanie powierzchni w obszarze stanu granicznego.

W celu wyznaczenia przybliżonej powierzchni odpowiedzi w wariancie 4 (rysunek 5.32) wykorzystano 200 próbek losowania ukierunkowanego. Po podstawieniu uzyskanych współczynników kierunkowych do wzoru 5.17 otrzymano następujące równanie powierzchni:

$$\hat{y}(x_1, x_2) = 0,34325 + 10,6953x_1 + 1,7367x_2 - 5,2915x_1^2 - 6,3743x_2^2 - 2,0104x_1x_2 \quad (5.19)$$



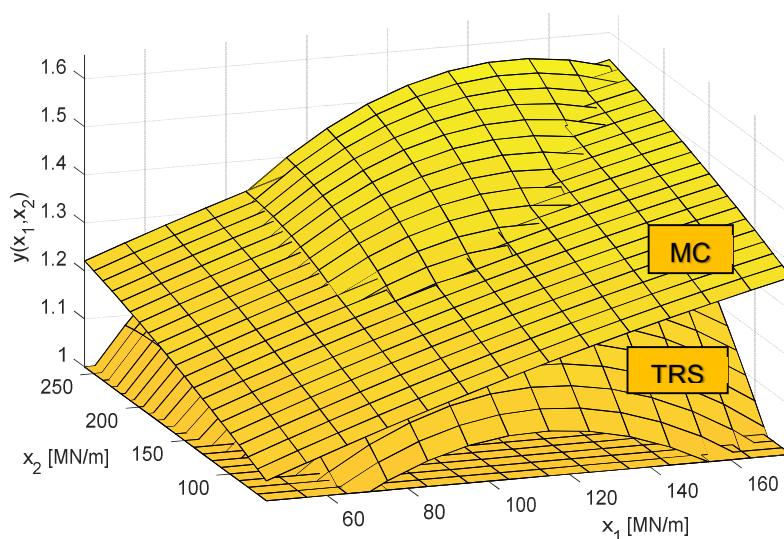
Rysunek 5.32 Powierzchnia odpowiedzi uzyskana na podstawie 200 próbek losowania ukierunkowanego TRS (wariant 4)

Należy podkreślić, że w odróżnieniu od wariantu wykorzystującego próbki metody Monte Carlo, przedstawiona powierzchnia nie obrazuje w sposób dokładny zachowania się konstrukcji w pełnym zakresie zmienności jej parametrów, a jedynie w

pobliżu funkcji stanu granicznego. Nachylenie powierzchni uzyskane tą techniką w znacząco lepszy sposób odwzorowuje obszar stanu granicznego zlokalizowany w okolicy „ogonów” łącznego rozkładu zmiennych losowych zadania i pozwala na dokładniejsze odwzorowanie miar niezawodności rozważanego przykładu.

Przedstawiony na rysunku 5.32 grzbiet powierzchni ma zasadność tylko dla obszaru po stronie mniejszych wartości realizacji zmiennych. Drugie zbocze grzbietu jest pomijalne - nie uczestniczy w obliczeniach miar bezpieczeństwa zagadnienia.

Na rys.5.33 dodatkowo przedstawiono obie powierzchnie (uwidocznione osobno na rysunkach 5.31 oraz 5.32) ale tylko w zakresie wpływającym na estymację niezawodności konstrukcji. Charakter tych powierzchni jest wyraźnie zróżnicowany. Ze względu na liczbę punktów, na podstawie których obie powierzchnie są w tym obszarze aproksymowane, rozwiązanie uzyskane na podstawie metody TRS jest zdecydowanie bardziej wiarygodne.



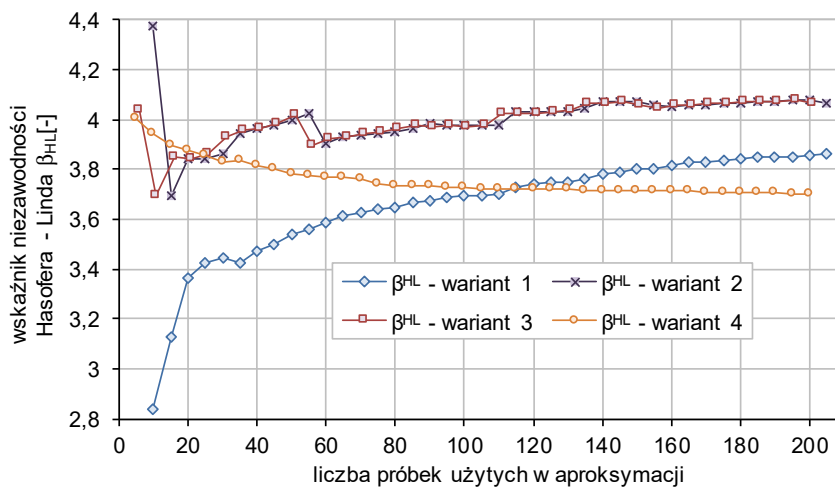
Rysunek 5.33 Zestawienie fragmentów powierzchni odpowiedzi uzyskanych w wariantach: 3 i 4 w obszarze przecięcia z płaszczyzną  $y(x_1, x_2) = 1$ .

W dalszym etapie analizy, aproksymowane powierzchnie będą stanowiły podstawę do oszacowania miar bezpieczeństwa wieży.

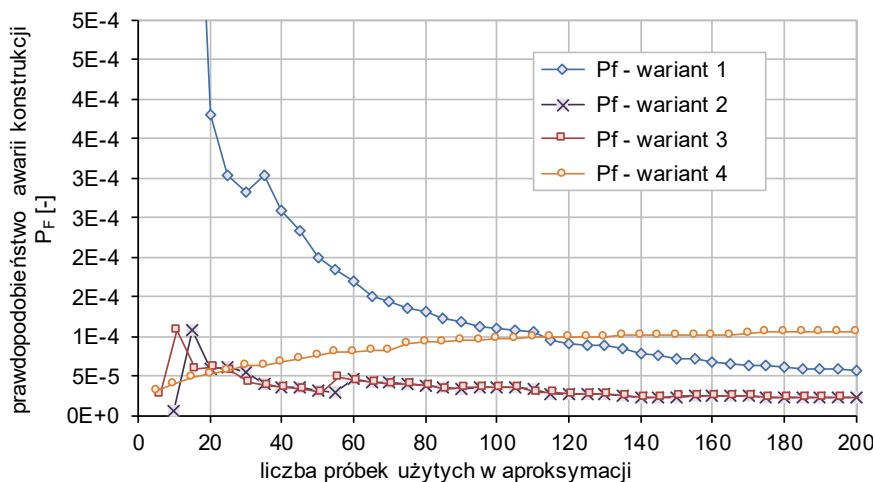


### Analiza miar bezpieczeństwa wieży wykorzystująca metodę powierzchni odpowiedzi (RSM)

Na podstawie aproksymowanych powierzchni odpowiedzi, w każdym z 4 opisanych wcześniej wariantów doboru punktów próbkowania przeprowadzana została analiza niezawodności układu. W każdym z wariantów, dla kolejno zwiększającej się liczby próbek uwzględnionych w aproksymacji, wyznaczono prawdopodobieństwo awarii konstrukcji  $P_f$  oraz wskaźnik niezawodności Hasofera – Linda ( $\beta_{HL}$ ), wykorzystujący gradienty współczynników kierunkowych powierzchni odpowiedzi (wzór (2.12)). Rezultaty przedstawionej analizy zaprezentowano na rys. 5.34 oraz 5.35.



Rysunek 5.34 Wyniki obliczeń wskaźnika niezawodności Hasofera – Linda ( $\beta_{HL}$ ) na podstawie równań powierzchni odpowiedzi dla czterech wariantów zadania



Rysunek 5.35 Wyniki obliczeń prawdopodobieństwa awarii konstrukcji ( $P_f$ ) na podstawie równań powierzchni odpowiedzi dla czterech wariantów zadania

Zaprezentowane na rysunkach 5.34 oraz 5.35 rezultaty, poza oczywistym wnioskiem o konieczności odrzucenia wyników pochodzących z wariantów 1 i 2, wyraźnie wskazują, iż aproksymacja powierzchni odpowiedzi na podstawie próbek losowych metody Monte Carlo daje dobry (obarczony niewielkim błędem względnym) wynik miar bezpieczeństwa. Zbieżność tego wyniku jest jednak powolna - nie stabilizuje się on nawet po uwzględnieniu w aproksymacji liczby 200 próbek. Można również zaobserwować, iż rezultaty miar bezpieczeństwa są w tym przypadku wyższe niż w pozostałych wariantach. Wynikać to może z rozbieżności pomiędzy aproksymowaną i rzeczywistą odpowiedzią konstrukcji w przypadku małych wartości współczynników sprężystości podpór wieży  $k_c$  oraz  $k_t$ .

Na tym tle, oszacowanie miar bezpieczeństwa konstrukcji wykorzystujące powierzchnię odpowiedzi aproksymowaną na podstawie próbek metody TRS gwarantuje wynik o znacznie lepszej jakości. Po pierwsze wartości  $\beta_{HL}$  oraz  $P_f$  obarczone są niewielkimi błędami względnymi oszacowania, mniejszymi niż w przypadku próbek MC. Ponadto rezultaty w tym przypadku szybciej uzyskują zbieżność - wyniki miar bezpieczeństwa można uznać za ustabilizowane po analizie 50 próbek. Należy również zwrócić uwagę, że powierzchnia odpowiedzi bardzo dobrze odwzorowuje rzeczywiste zachowanie się konstrukcji w obszarze stanu granicznego. Wynik jest zatem wiarygodny i nie charakteryzuje się zawyżeniem, cechującym rezultaty uzyskane w wariancie 3.

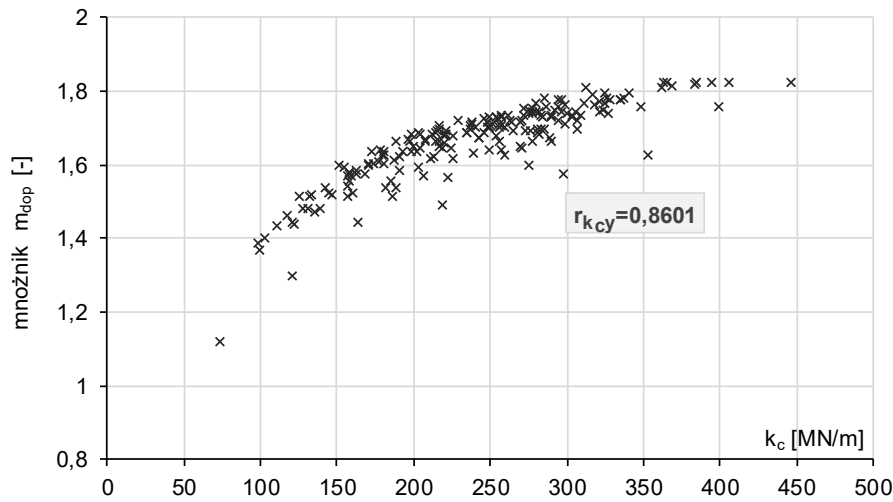
Na podstawie przedstawionych rezultatów można wskazać, iż zaproponowana autorska procedura generacji próbek obliczeniowych w połączeniu z przyjętą metodą aproksymacji powierzchni odpowiedzi jest poprawna i dla przykładu rzeczywistej konstrukcji inżynierskiej osiąga lepsze rezultaty, niż techniki standardowe (Monte Carlo) lub popularne procedury związane z kryteriami odchyień standardowych.

### **5.3.3 Analiza wrażliwości konstrukcji na zmiany współczynników sprężystości podpór wieży $k_c, k_t$ .**

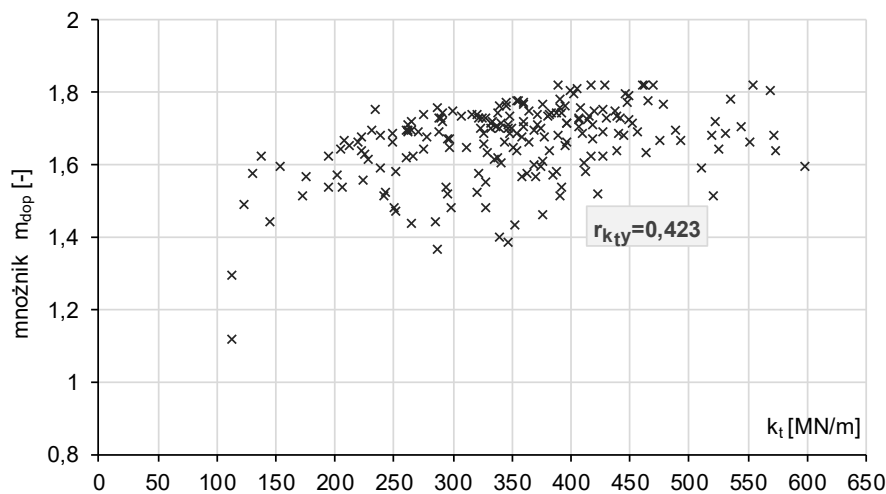
#### **Analiza wrażliwości konstrukcji na podstawie chmur rozproszenia wyników**

Pierwszym, najmniej czasochłonnym sposobem określenia wrażliwości układu na zmianę jego parametrów projektowych jest ilustracja obrazów rozproszenia rezultatów oraz określenia na ich podstawie wartości estymatorów współczynników korelacji liniowej (zgodnie z formułą 5.11). W przedstawionej analizie chmury obrazują wyniki

200 symulacji Monte Carlo. Zależności pomiędzy odpowiedzią konstrukcji a zmiennymi  $k_c$  i  $k_t$  przedstawiono na rysunkach: 5.36 oraz 5.37. Estymatory współczynników korelacji liniowej wyniosły odpowiednio:  $r_{k_c y} = 0,8601$  oraz  $r_{k_t y} = 0,423$ .



Rysunek 5.36 Kształt chmury rozproszenia wyników w przypadku zależności  $y(k_c)$



Rysunek 5.37 Kształt chmury rozproszenia wyników w przypadku zależności  $y(k_t)$

Rezultaty pobieżnej analizy wskazują, że zmiana parametru współczynnika sprężystości podpory pod słupem ściskanym ( $k_c$ ) w większym stopniu wpływa na odpowiedź konstrukcji – chmura wyników na rysunku 5.36 jest zauważalnie mniej rozproszona, korelacja pomiędzy punktami odpowiedzi jest zatem silniejsza niż ma to miejsce w przypadku chmury rezultatów przedstawionej na rys. 5.37.

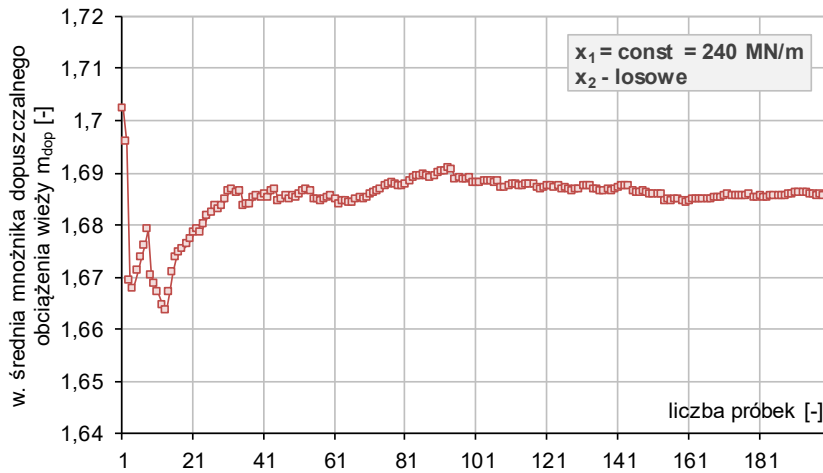
### Analiza wrażliwości konstrukcji –zastosowanie podejścia OAT (One-At-a-Time)

Kolejnym sposobem określenia wrażliwości konstrukcji na zmiany jej parametrów projektowych – współczynników sprężystości podpór  $k_c$  i  $k_t$  było zastosowanie techniki OAT polegającej na przeprowadzaniu serii badań numerycznych uwzględniających zmienność tylko jednego z rozpatrywanych czynników. Aby tego dokonać, wygenerowano kolejne modele obliczeniowe wieży. Pierwsze 200 modeli wygenerowano zakładając, iż zmienna  $x_1 = k_c$  będzie zawsze równa  $k_c = \mu_{k_c} = 240$  MN/m, natomiast zmienna  $x_2 = k_t$  będzie losowana według rozkładu normalnego, którego wartość średnia i odchylenie standardowe wynoszą odpowiednio:  $\mu_{k_t} = 360$  MN/m,  $\sigma_{k_t} = 100$  MN/m. Kolejne 200 modeli zakłada sytuację odwrotną – to zmienna  $x_2 = k_t$  będzie zawsze stała i równa  $k_t = \mu_{k_t} = 360$  MN/m, natomiast zmienna  $x_1 = k_c$  będzie przyjmowała wartości losowe o rozkładzie normalnym, którego wartość średnia oraz odchylenie standardowe wynoszą:  $\mu_{k_c} = 240$  MN/m,  $\sigma_{k_c} = 65$  MN/m.

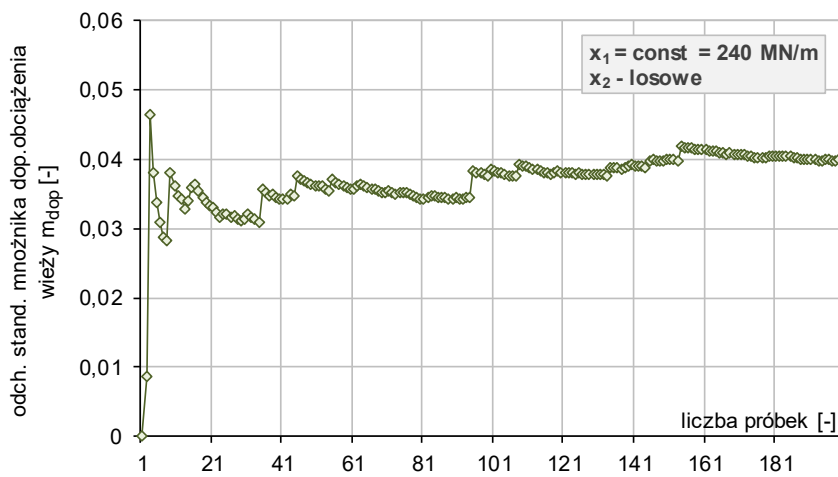
W pierwszym z wymienionych przypadków obliczeniowych (stała  $k_c$ ) otrzymano następujące wartości ekstremalne mnożnika obciążenia dopuszczalnego:  $y_{\min} = 1,518$  oraz  $y_{\max} = 1,746$ . Rozstęp wyników (różnica pomiędzy maksymalnym i minimalnym rezultatem) wyniósł  $\Delta y_{k_t} = 0,228$ .

Na rysunkach 5.38 oraz 5.39 przedstawiono zmianę wartości średniej i odchylenia standardowego mnożnika dopuszczalnego obciążenia wieży w przypadku próbek analizy wrażliwości zmiennej  $x_1 = k_c$ . Na rys. 5.40 zamieszczono poglądowy histogram rezultatów mnożnika  $m_{dop}$  uzyskanych dla rozważanych 200 próbek.

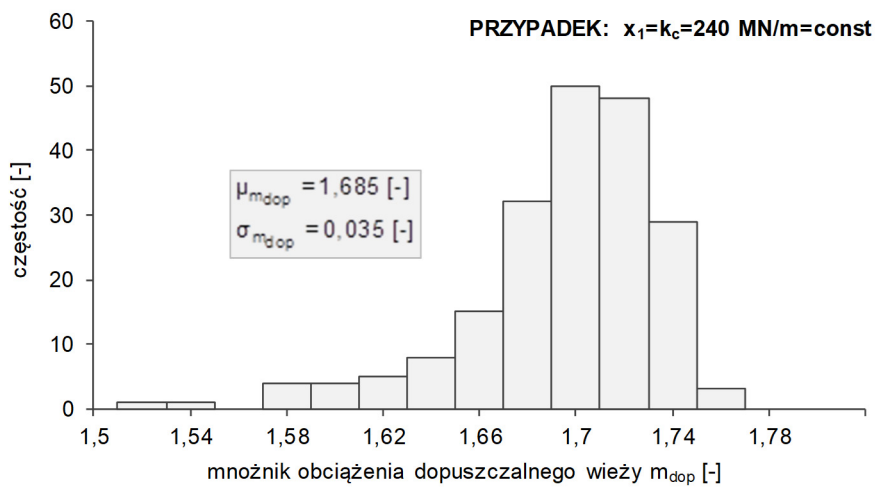




Rysunek 5.38 Proces zmiany wartości średniej mnożnika obciążenia dopuszczalnego wieży w przypadku gdy  $k_c = \mu_{k_c} = 240 \text{ MN/m} = \text{const}$



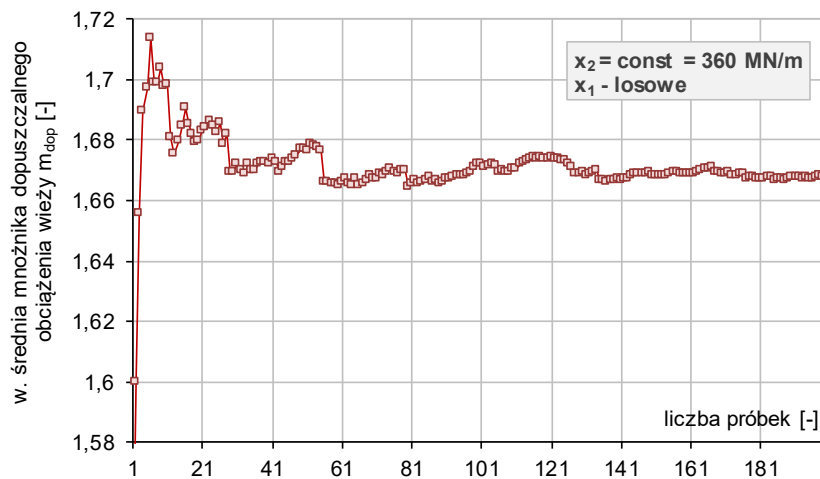
Rysunek 5.39 Proces zmiany odchylenia standardowego mnożnika obciążenia dopuszczalnego wieży w przypadku gdy  $k_c = \mu_{k_c} = 240 \text{ MN/m} = \text{const}$



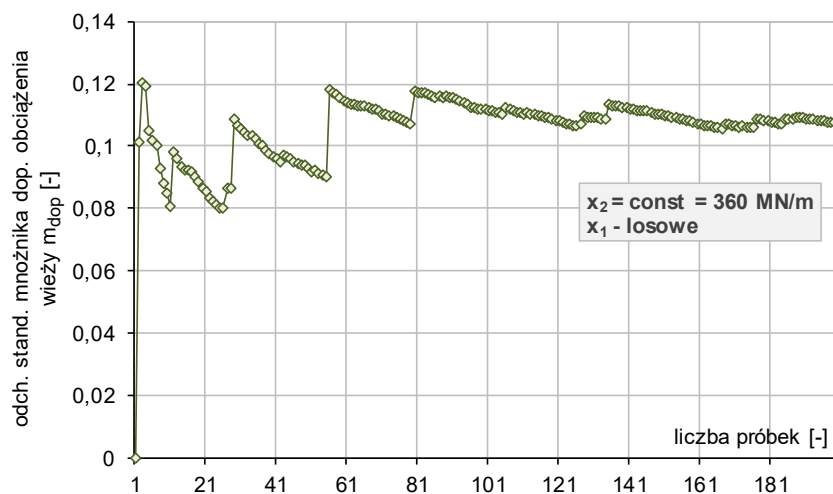
Rysunek 5.40 Histogram wartości mnożnika obciążenia dopuszczalnego wieży w przypadku gdy  $k_c = \mu_{k_c} = 240 \text{ MN/m} = \text{const}$

Obliczenia powtórzone dla przypadku, który zakłada stałą wartość współczynnika  $k_t$ . Otrzymano następujące wartości ekstremalne mnożnika obciążenia dopuszczalnego:  $y_{\min} = 1,097$  oraz  $y_{\max} = 1,821$ . Rozstęp wyników wyniósł  $\Delta y_{k_c} = 0,725$ , co jest wartością zbliżoną do rezultatu uzyskanego przy wykorzystaniu bezpośredniej metody Monte Carlo, w przypadku gdy obydwaj współczynniki sprężystości traktowane są jako losowe.

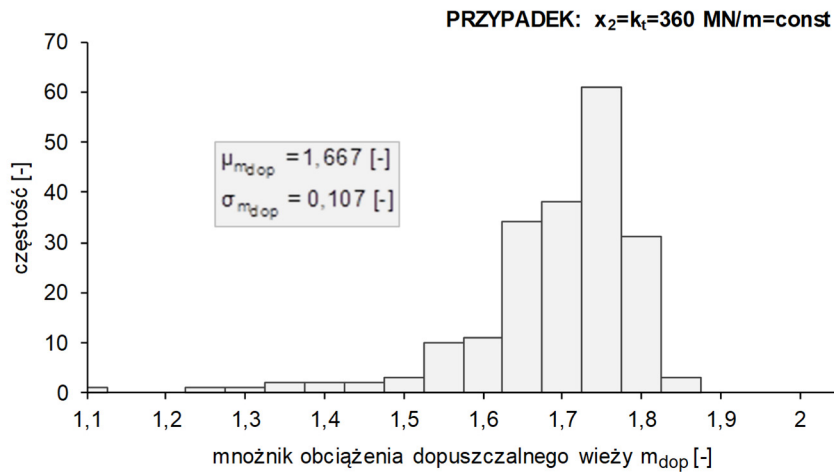
Na rysunkach: 5.41 oraz 5.42 przedstawiono graficzną analizę zbieżności wartości średniej i odchylenia standardowego mnożnika obciążenia dopuszczalnego wieży, natomiast rys. 5.43 przedstawia histogram wyników mnożnika dopuszczalnego uzyskanych w rozważanym przykładzie.



Rysunek 5.41 Proces zmiany wartości średniej mnożnika obciążenia dopuszczalnego wieży w przypadku gdy  $k_t = \mu_{k_t} = 360 \text{ MN/m} = \text{const}$

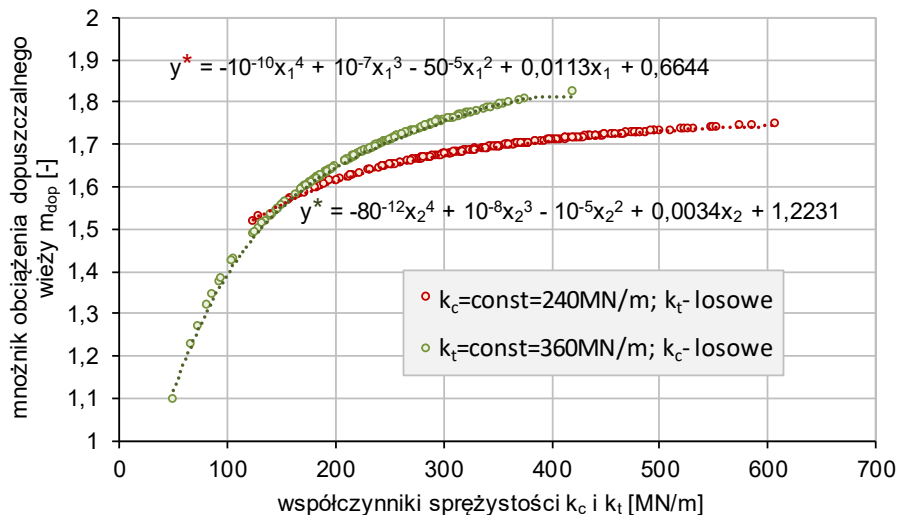


Rysunek 5.42 Proces zmiany odchylenia standardowego mnożnika obciążenia dopuszczalnego wieży w przypadku gdy  $k_t = \mu_{k_t} = 360 \text{ MN/m} = \text{const}$



Rysunek 5.43 Histogram wartości mnożnika obciążenia dopuszczalnego wieży w przypadku gdy  $k_t = \mu_{k_t} = 360 \text{ MN/m} = \text{const}$

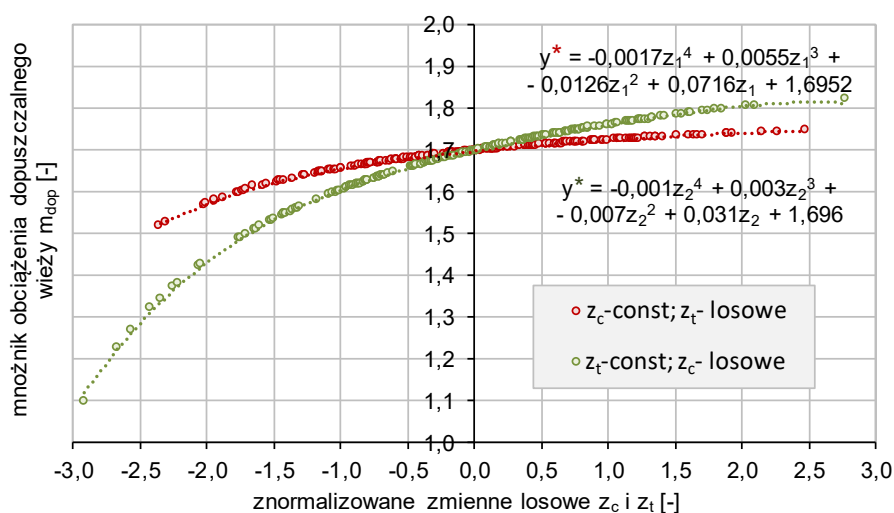
Na rys. 5.44 przedstawiono wykresy zależności pomiędzy wartościami współczynnika sprężystości podpory (podpór) wieży (założonego w danym wariancie obliczeniowym jako losowy) a dopuszczalnym mnożnikiem obciążenia wieży. Kolorem czerwonym zaznaczono 200 wartości mnożnika  $m_{dop}$  otrzymanych w przypadku gdy zmienna  $k_c = \mu_{k_c} = 240 \text{ MN/m} = \text{const.}$ , zaś kolorem zielonym oznaczono wyniki otrzymane dla 200 modeli, w których  $k_t = \mu_{k_t} = 360 \text{ MN/m} = \text{const.}$



Rysunek 5.44 Zależności pomiędzy losową wartością współczynnika sprężystości podpory (podpór) wieży a zmienną odpowiedzi konstrukcji w dwóch wariantach obliczeniowych; linią przerywaną zaznaczono aproksymację wyników wielomianem stopnia czwartego

Przedstawione na wykresie zależności dostarczają informacji o zachowaniu się konstrukcji na skutek zmiany rozpatrywanego parametru. Na podstawie porównania szybkości zmiany wyników obliczeń oraz zakresu w jakim przyjmuje wartości odpowiedź konstrukcji w poszczególnym wariancie obliczeniowym można wnioskować o większej wrażliwości układu na zmianę parametru  $k_c$ , co potwierdza wcześniejsze obserwacje.

Na rysunku 5.45 przedstawiono te same zależności jednak w tym przypadku zmienne losowe zostały znormalizowane. Współczynnik nachylenia stycznych do aproksymowanych krzywych w punktach wartości średnich można interpretować jako kolejny wariant opisu wrażliwości. Uzyskane wykresy stanowiły podstawę obliczeń zawartych w dalszej części pracy.



Rysunek 5.45 Zależności pomiędzy znormalizowanymi zmiennymi losowymi  $z_c$  i  $z_t$  a zmienną odpowiedzi konstrukcji w dwóch wariantach obliczeniowych; linią przerywaną zaznaczono aproksymację wyników wielomianem stopnia czwartego

### Analiza wrażliwości wieży na podstawie różnic pomiędzy rozstępami wyników obliczeń

Na podstawie rozstępów wyników uzyskanych w 3 wariantach obliczeniowych, opisanych w tabeli 5.11, sformułowano procedurę umożliwiającą oszacowanie współczynników wrażliwości obu zmiennych.



| analizowany parametr                                | przypadek                        |   |  |
|---|----------------------------------|---|--|
|   | $k_c$ - losowe<br>$k_t$ - losowe | $k_c = \mu_{k_c} = \text{const}$<br>$k_t = \text{losowe}$ | $k_c$ - losowe<br>$k_t = \mu_{k_t} = \text{const}$ |
| minimalna wartość zmiennej odpowiedzi - $y_{\min}$  | 0,83579 ( $-3\sigma$ )           | 1,518   | 1,097  |
| maksymalna wartość zmiennej odpowiedzi - $y_{\max}$ | 1,82175 ( $+3\sigma$ )           | 1,746   | 1,822  |
| rozstęp rezultatów - $\Delta y_i$                   | 0,98596                          | 0,228   | 0,725  |

Tablica 5.11 Ekstremalne wartości mnożnika obciążenia dopuszczalnego wieży oraz rozstępy wyników w trzech wariantach obliczeniowych uwzględniających losowość obydwu lub jednej ze zmiennych

W przypadku współczynników wrażliwości dwóch zmiennych niezależnych zachodzi równość:

$$\alpha_{k_c}^2 + \alpha_{k_t}^2 = 1 \quad (5.20)$$

Podstawiając w miejsce obliczanych współczynników wrażliwości zmianę rozstępu pomiędzy obliczoną wartością przy zmiennej ustalonej, a wartością z pełnej analizy próbkowania bezpośredniego Monte Carlo, otrzymujemy:

$$\Delta y_{k_c}^2 + \Delta y_{k_t}^2 = 0,769^2 + 0,265^2 = 0,6616 \quad (5.21)$$

Normalizując obie strony równania w ten sposób, aby spełnić równanie 5.20 uzyskamy:

$$(n \cdot \Delta y_{k_c})^2 + (n \cdot \Delta y_{k_t})^2 = (n \cdot 0,769)^2 + (n \cdot 0,265)^2 = n^2 \cdot 0,6616 = 1 \quad (5.22)$$

Zatem,  $n^2 = \frac{1}{0,6616} = 1,51152$  oraz  $n = \sqrt{1,51152} = 1,22944$ .

Podstawiając obliczoną wartość do wzoru 5.22 uzyskujemy następujące wartości wskaźników stanowiących miarę wrażliwości odpowiedzi konstrukcji na wahania zmiennych :

$$\alpha_{k_c} = n \cdot \Delta y_{k_c} = 1,229 \cdot 0,769 = 0,9454 ; \alpha_{k_t} = n \cdot \Delta y_{k_t} = 1,229 \cdot 0,265 = 0,3258 \quad (5.23)$$

### **Analiza wrażliwości wieży na podstawie stycznych do wykresów wrażliwości w punkcie wartości średniej zmiennej odpowiedzi**

Kolejna propozycja oszacowania współczynników wrażliwości dla obydwu zmiennych zadania bazuje na wyznaczeniu stycznych do wykresów wrażliwości w punkcie wartości średniej zmiennej odpowiedzi.

Styczne do wykresów krzywych, przedstawionych na rysunku 5.45, dane są równaniami:

$$y_c^{\tan} = 0,1542 \cdot k_t + 1,96917 \text{ dla } k_c = \mu_{k_c} = 240 \text{ MN/m, } k_t \text{-losowa} \quad (5.24)$$

$$y_t^{\tan} = 0,0676 \cdot k_c + 1,96917 \text{ dla } k_t = \mu_{k_t} = 360 \text{ MN/m, } k_c \text{-losowa} \quad (5.25)$$

Dalsza procedura postępowania jest identyczna jak w przypadku obliczeń przeprowadzonych na podstawie rozstępów wyników. Podstawiając w miejsce obliczanych współczynników wartości kątów nachylenia stycznych do wykresów wrażliwości w punkcie ich wartości średniej otrzymujemy:

$$a_{k_c}^2 + a_{k_t}^2 = 0,1542^2 + 0,0676^2 = 0,0284 \quad (5.26)$$

Normalizując obie strony równania w ten sposób, aby spełnić równanie 5.20, uzyskamy:

$$(n \cdot a_{k_c})^2 + (n \cdot a_{k_t})^2 = (n \cdot 0,1542)^2 + (n \cdot 0,0676)^2 = n^2 \cdot 0,0284 = 1 \quad (5.27)$$

Zatem  $n = \sqrt{35,2766} = 5,93941$ .

Podstawiając obliczoną wartość  $n$  do wzoru 5.27 otrzymujemy następujące wartości wskaźników, które można potraktować jako miarę wrażliwości mechanicznej odpowiedzi konstrukcji:

$$\alpha_{k_c} = n \cdot \Delta y_{k_c} = 5,939 \cdot 0,154 = 0,916; \alpha_{k_t} = n \cdot \Delta y_{k_t} = 5,939 \cdot 0,0676 = 0,4015 \quad (5.28)$$

### **Analiza wrażliwości wieży na podstawie krawędzi przecięcia powierzchni odpowiedzi z płaszczyznami $x_1y$ oraz $x_2y$ .**

Innym sposobem badania wrażliwości konstrukcji na wahania jej parametrów losowych była obserwacja zmiany wskaźnika niezawodności Hasofera – Linda ( $\beta_{HL}$ ) wyznaczonego na podstawie równań powierzchni odpowiedzi. Aproksymacje przeprowadzono dla 100 wariantów modelu obliczeniowego, wygenerowanych według następującego schematu:

- wybór zmiennej, która poddana zostanie analizie (np.  $x_1 = k_c$ ), oraz ustalenie zbioru dyskretnych wartości, jakie przyjmować będzie analizowany czynnik. Założono, iż zmienna  $k_c$ , równa będzie następującym wielkościom:  $\mu_{k_c} - 3\sigma_{k_c}$ ;  $\mu_{k_c} - 2,75\sigma_{k_c}$ ;  $\mu_{k_c} - 2,5\sigma_{k_c}$ ;  $\mu_{k_c} - 2,25\sigma_{k_c}$ ;  $\mu_{k_c} - 2\sigma_{k_c}$ ;  $\mu_{k_c} - \sigma_{k_c}$ ;  $\mu_{k_c}$ ;  $\mu_{k_c} + \sigma_{k_c}$ ;  $\mu_{k_c} + 2\sigma_{k_c}$ ;  $\mu_{k_c} + 3\sigma_{k_c}$ ;

Na podstawie wstępnej analizy zachowania konstrukcji ustalono, iż zakres  $(\mu_{k_c} - 3\sigma_{k_c}; \mu_{k_c} - 2\sigma_{k_c})$  obejmuje kluczowy obszar zmiany wskaźnika



niezawodności, dlatego też zdecydowano się na zagęszczenie wartości analizowanej zmiennej w tym przedziale;

- dla każdej z realizacji zmiennej  $x_1$  generacja z rozkładu normalnego pięciu wartości zmiennej  $x_2 = k_t$ ;
- stworzenie modeli obliczeniowych wieży dla uzyskanych 50 par wartości zmiennych  $(x_1, x_2)$ ;
- powtórzenie procedury dla sytuacji odwrotnej – zmienna  $x_1$  jest losowana z rozkładu normalnego, natomiast zmienna  $x_2 = k_t$  przyjmuje dziesięć ustalonych odgórnie wartości.

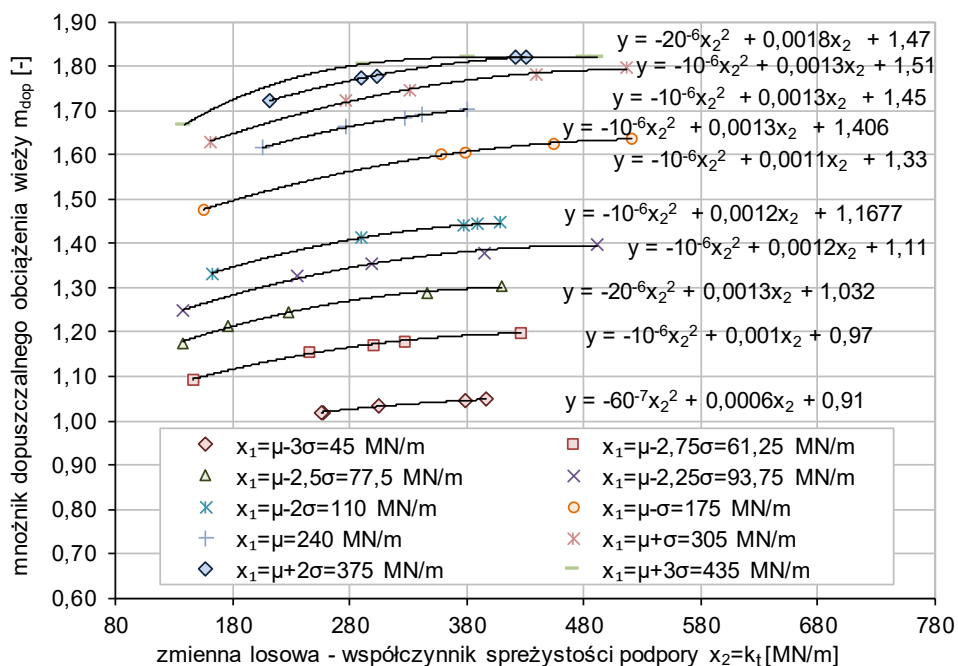
W przypadku każdej realizacji obliczono mnożnik obciążenia dopuszczalnego. Na podstawie wyników każdej z pięciopunktowych serii, wyznaczonych dla poszczególnych ustalonych wielkości analizowanej zmiennej, wykonano aproksymację krzywej odpowiedzi. W ten sposób opis ograniczono do jednej zmiennej losowej, a więc otrzymuje się pewnego rodzaju płaszczyznę przekrojową przez powierzchnię odpowiedzi zadania, co daje z kolei ślad przecięcia w postaci krzywej.

Na podstawie równania w/w krzywej odpowiedzi, metodami gradientowymi oszacowano poszukiwany wskaźnik niezawodności  $\beta_{HL}$ . Dzięki odpowiednio ukierunkowanemu zestawowi płaszczyzn przekrojowych przez powierzchnię odpowiedzi możliwe jest graficzne przedstawienie zmiany wskaźnika niezawodności pomiędzy kolejnymi płaszczyznami a zatem kolejnymi dyskretnymi wartościami analizowanej zmiennej losowej.

W pierwszej kolejności, zgodnie z wcześniej podanymi wytycznymi ustalono zbiór 10 dyskretnych wartości współczynnika sprężystości elementu podpierającego słup ściskany  $x_1 = k_c = [45; 61,25 ; 77,5 ; 93,75 ; 110 ; 175; 240 ; 305 ; 370 ; 435] \text{ MN/m}$ , a następnie wylosowano 50 wartości zmiennej  $x_2 = k_t$  o rozkładzie normalnym. W ten sposób uzyskano 50 realizacji wektora zmiennych  $\mathbf{x} = [x_1; x_2]$  poprzez zestawienie każdej z dyskretnych wartości zmiennej  $x_1$  z pięcioma losowo wygenerowanymi wartościami zmiennej  $x_2$ .

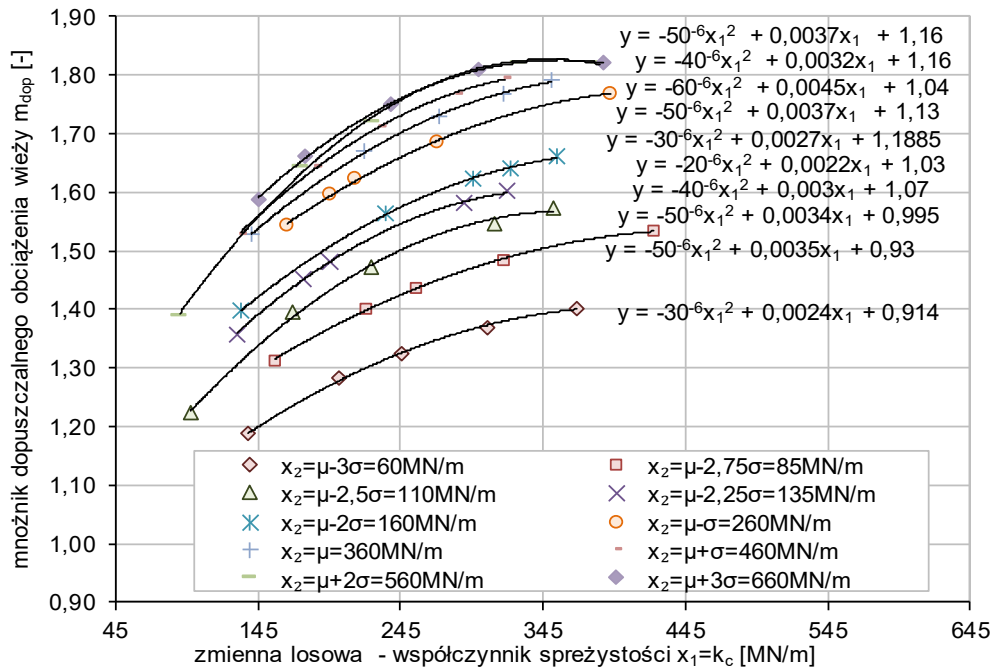
Na rys. 5.46 przedstawiono krawędzie przecięcia powierzchni odpowiedzi konstrukcji z 10 płaszczyznami  $x_2$  zawierającymi kolejne ustalone wartości zmiennej  $x_1$ .

Obok aproksymowanych krzywych odpowiedzi podano także ich równania dane w postaci wielomianów stopnia drugiego.



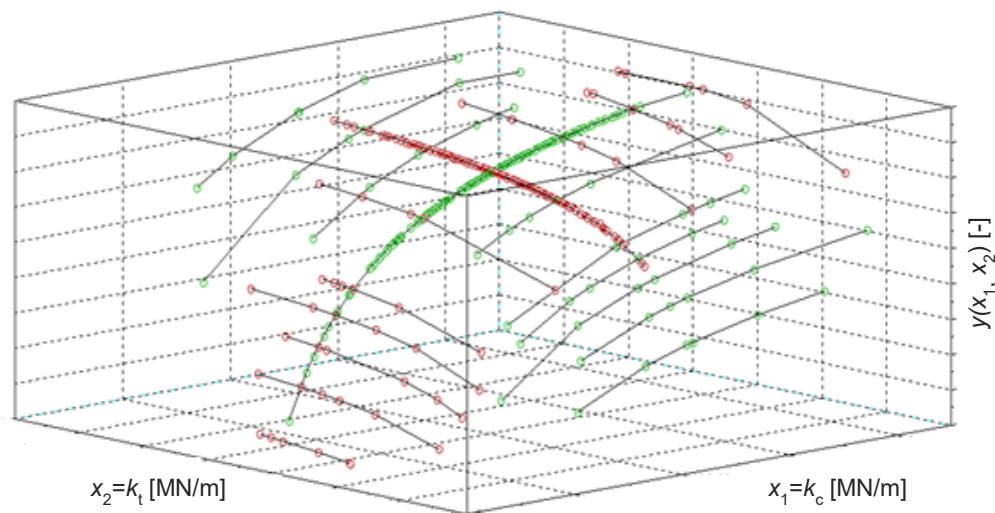
Rysunek 5.46 Kolejne przekroje przez powierzchnię odpowiedzi zagadnienia, wyznaczone dla ustalonych 10 dyskretnych wartości zmiennej losowej współczynnika sprężystości elementu podpierającego słup ściskany  $x_1 = k_c$

Analogiczną procedurę przeprowadzono w przypadku gdy zmienna  $x_2 = k_t$  przyjmuje wartości:  $x_2 = k_t = [60; 85; 110; 135; 160; 260; 360; 460; 560; 660]$  MN / m, natomiast zmienna  $x_1$  losowana jest z rozkładu normalnego. Krawędzie przecięcia powierzchni odpowiedzi konstrukcji z 10 równoległymi płaszczyznami  $x_1 y$  zawierającymi kolejne ustalone wartości zmiennej  $x_2$  przedstawia rys. 5.47. Obok aproksymowanych krawędzi, na rysunku podano także równania krzywych odpowiedzi dane w postaci wielomianów stopnia drugiego.



Rysunek 5.47 Kolejne przekroje przez powierzchnię odpowiedzi układu wyznaczone dla ustalonych 10 dyskretnych wartości zmiennej losowej współczynnika sprężystości elementów podpierających słupy rozciągane  $x_2 = k_t$

Wyniki zaprezentowane na rysunkach 5.46 oraz 5.47 zestawiono na wspólnym wykresie (rys. 5.48), dzięki czemu można zaobserwować, iż przedstawione 20 krzywych, wyrysowanych na podstawie 5 punktów obliczeniowych każda, są odzwierciedleniem powierzchni odpowiedzi konstrukcji.



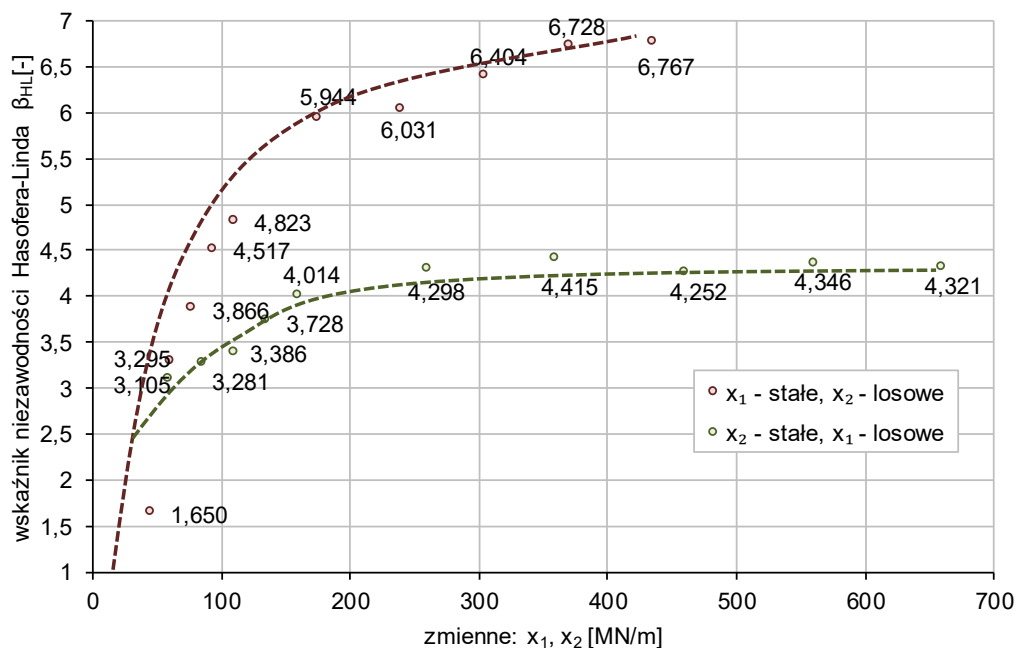
Rysunek 5.48 Wzajemna przestrzenna zależność zmiany krzywych odpowiedzi od ustalonej wartości zmiennych losowych  $x_1$  i  $x_2$

Dla każdej z 20 aproksymowanych krzywych odpowiedzi zaznaczonych na rysunkach 5.46 - 5.47 wyznaczono wartość wskaźników niezawodności Hasofera – Linda  $\beta_{HL}$ , zgodnie z formułą 2.12. Wyniki szacowania wskaźników zestawiono w tabelicy 5.12.

| $x_1$ - ustalone, $x_2$ - losowe |                  |              | $x_2$ - ustalone, $x_1$ - losowe |                  |              |
|----------------------------------|------------------|--------------|----------------------------------|------------------|--------------|
| $x_1$ [MN/m]                     | $\beta_{HL}$ [-] |              | $x_2$ [MN/m]                     | $\beta_{HL}$ [-] |              |
| $\mu-3\sigma$                    | 45               | <b>1,650</b> | $\mu-3\sigma$                    | 60,0             | <b>3,105</b> |
| $\mu-2,75\sigma$                 | 61,25            | <b>3,295</b> | $\mu-2,75\sigma$                 | 85,0             | <b>3,281</b> |
| $\mu-2,5\sigma$                  | 77,5             | <b>3,866</b> | $\mu-2,5\sigma$                  | 110,0            | <b>3,386</b> |
| $\mu-2,25\sigma$                 | 93,75            | <b>4,517</b> | $\mu-2,25\sigma$                 | 135,0            | <b>3,728</b> |
| $\mu-2\sigma$                    | 110,0            | <b>4,823</b> | $\mu-2\sigma$                    | 160,0            | <b>4,014</b> |
| $\mu-\sigma$                     | 175,0            | <b>5,944</b> | $\mu-\sigma$                     | 260,0            | <b>4,298</b> |
| $\mu$                            | 240,0            | <b>6,031</b> | $\mu$                            | 360,0            | <b>4,415</b> |
| $\mu+\sigma$                     | 305,0            | <b>6,404</b> | $\mu+\sigma$                     | 460,0            | <b>4,252</b> |
| $\mu+2\sigma$                    | 370,0            | <b>6,728</b> | $\mu+2\sigma$                    | 560,0            | <b>4,346</b> |
| $\mu+3\sigma$                    | 435,0            | <b>6,767</b> | $\mu+3\sigma$                    | 660,0            | <b>4,321</b> |

Tabela 5.12 Wskaźniki niezawodności Hasofera – Linda ( $\beta_{HL}$ ) obliczone dla 20 przypadków krzywych odpowiedzi

Na podstawie danych zebranych w tabelicy 5.12, na rysunku 5.49 przedstawiono zależności pomiędzy wartościami współczynników sprężystości  $k_c$ ,  $k_t$ , a wskaźnikiem niezawodności  $\beta_{HL}$ .



Rysunek 5.49 Aprosymacja krzywych wrażliwości na podstawie wskaźników niezawodności Hasofera – Linda ( $\beta_{HL}$ )

Na rysunku 5.49 linią przerywaną zaznaczono krzywe będące aproksymacją wyżej opisanych wartości wskaźników niezawodności dla odpowiednich zmian współczynników sprężystości podpór wieży  $k_c$ ,  $k_t$ . Krzywe te będą stanowiły podstawę obliczeń wrażliwości, przeprowadzonych w dalszej części pracy.

### **Analiza wrażliwości niezawodności konstrukcji na podstawie stycznych do wykresów wrażliwości w punkcie wartości średniej zmiennej odpowiedzi**

Styczne do wykresów krzywych wrażliwości przedstawionych na rys. 5.49 opisują następujące równania:

$$y_c^{\tan} = 0,460 \cdot k_t + 6,031 \text{ dla } k_c = \mu_{k_c} = 240 \text{ MN/m, } k_t - \text{ losowe} \quad (5.29)$$

$$y_t^{\tan} = 0,117 \cdot k_c + 4,415 \text{ dla } k_t = \mu_{k_t} = 360 \text{ MN/m, } k_c - \text{ losowe} \quad (5.30)$$

Podstawiając w miejsce obliczanych wskaźników wrażliwości równania 5.20 wartości współczynników kierunkowych stycznych do wykresów wrażliwości w punkcie wartości średniej zmiennej odpowiedzi, otrzymujemy:

$$a_{k_c}^2 + a_{k_t}^2 = 0,460^2 + 0,117^2 = 0,225289 \quad (5.31)$$

Normalizując obie strony równania tak aby spełnić równanie 5.20 uzyskamy:

$$(n \cdot a_{k_c})^2 + (n \cdot a_{k_t})^2 = (n \cdot 0,460)^2 + (n \cdot 0,117)^2 = n^2 \cdot 0,225289 = 1 \quad (5.32)$$

Zatem  $n = \sqrt{4,438743} = 2,10683$ .

Podstawiając obliczoną wartość  $n$  do równania 5.32 otrzymujemy następujące wartości  $\alpha_{k_c}$  oraz  $\alpha_{k_t}$ :

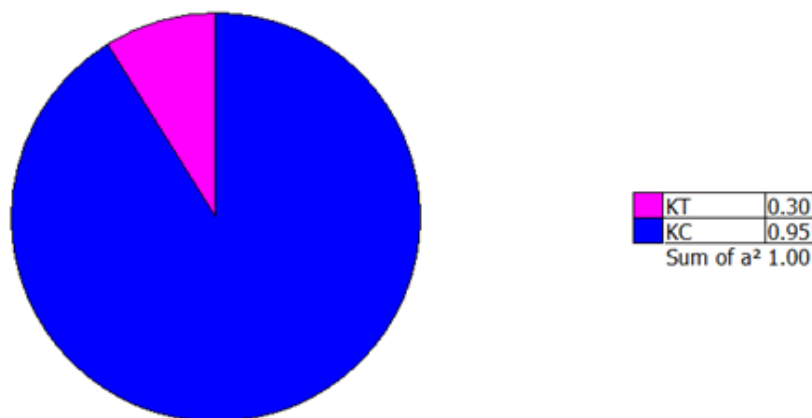
$$\alpha_{k_c} = n \cdot \Delta y_{k_c} = 2,1068 \cdot 0,46 = 0,9691; \alpha_{k_t} = n \cdot \Delta y_{k_t} = 2,1068 \cdot 0,117 = 0,2465 \quad (5.33)$$

Wielkości te można traktować jako przybliżenie wskaźników wrażliwości niezawodności konstrukcji.

### **Analiza wrażliwości odpowiedzi konstrukcji – wyniki uzyskane w programie komercyjnym COMREL**

Kolejno, problem zaimplementowano w środowisku komercyjnego programu do obliczeń niezawodnościowych i probabilistycznych StruRel – COMREL 9.0 RCP GmbH. Do pamięci programu wprowadzono funkcję stanu granicznego daną równaniem 5.14 a

także wszystkie niezbędne dane probabilistyczne zmiennych  $k_c$  i  $k_t$ . Do obliczeń współczynników wrażliwości posłużono się techniką Hasofera – Linda. Wyniki działania programu, przedstawione w formie diagramu kołowego (domyślny sposób wyświetlania współczynników wrażliwości w programie), zaprezentowano na rysunku 5.50.



Rysunek 5.50 Analiza wrażliwości wykonana w środowisku komercyjnego programu StruRel – COMREL 9.0 RCP GmbH

#### 5.3.4 Porównanie rezultatów analizy wrażliwości

W tabeli 5.13 zestawiono wartości wskaźników wrażliwości odpowiedzi konstrukcji czterech niezależnych procedur obliczeniowych. W przypadkach procedur polegających na badaniu różnic między rozstępami wyników czy też nachyleniami stycznych dodatkowo podano różnice względne pomiędzy uzyskanymi w nich rezultatami a wartościami otrzymanymi w programie komercyjnym.

| zmienna losowa | wskaźniki wrażliwości wyznaczone na podstawie: |   |  |                 |
|----------------|--|---|--|-----------------|
|                | różnic w rozstępach wyników                    | różnic w nachyleniu stycznych do wykresów mnożników $m_{dop}$ | różnic w nachyleniu stycznych do wykresów wskaźników $\beta$ | programu COMREL |
| $x_1 = k_c$    | 0,9454<br>$\Delta = 0,48\%$                    | 0,9159<br>$\Delta = 3,59\%$                                   | 0,9691<br>$\Delta = 2,01\%$                                  | 0,95            |
| $x_2 = k_t$    | 0,3258<br>$\Delta = 8,60\%$                    | 0,4015<br>$\Delta = 33,83\%$                                  | 0,2465<br>$\Delta = 17,83\%$                                 | 0,30            |

Tablica 5.13 Porównanie wartości współczynników wrażliwości zmiennej odpowiedzi - mnożnika obciążenia dopuszczalnego wieży



Podsumowując, można stwierdzić, że wrażliwość odpowiedzi konstrukcji (wyrażonej zarówno poprzez mnożnik obciążenia dopuszczalnego, jak również poprzez wskaźnik niezawodności) na zmianę współczynnika sprężystości podpory słupa ściskanego jest wyraźnie większa, niż na zmianę współczynników sprężystości podpór słupów rozciąganych.

Ponadto, wyniki zaprezentowane w tablicy 5.13 uzasadniają stwierdzenie, iż autorskie propozycje oceny wrażliwości są poprawne. Uzyskane rezultaty w sposób właściwy wskazują parametr, którego wpływ na mechaniczne zachowanie się układu jest większy. Dodatkowo rząd uzyskanych wielkości pozostaje ten sam a błędy oszacowania wrażliwości na zmianę zmiennej kluczowej w problemie względem wyników uzyskanych w programie komercyjnym są niewielkie (nie przekraczają 5%).

Badanie wrażliwości układu na drodze analizy graficznej reprezentacji zachowania się konstrukcji prowadzi do właściwego wniosku, na wahania którego z parametrów zmienna wyjściowa jest wrażliwsza. Należy jednak podkreślić, że liczba realizacji, na podstawie której dokonuje się obrazu odpowiedzi konstrukcji musi być wystarczająca (jest bowiem uzależniona od stopnia skomplikowania obserwowanej odpowiedzi, tj. stopnia wielomianu aproksymującego) oraz dobrana w sposób świadomy i gwarantujący objęcie analizą całego krytycznego obszaru. Zaproponowana procedura autorska wykorzystująca punkty obliczeniowe w pobliżu funkcji stanu granicznego wydaje się spełniać te wymagania.

## 5.4 Kopuła – kratownica przestrzenna

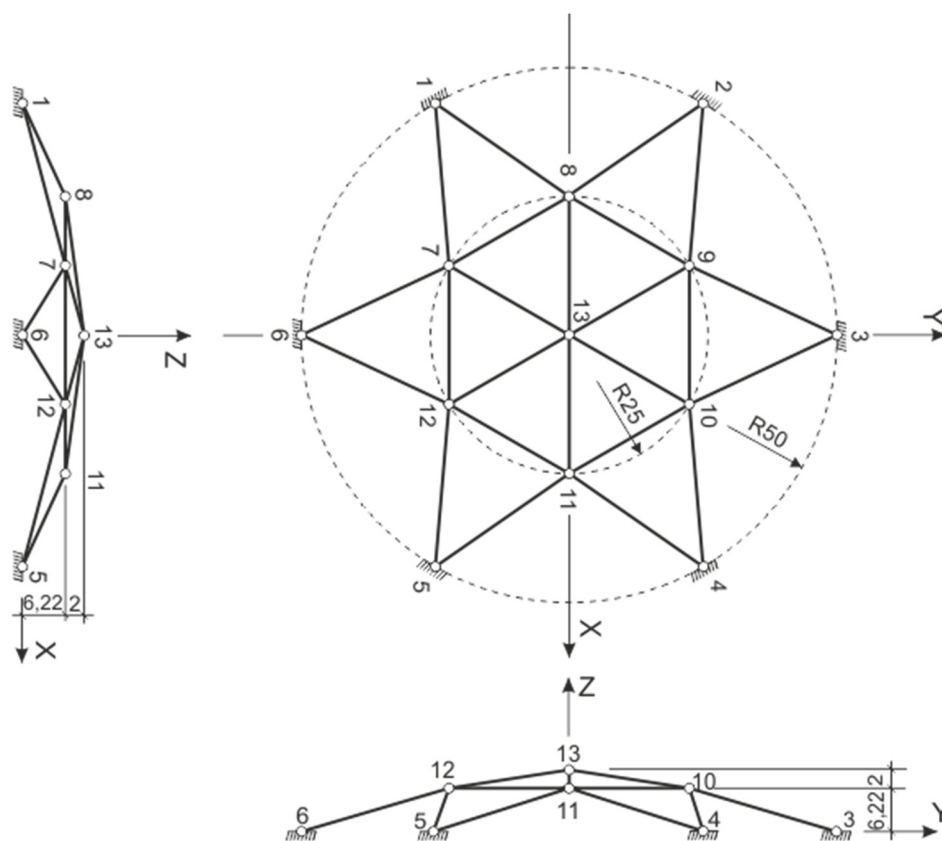
Kolejnym przykładem wykorzystania metod probabilistycznych jest analiza wpływu imperfekcji geometrycznych, wynikających z obowiązujących w praktyce inżynierskiej tolerancji w zakresie niedokładności wykonawczych. Jako przykład wybrano małowyniosłą kopułę kratownicową, której stany graniczne są niezwykle wrażliwe na zmianę poszczególnych parametrów modelu. Większość umieszczonych w rozdziale obliczeń i wniosków prezentowano m.in. w [Sorn i inni, 2015, 2016].

### 5.4.1 Przedstawienie modelu

Analizowana konstrukcja kratownicy przestrzennej, opisana w pracy [Rakowski i inni, 1993], składa się z 24 elementów o przekroju rurowym, wykonanych ze stali S355. Całkowita średnica konstrukcji wynosi 50 m. Najwyższy jej węzeł (nr 13) położony jest



na wysokości 8,216 m ponad poziomem podparcia. Elementy kratownicy połączone są przegubami kulowymi. Geometrię analizowanej konstrukcji przedstawiono na rysunku 5.51. Obliczenia wykonano za pomocą programu MSC NASTRAN przy założeniu geometrycznej i materiałowej nieliniowości.



Rysunek 5.51 Przestrzenna konstrukcja kratownicowa- geometria [Sorn i inni, 2015]

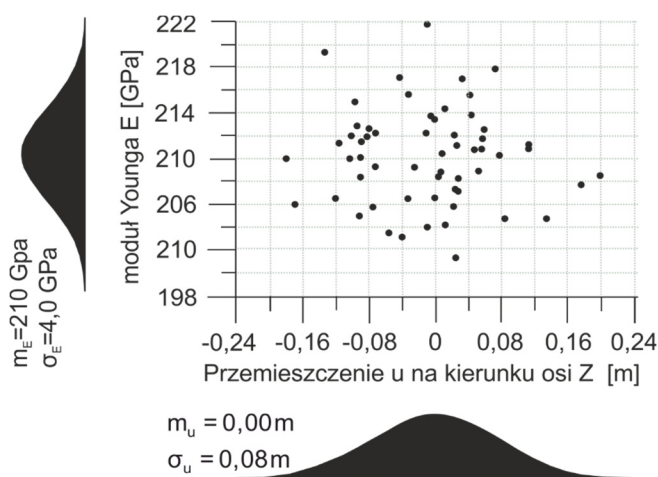
#### 5.4.2 Wybór metody obliczeniowej

W pierwszej kolejności wykonano obliczenia wstępne konstrukcji, mające na celu testowanie kilku różnych metod probabilistycznych i wyłonienie spośród nich procedury optymalnej. W tym celu założono prosty przypadek obciążenia jakim jest pojedyncza, pionowa siła skupiona przyłożona w węźle nr 13. Przyjęte obciążenie, mimo iż nie jest realistyczne, ma duży wpływ na odpowiedź mechaniczną układu i umożliwia obserwację zachowania modelu na skutek zmiany założonych parametrów projektowych.

Pierwszym krokiem było wyznaczenie wartości obciążenia niszczącego, które wyniosło  $R = 2612,3 \text{ kN}$ . Obliczenia probabilistyczne wykonano przy założeniu, że konstrukcję opisują dwie zmienne losowe: geometryczna - przemieszczenie  $u$  wierzchołka



kratownicy (węzeł 13 na rys. 5.51) oraz materiałowa – moduł Young’a  $E$ . Przyjęto następujący opis imperfekcji geometrycznych: wartość średnia  $m_u = 0,00\text{ m}$  oraz odchylenie standardowe  $\sigma_u = 0,08\text{ m}$ . Parametry rozkładu normalnego zostały tak dobrane, aby zakres wygenerowanych przemieszczeń węzła nr. 13 mieścił się w granicach  $(-0,13 \div 0,13)\text{ m}$ . Przemieszczenia w podanym zakresie odpowiadają imperfekcjom wywołanym przez zmiany długości prętów kratownicy. Wahania wymiarów elementów (tolerancje) są następstwem niedokładności pojawiających się w procesie produkcyjnym i są regulowane przez normy. Początkowe przemieszczenia węzłów 7 – 12 zostały przyjęte proporcjonalnie do wygenerowanych imperfekcji węzła 13-tego. Moduł Young’a został także opisany rozkładem Gaussa, ze średnią  $m_E = 210,0\text{ GPa}$  oraz odchyleniem standardowym  $\sigma_E = 4,0\text{ GPa}$ . Przykładową generację zmiennych  $u$  i  $E$  przedstawiono na rys. 5.52



Rysunek 5.52 Generacja dwóch zmiennych losowych – imperfekcji geometrycznych i modułu Young’a

Obliczenia wykonano za pomocą kilku metod. W przypadku bezpośredniej metody Monte Carlo wygenerowano 60 realizacji i na tej podstawie uzyskano opis obciążenia niszczącego: jego wartość średnią  $m_R = 2653,0\text{ kN}$ , odchylenie standardowe  $\sigma_R = 232,54\text{ kN}$  oraz skośność  $\gamma_R = 0,1004\text{ kN}$ . Wyniki te traktowane są jako rozwiązanie dokładne, pomimo tego, że 60 realizacji może wydawać się próbą niewystarczającą. Dla porównania rozrzutów wyników dodatkowo wygenerowano 36, 24, 16 oraz 9 par zmiennych losowych. Wyniki umieszczono w tabelicy 5.14.

| Zastosowana metoda                                   | Liczba realizacji<br>$n[-]$ | wartość średnia<br>$m_R$ [kN] | Odchylenie standardowe<br>$\sigma_R$ [kN] |
|--|-----------------------------|-------------------------------|---|
| Monte Carlo  | 60                          | 2653,21                       | 232,54                                    |
| Monte Carlo  | 36                          | 2658,71                       | 229,21                                    |
| Próbkowanie warstwowe – równe przedziały 6x6         | 36                          | 2637,43                       | 388,28                                    |
| Próbkowanie warstwowe – równe prawdopodobieństwa 6x6 | 36                          | 2604,47                       | 255,01                                    |
| Monte Carlo  | 25                          | 2651,48                       | 227,16                                    |
| Próbkowanie warstwowe – równe przedziały 5x5         | 25                          | 2645,16                       | 410,19                                    |
| Próbkowanie warstwowe – równe prawdopodobieństwa 5x5 | 25                          | 2630,21                       | 237,22                                    |
| Monte Carlo  | 16                          | 2602,15                       | 253,78                                    |
| Próbkowanie warstwowe – równe przedziały 4x4         | 16                          | 2647,99                       | 389,89                                    |
| Próbkowanie warstwowe – równe prawdopodobieństwa 4x4 | 16                          | 2614,67                       | 299,57                                    |
| Monte Carlo  | 9                           | 2728,93                       | 309,69                                    |
| Próbkowanie warstwowe – równe przedziały 3x3         | 9                           | 2633,06                       | 348,67                                    |
| Próbkowanie warstwowe – równe prawdopodobieństwa 3x3 | 9                           | 2656,06                       | 328,89                                    |
| PEM  | 4                           | 2620,48                       | 229,38                                    |

Tablica 5.14 Obciążenie graniczne kopuły kratownicowej – analiza z uwzględnieniem dwóch zmiennych losowych: przemieszczenie węzła nr 13 oraz modułu Young’a [Sorn i inni, 2015]

Zastosowanie metody Monte Carlo jest niezwykle pracochłonne dlatego też poszukiwane są możliwości ograniczenia liczby realizacji poprzez zastosowanie technik redukcyjnych. Pierwszą z zastosowanych metod było próbkowanie warstwowe z liczbą podziałów przestrzeni zmiennych równą kolejno:  $6 \times 6$ ,  $5 \times 5$ ,  $4 \times 4$  i  $3 \times 3$ . W ten sposób nawiązano do obliczeń wykonanych metodą Monte Carlo z wykorzystaniem tej samej liczby próbek. Obliczenia metodą próbkowania warstwowego wykonano w dwóch wariantach – pierwszy z nich przewidywał podział przestrzeni na warstwy o takich samych wymiarach, drugi zaś na warstwy o równych prawdopodobieństwach znalezienia się w danej podprzestrzeni. Wyniki umieszczono w tablicy 5.14. Pobieźna analiza uzyskanych rezultatów wskazuje, że te same wielkości wyznaczone innymi metodami różnią się od siebie w sposób znaczący, przez co trudno zdecydować, która z zastosowanych metod jest optymalna oraz jaką liczbę realizacji należy uznać za



minimalną. Co więcej w przypadku gdy przyjęta jest większa liczba zmiennych losowych wszystkie te metody będą mało efektywne. Z tego powodu kolejne obliczenia wykonano za pomocą metody PEM (tablica 5.15), która w znacznym stopniu ogranicza liczbę realizacji – w przypadku dwóch zmiennych losowych obliczenia należy wykonać jedynie dla czterech modeli deterministycznych. Wyniki uzyskane za pomocą tej metody wykazują niewielki błąd w stosunku do poziomu odniesienia, a mianowicie 1,2% w stosunku do wartości oczekiwanej i 1.4% w przypadku odchylenia standardowego. Ze względu na niewielkie różnice wyników oraz znaczną redukcję liczby realizacji w dalszych obliczeniach wykorzystano wyłącznie metodę PEM.

| Punkt   | $x_1$ [m]        | $x_2$ [GPa]      | $y$ [kN] | $p(x_{i,j})$ | $yp(x_{i,j})$   | $y^2 p(x_{i,j})$ |
|---|------------------|------------------|----------|--------------|-----------------|------------------|
| 1   | $x_{1-} = -0,08$ | $x_{2-} = 206,0$ | 2790,2   | 0,25         | 697,545         | 1946276          |
| 2   | $x_{1+} = 0,08$  | $x_{2+} = 214,0$ | 2443,2   | 0,25         | 610,8075        | 1492343          |
| 3   | $x_{1-} = -0,08$ | $x_{2+} = 214,0$ | 2898,3   | 0,25         | 724,575         | 2100036          |
| 4   | $x_{1+} = -0,08$ | $x_{2-} = 206,0$ | 2350,2   | 0,25         | 587,548         | 1380848          |
|   |                  |                  |          |              | $\sum = 2620,5$ | $\sum = 6919503$ |
| $E[R] = 2620,475 \text{ kN}$ , $Var[R] \approx 6919503 - 2620,475^2 = 52614,07 \text{ kN}^2$ , $\sigma_R \approx 229,38 \text{ kN}$ |                  |                  |          |              |                 |                  |

Tablica 5.15 Rezultaty obliczeń w przypadku dwóch zmiennych losowych – metoda estymacji punktowej PEM [Sorn i inni, 2015]

### 5.4.3 Analiza wrażliwości

Dalszą analizę wykonano dla realistycznego obciążenia kratownicy śniegiem. Na podstawie normy PN-EN 1990-1-3 przyjęto następujące wzory opisujące obciążenie :

$$s = \mu_i C_e C_t s_k \text{ [kN/m}^2\text{]}, \quad (5.34)$$

gdzie:

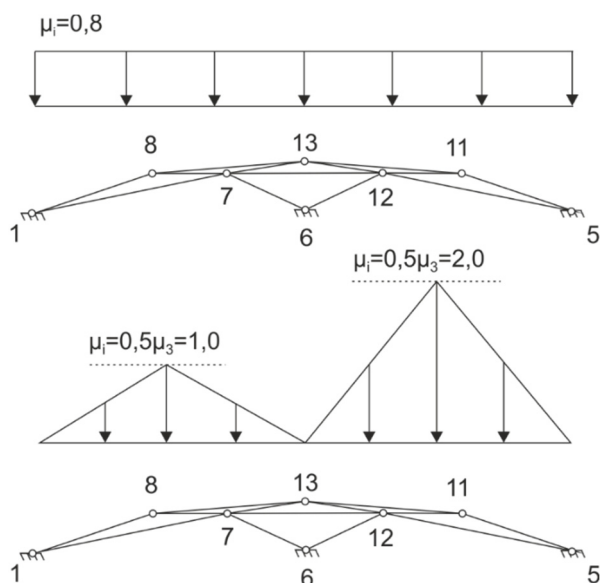
$s_k$  – wartość charakterystyczna obciążenia śniegiem gruntu w rozpatrywanym miejscu [kN/m<sup>2</sup>],

$\mu_i$  – współczynnik kształtu dachu,

$C_e$  –współczynnik ekspozycji (przyjęto  $C_e = 1,0$ ),

$C_t$  –współczynnik termiczny (przyjęto  $C_t = 1,0$ ).

Rozpatrzono dwa przypadki – symetrycznego i niesymetrycznego obciążenie śniegiem (rys.5.53).



Rysunek 5.53 Symetryczne i niesymetryczne obciążenie śniegiem [Sorn i inni, 2015]

W opisie kratownicy zastosowano cztery zmienne losowe: początkowe pionowe przemieszczenie węzła 13 ( $x_1$ ), przemieszczenie węzłów 7-14 ( $x_2$ ), Moduł Young'a ( $x_3$ ) oraz pole powierzchni przekroju poprzecznego prętów ( $x_4$ ). Przemieszczenia węzłów 7-14 opisano w identyczny sposób jak węzła 13. Dane dotyczące modułu Young'a także pozostawiono takie same jak w analizie dwóch zmiennych losowych. Średnią oczekiwaną przekroju poprzecznego oraz jego odchylenia standardowe opisano rozkładem normalnym o następujących parametrach:  $\mu_{x_4} = 394,458 \text{ cm}^2$  oraz  $\sigma_{x_4} = 2,0 \text{ cm}^2$ . Zastosowano wersję Honga metody estymacji punktowej (PEM), omówioną w rozdziale 3.3 pracy. Warto podkreślić, że wersja Honga metody PEM, stosowana w przypadku przyjętej dużej liczby zmiennych losowych, może dawać błędne wyniki [Christian i inni, 2002], jednak dla 4 zmiennych jej stosowanie wydaje się uzasadnione. Przebieg obliczeń wykonanych dla symetrycznego i niesymetrycznego obciążenia śniegiem przedstawiono w tabelach 5.16 oraz 5.17 [Sorn i inni, 2015]. Należy podkreślić, że w analizie każdego z wariantów obciążenia wystarczające było przeprowadzenie obliczeń dla ośmiu deterministycznych modeli kratownicy.

| Punkt   | $x_1$<br>[m]          | $x_2$<br>[m]          | $x_3$<br>[GPa]          | $x_4$<br>[cm <sup>2</sup> ] | $y$<br>[kN / m <sup>2</sup> ] | $p(x_{i,j,k})$ | $yp(x_{i,j,k})$ | $y^2 p(x_{i,j,k})$ |
|---|-----------------------|-----------------------|-------------------------|-----------------------------|-------------------------------|----------------|-----------------|--------------------|
| 1   | $x_{1-}$<br>= -0,16   | $x_{2,mean}$<br>= 0,0 | $x_{3,mean}$<br>= 210,0 | $x_{4,mean}$<br>= 394,458   | 26,09                         | 0,125          | 3,261           | 85,09              |
| 2   | $x_{1+}$<br>= 0,16    | $x_{2,mean}$<br>= 0,0 | $x_{3,mean}$<br>= 210,0 | $x_{4,mean}$<br>= 394,458   | 26,16                         | 0,125          | 3,270           | 85,54              |
| 3   | $x_{1,mean}$<br>= 0,0 | $x_{2-}$<br>= -0,06   | $x_{3,mean}$<br>= 210,0 | $x_{4,mean}$<br>= 394,458   | 13,41                         | 0,125          | 1,676           | 22,48              |
| 4   | $x_{1,mean}$<br>= 0,0 | $x_{2+}$<br>= 0,06    | $x_{3,mean}$<br>= 210,0 | $x_{4,mean}$<br>= 394,458   | 14,69                         | 0,125          | 1,836           | 26,97              |
| 5   | $x_{1,mean}$<br>= 0,0 | $x_{2,mean}$<br>= 0,0 | $x_{3-}$<br>= 202,0     | $x_{4,mean}$<br>= 394,458   | 25,12                         | 0,125          | 3,140           | 78,88              |
| 6   | $x_{1,mean}$<br>= 0,0 | $x_{2,mean}$<br>= 0,0 | $x_{3+}$<br>= 218,0     | $x_{4,mean}$<br>= 394,458   | 27,14                         | 0,125          | 3,393           | 92,07              |
| 7   | $x_{1,mean}$<br>= 0,0 | $x_{2,mean}$<br>= 0,0 | $x_{3,mean}$<br>= 210,0 | $x_{4-}$<br>= 354,458       | 23,45                         | 0,125          | 2,931           | 68,74              |
| 8   | $x_{1,mean}$<br>= 0,0 | $x_{2,mean}$<br>= 0,0 | $x_{3,mean}$<br>= 210,0 | $x_{4+}$<br>= 434,458       | 28,79                         | 0,125          | 3,599           | 103,61             |
| $\Sigma$  |                       |                       |                         |                             |                               |                | 23,106          | 563,38             |
| $E[R] = 23,106 kN, Var[R] \approx 563,38 - 23,106^2 = 29,49 kN^2, \sigma_R \approx 5,43 kN$ |                       |                       |                         |                             |                               |                |                 |                    |

Tablica 5.16 Symetryczne obciążenie śniegiem - rezultaty obliczeń w przypadku 4 zmiennych losowych – metoda estymacji punktowej Honga [Sorn i inni, 2015]

| Punkt  | $x_1$<br>[m]          | $x_2$<br>[m]          | $x_3$<br>[GPa]          | $x_4$<br>[cm <sup>2</sup> ] | $y$<br>[kN / m <sup>2</sup> ] | $p(x_{i,j,k})$ | $yp(x_{i,j,k})$ | $y^2 p(x_{i,j,k})$ |
|--|-----------------------|-----------------------|-------------------------|-----------------------------|-------------------------------|----------------|-----------------|--------------------|
| 1  | $x_{1-}$<br>= -0,16   | $x_{2,mean}$<br>= 0,0 | $x_{3,mean}$<br>= 210,0 | $x_{4,mean}$<br>= 394,458   | 4,90                          | 0,125          | 0,6125          | 3,001              |
| 2  | $x_{1+}$<br>= 0,16    | $x_{2,mean}$<br>= 0,0 | $x_{3,mean}$<br>= 210,0 | $x_{4,mean}$<br>= 394,458   | 5,01                          | 0,125          | 0,6263          | 3,138              |
| 3  | $x_{1,mean}$<br>= 0,0 | $x_{2-}$<br>= -0,06   | $x_{3,mean}$<br>= 210,0 | $x_{4,mean}$<br>= 394,458   | 3,62                          | 0,125          | 0,4525          | 1,638              |
| 4  | $x_{1,mean}$<br>= 0,0 | $x_{2+}$<br>= 0,06    | $x_{3,mean}$<br>= 210,0 | $x_{4,mean}$<br>= 394,458   | 3,48                          | 0,125          | 0,4350          | 1,514              |
| 5  | $x_{1,mean}$<br>= 0,0 | $x_{2,mean}$<br>= 0,0 | $x_{3-}$<br>= 202,0     | $x_{4,mean}$<br>= 394,458   | 4,76                          | 0,125          | 0,5950          | 2,832              |
| 6  | $x_{1,mean}$<br>= 0,0 | $x_{2,mean}$<br>= 0,0 | $x_{3+}$<br>= 218,0     | $x_{4,mean}$<br>= 394,458   | 5,15                          | 0,125          | 0,6438          | 3,315              |
| 7  | $x_{1,mean}$<br>= 0,0 | $x_{2,mean}$<br>= 0,0 | $x_{3,mean}$<br>= 210,0 | $x_{4-}$<br>= 354,458       | 4,44                          | 0,125          | 0,5550          | 2,464              |
| 8  | $x_{1,mean}$<br>= 0,0 | $x_{2,mean}$<br>= 0,0 | $x_{3,mean}$<br>= 210,0 | $x_{4+}$<br>= 434,458       | 5,47                          | 0,125          | 0,6838          | 3,740              |
| $\Sigma$   |                       |                       |                         |                             |                               |                | 4,6039          | 21,642             |
| $E[R] = 4,6039 kN, Var[R] \approx 21,642 - 4,6039^2 = 0,446 kN^2, \sigma_R \approx 0,668 kN$ |                       |                       |                         |                             |                               |                |                 |                    |

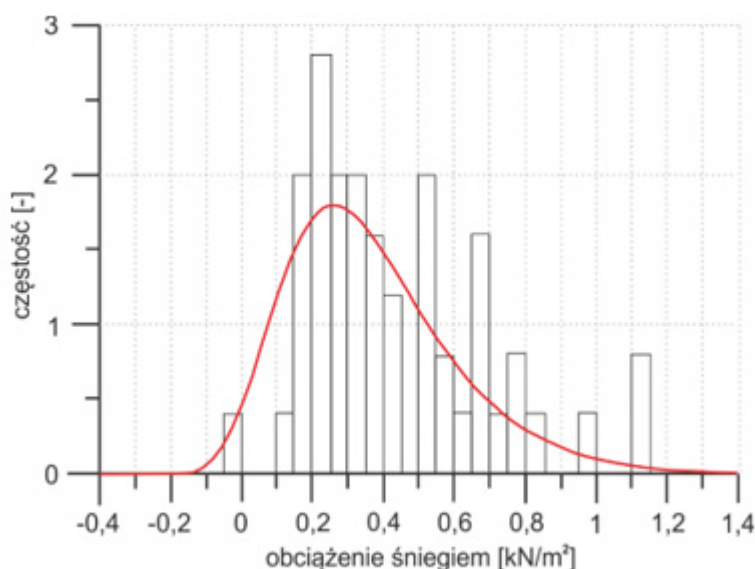
Tablica 5.17 Asymetryczne obciążenie śniegiem – przypadek 4 zmiennych losowych – metoda estymacji punktowej Honga [Sorn i inni, 2015]

Na podstawie obliczeń uzyskano następujące wartości oczekiwane i odchylenia standardowe obciążenia granicznego śniegiem, dla obciążenia symetrycznego –  $23,106 \text{ kN/m}^2$  i  $5,43 \text{ kN/m}^2$  oraz niesymetrycznego –  $4,6039 \text{ kN/m}^2$  i  $0,668 \text{ kN/m}^2$ . Na szczególną uwagę zasługuje niezwykle mała wartość oczekiwana i odchylenia standardowego w przypadku niesymetrycznego obciążenia śniegiem.

Estymacja niezawodności kratownicy wymaga przyjęcia odpowiedniego rozkładu obciążenia. Na podstawie wieloletnich pomiarów, przedstawionych np. w [Gwóźdź i Machowski, 2011] zastosowano rozkład Gumbela jako optymalny dla tego typu opisu [Sorn i inni, 2016]:

$$f(x) = 4,95 \cdot \exp[-4,95(x - 0,259)] \cdot \exp[-\exp(-4,95(x - 0,259))] \quad (5.35)$$

Postać histogramu oraz aproksymowanej na jego podstawie funkcji gęstości rozkładu prawdopodobieństwa przedstawiono na rys. 5.54

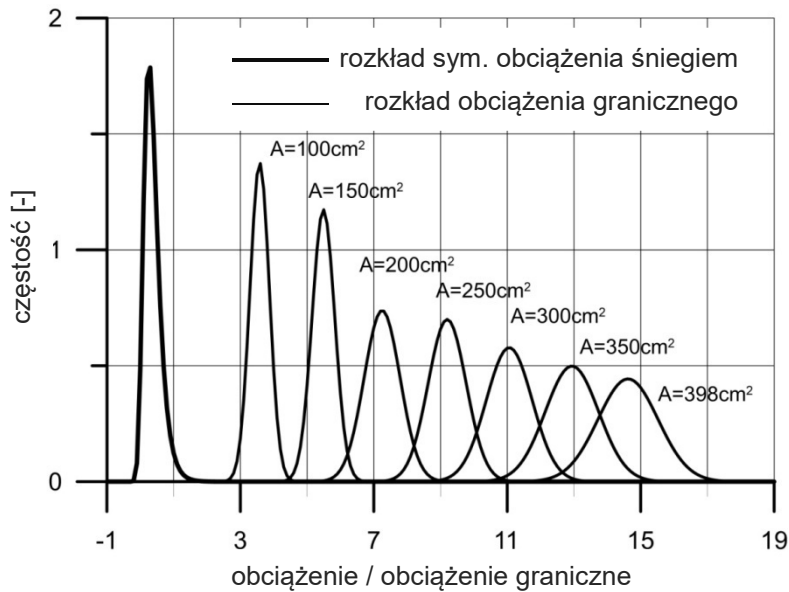


Rysunek 5.54 Histogram oraz przybliżona funkcja gęstości prawdopodobieństwa obciążenia śniegiem (rozkład Gumbela o parametrach:  $\alpha = 4,95$ ,  $u = 0,259$ )

W celu opisu wrażliwości niezawodności konstrukcji na zmianę przekroju poprzecznego elementów kopuły wykonano szereg obliczeń, których wyniki w przypadku symetrycznego obciążenia śniegiem, przedstawiono na rys. 5.55. Na tej podstawie wyznaczono wskaźnik niezawodności modelu stosując wzór Hasofer-Linda.







Rysunek 5.55 Rozkłady: symetrycznego obciążenia śniegiem oraz odpowiedzi układu w zależności od przyjętego pola poprzecznego  $A_i$  elementów

Aby ułatwić opis zmienności niezawodności modelu wyniki zostały w standardowy sposób aproksymowane następującymi funkcjami [Sorn i inni, 2016]:

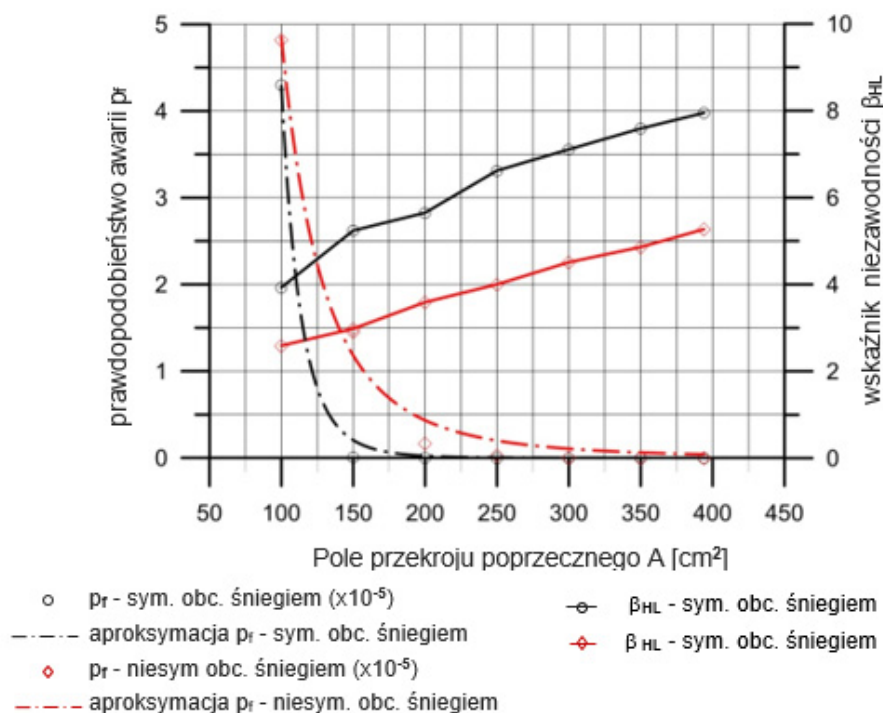
– w przypadku obciążenia symetrycznego śniegiem (otrzymano współczynnik korelacji 0,9975):

$$p_f^s = 4.2965 \cdot 10^{10} A^{-7.5} \quad (5.36)$$

– w przypadku obciążenia niesymetrycznego śniegiem (współczynnik korelacji wyniósł 0,99):

$$p_f^a = 4.5319 \cdot 10^4 A^{-3.4351} \quad (5.37)$$

Wyniki graficznie przedstawiono na rys. 5.56.



Rysunek 5.56 Aproksymacja wyników obliczeń niezawodności kopały[Sorn i inni, 2016]

Zgodnie z Normą PN-EN-1990 poziom niezawodności jest ściśle związany z przyjętym okresem „życia” konstrukcji. Zakładając ten okres na poziomie 50 lat i klasę RC3 niezawodności, index  $\beta_{HL}$  powinien wynosić 4,3. Analizując rys. 5.56 łatwo można stwierdzić, że w przypadku obciążenia niesymetrycznego odpowiada to przekrojom poprzecznym  $A=300 \text{ cm}^2$ , podczas gdy dla obciążenia symetrycznego wystarczy poziom około  $A=100 \text{ cm}^2$ .

Przedstawioną analizę można potraktować jako algorytm postępowania w określeniu wrażliwości niezawodności konstrukcji na zmianę pojedynczego parametru, zakończony konkretnymi wnioskami projektowymi.

## Rozdział 6. Wnioski

---

W pracy przedstawiono probabilistyczną analizę wrażliwości mechanicznej odpowiedzi konstrukcji z uwagi na odchyłki geometryczne i zmianę własności materiałów. Skoncentrowano się na zaprezentowaniu skutecznych metod, łatwych w zastosowaniach inżynierskich i niewymagających zaawansowanej wiedzy lub specjalistycznego oprogramowania.

Głównym elementem analizy jest estymacja niezawodności konstrukcji i na tej podstawie szacowanie jej wrażliwości. Budując algorytmy obliczeniowe przyjęto podstawowe założenie, że funkcja stanu granicznego nie jest znana i należy ją wyznaczyć na drodze iteracyjnej. Taka sytuacja ma miejsce w przypadku większości nawet najbardziej standardowych konstrukcji. Zagadnienia, w których funkcja stanu granicznego jest możliwa do zdefiniowania na drodze analitycznej, dotyczą wyłącznie pojedynczych elementów konstrukcji i ograniczonej klasy zagadnień.

W pracy rozwinięto powszechnie znane i stosowane algorytmy obliczeń: metodę Monte Carlo (MC) wraz z metodami redukcyjnymi próbkowania warstwowego (SS) i hipersześcianu łacińskiego (LHS), metodę estymacji punktowej (PEM) oraz metodę powierzchni odpowiedzi (RSM). Obliczenia przeprowadzone w pracy wyróżniają wszechstronność analizy porównawczej i próba zdefiniowania metody optymalnej.

W przypadku metody powierzchni odpowiedzi (RSM) skoncentrowano się na sposobie dobierania próbek, tak aby skutecznie wymodelować powierzchnię stanu granicznego. W tym celu przeprowadzono obliczenia dla wielu wariantów symulacji, także niestandardowych, np. łącząc próbki wykorzystane w metodzie estymacji punktowej (PEM), z próbkowaniem metody Monte Carlo (MC). Dokonano szczegółowego porównania wyników tych obliczeń. Zadawalające rezultaty uzyskano przy zastosowaniu metody próbkowania warstwowego (SS), odpowiednio klasyfikując próbki wygenerowane za pomocą metody MC. Wykazano, że dobór metody obliczeniowej zależy od analizowanego problemu, a także od spodziewanego poziomu niezawodności. Przy inżyniersko prawidłowo zdefiniowanym systemie zawodność jest określana liczbą na poziomie  $10^{-4}$  i jej estymacja jest niezwykle trudna. Gdy konstrukcje charakteryzują się większą zawodnością obliczenia są zdecydowanie łatwiejsze. Określenie tego poziomu i na tej podstawie obranie właściwej metody estymacji niezawodności powinno być pierwszym krokiem wykonywanej analizy.



W celu optymalnego wykorzystania metody powierzchni odpowiedzi (RSM) w środowisku MATLAB stworzono program pozwalający na poszukiwanie próbek w otoczeniu stanu granicznego konstrukcji. Autorski algorytm próbkowania ukierunkowanego (TRS) jest najważniejszym elementem pracy. Technika ta umożliwia redukcję nakładu obliczeń, gdyż powierzchnia stanu granicznego jest estymowana tylko w pobliżu funkcji granicznej. Takie podejście prowadzi do szybkiego ustabilizowania wyników. W pracy jedynie zainicjowano analizę algorytmu TRS. Konieczne są dalsze prace nad odpowiednią doborą próbek, np. identyfikacją i odrzuceniem tych, które zaburzają budowę wielowymiarowej funkcji.

Najważniejszym elementem pracy jest analiza wrażliwości mechanicznej odpowiedzi konstrukcji na zmianę parametrów materiałowych oraz odchyłek geometrycznych. W pracy przetestowano kilka wariantów obliczeń. W pierwszym przykładzie – kratownicy von Misesa – z uwagi na teoretyczny model kratownicy uzyskano histogramy nośności granicznej w funkcji poszczególnych parametrów definiujących tę konstrukcję. Na tej podstawie określono kilka globalnych (dotyczących całego histogramu) oraz lokalnych (w punktach projektowych) współczynników wrażliwości. Parametry globalne (wartość oczekiwana i odchylenie standardowe) w sposób ogólny charakteryzują histogram stanu granicznego. Parametry lokalne, definiowane na podstawie krzywej aproksymowanej w otoczeniu punktu projektowego pozwalają na liczbową charakterystykę wrażliwości konstrukcji i umożliwiają porównanie wpływu poszczególnych zmiennych opisujących model. W celach porównawczych wyznaczono także wskaźniki wrażliwości Sobola.

Należy podkreślić, że podejście, którego podstawę stanowi wynikowy histogram stanu granicznego nie jest możliwe w przypadkach bardziej skomplikowanych konstrukcji, wymagających znacznie większego czasu obliczeniowego dla pojedynczej wygenerowanej próbki. Zaproponowano więc rozwiązania pośrednie wykonując analizy parametryczne i badając wpływ zmiany poszczególnych parametrów na mechaniczną odpowiedź modelu.

Kompleksowe obliczenia dla drugiego teoretycznego przykładu – kolumny Ziglera – pozwoliły na wstępne określenie wrażliwości parametrów poprzez analizę chmury rozproszenia wyników obliczeń w funkcji stałych opisujących elementy sprężystych połączeń modelu. W celu udokładnienia tych obliczeń zastosowano metodę powierzchni odpowiedzi przy wykorzystaniu próbek Monte Carlo w wersji bezpośredniej



oraz stosując kilka metod redukcyjnych. Najbardziej skuteczną okazała się metoda próbkowania warstwowego (SS). Wykazano, że równie skuteczne obliczeniowo jest autorska metoda próbkowania ukierunkowanego (TRS).

Najbardziej rozbudowanym przykładem jest analiza rzeczywistej wieży telekomunikacyjnej. W obliczeniach wykorzystano wcześniejsze doświadczenia, dotyczące zarówno szacowania wpływu poszczególnych parametrów na mechaniczną odpowiedź konstrukcji jak i charakteru tego wpływu. 200 realizacji wykorzystanych w metodzie Monte Carlo (MC) nie pozwoliło na określenie niezawodności konstrukcji. Cztery warianty obliczeń wykonane za pomocą metody powierzchni odpowiedzi (RSM) udowodniły, że najbardziej optymalną jest metoda próbkowania ukierunkowanego (TRS). Wyniki tej kompleksowej analizy pozwoliły na określenie wrażliwości konstrukcji z uwagi na zmianę parametrów jej podparcia. Obszerne wyniki wykorzystano w aproksymacji funkcji opisujących wrażliwość, a następnie wyznaczenie odpowiednich liczbowych parametrów. Przyjęto autorski opis współczynników wrażliwości bliski wynikom analizy wykonanej za pomocą komercyjnego programu. Końcowym efektem obliczeń jest powierzchnia wrażliwości, którą jednak można uzyskać jedynie w wyniku czasochłonnych obliczeń w obszarze bliskim punktu projektowego. Jej znaczenie jest więc ograniczone.

W ostatnim przykładzie zaprezentowano kompleksowe obliczenia kopuły prętowej. Stwierdzono, że w tym przypadku optymalną metodą jest metoda estymacji punktowej (PEM). Analiza wrażliwości pozwoliła na określenie minimalnego pola przekroju poprzecznego prętów przy założeniu 50-cio letniego normowego poziomu niezawodności.

Reasumując, najważniejszymi elementami pracy są:

- prezentacja metod wstępnej charakterystyki problemu, umożliwiających porównanie wpływu poszczególnych parametrów na mechaniczną odpowiedź konstrukcji oraz określenie charakteru tego wpływu,
- wszechstronne przetestowanie metody powierzchni odpowiedzi (RSM) z uwagi na dobór próbek, pozwalających na właściwą aproksymację funkcji stanu granicznego,



- zaproponowanie autorskiej metody ukierunkowanego doboru próbek (TRS), który wydaje się być najwłaściwszą metodą estymacji niezawodności dowolnego wielowymiarowego problemu losowego,
- zdefiniowanie opisu wskaźników wrażliwości konstrukcji.

Kierunkiem dalszego rozwoju proponowanych metod jest:

- udokładnienie metody próbkowania ukierunkowanego z eliminacją punktów zaburzających algorytm estymacji powierzchni stanu granicznego,
- klasyfikacja metod obliczeniowych w zależności od cech charakterystycznych problemu,
- ujednoczenie parametrów (wskaźników) opisujących wrażliwość problemu.

## Bibliografia

---

### Monografie, artykuły oraz inne publikacje:

1. [Adler, 1981] Adler R.J.: *The geometry of random fields*. John Wiley & Sons, 1981.
2. [Ahammed i inni, 2006] Ahammed M., Melchers R.E.: *Gradient and parameter sensitivity estimation for systems evaluated using Monte Carlo analysis*. Reliability Engineering and System Safety 91/2006, 594–601
3. [Alibrandi i inni, 2009] Alibrandi U., Impollonia N., Ricciardi G.: *Probabilistic buckling analysis of frame structures with uncertain parameters*. Proceedings of the 19th AIMETA Congress of Theoretical and Applied Mechanics, Ancona, Włochy 2009, 337–346.
4. [Anders, 2009] Anders M.: *Application of stochastic finite element method to non-linear elasto-plastic problem*. University of Tokyo, Tokio, 2000.
5. [Ang i inni, 2007] Ang A. H-S., Tang W.H.: *Probability concepts in engineering: emphasis on applications to civil and environmental engineering*. John Wiley & Sons, 2007.
6. [Au i inni, 2003] Au F.T.K., Cheng Y.S., Tham L.G., Zeng G.W.: *Robust design of structures using convex models*. Computers and Structures 81/2003, 2611–2619
7. [Augusti i inni, 1984] Augusti G., Baratta A., Casciati F.: *Probabilistic methods in structural engineering*. Chapman and Hall, London, 1984.
8. [Augusti, 2003] Augusti G.: *Optimal allocation of resources in risk reduction*. Workshop on Reliability-Based Design and Optimization RBO'03, eds. Jendo S., Doliński K., 15-18.09.2003, IFTR PASci + AMAS, Warsaw 2003.
9. [Benjamin i inni, 1977] Benjamin J.R., Cornell C.A. *Rachunek prawdopodobieństwa, statystyka matematyczna i teoria decyzji dla inżynierów*. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa, 1977.



10. [Bertrand i inni, 2015] Bertrand I., Saltelli A.: *Handbook of Uncertainty Quantifications.*, Springer, 2015, 1-20.
11. [Biegus, 1999] Biegus A. :*Probabilistyczna analiza konstrukcji stalowych.* Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa - Wrocław, 1999.
12. [Bielewicz i inni, 1985] Bielewicz E., Górski J., Skowronek M.: *Program generacji dwuwymiarowych, dyskretnych pól losowych.* Materiały z II Konferencji – Problemy Losowe w Mechanice Konstrukcji. Gdańsk, 1985, 23–30.
13. [Bielewicz i inni, 1987] Bielewicz E., Górski J., Skowronek M.: *Redukcja zbioru realizacji w symulacji dwuwymiarowego pola losowego.* Zeszyty Naukowe Politechniki Gdańskiej, Budownictwo Lądowe 44/408, 1987, 7–15.
14. [Bielewicz i inni, 1994] Bielewicz E., Górski J., Schmidt R., Walukiewicz H.: *Random fields in the limit analysis of elastic-plastic shell structures.* Computers & Structures, 1994.
15. [Bielewicz i inni, 1997] Bielewicz E., Górski J., Walukiewicz H. *Simulation of non-homogeneous random fields for structural applications.* Computers & Structures, 1997.
16. [Bielewicz i inni, 2002] Bielewicz E., Górski J.: *Shells with random geometric imperfections. Simulation-based approach.* International Journal of Non-linear Mechanics, 2002.
17. [Bjerager i inni, 1989] Bjerager P., Krenk S. *Parametric sensitivity in first-order reliability theory.* Journal of Engineering Mechanics ASCE, vol. 7, 1989.
18. [Bogucki i inni, 2003] Bogucki M., Strączek P.: *Zastosowanie metody największego spadku w optymalizacji procesu wtryskiwania.* Eksploatacja i niezawodność 2/ 2003, 18-20.
19. [Bogucki i inni, 2006] Bogucki W., Żybertowicz M.: *Tablice do projektowania konstrukcji metalowych.* Arkady, Warszawa, 2006.
20. [Bojczuk, 1999] Bojczuk D. *Analiza wrażliwości i optymalizacja konstrukcji prętowych.* Rozprawa habilitacyjna,





- Wydawnictwo Politechniki Świętokrzyskiej, Kielce, 1999.
21. [Bołotin, 1961] Bołotin W.W.: *Metody statystyczne w mechanice budowli*. Arkady, Warszawa, 1961.
22. [Box i inni, 1987] Box G.E.P, Draper N.R.: *Empirical model-building and response surfaces*. John Wiley & Sons, 1987.
23. [Bryja i inni, 1988] Bryja D., Śniady P.: *Random vibration of a suspension bridge due to highway traffic*. Journal of Sound and Vibration, vol. 125, Issue 2, 1988, 379-387.
24. [Bucher, 2009] Bucher C. *Computational analysis of randomness in structural mechanics*. CRC Press/ Balkema, Leiden, 2009.
25. [Chan i inni, 1997] Chan K., Saltelli A., Tarantola S.: *Sensitivity analysis of model output: variance-based methods make the difference*. Proceedings of the 1997 Winter Simulation Conference ed. S. Andradóttir, K. J. Healy, D. H. Withers, and B. L. Nelson, 261 – 268.
26. [Castillo i inni, 2008] Castillo E., Minguez R., Castillo C.: *Sensitivity analysis in optimization and reliability problems*. Reliability Engineering and System Safety 93/ 2008, 1788– 1800.
27. [Challamel i inni, 2010] Challamel N., Nicot F., Lerbet J., Darve F.: *Stability of non-conservative elastic structures under additional kinematics constraints*. Engineering Structures 32/2010, 3086-3092.
28. [Chalk i inni, 1980] Chalk P.L, Corotis R. B.: *Probability models for design live loads*. Journal of the Structural Division ASCE, 1980.
29. [Chłopek, 2009] Chłopek Z.: *Interpretacja poznawcza metody Monte Carlo w zastosowaniach technicznych*. Eksploatacja i Niezawodność nr 3: 2009, 38-46.
30. [Christian i inni, 1999] Christian J.T.: Baecher G.B.: *Point Estimate Method as numerical quadrature*. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering 125(9), 779-786.
31. [Christian i inni, 2002] Christian J.T., Baecher G.B., *The point-estimate method with large numbers of variables*.



- International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics 26, 2002, 1515–1529.
32. [Cornell, 1969] Cornell C.A. *A probability-based structural code*. ACI Journal, 1969.
33. [Corotis i inni, 1977] Corotis R.B., Doshi V.A.: *Probability models for live load survey results*. Journal of the Structural Division ASCE, 1977.
34. [Crestaux i inni, 2009] Crestaux T., Le Maitre O., Martinez J.-M.: *Polynomial chaos expansion for sensitivity analysis*. Reliability Engineering and System Safety 94/2009, 1161–1172
35. [Cukier i inni, 1973] Cukier R. I., Fortuin C., Schuler K. E., Petscheck A.G., Schaibly J.H.: *Study of the sensitivity of coupled reaction systems to uncertainties in rate coefficients*. Theory. J. Chemical Physics 59, 1973, 3873-3878.
36. [Deml i inni, 1997] Deml M, Wunderlich W.: *Direct evaluation of the “worst” imperfection shape in shell buckling*. Computer Method in Applied Mechanics and Engineering 149, 1997, 201–222.
37. [Der Kiureghian, 2003] Der Kiureghian A. *Algorithms for reliability-based structural design*. Workshop on Reliability-Based Design and Optimization RBO'03, eds. Jendo S., Doliński K., 15-18.09.2003, IFTR PASci + AMAS, Warsaw, 2003.
38. [Devroye, 1986] Devroye L.: *Non-uniform random variate generation*. Springer, New York, 1986.
39. [Ditlevsen i inni, 1996] Ditlevsen O., Madsen H.O.: *Structural reliability methods*. John Wiley & Sons, 1996.
40. [Ditlevsen, 1979] Ditlevsen O. *Narrow reliability bounds for structural systems*. Journal of Structural Mechanics, 1979.
41. [Dudzik i inni, 2015] Dudzik A., Radoń U.: *The evaluation of algorithms for determination of the reliability index*. Archives of civil engineering, Vol. LXI, Issue 3, 2015, 133-147.



42. [Ellingwood i inni, 1983] Ellingwood B., Redfield R.: *Ground snow loads for structural design*. Journal of Structural Engineering, 1983.
43. [Ellingwood i inni, 1999] Ellingwood B., Tekie P.B.: *Wind load statistics for probability-based structural design*. Journal of Structural Engineering, ASCE, 1999.
44. [Ellingwood i inni, 2017] Ellingwood B., DeGock D.J., Liel A.B., Harris J.R.: *Reliability-based design snow loads*. Journal of Structural Engineering, 2017.
45. [Ellingwood, 1981] Ellingwood B. *Wind and snow load statistics for probabilistic design*. Journal of Structural Division (ASCE), 1981.
46. [Engel i inni, 1980] Engel L., Sieczkowski J.M.: *Obciążenia konstrukcji budowlanych*. Skrypt Politechniki Wrocławskiej, Wrocław, 1980.
47. [Faber, 2002] Faber M.H. *Application of decision analysis in civil engineering*. Workshop on Reliability-Based Design and Optimization RBO'02, eds. Jendo S. Kleiber M., Doliński K., 23-25.09.2002, IFTR PASci + AMAS, Warsaw, 2002.
48. [Fang i inni, 2014] Fang S.-E., Zhang Q.-H., Zhang B., Zhang X.-H.: *Probabilistic and nonprobabilistic Sensitivity analyses of uncertain parameters*, Mathematical Problems in Engineering 2014(1), 1-7.
49. [Feng i inni, 2010] Feng Z., Zhenzhou L., Lijie C., Shufang S.: *Reliability Sensitivity Algorithm Based on Stratified Importance Sampling Method for Multiple Failure Modes Systems*. Chinese Journal of Aeronautics 23/2010, 660-669.
50. [Freudenthal, 1947] Freudenthal A.M.: *The safety of structures*. ASCE Transactions, 1947.
51. [Freudenthal, 1956] Freudenthal A.M. *Safety and the probability of structural failure*. ASCE Transactions, 1956.
52. [Frey i inni, 2003] Frey H. C., Mokhtari A., Danish T.: *Evaluation of selected sensitivity analysis methods based upon applications to two food safety process risk models*. Raleigh - North Carolina, North Carolina State University, 2003.



53. [Gentle, 1998] Gentle J.E.: *Random number generation and Monte Carlo methods*. Springer, 1998.
54. [Gollwitzer i inni, 2006] Gollwitzer S., Kirchgässner B., Fischer R., Rackwitz R.: *Perma SRA/ Strurel system of programs for probabilistic reliability analysis*. Structural safety, vol. 28, issues 1-2, 2006, 108-129.
55. [Gomes i inni, 2004] Gomes H. M., Awruch A. M.: *Comparison of response surface and neural network with other methods for structural reliability analysis*. Structural Safety 26/2004, 49–67.
56. [Górski i inni, 2008] Górski J., Mikulski T.: *Identification and simulation of initial geometrical imperfections of steel cylindrical tanks*. Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 46 /2008, 413–434.
57. [Górski i inni, 2011] Górski J., Mikulski T., Oziębło M., Winkelmann K.: *Effect of geometric imperfections on aluminium silo capacities*. Stahlbau 84 /2015, 52-57.
58. [Górski i inni, 2015] Górski J., Przewłócki J., Sorn P.: *The Point Estimate Method in a space truss reliability analysis*. Archives of Civil Engineering, vol. 61, nr 2 /2015, 99-123.
59. [Górski, 2006] Górski J. *Non-linear models of structures with random geometric and material imperfections. Simulation-based approach*. Wydawnictwo PG, Gdańsk, 2006.
60. [Gratiet i inni, 2016] Gratiet L., Marelli S., Sudret B.: *Metamodel-based sensitivity analysis: polynomial chaos expansions and Gaussian processes*. Handbook of Uncertainty Quantification - Part III: Sensitivity analysis, Chair Of Risk, Safety And Uncertainty Quantification, 2016, 1-41.
61. [Guedes-Soares i inni, 2002] Guedes-Soares C., Garbatov Y.: *Reliability of deteriorated steel structures*. Workshop on Reliability-Based Design and Optimization RBO'02, eds. Jendo S. Kleiber M., Doliński K., 23-25.09.2002, IFTR PASci + AMAS, Warsaw, 2002.



62. [Gumbel, 1958] Gumbel E.: *Statistics of extremes*. Columbia University Press, 1958.
63. [Gwózdź i inni, 2011] Gwózdź M., Machowski A.: *Wybrane badania i obliczenia konstrukcji budowlanych metodami probabilistycznymi*. Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej, Kraków, 2011.
64. [Hamby, 1994] Hamby D.M.: *A review of techniques for parameter sensitivity analysis of environmental models*, Environmental Monitoring and Assessment, vol. 32, no. 2, 1994, 135–154.
65. [Hammersley i inni, 1964] Hammersley J.M., Handscomb D.C.: *Monte Carlo methods*. Methuen & Co. Ltd., 1964.
66. [Hansson i inni, 2006] Hansson M., Ellegaard P.: *System reliability of timber trusses based on non-linear structural modelling*. Materials and Structures 39/2006:593–600.
67. [Hart, 1982] Hart G.C. *Uncertainty analysis of loads and safety in structural engineering*. Prentice Hall, 1982.
68. [Hasofer i inni, 1974] Hasofer A., Lind N.C.: *Exact and invariant second moment code format*. Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 100, 1974, 111-121.
69. [Heiselberg i inni, 2009] Heiselberg P., Brohus H., Hesselholt A., Rasmussen H., Seinre E., Thomas S.: *Application of sensitivity analysis in design of sustainable buildings*. Renewable Energy, 34, 2009, 2030–2036.
70. [Helton i inni, 2003] Helton J.C., Davis F.J.: Latin hypercube sampling and the propagation of uncertainty in analyses of complex systems. Reliability Engineering and System Safety, 81, 2003, 23–69.
71. [Hien, 2003] Hien T.D.: *Numerical analysis of stochastic systems*. Wydawnictwo Uczelniane Politechniki Szczecińskiej, Szczecin, 2003.
72. [Hill i inni, 1966] Hill W.J., Hunter W.G.: *A review of response surface methodology: a literature review*. Technometrics 8, 1966, 571–590.



73. [Homma i inni, 1996] Homma T., Saltelli A.: *Importance measures in global sensitivity analysis of nonlinear models*, Engineering and System Safety 52/1996, 1-17.
74. [Hong, 1998] Hong H. P.: *An efficient point estimate method for probabilistic analysis*, Reliability Engineering and System Safety, 59(3), 1998, 261-267.
75. [Hurtado i inni, 1998] Hurtado J.E., Barbat A.H.: *Monte Carlo techniques in computational stochastic mechanics*. Archives of Computational Methods in Engineering, 1998.
76. [Ikedaa i inni, 2007] Ikedaa K., Ohsaki M.: *Generalized sensitivity and probabilistic analysis of buckling loads of structures*. International Journal of Non-Linear Mechanics 42/2007, 733 – 743.
77. [Jankowski i inni, 1997] Jankowski R., Walukiewicz H.: *Modelling of two-dimensional random fields*. Probabilistic Engineering Mechanics, 12, 1997, 115–121.
78. [Kala, 2005] Kala Z.: *Sensitivity analysis of the stability problems of thin-walled structures*. Journal of Constructional Steel Research 61/2005, 415–422.
79. [Kamiński, 2001] Kamiński M.: *Stochastic reliability in contact problems for composites with spherical particles*. Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2001.
80. [Kamiński, 2013] Kamiński M.: *The stochastic perturbation method for computational mechanics*. Wiley, Chichester, 2013.
81. [Kececioglu, 2003] Kececioglu D. *Robust engineering design-by-reliability with emphasis on mechanical components and structural reliability*. DEStech Publications, Lancaster, 2003.
82. [Kleiber i inni, 1992] Kleiber M., Hien T.D.: *The Stochastic Finite Elements Method: Basic Perturbation Technique and Computer Implementation*. John Wiley and Sons, Chichester, 1992.
83. [Kleiber i inni, 1997] Kleiber M., Antunez H., Hien T.D., Kowalczyk P.: *Parameter sensitivity in nonlinear*



- mechanics*. John Wiley and Sons, Londyn, 1997.
84. [Kleiber i inni, 1999] Kleiber M., Siemaszko A., Stocki R.: *Interactive stability-oriented reliability-based design optimization*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 168, issues 1-4, 1999, 243-253.
85. [Kleiber i inni, 2004] Kleiber M., Knabel J., Rojek J.: *Response surface method for probabilistic assessment of metal forming failure*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 60, issue 1, 2004, 51-67.
86. [Knabe i inni, 1998] Knabe W., Przewłócki J., Różyński G.: *Spatial averages for linear elements for two-parameter random field*. Probabilistic Engineering Mechanics, 13/ 1998, 147–167.
87. [Knabel, 2004] Knabel J.: *Analiza niezawodności konstrukcji sprężysto-plastycznych przy użyciu powierzchni odpowiedzi*. Rozprawa doktorska, Warszawa, 2004.
88. [Koechler, 2007] Koechler J.: *Reliability of timber structures*. ETH, Zurich, 2007
89. [Kolanek, 2007] Kolanek K.: *Analiza i optymalizacja niezawodnościowa konstrukcji za pomocą adaptacyjnych metod symulacyjnych*. Instytut Podstawowych Problemów Techniki Polskiej Akademii Nauk, Warszawa, 2007.
90. [Kong, 2008] Kong Q.: *Sensitivity analysis for nonlinear structures*. Dissertation, The State University of New Jersey, 2008.
91. [Korol, 2012] Korol E.: *Theoretical and experimental study on size effect in concrete beams reinforced with steel or basalt bars*. Rozprawa doktorska, Gdańsk, 2012.
92. [Kotełko i inni, 2017] Kotełko M., Lis P., Macdonald M.: *Load capacity probabilistic sensitivity analysis of thin-walled beams*. Thin-Walled Structures 115/2017, 142–153.



93. [Kotz i inni, 2000] Kotz S., Nadarajah S.: *Extreme value distributions, theory and applications*. Imperial College Press, 2000.
94. [Kowal, 2003] Kowal Z.: *Niezawodność belek o połączeniach odkształcalnych*. Konstrukcje Stalowe, 2003.
95. [Kowal, 2011] Kowal Z.: *The formation of space bar structures supported by the system reliability theory*. Archives of Civil and Mechanical Engineering, Vol. XI, No. 1, Polish AC. of Sc., 2011, 115-133.
96. [Kowalski, 2004] Kowalski D.: *Wpływ imperfekcji wykonawczych na stan naprężeń w płaszczu stalowego zbiornika walcowego o osi pionowej*. Rozprawa doktorska, Gdańsk, 2004.
97. [Labocha i inni, 2014] Labocha S., Skotny Ł.: *Liniowa i nieliniowa analiza MES*. Biblioteka GM System, Wrocław, 2014.
98. [Lagaros i inni, 2007] Lagaros N.D, Plevris V., Papadrakakis M.: *Reliability-based robust design optimization of steel structures*. International Journal of Simulation in Multidisciplinary Design Optimization, vol. 1, 2007.
99. [Lewicki, 1995] Lewicki B.: *Wymagany poziom bezpieczeństwa konstrukcji w ujęciu eurokodów*. Prace Instytutu Techniki Budowlanej - kwartalnik nr 2 (142), 2007.
100. [Losowe obciążenia, 1979] *Losowe obciążenia i nośność konstrukcji*. red. Murzewski J. materiały konferencyjne Jabłonna, 06-11.06.1977. Ossolineum, Wrocław, 1979.
101. [Ma i inni, 2011] Ma J., Wriggers P., Gao W., Chen J. J., Sahraee S.: *Reliability-based optimization of trusses with random parameters under dynamic loads*. Computational Mechanics 47/2011, 627–640.
102. [Madsen i inni, 1985] Madsen H.O., Krenk S., Lind N.: *Methods of structural safety*. Prentice Hall, 1985.
103. [Madsen, 1979] Madsen H.O. *Load models and load combinations*. Technical University of Denmark, Lyngby, 1979.





104. [Mazur-Śniady i, inni, 1986] Mazur-Śniady K., Śniady P.: *Dynamic response of linear structures to random streams of arbitrary impulses in time and space*. Journal of Sound and Vibration, vol. 110, issue 1, 1986, 59-68.
105. [McKay i inni, 1979] McKay M.D., Beckman R.J., Conover W.J.: *A Comparison of Three Methods for Selecting Values of Input Variables in the Analysis of Output from a Computer Code*. Technometrics (American Statistical Association), 21/ 1979, 239–245.
106. [Melchers i inni, 2004] Melchers R., Ahammed M. *A fast approximate method for parameter sensitivity estimation in Monte Carlo structural reliability*. Computers & Structures, vol. 82, 2004.
107. [Melchers, 1999] Melchers R.: *Structural reliability, analysis and prediction*. John Wiley & Sons, Chichester, 1999.
108. [Mendera, 1987] Mendera Z.: *Zastosowanie probabilistyki w nowoczesnych normach konstrukcji i obciążeń*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1987.
109. [Metropolis i inni, 1949] Metropolis N., Ulam S. *The Monte Carlo method*. Journal of the American Statistical Association, 1949.
110. [Montgomery, 1997] Montgomery D.: *Introduction to Statistical Quality Control*, John Wiley & Sons, 1997.
111. [Montgomery, 2012] Montgomery D.: *Design and analysis of experiments*, John Wiley & Sons, 2012.
112. [Morgan i inni, 1990] Morgan M.G., Henrion M.: *Uncertainty: a guide to dealing with uncertainty in quantitative risk and policy analysis*. Cambridge University Press: Cambridge, 1990.
113. [Murzewski, 1970] Murzewski J. *Bezpieczeństwo konstrukcji budowlanych*. Arkady, Warszawa 1970.
114. [Murzewski, 1989] Murzewski J. *Niezawodność konstrukcji inżynierskich*, Arkady, Warszawa, 1989.
115. [Nguyen i inni, 2015] Nguyen A-T., Reiter S.A., *Performance comparison of sensitivity analysis methods for*



- building energy models*. Building Simulation, vol. 8, no. 6/ 2015, 651-664.
116. [Niczyj, 2003] Niczyj J.: *Wielokryterialna optymalizacja niezawodnościowa oraz szacowanie stanu technicznego konstrukcji prętowych z zastosowaniem teorii zbiorów rozmytych*. Wydawnictwo Uczelniane Politechniki Szczecińskiej, 2003.
117. [Nowak i inni, 1991] Nowak A.S., Hong Y.K.: *Bridge live load models*. Journal of Structural Engineering, 1991.
118. [Nowak i inni, 2000] Nowak A.S., Collins K.: *Reliability of structures*. McGraw Hill, 2000.
119. [Nowak i inni, 2002] Nowak A.S., Szerszen M.M. *Reliability-based calibration of the design code for concrete structures*. Workshop on Reliability-Based Design and Optimization RBO'02, eds. Jendo S. Kleiber M., Doliński K., 23-25.09.2002, IFTR PAsci + AMAS, Warsaw, 2002.
120. [Orlik, 1976] Orlik G.: *Deformation of shapes of cylindrical steel shells, statistical analysis and numerical simulations*. Politechnika Gdańska, Gdańsk, 1976.
121. [Papadopoulos i inni, 2013] Papadopoulos V., Soimiris G., Papadrakakis M.: *Buckling analysis of I-section portal frames with stochastic imperfections*. Engineering Structures 47 /2013, 54–66
122. [Pieniak i inni, 2011] Pieniak D., Ogrodnik P., Oszust M., Dec L. *Niezawodność w wysokich temperaturach klejonego warstwowo drewna sosny pospolitej w zakresie wytrzymałości na zginanie statyczne*. Bezpieczeństwo i Technika Pożarnicza, nr 3, 2011, 63-68.
123. [Podstawy projektowania, 1998] *Podstawy probabilistyczne projektowania konstrukcji w ujęciu macierzowym*. Red. Murzewski J. Materiały konferencyjne Janowice 09-13.06.1997. Dolnośląskie Wydawnictwo Edukacyjne, Wrocław, 1998.
124. [Problemy losowe, 1980] *Problemy losowe w mechanice konstrukcji*. Red. Bielewicz E., materiały konferencyjne, Gdańsk, 14-15.11.1980, Politechnika Gdańska, 1980.



125. [Problemy losowe, 1985] *Problemy losowe w mechanice konstrukcji*. Red. Bielewicz E., materiały konferencyjne, Gdańsk, 15-16.11.1985, Politechnika Gdańska, 1985.
126. [Projektowanie konstrukcji, 1988] *Projektowanie konstrukcji na podstawie teorii niezawodności*. Red. Murzewski J., materiały konferencyjne, Jabłonna 08-12.06.1987. Ossolineum, Wrocław, 1988.
127. [Przewłócki i inni, 2001] Przewłócki J., Górski J.: *Strip foundation on 2-D and 3-D random subsoil*. Probabilistic Engineering Mechanics, 16/ 2001, 121–136.
128. [Przewłócki i inni, 2016] Przewłócki J., Górski J., Świdziński W.: *Simplified probabilistic analysis of settlement of cyclically loaded soil stratum using point estimate method*. Archives of Hydro-Engineering and Environmental Mechanics. - vol. 63., nr. 3-4 /2016, 121-133.
129. [Putresza i inni, 1995] Putresza, J., Jendo, S., *Review of probabilistic methods for calculation of structural reliability*. Archives of Civil Engineering, vol. 41, issue 2, 1995, 153-175.
130. [Rackwitz i inni, 1978] Rackwitz R., Fiessler B.: *Structural reliability under combined random load sequences*. Computers and Structures, vol. 9, issue 5, 1978, 484-494.
131. [Rackwitz, 2002] Rackwitz R.: *Risk acceptability and optimization*. Workshop on Reliability-Based Design and Optimization RBO'02, eds. Jendo S. Kleiber M., Doliński K., 23-25.09.2002, IFTR PASci + AMAS, Warsaw, 2002.
132. [Rackwitz, 2003] Rackwitz R.: *Objective functions for reliability-oriented structural optimization*. Workshop on Reliability-Based Design and Optimization RBO'03, eds. Jendo S., Doliński K., 15-18.09.2003, IFTR PASci + AMAS, Warsaw, 2003.
133. [Radoń, 2011] Radoń U.: *Reliability analysis of Misses truss*. Archives of Civil and Mechanical Engineering, vol. 11, issue 3, 2011, 723-738.
134. [Radoń, 2015] Radoń U.: *Numerical aspects of application of FORM in node snapping truss structures*.



- Archives of Civil and Mechanical Engineering, vol. 15, issue 1, 2015, 262-271.
135. [Raizer, 2004] Raizer V.: *Theory of reliability in structural design*. Applied Mechanics Reviews, vol 57, no 1, 2004
136. [Rakowski i inni, 1993] Rakowski G., Kacprzyk Z.: *Metoda elementów skończonych w mechanice konstrukcji*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa, 1993.
137. [Reliability of offshore, 1992] *Reliability of offshore operations: proceedings on an international workshop*, ed. Simiu E. NIST special publication 833, 1992.
138. [Rozmarynowski i inni, 2018] Rozmarynowski B., Mikulski T.: *Selected problems of sensitivity and reliability of a jack-up platform*. Polish Maritime Research 1 (97), 2018, vol. 25; 77-84.
139. [Rubinstein, 1981] Rubinstein, R.Y.: *Simulation and the Monte Carlo Method*. John Wiley & Sons, 1981.
140. [Rzeszut i inni, 2018] Rzeszut K., Folta W., Garstecki A.: *Reliability of engineering methods of assessment the critical buckling load of steel beams*. AIP Conference Proceedings, 2018.
141. [Saltelli i inni, 2000] Saltelli A., Chan K., Scott E.M.: *Sensitivity Analysis*, London, J. Wiley, 2000.
142. [Saltelli i inni, 2004] Saltelli A., Tarantola S., Campolongo F., Ratto M.: *Sensitivity analysis in Practice: A guide to assessing scientific models*, John Wiley & Sons, 2004.
143. [Saltelli i inni, 2008] Saltelli A., Ratto M., Andres T., Campolongo F., Cariboni J., Gatelli D., Saisana M., Tarantola S.: *Global Sensitivity Analysis. The Primer*. John Wiley & Sons, 2008.
144. [Saltelli, 2002] Saltelli A.: *Sensitivity Analysis for Importance Assessment*. Risk Analysis, 22 (3), 2002, 1-12.
145. [Schueller i inni, 2006] Schueller G., Pradlwarter H.: *Computational stochastic structural analysis (COSSAN) – a software tool*. Structural safety, vol. 28, issues 1-2, 2006, 68-82.



146. [Shields i inni, 2015 a] Shields M.D., Sundar V. S.: *Targeted random sampling: A New approach for efficient Reliability estimation for complex systems*. International Journal of Reliability and Safety, vol. 9, nos. 2/3, 2015.
147. [Shields i inni, 2015 b] Shields M.D., Teferra K., Hapij A., Daddazio R.P.: *Refined Stratified Sampling for efficient Monte Carlo based uncertainty quantification*. Reliability Engineering and System Safety 142/ 2015, 310–325.
148. [Shields, 2014] Shields M.D.: *Targeted Random Sampling for reliability assessment: a demonstration of concept*. The 6th International Workshop on Reliable Engineering Computing, At Illinois Institute of Technology, Chicago, 2014.
149. [Sieniawska i inni, 1990] Sieniawska R., Śniady P.: *First passage problem of the beam under a random stream of moving forces*. Journal of Sound and Vibration, vol. 136, issue 2, 1990, 177-185.
150. [Sieniawska i inni, 2000] Sieniawska, R., Wysocka, A., Żukowski, S.: *Reliability and sensitivity analysis of trusses*. ZAMM Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, vol. 80, issue 4 SUPPL. 2, 2000, 457-458.
151. [Silicki i inni, 2010] Silicki A., Silicka E.: *Metoda optymalnego wzmacniania przestrzennych konstrukcji kratowych z wykorzystaniem analizy wrażliwości systemowego wskaźnika niezawodności*. PAK, vol. 56, nr 6/2010, 613-516.
152. [Simiu i inni, 1996] Simiu E., Scanlan R.H.: *Wind effects on structures: fundamentals and applications to design*. John Wiley & Sons, 1996.
153. [Skalmierski i inni, 1982] Skalmierski B., Tylikowski A.: *Stochastic processes in dynamics*. Warszawa: PWN, The Hague, Boston, London: Martinus Nijhoff Publishers, 1982.
154. [Skowronek, 1987] Skowronek M.: *Buckling load analysis for imperfect cylindrical shells*. Delft University of Technology, report LR-453, 1987.



155. [Skowronek, 2006] Skowronek M.: *Metoda symulacyjna w modelowaniu niezawodności przestrzennych układów prętowych*. Rozprawa doktorska, Gdańsk, 2006.
156. [Sobczyk i inni, 1996] Sobczyk K.: Spencer B.: *Stochastyczne modele zmęczenia materiałów*. Warszawa: WNT, 1996.
157. [Sobczyk, 1973] Sobczyk K. *Metody dynamiki statystycznej*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1973.
158. [Sobczyk, 1991] Sobczyk K.: *Stochastyczne równania różniczkowe*. Warszawa: WNT, 1991.
159. [Sobczyk, 2010] Sobczyk K.: *Polskie i światowe osiągnięcia nauki: Nauki Techniczne*. Fundacja im. Wojciecha Świątosławskiego 2/ 2010, 429-462.
160. [Sobieski i inni, 1997] Sobieski J.S, Haftka R.T.: *Multidisciplinary aerospace design optimization: survey of recent developments*. Structural Optimization, vol. 14, 1997, 1-23.
161. [Sobol, 1990] Sobol I. M.: *Sensitivity Estimates for Nonlinear Mathematical Models*. Mathematical Modelling & Computational Experiment, 1/1990, 407-414.
162. [Song i inni, 2009] Song S., Lu Z., Qiao H.: *Subset simulation for structural reliability sensitivity analysis*. Reliability Engineering and System Safety 94/2009, 658–665.
163. [Sorn i inni 2015] Sorn P., Górski J., Przewłócki J.: *Probabilistic analysis of a space truss by means of a multidimensional variable description*. Archives of Civil Engineering. Vol. LXI., 2/ 2015, 99-123.
164. [Sorn i inni, 2016] Sorn P., Górski J., Winkelmann K., Przewłócki J.: *Discrete random variables in reliability calculations of a reticulated shell.*, 3rd Polish Congress of Mechanics (PCM). 21st International Conference on Computer Methods in Mechanics (CMM), CRC Press/Balkema, 2016, 537 – 541.
165. [Sprung, 2007] Sprung I.: *Sensitivity of probabilistic fracture mechanics analysis to variations in statistical*



- parameters*. Theoretical and Applied Fracture Mechanics 48, 2007, 231–237.
166. [Stefanou, 2009] Stefanou G.: *The stochastic finite element method: Past, present and future*. Computer Method in Applied Mechanics and Engineering 198 /2009, 1031–1051
167. [Stocki i inni, 2001] Stocki R., Kolanek K., Jendo M., Kleiber M.: *Study on discrete optimisation techniques in reliability-based optimisation of truss structures*. Computers and structures, vol. 79, issues 22-25, 2001, 2235-2247.
168. [Stocki, 1999] Stocki R.: *Niezawodnościowa optymalizacja konstrukcji prętowych w zakresie dużych przemieszczeń- teoria i program komputerowy*. Rozprawa doktorska, Warszawa, 1999.
169. [Stocki, 2010] Stocki R.: *Analiza niezawodności i optymalizacja odpornościowa złożonych konstrukcji i procesów technologicznych*. Instytut Podstawowych Problemów Techniki Polskiej Akademii Nauk, Warszawa, 2010.
170. [Sudret, 2008] Sudret B.: *Global sensitivity analysis using polynomial chaos expansions*. Reliability Engineering and System Safety 93/2008, 964–979
171. [Sudret i inni, 2002] Sudret B., Der Kiureghian A.: *Comparison of finite element reliability methods*. Probabilistic Engineering Mechanics 17/2002, 337–348.
172. [Szafran i inni, 2016] Szafran J., Rykaluk K.: *A full-scale experiment of a lattice telecommunication tower under breaking load*. Journal of Constructional Steel Research, vol. 120/ 2016, 160-175.
173. [Szydłowski i inni, 2018] Szydłowski C., Górski J., Stienss M., Smakosz Ł.: *Numerical simulation of asphalt mixtures fracture using continuum models*. 22nd International Conference on Computer Methods in Mechanics, 13–16 September 2017, Lublin, Poland, vol. no.: 1922, 2018.
174. [Śniady i inni, 1998] Śniady P., Sieniawska R., Żukowski S.: *Influence of some load and structural parameters on the vibrations of a bridge beam*.



- Archives of Civil Engineering, vol. 44, no. 1, 1998, 19-39.
175. [Śniady, 2000] Śniady P.: *Podstawy stochastycznej dynamiki konstrukcji*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, 2000.
176. [Tejchman i inni, 2009 (a)] Tejchman J., Górski J.: *Finite Element study of patterns of shear zones in granular bodies during plane strain compression*. Acta Geotechnica, 5/ 2009, 95–112
177. [Tejchman i inni, 2009 (b)] Tejchman J., Bobiński J., Górski J.: *Notched concrete beams under bending – calculations of size effects within stochastic elasto-plasticity with nonlocal softening*. Archives of Mechanics, 61/ 2009, 1–25.
178. [Tejchman i inni, 2011] Tejchman J., Górski J.: *Modeling of bearing capacity of footings on sand within stochastic micro-polar hypoplasticity*. International Journal of Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 35/ 2011, 226–243.
179. [Thoft-Christensen i inni, 1982] Thoft-Christensen P., Baker J.: *Structural reliability theory and its applications*. Springer, 1982.
- 180 [Thoft-Christensen i inni, 1986] Thoft-Christensen P., Murotsu Y.: *Application of structural systems reliability theory*. Springer, 1986.
181. [Tvedt, 2006] Tvedt L.: *Proban- probabilistic analysis*. Structural Safety, Vol. 28, Issue 1-2, 2006, 150-163.
182. [Tylikowski, 1991] Tylikowski A.: *Stochastyczna stateczność układów ciągłych*. Warszawa, PWN, 1991.
183. [Ulam, 1961] Ulam S.M.: *On Some Statistical Properties of Dynamical Systems*. Proceedings of the 4th Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, 3/ 1961, 315.
184. [Valdebenito i inni, 2012] Valdebenito M.A., Jensen H.A., Schuëller G.I., Caro F.E.: *Reliability sensitivity estimation of linear systems under stochastic excitation*. Computers and Structures 92–93, 2012, 257–268.





185. [Vanmarcke, 1983] Vanmarcke E. *Random fields: analysis and synthesis*. The MIT Press, 1983.
186. [Walukiewicz i inni, 1995] Walukiewicz H., Bielewicz E., Górski J.: *Statistical analysis of simulated random fields*. Proceedings of the ICASP7 Conference: Applications of Statistics and Probability, vol. 2, Balkema, Rotterdam, 1995, 126–127.
187. [Walukiewicz i inni, 1997] Walukiewicz, H., Bielewicz, E., Górski, J.: *Simulation of nonhomogeneous random fields for structural applications*. Computers and Structures, 64/ 1997, 491–498.
188. [Wang i inni, 2010] Wang Y., Cao Z., Au S.-K.: *Efficient Monte Carlo Simulation of parameter sensitivity in probabilistic slope stability analysis*. Computers and Geotechnics 37/2010, 1015–1022.
189. [Wei i inni, 2012] Wei P., Lu Z., Hao W., Feng J., Wang B.: *Efficient sampling methods for global reliability sensitivity analysis*. Computer Physics Communications 183/ 2012, 1728–1743.
190. [Weibull, 1951] Weibull W.: *A statistical distribution function of wide applicability*. Journal of Applied Mechanics, 1951.
191. [Wen i inni, 1981] Wen Y.K., Pearce H.T. *Stochastic models for dependent load processes*. A Report to the National Science Foundation.. University of Illinois, 1981.
192. [Wieczorkowski i inni, 1997] Wieczorkowski R., Zieliński R.: *Generatory liczb losowych*. Wydawnictwa Naukowo – Techniczne, Warszawa, 1997.
193. [Wilde, 1981] Wilde P.: *Dyskretyzacja pól losowych w obliczeniach inżynierskich*. Warszawa, Poznań: PWN 1981.
194. [Winkelmann i inni, 2014] Winkelmann K., Górski J.: *The use of Response Surface Methodology for reliability estimation of composite engineering structures*. Journal of Theoretical and Applied Mechanics, vol. 52, nr 4, 2014, 1019-1032.
195. [Winkelmann, 2013] Winkelmann K.: *Obliczanie niezawodności konstrukcji inżynierskich metodami symulacyjnymi oraz Metodą Powierzchni*



- Odpowiedzi*. Rozprawa doktorska, Gdańsk, 2013.
196. [Winterstetter i inni,2002] Winterstetter Th. A., Shmidt H.: *Stability of circular cylindrical steel shells under combined loading*. Thin walled structures 40, 893-909, 2002.
197. [Woliński i inni, 2001] Woliński Sz., Wróbel K.: *Niezawodność konstrukcji budowlanych*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Rzeszowskiej, 2001.
198. [Woods i inni, 2015] Woods D. C., Lewis S. M.: *Design of Experiments for Screening*. Handbook of Uncertainty Quantification, Springer, 2016, 1-43.
199. [Zeinoddini i inni, 2012] Zeinoddini V.M., Schafer B.W.: *Simulation of geometric imperfections in cold-formed steel members using spectral representation approach*. Thin-Walled Structures 60/2012, 105–117
200. [Zieliński, 1970] Zieliński R. *Metody Monte Carlo*. Wydawnictwa Naukowo - Techniczne, Warszawa, 1970.
201. [Żurański, 1978] Żurański J.A.: *Obciążenia wiatrem budowli konstrukcji*. Arkady, Warszawa, 1978.
202. [PN- EN 1993-1-6:2009] Eurokod 3. Projektowanie konstrukcji stalowych. Część 1-6: Wytrzymałość i stateczność konstrukcji powłokowych
203. [PN-ISO 2394, 2000] Ogólne zasady niezawodności konstrukcji budowlanych. Polski Komitet Normalizacyjny, 2000.
204. [PN-81/B-03020 – 7] Grunty budowlane. Posadowienie bezpośrednie budowli. Obliczenia statyczne i projektowanie.

