Marek Blok
Politechnika Gdańska
Wydział Elektroniki, Telekomunikacji i Informatyki
Katedra Sieci Teleinformacyjnych
ul. Narutowicza 11/12
80-233 Gdańsk
Marek.Blok@eti.pg.edu.pl

KTIT 2019
Wrocław, 26-28 czerwca 2019

DOI: 10.15199/59.2019.7.25

PROJEKTOWANIE FILTRU DFT-VFD METODĄ HOOKE-JEEVESA

DFT-VFD FILTER DESIGN WITH HOOKE-JEEVES METHOD

Streszczenie: **Zaletą filtrów ułamkowoopóźniających typu DFT-VFD określanych przez współczynniki ich dyskretnej charakterystyki częstotliwościowej z pasma przejściowego jest ich powiązanie z metodą okien przesuwanych. Czyni je to szczególnie przydatnymi w zastosowaniach do zmiany szybkości próbkowania. Problem stanowi jednak projektowanie tych filtrów. Dotychczas dostępna metoda POCS co prawda gwarantuje zbieżność, ale jest ona bardzo powolna. Tej wady pozbawiona jest zaproponowana w pracy nowa metoda bazująca na podejściu Hooke-Jeevesa.**

Abstract: **The advantage of DFT-VFD fractional delay filters, that are determined by the coefficients of their discrete frequency response in the off-care band, is they relation to the offset window method. This makes them particularly useful in applications to the sampling rate conversion. Nevertheless, there is a problem with such filters design. The available POCS method guarantees convergence but it is very slow. The proposed in this work method based on the Hooke-Jeeves approach is devoid of this disadvantage.**

Słowa kluczowe: **filtr ułamkowoopóźniający, filtr DFT-VFD, projektowanie iteracyjne, dyskretna charakterystyka częstotliwościowa.**

Keywords: **fractional delay filter, DFT-VFD filter, iterative design, discrete frequency response.**

1. WSTĘP

Reprezentacja sygnałów za pomocą ciągu próbek i stosowanie cyfrowych algorytmów ich przetwarzania znacznie ułatwia realizowanie różnego rodzaju ich przetwarzania zapewniając jednocześnie jego powtarzalność. Z drugiej strony dyskretyzacja chwil, w których znane są wartości sygnału rodzi problem w realizacji opóźniania tak reprezentowanego sygnału o ułamkową część odstępu próbkowania. Takie opóźnianie wymaga bowiem określenia wartości sygnału w chwilach pomiędzy chwilami, w których był on próbkowany. Rozwiązaniem tego problemu jest użycie filtru ułamkowoopóźniającego [6], często o zmiennym opóźnieniu (VFD – *variable fractional delay*).

W pracy przedstawiono wyniki badania iteracyjnych metod projektowania filtrów ułamkowoopóźniających o zmiennym opóźnieniu (VFD – *variable fractional delay*) realizowanych w oparciu o zaledwie kilka ich współczynników definiujących przebieg ich charakterystyki w paśmie przejściowym ([1],[3]). Ponieważ ich realizacja wywodzi się z ich dyskretnej zespolonej charakterystyki częstotliwościowej nazywano je w tej pracy filtrami DFT-VFD. Główną zaletą tych filtrów, poza niewielką liczbą współczynników definiujących te filtry, jest to, że można je opisać wzorami powiązanymi z metodą okien przesuwanych ([1],[3]). Oznacza, to że szczególnie nadają się one do realizacji algorytmów zmiany szybkości próbkowania. Filtry zbiorcze algorytmów przepróbkowania wykorzystujących te filtry nie posiadają bowiem silnych listków w paśmie zaporowym, charakterystycznych dla filtrów zbiorczych pozyskiwanych z filtrów optymalnych. Dodatkowo filtry te pozwalają na łatwe przestrajanie szerokości pasma zbiorczego filtru interpolacyjnego [2].

Obecnie nie istnieją metody projektowania tego typu filtrów w postaci jawnych wzorów, stąd w niniejszej pracy omawiane są iteracyjne metody projektowania takich filtrów. W pracy jako punkt odniesienia przedstawiono metodę POCS (*projection onto convex subsets*) [1] gwarantującą zbieżność do rozwiązania optymalnego ale niestety bardzo wolną. Ograniczenie to było motywacją do poszukiwania wydajniejszych rozwiązań, w efekcie czego opracowano przedstawioną w pracy metodę bazującą na niegradientowym podejściu Hooke-Jeevesa [5].

2. FILTR DFT-VFD

Filtr ułamowoopóźniający cechuje następująca idealna charakterystyka częstotliwościowa [6]

$$H_{id}(f) = \exp(-j2\pi f \tau_d) \tag{1}$$

gdzie $\tau_d = D + d$ jest opóźnieniem całkowitym wyrażonym w odstępach próbkowania [Sa] składającym się z części całkowitej $D \in \mathbb{Z}$ i ułamkowej $d \in [-0{,}5; 0{,}5)$. Taki idealny filtr ułamkowoopóźniający nie jest realizowalny ponieważ jego odpowiedź impulsowa

$$h_{id}[n] = \mathrm{sinc}(n - \tau_d) \tag{2}$$

jest nieskończona i nieprzyczynowa.

Dlatego w praktyce stosuje się filtry o skończonej liczbie współczynników, których charakterystyka częstotliwościowa aproksymuje charakterystykę idealną (1). W tej pracy zajmujemy się filtrami FD typu FIR definiowanymi poprzez współczynniki pozwalające na określenie ich dyskretnej charakterystyki częstotliwościowej ([1],[2],[3]), która dla parzystej długości odpowiedzi impulsowej N ma postać

$$H[k] = \begin{cases} W_d^{N-2k}(c_d - js_d), & 0 \le k \le \frac{N}{2} - p \\ W_d^{N-2k}\left(c_d - j\alpha_{\frac{N}{2}-k} s_d\right), & \frac{N}{2} - p < k \le \frac{N}{2} \\ H^*[N-k], & \frac{N}{2} < k < N \end{cases} \quad (3)$$

gdzie $W_d = \exp(j\frac{\pi}{N}\tau_d)$ oraz $c_d = \cos(\pi\tau_d)$ i $s_d = \sin(\pi\tau_d)$. Charakterystyka ta jest określona wyłącznie przez p współczynników α_i ($i = 0,1,\dots,p-1$), określający zbiór filtrów różniących się opóźnieniem τ_d, a wysoką dokładność aproksymacji można uzyskać już dla zaledwie trzech współczynników ($p = 3$) [1].

Filtr o charakterystyce (3) można zaimplementować bezpośrednio w dziedzinie DFT, w oparciu o strukturę z próbkowaniem w dziedzinie częstotliwości lub bezpośrednio w dziedzinie czasu korzystając z jego odpowiedzi impulsowej uzyskanej metodą okien przesuwanych

$$h_d[n] = \hat{w}(n-d)h_{id}[n] \quad (4)$$

gdzie okno przesuwane

$$\hat{w}(n-d) = \frac{w(n-d)}{\mathrm{sinc}((n-\tau_d)/N)} \quad (5)$$

bazuje na oknie kosinusowym

$$w_e(n) = \sum_{i=0}^{p} \beta_i \cos\left(\frac{(2i-1)\pi}{N}(n-D)\right) \quad (6)$$

albo

$$w_o(n) = \beta_0 + \sum_{i=1}^{p} \beta_i \cos\left(\frac{2i\pi}{N}(n-D)\right) \quad (7)$$

o współczynnikach β_i powiązanych ze współczynnikami α_i następująco

$$\beta_0 = \alpha_1,\ \ \beta_i = \alpha_{i+1} - \alpha_i,\ \ i = 1,2,\dots,p-1 \quad (8)$$

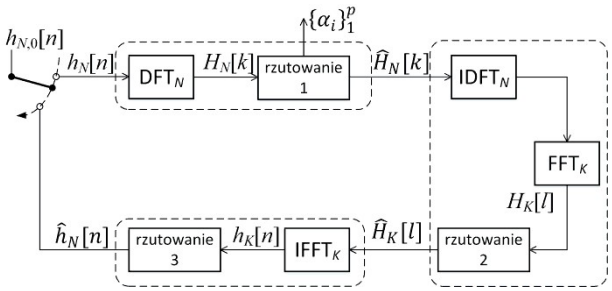
3. PROJEKTOWANIE FILTRU DFT-VFD

Podstawowym ograniczeniem w efektywnym wykorzystaniu filtru DFT-VFD jest trudność w doborze współczynników zapewniających najlepszą dostępną jakość aproksymacji. Ponieważ projektowanie takiego filtru można oddzielić od jego implementacji i użycia, poszukiwanie optymalnych współczynników może być procesem iteracyjnym realizowanym zawczasu. Tego typu rozwiązania są co prawda często powolne, ale poprawnie sformułowane gwarantują stopniowe zbliżanie się do rozwiązania optymalnego. W przypadku filtrów DFT-VFD dotychczas jedynie metoda POCS [1] gwarantuje zbieżność do optymalnych współczynników α.

3.1. Metoda POCS

Metoda POCS do projektowania filtrów DFT-VFD jest rozwinięciem naprzemiennego rzutowania w dziedzinie czasu i w dziedzinie częstotliwości, pozwalającego na projektowanie filtrów FD optymalnych w sensie pasmowego kryterium LS [4]. Rozwiązanie to można uzupełnić o dodatkowe rzutowanie w dziedzinie częstotliwości dyskretnych [1] ograniczające zbiór rozwiązań do filtrów FD o dyskretnej charakterystyce częstotliwościowej (3) identyfikowanej przez współczynniki α.

W rezultacie algorytm projektowania składa się z iteracyjnie powtarzanych trzech operacji rzutowania (rys. 1) działających na N-puntkowej odpowiedzi impulsowej oraz N i K-punktowej ($K \gg N$) dyskretnej charakterystyce częstotliwościowej projektowanego filtru.



Rys. 1. Schemat blokowy algorytmu projektowania filtrów DFT-VFD metodą POCS

Pierwsza operacja rzutowania jest interwencją w N-punktowej dziedzinie częstotliwości (dziedzinie częstotliwości dyskretnej – DFT), która rzutuje N-punktową zespoloną charakterystykę częstotliwościową filtru o N-punktowej odpowiedzi impulsowej $h_N[n]$

$$H_N[k] = \mathrm{DFT}_N(h_N[n]) \text{ dla } k = 0,1,\dots,N-1 \quad (9)$$

na zbiór charakterystyk, które opisuje zależność (3). Uzyskujemy to zerując błąd aproksymacji charakterystyki (3) podzielonej przez ciąg W_d^{N-2k} z pominięciem składowej urojonej tak zmodyfikowanej charakterystyki dla $\frac{N}{2} - p < k \le \frac{N}{2}$

$$Im\{\hat{H}_N[k]/W_d^{N-2k}\} = Im\{H_N[k]/W_d^{N-2k}\} \quad (10)$$

W tych punktach charakterystyka ta jest bowiem powiązana ze współczynnikami α_i

$$\alpha_{\frac{N}{2}-k} = -\frac{Im\{H_N[k]/W_d^{N-2}\}}{s_d},\ \ \frac{N}{2} - p < k \le \frac{N}{2} \quad (11)$$

Otrzymane w ten sposób współczynniki α_i reprezentują już nową odpowiedź impulsową, której błąd aproksymacji w zadanym paśmie aproksymacji może nie spełniać naszych wymagań. Stąd w drugim rzutowaniu zerujemy błąd w paśmie aproksymacji korzystając z K-punktowej dyskretnej charakterystyki częstotliwościowej tego nowego filtru.

$$H_K[l] = \mathrm{FFT}_K\left(\mathrm{IDFT}_N(\hat{H}_N[k])\right) \quad (12)$$

Taka interwencja w dziedzinie częstotliwości skutkuje wyciekiem energii odpowiedzi impulsowej filtru poza jej N pierwszych próbek. Konieczne jest zatem trzecie rzutowanie, na zbiór filtrów o N-próbkowej odpowiedzi impulsowej poprzez zerowanie nadmiarowych próbek

$$\hat{h}_N[n] = \begin{cases} h_K[n], & n = 0,1,\dots,N-1 \\ 0, & \text{dla pozostałych } n \end{cases} \quad (13)$$

gdzie $h_K[n] = \mathrm{IDFT}_N(\hat{H}_K[l])$.

3.2. Projektowanie metodą POCS

W metodzie POCS kryterium optymalizacji nie jest sformułowane w sposób jawny, tylko jest efektem doboru operacji rzutowania. W rozpatrywanym tutaj przypadku, przy pominięciu pierwszego rzutowania, algo-

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

rytm zmierza do rozwiązania optymalnego w sensie pasmowego kryterium LS znajdującego się w przestrzeni możliwych rozwiązań minimalizujących błąd LS [6] w zakładanym paśmie aproksymacji $(0, f_a)$

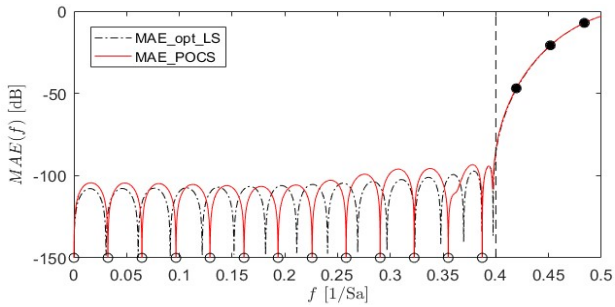
$$LSE(f_a) = \int_{-f_a}^{f_a} MAE(f)^2 \mathrm{d}f \tag{14}$$

gdzie

$$MAE(f) = |H_N(f) - H_{id}(f)| \tag{15}$$

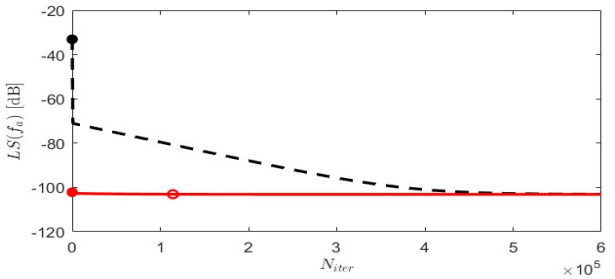
jest modułem zespolonego błędu aproksymacji.

Dodatkowe ograniczenie zakładające, że poszukiwane rozwiązanie można zapisać w postaci (3) skutkuje rozbieżnością pomiędzy otrzymywanym rozwiązaniem a rozwiązaniem optymalnym minimalizującym wyłącznie błąd (14). Na rys. 2 widać jak współczynniki α definiują przebieg charakterystyki w paśmie niespecyfikowanym (powyżej f_a). Jednocześnie w paśmie aproksymacji $(0, f_a)$ w punktach próbkowania N-punktowej DFT wymuszany jest zerowy błąd aproksymacji, podczas gdy dla pasmowego filtru LS minima błędu aproksymacji w paśmie aproksymacji są rozłożone nierównomiernie.



Rys. 2. Moduł zespolonego błędu aproksymacji filtru FD optymalnego w sensie pasmowego kryterium LS dla N = 31, f_a = 0.4, ε = 0.25 oraz odpowiadającego mu filtru DFT-VFD zaprojektowanego metodą POCS dla p = 3

Dużą niedogodnością metody POCS jest jej bardzo wolna zbieżność (rys. 3) dla bardzo małych błędów aproksymacji rozwiązania końcowego [1]. Wynika to z tego, że modyfikacja dużych wartości charakterystyki w paśmie niespecyfikowanym, powiązanych ze współczynnikami α, jest realizowana pośrednio poprzez modyfikację bardzo małych wartości charakterystyki w paśmie aproksymacji.

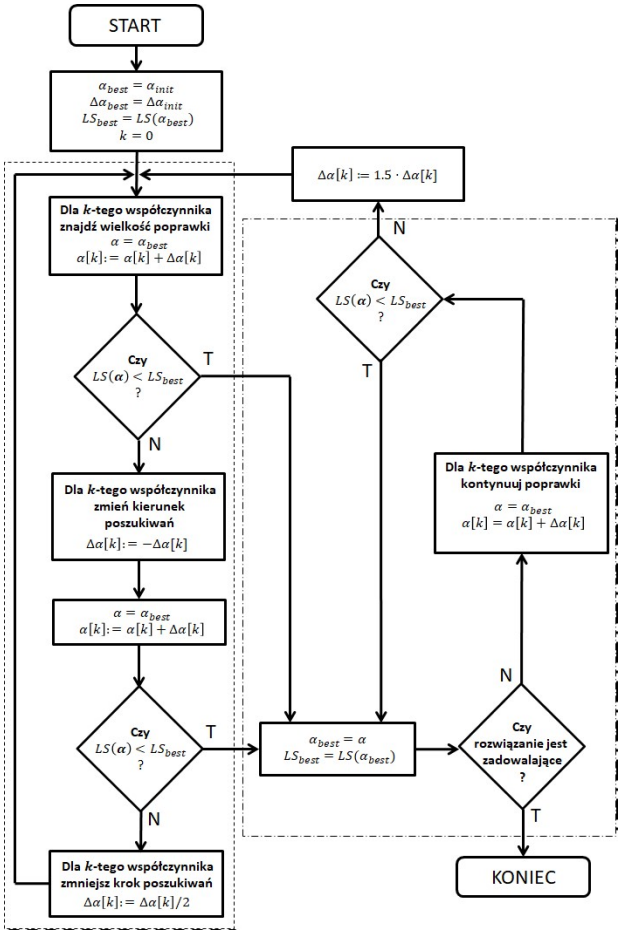


Rys. 3. Błąd LS w funkcji numeru iteracji metody POCS dla filtru z rys. 2 dla wektora początkowego α_i= 1 (linia przerywana) oraz α_i wyznaczonych na podstawie filtru optymalnego dla pasmowego kryterium LS (linia ciągła)

Szybsze osiągnięcie rozwiązania można uzyskać zauważając (rys. 2), że przebieg charakterystyki błędu w paśmie niespecyfikowanym poszukiwanego rozwiązania jest bardzo zbliżony do przebiegu charakterystyki pasmowego filtru LS [1]. Dla przykładu z rys. 3 przyjmując jako początkowe rozwiązanie wektor $\boldsymbol{\alpha}$ złożony z samych jedynek, co odpowiada rozwiązaniu o błędzie LS na poziomie -33 dB, podczas gdy w drugim przypadku błąd ten wynosi -102.1714 dB. Żeby osiągnąć zbliżone rozwiązanie w pierwszym przypadku potrzeba około 450 000 iteracji, a po 600 000 iteracjach błąd ten zmniejsza się do -103.0789 dB. W drugim przypadku błąd na tym poziomie osiągany jest po 114 000 iteracjach, co nadal znaczącą liczbą. Dodatkowym negatywnym efektem bardzo powolnej zbieżności metody POCS jest spora trudność z określeniem kryterium zatrzymania projektowania.

3.3. Metoda Hooke-Jeevesa

Zastosowanie metody gradientowej do poszukiwania współczynników filtru DFT-VFD wymaga określenia pochodnej błędu względem współczynników α, co jest problematyczne w przypadku filtrów DFT-VFD. Alternatywą jest zastosowanie niegradientowego iteracyjnego algorytmu Hooke-Jeevesa [5] (rys. 4), który w pierwszym etapie (próbnym) każdego cyklu, wyróżnionym po lewej stronie rys. 4, poszukuje wielkości i kierunku kroku. Następnie wartości te wykorzystuje się w etapie roboczym (po prawej stronie rys. 4) zmierzając w kierunku poszukiwanego rozwiązania, tak długo jak długo jakość rozwiązania ulega poprawie. Jeżeli na etapie roboczym nie można dalej poprawiać rozwiązania, powraca się do etapu próbnego.



Rys. 4. Algorytmu poszukiwania współczynników filtru DFT-VFD metodą Hooke-Jeevesa

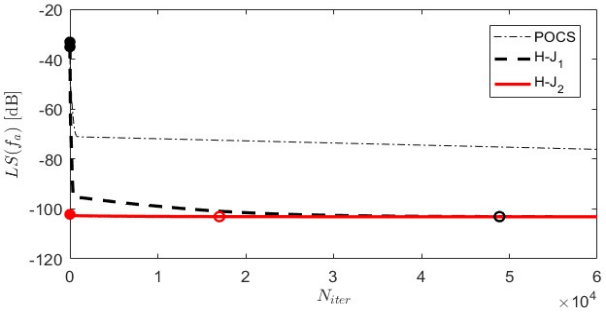
MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl

W zaproponowanym tutaj rozwiązaniu w kolejnych iteracjach zamiast poszukiwania wielowymiarowego kroku (p elementowego wektora), optymalizowane są poszczególne elementy wektora $\boldsymbol{\alpha}$. W efekcie wielkość kroku jest niezależnie kontrolowana dla każdego z elementów tego wektora. Po korekcie pozostałych współczynników wektora α gradient błędu względem bieżącego elementu często ulega zwiększeniu, stąd klasyczne podejście zmodyfikowano o dodatkowe półtorakrotne (wartość ustalona empirycznie) zwiększanie wartości kroku przed ponownym rozpoczęciem etapu próbnego.

Istotną różnicą pomiędzy podejściem POCS a zaproponowanym w tym punkcie algorytmem jest to, że pierwsze rozwiązanie zależy wyłącznie od zdefiniowanych w nim operacji rzutowania i funkcjonuje niezależnie od bieżącego pomiaru błędu, który można weryfikować tylko od czasu do czasu. Z kolei nowe rozwiązanie, bazujące na podejściu Hooke-Jeevesa, jest sterowane zależnie od bieżącego pomiaru błędu, co skutkuje przyśpieszeniem zbieżności, ale też uzależnia skuteczność działania algorytmu od jakości tego pomiaru.

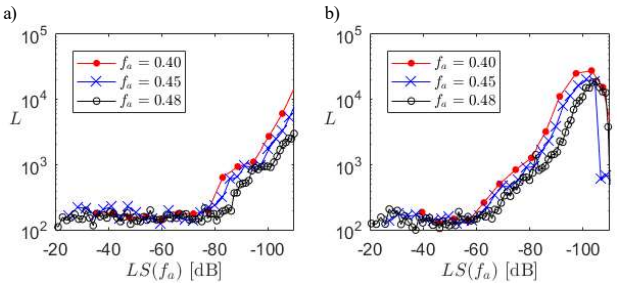
3.4. Projektowanie metodą Hooke-Jeevesa

Jeżeli porównamy szybkość zbieżności dla metody Hooke-Jeevesa (rys. 5) oraz dla metody POCS (rys.3), to widać wyraźną przewagę pierwszego podejścia. Przy wektorze jedynek przyjętym jako początkowa wartość wektora $\boldsymbol{\alpha}$, osiągnięcie poziomu błędu -103.0789 dB (zaznaczone czarnym pustym kółkiem na rys. 5) wymaga niecałych 50 000 iteracji (weryfikacji kolejnych wartości wektora $\boldsymbol{\alpha}$ w ramach etapu próbnego oraz roboczego). Z kolei rozpoczynając poszukiwania od filtru optymalnego dla pasmowego kryterium LS wystarczające jest tylko 17 000 iteracji (zaznaczone czerwonym pustym kółkiem na rys. 5). Zgodność rozwiązań metody POCS oraz proponowanej metody zweryfikowano dla szerokiego zakresu wartości N i f_a uzyskując efekty analogiczne do tych prezentowanych na rys. 5.



Rys. 5. Błąd LS w funkcji numeru iteracji algorytmu poszukiwania współczynników filtru DFT-VFD metodą Hooke-Jeevesa (analogicznie do rys. 3)

Na rys. 6 pokazano jak zmienia się liczba iteracji potrzebnych do uzyskania poszukiwanego rozwiązania w zależności od jego błędu LS dla początkowego rozwiązania bazującego na filtrze optymalnym w sensie pasmowego kryterium LS. Jak można zauważyć, dla filtrów o niewielkiej dokładności wymagana liczba iteracji jest niewielka i nie zależy od poziomu błędu. Jednocześnie rośnie ona logarytmicznie dla filtrów o błędzie LS poniżej -60 dB oraz -80 dB, odpowiednio dla filtrów o nieparzystej oraz parzystej długości odpowiedzi impulsowej N. Wyraźnie mniejsza liczba wymaganych iteracji dla filtrów o błędzie LS poniżej -100 dB obserwowana dla filtrów o nieparzystym N (rys. 6b) wynika z tego, że w efekcie problemów z dokładnością obliczania wartości błędu LS algorytm nie może poprawnie określać kierunku zmian współczynników α i projektowanie jest przerywane.



Rys. 6. Liczba iteracji w funkcji błędu LS rozwiązania końcowego dla algorytmu poszukiwania współczynników filtru DFT-VFD dla ε_{ref}=0.25, p=3 i wybranych f_a dla N (a) parzystych oraz (b) nieparzystych

4. PODSUMOWANIE

W pracy zaproponowano nowe podejście do projektowania filtrów DFT-VFD reprezentowanych przez zaledwie kilka współczynników ich charakterystyki częstotliwościowej. Zaproponowany algorytm projektowania uzyskuje wyniki zgodne z tymi uzyskiwanymi z metody POCS gwarantującej zbieżność, jednocześnie rozwiązanie osiągane jest kilkunastokrotnie szybciej. Znacząco szybsza zbieżność nowego podejścia pozwala na swobodne testowanie/dobieranie filtrów DFT-VFD oraz na szerzej zakrojone badania właściwości tych filtrów.

LITERATURA

[1] Blok Marek. 2017, „Projektowanie filtrów ułamkowoopóźniających reprezentowanych przez współczynniki dyskretnej charakterystyki częstotliwościowej". Przegląd Telekomunikacyjny i Wiadomości Telekomunikacyjne, 1030-1033.

[2] Blok Marek. 2013, „Filtr ułamkowoopóźniający o przestrajanej szerokości pasma realizowany w dziedzinie DFT", Przegląd Telekomunikacyjny i Wiadomości Telekomunikacyjne, 9: 1141-1150.

[3] Blok Marek. 2013, "Comments on "Closed Form Variable Fractional Time Delay Using FFT"", IEEE Signal Processing Letters, 20 (8): 747-750.

[4] Hermanowicz Ewa, Blok Marek. 2000, "Iterative technique for approximate minimax design of complex digital FIR filters", The 7th IEEE International Conference on Electronics, Circuits and Systems, ICECS 2000, 83-86.

[5] Hooke Robert, Jeeves T.A.. 1961, "Direct Search Solution of Numerical and Statistical Problems", Journal of the ACM (JACM), 8(2), 212-229.

[6] Laakso Timo I., Välimäki Vesa, Karjalainen Matti, Laine Unto K.. 1996. "Splitting the unit delay – tools for fractional delay filter design," IEEE Signal Processing Magazine, 13(1): 30–60.

MOST WIEDZY Pobrano z mostwiedzy.pl