

XIII Seminarium  
**ZASTOSOWANIE KOMPUTERÓW W NAUCE I TECHNICIE 2003**  
Oddział Gdański PTETiS

**STABILNOŚĆ PRACY SILNIKA INDUKCYJNEGO ZASILANEGO  
Z FALOWNIKA NAPIĘCIA**

**Anna WITKOWSKA, Marek ADAMOWICZ,  
Stanisław WITKOWSKI, Jarosław GUZIŃSKI,**

Katedra Energoelektroniki i Maszyn Elektrycznych Politechniki Gdańskiej  
tel: 058-347-18-71 fax: 058-341-80-08 e-mail: apuszcz@ely.pg.gda.pl

W artykule zamieszczono wstępne wyniki badań analizy stabilności silnika indukcyjnego zasilanego z falownika napięcia. Przedstawiono model matematyczny silnika indukcyjnego oraz określono warunki pracy układu przyjmując założenia dla wyznaczenia równań opisujących pracę układu napędowego w stanie ustalonym. Określono transmitancję silnika indukcyjnego w celu wyznaczenia zakresu jego stabilnej pracy. Wykazano możliwość wystąpienia niestabilnej pracy układu z silnikiem indukcyjnym zasilanym z falownika napięcia.

## **1. WSTĘP**

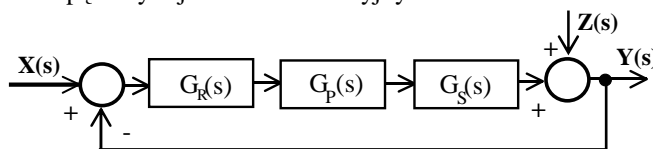
Wśród powszechnie stosowanych układów regulacji silnika indukcyjnego klatkowego jedynie układy ze sterowaniem metodą pośredniej orientacji względem wektora pola POP [2,3,4,5] doczekały się wnikliwej analizy stabilności. Dogodność analizy stabilności układu regulacji silnika tą metodą wynika z przyjętego założenia zasilania silnika z idealnego źródła prądowego, co pozwala na redukcję rzędu badanego modelu matematycznego silnika do układu równań różniczkowych trzeciego rzędu. W literaturze jest to uzasadniane różnymi skalami czasowymi trwania procesów przejściowych w przebiegach prądu stojana i strumienia wirnika. Prąd stojana traktowany jest jako ustalony sygnał wejściowy, w wyniku czego analiza stabilności dotyczy dynamiki zmian strumienia wirnika. W pozycjach [2,3] wykazana została globalna asymptotyczna stabilność układu sterowanego metodą POP przy założeniu niezmienności parametrów układu napędowego. Obszar stabilności układu napędowego zależy od parametrów silnika oraz regulatorów w takim samym stopniu jak od wartości prędkości i momentu obciążenia. Wraz ze zmniejszaniem prędkości silnika maleje również obszar stabilności. W pracy [4] podkreślone zostało, że układ regulacji metodą POP bez pomiaru prędkości może nie być stabilny przy małych prędkościach. W punkcie równowagi układu, który przy spełnieniu warunku idealnej orientacji polowej, z założenia powinien być stabilny dla wszystkich wartości prędkości i momentu, w pewnych warunkach zaobserwowano wystąpienie niestabilności.

Dokonując oceny stabilności nieliniowych obiektów napędowych można wyznaczyć cechy fizyczne układu dynamicznego, który wytrącony z równowagi, wraca do stanu

poprzedniego wraz z zanikiem pobudzenia. Linearyzacja modelu matematycznego układu wokół punktu pracy dla stanu ustalonego daje możliwość analitycznego zbadania stabilności lokalnej za pomocą znanych metod z zakresu teorii automatycznej regulacji. Problem stabilności globalnej układów napędowych jest ze względu na ich dużą złożoność i występujące nieliniowości wciąż tematem aktualnym i wymagającym znacznego nakładu badań. W artykule ograniczono się tylko do badań stabilności pracy modelu silnika indukcyjnego zasilanego z falownika napięcia.

## 2. MODEL MATEMATYCZNY SILNIKA INDUKCYJNEGO

Rozpatrując stabilność układu napędowego z silnikiem klatkowym można dokonać podziału na podukłady lokalne: układ przekształtnika, układ sterowania (regulatorów) oraz obiekt sterowany, co zostało pokazane na rysunku 1. Transmitancja układu regulacji zależna jest od przyjętej metody sterowania silnikiem indukcyjnym. Dobór odpowiedniego sterowania ma na celu nie tylko zapewnienie stabilnej pracy układu napędowego, ale również odpowiedniej dynamiki zmian wielkości regulowanej i kompensacji zakłóceń. Ze względu na złożoność problemu, w artykule ograniczono się jedynie do przedstawienia częściowej analizy stabilności układu napędowego w postaci analizy obiektu sterowanego jakim w układzie napędowym jest silnik indukcyjny.



Rys. 1. Przykład struktury blokowej układu napędowego  
 $X(s)$ - sygnał zadający,  $Y(s)$ - wielkość regulowana,  $Z(s)$ - wielkość zakłócająca,  
 $G_P(s)$ - przekształtnik,  $G_R(s)$ -układ regulatorów,  $G_S(s)$ - silnik indukcyjny

W badaniach przyjęto model matematyczny silnika indukcyjnego w postaci równań różniczkowych dla zmiennych określonych w wirującym układzie współrzędnych kartezyjskich o osiach d-q, związanym z wektorem przestrzennym strumienia wirnika:

$$\frac{di_{sd}}{d\tau} = -\frac{R_s L_r^2 + R_r L_m^2}{L_r \omega_\delta} i_{sd} + \frac{R_r L_m \Psi_{rd}}{L_r \omega_\delta} + \omega_a i_{sq} + \omega_r \frac{L_m \Psi_{rq}}{\omega_\delta} + \frac{L_r}{\omega_\delta} u_{sd}, \quad (1)$$

$$\frac{di_{sq}}{d\tau} = -\frac{R_s L_r^2 + R_r L_m^2}{L_r \omega_\delta} i_{sq} + \frac{R_r L_m \Psi_{rq}}{L_r \omega_\delta} - \omega_a i_{sd} - \omega_r \frac{L_m \Psi_{rd}}{\omega_\delta} + \frac{L_r}{\omega_\delta} u_{sq}, \quad (2)$$

$$\frac{d\Psi_{rd}}{d\tau} = -\frac{R_r}{L_r} \Psi_{rd} + (\omega_a - \omega_r) \Psi_{rq} + \frac{R_r L_m}{L_r} i_{sd} + u_{rd}, \quad (3)$$

$$\frac{d\Psi_{rq}}{d\tau} = -\frac{R_r}{L_r} \Psi_{rq} - (\omega_a - \omega_r) \Psi_{rd} + \frac{R_r L_m}{L_r} i_{sq} + u_{rq}, \quad (4)$$

$$\frac{d\omega_r}{d\tau} = \frac{L_m}{J L_r} (\Psi_{rd} i_{sq} - \Psi_{rq} i_{sd}) - \frac{1}{J} m_0, \quad (5)$$

gdzie  $u_s$  jest wektorem napięcia stojana,  $i_s$  jest wektorem prądu stojana,  $\Psi_r$  jest wektorem strumienia skojarzonego z uzwojeniem wirnika,  $R_s$ ,  $R_r$  są rezystancjami uzwojeń stojana i wirnika,  $J$  jest momentem bezwładności,  $\omega_r$  jest prędkością kątową wirnika względem stojana,  $m_0$  jest momentem



obciążenia, indeksy  $d, q$  oznaczają składowe wektorów w układzie współrzędnych oraz  $w_\sigma = \sigma L_r L_s$ , gdzie  $\sigma = 1 - (L_m^2 / L_s L_r)$  jest współczynnikiem rozproszenia Blondella.

### 3. METODY BADANIA STABILNOŚCI

#### 3.1. Stabilność wg kryterium Lapunowa

Stabilność według kryterium Lapunowa dotyczy rozwiązań układu równań różniczkowych lub różnicowych w otoczeniu ich stanów równowagi. Dany stan równowagi jest stabilny wg kryterium Lapunowa jeżeli trajektoria układu rozpoczynająca się dostatecznie blisko danego stanu równowagi pozostając w pobliżu danego stanu przez cały późniejszy czas.

Pierwsza metoda Lapunowa, zwana metodą pośrednią, pozwala ocenić stabilność punktu równowagi układu nieliniowego w oparciu o zbadanie stabilności punktu równowagi wersji zlinearyzowanej badanego układu. Druga metoda Lapunowa, zwana metodą bezpośrednią, polegająca na ocenie stabilności tzw. funkcji energetycznej bez stosowania bezpośredniego szukania pierwiastków równań charakterystycznych nie będzie przedmiotem rozważań niniejszego artykułu.

Przyjęty model silnika rozpatrywano w stanie ustalonym, przyjmując, że moment obciążenia  $m_0$  oraz prędkość  $\omega_r$  jest wartością zadaną. Zgodnie z przyjętym układem odniesienia składowe wektora przestrzennego strumienia wirnika są równe  $\Psi_{rd} = \text{const}$ ,  $\Psi_{rq} = 0$ . Dokonując prostych przekształceń otrzymano następujące zależności:

$$\Psi_{rd} = L_m i_{sd}, \quad (6), \quad m_0 = \frac{L_m^2}{L_r} i_{sq} i_{sd}, \quad (7)$$

$$u_{sq} = \frac{(L_m^2 + w_\sigma) \omega_r}{L_r} i_{sd} + \frac{R_s L_r^2 + R_r L_m^2 + R_r w_\sigma}{L_r^2} i_{sq}, \quad (8)$$

$$u_{sd} = R_s i_{sd} - \frac{w_\sigma \omega_r}{L_r} i_{sq} - \frac{w_\sigma R_r}{L_r^2} \frac{i_{sq}^2}{i_{sd}}. \quad (9)$$

Układ równań (6) – (9) badany układ posiada dwa rozwiązania:

$$\text{I. } i_{sd} = 0; \quad i_{sq} = \frac{L_r^2}{R_s L_r^2 + R_r L_m^2 + R_r w_\sigma} u_{sq}. \quad (10)$$

$$\text{II. } i_{sd} = \frac{2L_r}{\omega_r (w_\sigma + L_m^2)} u_{sq}; \quad i_{sq} = \frac{-L_r^2}{R_s L_r^2 + R_r L_m^2 + R_r w_\sigma} u_{sq}. \quad (11)$$

Rozwiązanie I (10) musi zostać odrzucone ze względu na zerową wartość składowej prądu stojana generującej strumień wirnika. W procesie sterowania powinno być realizowane tylko rozwiązanie II.

#### 3.2. Kryterium Hurwitza

Dla wyznaczenia zakresu stabilnej pracy układu napędowego niezbędne jest wyznaczenie dla jakich wartości parametrów określających transmitancję regulatorów układu przekształtnika oraz odbiornika spełnione są wymagania przyjętego kryterium



sterowania w układzie zamkniętym. Znajomość modelu matematycznego obiektu lub układu daje nam możliwość analitycznego zbadania stabilności tego układu, poprzez analizę miejsc zerowych wielomianu charakterystycznego lub biegunów układu. Jednym ze znanych kryteriów badania stabilności układów impulsowych jest kryterium Hurwitza. Dotyczy ono badania stabilności układów o znanym wielomianie charakterystycznym. Według kryterium Hurwitza układ o transmitancji  $G(s)=L(s)/M(s)$  jest stabilny, jeżeli dla zerowego wymuszenia odpowiedź układu i wszystkie pochodne tej odpowiedzi dążą do zera, bez względu na warunki początkowe. Jest to spełnione gdy wszystkie współczynniki wielomianu charakterystycznego  $M(s)$  są dodatnie i jednocześnie wszystkie narożne minory główne jego macierzy są nieujemne. Wówczas pierwiastki równania charakterystycznego  $M(s)$  leżą wyłącznie w lewej półpłaszczyźnie domkniętej. Kryterium Hurwitza daje odpowiedź na pytanie czy układ jest stabilny dla przyjętych nastaw regulatorów czy też nie. O układach sterowania trzeba jednak na ogół wiedzieć znacznie więcej niż tylko to, czy są one stabilne. Przebieg odpowiedzi musi być poznany dla praktycznie dowolnych wymuszeń. Określenie stabilności takiego układu jest bardzo złożone, dlatego w referacie ograniczono się jedynie do zaprezentowania prostego przykładu.

Dla przyjętego modelu matematycznego równań silnika indukcyjnego (1) – (4) można wyznaczyć następującą transmitancję, gdzie wejściem badanego układu jest napięcie zasilania w osi d a wyjściem prąd w osi d, charakteryzującą się zależnością :

$$G(s) = \frac{A_3 s^3 - A_2 s^2 - A_1 s - A_0}{s^4 - B_3 s^3 + B_2 s^2 + B_1 s + B_0} \quad (12)$$

$A_i$  i  $B_i$  dla  $i=0,1,2,3$  są odpowiednio współczynnikami związanymi z parametrami badanego silnika indukcyjnego. Dla badanego silnika indukcyjnego typu 2Sg90L4 o parametrach  $R_s=2.9429\Omega$ ,  $R_r=2.4746\Omega$ ,  $L_m=0.2794H$ ,  $L_s=0.287875H$ ,  $L_r=0.287875H$ , przy prędkości 1420 obr./min i biegu jałowym uzyskano transmitancję:

$$G_s := \frac{\{59.2 \cdot s^3 + 31523 \cdot s^2 + 119809821 \cdot s + 77969809096\}}{\{s^4 + 1047.9 \cdot s^3 + 2297443 \cdot s^2 + 2637891117 \cdot s + 860522555023\}} \quad (13)$$

Na podstawie wyznaczonej transmitancji, przyrównując mianownik do zera można wyznaczyć miejsca zerowe.

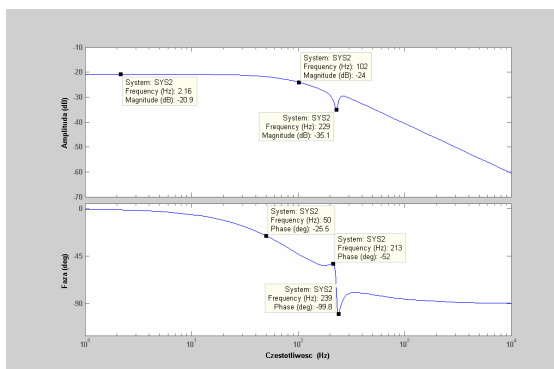
$$\begin{bmatrix} s_1 = -628.88 - 47.18i \\ s_2 = -628.88 + 47.18i \\ s_3 = 104.9 - 1467.18i \\ s_4 = 104.98 + 1467.18i \end{bmatrix} \quad (14)$$

Układ nie jest stabilny ponieważ części rzeczywiste punktów  $s_3$  i  $s_4$  leżą w dodatniej półpłaszczyźnie. Zależnie od nastaw regulatorów zmienia się położenie biegunów w układzie współrzędnych. Pożądane są takie nastawy dla których wszystkie bieguny będą leżeć w lewej półpłaszczyźnie. Dokonując analizy przemieszczania się pierwiastków wielomianu charakterystycznego można określić zakresy stabilnej pracy badanego układu. Znając punkty pracy silnika indukcyjnego można dokonać odpowiednich nastaw regulatorów aby punkty niestabilności nie występowały.

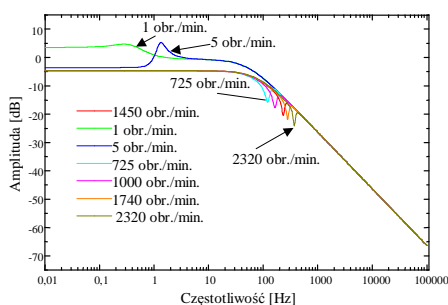
Na rysunku 2 zamieszczono logarytmiczną charakterystykę amplitudowo-fazową badanego modelu silnika. Dla badanego silnika indukcyjnego można zauważyć punkt załamania logarytmicznej charakterystyki amplitudowej dla częstotliwości około 104 Hz oraz wystąpienie rezonansu dla częstotliwości 230 Hz [7]. Wpływ na kształt przebiegu transmitancji ma prędkość obrotowa silnika indukcyjnego - rysunek 3 i rysunek 4. Można



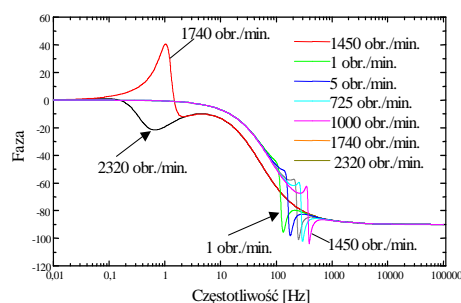
zauważyć, że dla małych prędkości obrotowych wału silnika w stosunku do prędkości znamionowej badanego układu, zmienia się również częstotliwość rezonansowa – rysunek 4. Prędkość obrotowa, przy której pracuje silnik indukcyjny ma wpływ na określenie zakresu stabilności pracy układu zasilanego z przemiennika częstotliwości.



Rys. 2. Wykres Bodego dla silnika indukcyjnego typu 2Sg90L4 przy prędkości znamionowej 1420 obr./min.: a)charakterystyka amplitudowa, b)charakterystyka fazowa



Rys. 3. Charakterystyki amplitudowe transmitancji dla silnika 5,5 kW przy różnych prędkości obrotowych



Rys. 4. Charakterystyki fazowe transmitancji dla silnika 5,5 kW przy różnych prędkości obrotowych

#### 4. STABILNOŚĆ OBSERWATORA PRĘDKOŚCI KĄTOWEJ WAŁU

W układach napędowych stosuje się do odtwarzania prędkości kątowej wału silnika indukcyjnego odpowiednie obserwatory prędkości. Jak wykazano w pracy [11] istnieje możliwość wystąpienia punktów niestabilności w procesie sterowania z obserwatorem prędkości kątowej wału zwłaszcza dla małych prędkości. Analizując stabilność obserwatora metodą pośrednią Lapunowa w [11] otrzymano zależności pomiędzy składowymi wektora prądu stojana w obserwatrze i składowymi wektora prądu stojana silnika, z których układ ten może mieć również kilka punktów pracy. Wybór nieodpowiednich współczynników w równaniach obserwatora może doprowadzić również do niepoprawnej pracy napędu, a w konsekwencji nawet do uszkodzeń obiektu sterującego.

#### 5. WNIOSKI

Przedstawione wyniki badań są rezultatem analizy punktów pracy silnika indukcyjnego. Wcześniejsze badania dowodzą, że istnieje możliwość wystąpienia kilku punktów pracy



układu napędowego z obserwatorem prędkości kątowej w stanie ustalonym przy tych samych wartościach składowych wektora napięcia zasilającego. Dla prawidłowej pracy układu napędowego niezbędne jest uwzględnienie wszystkich wyznaczonych punktów pracy napędu elektrycznego w procesie sterowania maszyną elektryczną, i stworzenie warunków dla występowania tylko pożądaných stanów przy określonych parametrach maszyny elektrycznej i obserwatora prędkości kątowej wału.

## 6. LITERATURA

1. J. P. Kopyłow: *Elektromechaniczne przetworniki energii*, PWN 1978.
2. M. R. Dubowski: *Stabilność układów napędowych sterowanych zgodnie z zasadą pośredniej orientacji polowej*, Rozprawy Naukowe Nr 80, WPB Białystok 2001.
3. R. Ortega, D. Taoutou: *Indirect Field Oriented Speed Regulation for Induction Motors is Globally Stable*, IEEE Transactions on Ind. Electronics, vol.43, No. 2, 1996.
4. R. Ottersten: *On control of Back to Back Converters and sensorless Induction Machine Drives*, PhD Thesis, Chalmers University of Technology, Goteborg Sveden 2003.
5. S. Peresada, A. Tilli, S. Kovbasa, M. Montanari, F. Ronchi: *Simple Sensorless Vector Control of Induction Motors with Natural Field Orientation*, 27th Conf. IEEE Industr. Electron. Soc. (IECON01), Nov. 29 - Dec. 2, 2001, Denver, USA.
6. Blaschke F., "Das Partizip der Feldorientierung, die Grundlage für die Tranksektor – Regelung von Drehfeldmaschine," Siemens Z. , No 10, vol. 45, ss.757 - 760, 1971.
7. Kaczorek T.: *Teoria układów regulacji automatycznej*. WNT. Warszawa 1974 r.
8. Krzemiński Z.: *Cyfrowe sterowanie maszynami asynchronicznymi*. Wydawnictwo Politechniki Gdańskiej, Gdańsk 2001.
9. Orłowska-Kowalska T.: *Application of extended Luenberger observer for flux and rotor time-constant estimation in induction motor drives*. IEE Proceedings, vol.136, Pt. D. ,1989
10. Von Raumer T., Dion J. M., Dugard L.: *Combined nonlinear controller and full order observer design for induction motor*. Proceedings of the IECON'94, 20th Int. Conf. on Industrial Electronics Control and Instrumentation, Bologna, Italy 1994.
11. Krzemiński Z., Puszcz A.: *Stabilność silnika indukcyjnego w układzie regulacji z obserwatorem prędkości kątowej wału*. Postępy w Elektrotechnice Stosowanej, Kościelisko, 23-27.06.2003 r.

### STABILITY OF INVERTER FED INDUCTION MOTOR

The preliminary results of stability analysis of control system for inverter fed induction motor are presented. The mathematical model of induction motor is presented as well as working conditions of the system are defined with steady state assumption for electric drive equations. The transmittance of induction motor was determined to specify the stability range. Possibility of instability of control system for inverter fed induction motor is proved.