



**POLITECHNIKA  
GDAŃSKA**

WYDZIAŁ  
ELEKTROTECHNIKI  
I AUTOMATYKI

Imię i nazwisko autora rozprawy: Bartosz Sławomir Puchalski  
Dyscyplina naukowa: Automatyka i robotyka

## ROZPRAWA DOKTORSKA

Tytuł rozprawy w języku polskim: Sterowanie z wykorzystaniem rachunku niecałkowi-  
tego rzędu reaktorem wodnym ciśnieniowym elektrowni jądrowej.

Tytuł rozprawy w języku angielskim: Fractional order control of a Pressurized Water Re-  
actor.

Promotor  <i>podpis</i>	Drugi promotor  <i>podpis</i>
dr hab. inż. Kazimierz Duzinkiewicz	
Promotor pomocniczy  <i>podpis</i>	Kopromotor  <i>podpis</i>
dr inż. Tomasz Rutkowski	

Gdańsk, rok 2017



The author of the PhD dissertation: Bartosz Sławomir Puchalski  
Scientific discipline: Automatic control and robotics

## DOCTORAL DISSERTATION

Title of PhD dissertation: Fractional order control of a Pressurized Water Reactor.

Title of PhD dissertation (in Polish): Sterowanie z wykorzystaniem rachunku niecałkowi-  
tego rzędu reaktorem wodnym ciśnieniowym elektrowni jądrowej.

Supervisor  <i>signature</i>	Second supervisor  <i>signature</i>
Ph.D., Kazimierz Duzinkiewicz	
Auxiliary supervisor  <i>signature</i>	Cosupervisor  <i>signature</i>
Ph.D., Tomasz Rutkowski	

Gdańsk, year 2017





*Dla Magdaleny i Franka*

*Dziękuję rodzicom  
za wiarę, cierpliwość  
oraz za wsparcie.*

*Składam serdeczne podziękowania  
dr hab. inż. Kazimierzowi Duzinkiewiczowi  
za pomoc w nakreśleniu strategii rozprawy,  
oraz cenne rady i wskazówki na etapie jej tworzenia.*

*Dr inż. Tomaszowi Rutkowskiemu  
za cierpliwość, wyrozumiałość oraz  
nieocenione uwagi i rady pomocne  
w powstaniu tej rozprawy.*

*Szczególne podziękowania kieruje  
do Wszystkich Kolegów  
z Katedry Inżynierii Systemów Sterowania  
za otwartość i miłą koleżeńską atmosferę.*

---

# Spis treści

---

<b>Wykaz ważniejszych oznaczeń i skrótów .....</b>	<b>1</b>
<b>1. Wstęp.....</b>	<b>6</b>
1.1 Wprowadzenie .....	7
1.2 Teza rozprawy.....	8
1.3 Struktura i zawartość rozprawy .....	9
<b>2. Reaktor jądrowy typu PWR jako obiekt sterowania.....</b>	<b>13</b>
2.1 Reaktor jądrowy typu PWR jako obiekt sterownia.....	15
2.1.1 Reakcje jądrowe i typy neutronów w rdzeniu reaktora .....	16
2.1.2 Moc cieplna, współczynnik mnożenia i reaktywność .....	17
2.1.3 Neutrony opóźnione .....	20
2.1.4 Efekty reaktywnościowe.....	21
2.2 Sterowanie reaktorem .....	24
<b>3. Sformułowanie problemu sterowania mocą cieplną reaktora jądrowego .....</b>	<b>30</b>
3.1 Założenia.....	31
3.1.1 Założenia odnoszące się do modeli matematycznych reaktora jądrowego .....	32
3.1.2 Założenia stawiane algorytmom sterowania.....	33
3.2 Sformułowanie problemu .....	35
3.2.1 Charakterystyka wieloobszarowego regulatora $PI^{\lambda}D^{\mu}$ .....	37
3.2.2 Charakterystyka urządzenia wykonawczego .....	41
3.3 Stan badań.....	45
<b>4. Modele matematyczne obiektu sterowania.....</b>	<b>51</b>
4.1 Punktowy model kinetyki neutronów .....	52
4.2 Model wymiany ciepła i efektów reaktywnościowych z pojedynczym węzłem paliwa i dwoma węzłami chłodziwa.....	55
4.3 Model wymiany ciepła i efektów reaktywnościowych z wieloma węzłami paliwa i chłodziwa.....	58
4.3.1 Model wymiany ciepła i efektów reaktywnościowych z pięcioma węzłami paliwa i dziesięcioma węzłami chłodziwa .....	61

4.3.2	Współczynniki $D_C$ określające osiowy profil generacji mocy cieplnej.....	63
4.3.2.1	Określenie osiowego rozkładu strumienia neutronów.....	64
4.3.2.2	Wyznaczanie wartości współczynników $D_C$ .....	76
4.4	Nieliniowa przestrzeń stanu.....	84
<b>5.</b>	<b>Technologie matematyczne syntezy układu sterowania.....</b>	<b>86</b>
5.1	Rachunek różniczkowo-całkowy niecałkowitego rzędu.....	86
5.1.1	Podstawowe definicje .....	86
5.1.1.1	Definicja Riemanna-Liouvillea .....	86
5.1.1.2	Definicja Grunwalda-Letnikova.....	87
5.1.1.3	Definicja Caputo.....	89
5.1.2	Transformata Laplace'a.....	90
5.1.3	Realizacje rachunku niecałkowitego rzędu.....	91
5.1.4	Filtry Oustaloup'a.....	92
5.1.5	Regulator $PI^{\lambda}D^{\mu}$ o niecałkowitych rzędach całkowania i różniczkowania .....	96
5.2	Systemy rozmyte.....	98
5.2.1	System rozmyty z wnioskowaniem Takagi-Sugeno (TS).....	101
5.3	Połączenie technologii .....	102
<b>6.</b>	<b>Synteza układu sterowania mocą cieplną reaktora jądrowego.....</b>	<b>103</b>
6.1	Sformułowanie zadania optymalizacji.....	104
6.1.1	Trajektorie mocy cieplnej zadanej wykorzystane w etapach optymalizacji.....	108
6.1.2	Ogólna metoda rozwiązania zadania optymalizacji.....	109
6.1.3	Optymalizacja nastaw lokalnych regulatorów $PI^{\lambda}D^{\mu}$ – etap 1 .....	111
6.1.4	Optymalizacja parametrów funkcji przynależności rozmytej części regulatora wieloobszarowego – etap 2.....	115
6.2	Wybór algorytmu optymalizacji .....	118
6.2.1	Algorytm optymalizacji MADS .....	122
6.3	Komputerowe środowisko obliczeniowe – Matlab/Simulink.....	126
6.3.1	Implementacja modeli układu sterowania .....	127
6.3.1.1	Pakiet FOMCON.....	127
6.3.1.2	Dobór pasma pulsacji oraz rzędu filtrów Oustaloup'a .....	130
6.3.1.3	Mechanizm badania stabilności oraz warunkowego zatrzymania modelu symulacyjnego.....	134



---

6.3.2	Algorytmu MADS w środowisku obliczeniowym .....	135
6.4	Wyniki przeprowadzonych obliczeń – optymalizacji.....	139
6.4.1	Uwarunkowania środowiska obliczeniowego .....	139
6.4.2	Regulatory lokalne – etap I.....	141
6.4.3	Regulator wieloobszarowy – etap II .....	148
<b>7.</b>	<b>Analiza stabilności układu sterowania.....</b>	<b>153</b>
7.1	Linearyzacja modeli matematycznych elementów układu sterowania .....	156
7.1.1	Modele liniowe wieloobszarowego regulatora rozmytego z lokalnymi regulatorami PI <sup>λ</sup> D <sup>μ</sup> .....	158
7.1.2	Modele liniowe urządzenia wykonawczego .....	161
7.1.3	Modele liniowe reaktora jądrowego (modelu projektowego).....	162
7.1.4	Układ otwarty .....	163
7.1.5	Układ zamknięty.....	165
<b>8.</b>	<b>Symulacyjna weryfikacja układu sterowania.....</b>	<b>168</b>
8.1	Regulacja nadążna .....	171
8.1.1	Trajektoria schodkowa mocy cieplnej zadanej .....	172
8.1.2	Trajektoria sinusoidalna mocy cieplnej zadanej .....	177
8.1.3	Trajektoria sinusoidalna mocy cieplnej zadanej o zwiększonej częstotliwości.....	181
8.1.4	Podsumowanie.....	185
8.2	Regulacja stałowartościowa.....	186
8.2.1	Zmiana temperatury chłodziwa w sposób skokowy .....	186
8.2.2	Zmiana masowego przepływu chłodziwa w sposób skokowy .....	190
8.2.3	Podsumowanie.....	193
8.3	Rozkład temperatur paliwa .....	194
8.3.1	Trajektoria schodkowa mocy cieplnej zadanej .....	194
8.3.2	Trajektoria sinusoidalna mocy cieplnej zadanej .....	197
8.3.3	Trajektoria sinusoidalna mocy cieplnej zadanej o zwiększonej częstotliwości.....	198
8.3.4	Podsumowanie.....	200
8.4	Rozkład temperatur chłodziwa .....	201
8.4.1	Trajektoria schodkowa mocy cieplnej zadanej .....	202

---

8.4.2 Trajektoria sinusoidalna mocy cieplnej zadanej .....	204
8.4.3 Trajektoria sinusoidalna mocy cieplnej zadanej o zwiększonej częstotliwości.....	205
8.4.4 Podsumowanie.....	208
8.5 Współczynniki nierównomierności rozkładu temperatury .....	208
8.6 Podsumowanie.....	213
<b>9. Podsumowanie i wnioski.....</b>	<b>215</b>
9.1 Kierunki dalszych prac .....	221
<b>Bibliografia .....</b>	<b>222</b>
<b>Załącznik 1: Funkcje Bessela .....</b>	<b>231</b>
<b>Załącznik 2: Parametry reaktora jądrowego typu PWR .....</b>	<b>233</b>
<b>Załącznik 3: Liniowy model projektowy reaktora jądrowego.....</b>	<b>237</b>
Liniiowy model projektowy w wybranych punktach pracy .....	239
<b>Załącznik 4: Modele regulatorów niecałkowitego rzędu .....</b>	<b>241</b>



## Wykaz ważniejszych oznaczeń i skrótów

---

$\tilde{A}_{li,j}$	wejściowy zbiór rozmyty systemu Takagi-Sugeno dla $i$ -tego wejścia i $j$ -tej reguły rozmytej
$A$	rzeczywista powierzchnia wymiany ciepła pomiędzy paliwem a chłodziwem
$\alpha_C$	temperaturowy współczynnik reaktywności dla chłodziwa
$\alpha_F$	temperaturowy współczynnik reaktywności dla paliwa
$B^2$	parametr geometryczny reaktora
$B_r$	składowa promieniowa parametru geometrycznego reaktora
$B_z$	składowa osiowa parametru geometrycznego reaktora
$\beta$	udział neutronów opóźnionych, stosunek średniej liczby neutronów opóźnionych do liczby wszystkich neutronów przypadających na jedno rozszczepienie
$\beta_i$	wydajność prekursorów neutronów opóźnionych $i$ -tej grupy
$C_i$	gęstość $i$ -tej grupy prekursorów neutronów opóźnionych
$\chi$	osiowa składowa strumienia neutronów
$\chi_r$	osiowy rozkład strumienia neutronów w części reaktora, w której występuje zespół prętów sterujących
$\chi_u$	osiowy rozkład strumienia neutronów w części reaktora, w której nie występuje zespół prętów sterujących
$c_{pC}$	ciepło właściwe chłodziwa
$c_{pF}$	ciepło właściwe paliwa jądrowego
${}_0D_t^{-\lambda}$	operator całkowania niecałkowitego rzędu o stopniu $\lambda$ na przedziale czasu $\langle 0; t \rangle$
${}_0D_t^\mu$	operator różniczkowania niecałkowitego rzędu o stopniu $\mu$ na przedziale czasu $\langle 0; t \rangle$
$D_1$	współczynnik dyfuzji dla neutronów prędkich
$D_2$	współczynnik dyfuzji dla neutronów termicznych
$D_{Ci}$	$i$ -ty współczynniki określający osiowy profil generacji mocy cieplnej w rdzeniu reaktora

$\Delta_h^\alpha$	przybliżenie definicji pochodnej niecałkowitego rzędu o stopniu $\alpha$ według Grunwalda-Letnikova w postaci sumy ważonej
$\Delta^m$	wielkość siatki w algorytmie optymalizacji MADS
$\Delta^p$	wielkość obszaru poszukiwań w algorytmie optymalizacji MADS
$\mathcal{D}$	operator różniczkowania
${}_a\mathcal{D}_t^\alpha$	ciągły operator rachunku różniczkowo-całkowego niecałkowitego rzędu $\alpha$
${}_C\mathcal{D}_*^\alpha$	pochodna niecałkowitego rzędu według definicji Caputo
${}_{GL}\mathcal{D}^\alpha$	pochodna niecałkowitego rzędu według definicji Grunwalda-Letnikova
${}_{GL}\mathcal{D}^{-\alpha}$	całka niecałkowitego rzędu według definicji Grunwalda-Letnikova
${}_{RL}\mathcal{D}^\alpha$	pochodna niecałkowitego rzędu według definicji Riemanna-Liouvillea
$f_F$	współczynnik określający ilość mocy cieplnej generowanej w paliwie reaktora jądrowego
FOMCON	Fractional Order Modeling and Control, pakiet środowiska MATLAB, w którym zaimplementowane są elementy rachunku niecałkowitego rzędu
$\Gamma$	funkcja gamma Eulera
$\tilde{H}$	wysokość rdzenia reaktora
$h$	średni współczynnik przenikania ciepła z paliwa do chłodziwa
$\mathcal{J}$	operator całkowania
${}_{RL}\mathcal{J}_C^\alpha$	całka niecałkowitego rzędu według definicji Riemanna-Liouvillea
$J_0$	funkcja Bessela pierwszego rodzaju
IAE	całkowy wskaźnik jakości, całka z wartości bezwzględnej uchybu ( <i>ang. Integral of Absolute Error</i> )
ISE	całkowy wskaźnik jakości, całka z kwadratu uchybu ( <i>ang. Integral of Squared Error</i> )
ITAE	całkowy wskaźnik jakości, całka z wartości bezwzględnej uchybu pomnożonej przez czas ( <i>ang. Integral of Absolute Error multiplied by Time</i> )
$k$	współczynnik mnożenia
$k_\infty$	współczynnik mnożenia neutronów w ośrodku nieskończonym
$k_r$	wartość współczynnika mnożenia $k$ dla pełnego zagłębienia zespołu prętów sterujących

$k_u$	wartość współczynnika mnożenia $k$ dla pełnego wysunięcia zespołu prętów sterujących
$K_Z$	osiowy współczynnik nierównomierności rozkładu temperatury paliwa
$L$	długość dyfuzji neutronów
$L_1$	długość dyfuzji dla neutronów prędkich
$L_2$	długość dyfuzji dla neutronów termicznych
$l$	czas życia neutronów natychmiastowych
$\Lambda$	średni czas generacji neutronów
$\lambda$	rząd operatora całkowania
$\lambda_i$	stała rozpadu prekursorów neutronów opóźnionych $i$ -tej grupy
$M$	długość migracji neutronów
MADS	algorytm przeszukiwania bezpośredniego – Mesh Adaptive Direct Search
$m_C$	masa chłodziwa
$m_f$	masa paliwa jądrowego w rdzeniu reaktora
$\mu$	rząd operatora różniczkowania
$\mu_{\tilde{A}_{I5,j}}$	waga związana z funkcją przynależności, która przypisana jest do zbioru rozmytego $\tilde{A}_{I5,j}$
$N$	ilość jąder paliwa jądrowego w centymetrze sześciennym
$\bar{n}$	uśredniona po objętości rdzenia gęstość neutronów termicznych
$\nabla^2$	Laplasjan, operator polegający na dwukrotnym użyciu operatora nabra $\nabla$
$N_N$	nominalna wartość gęstości neutronów w rdzeniu reaktora jądrowego
$\bar{v}$	średnia prędkość neutronów termicznych
$\omega_A$	dolna granica przedziału pulsacji, w którym zakłada się poprawną aproksymację operacji różniczkowania lub całkowania niecałkowitego rzędu dla filtrów Oustaloup'a
$\omega_B$	górną granicę przedziału pulsacji, w którym zakłada się poprawną aproksymację operacji różniczkowania lub całkowania niecałkowitego rzędu dla filtrów Oustaloup'a
$\omega_b$	dolną granicę pasma pracy filtru Oustaloup'a
$\omega_h$	górną granicę pasma pracy filtru Oustaloup'a

$\phi$	strumień neutronów
$\Pi_{\tilde{A}_{i,j}}$	funkcja przynależności klasy $\Pi$ przypisana do zbioru rozmytego $\tilde{A}_{i,j}$
$PI^{\lambda}D^{\mu}$	regulator PID o niecałkowitym stopniu całkowania $\lambda$ i różniczkowania $\mu$
$p_s$	ciśnienie pary nasyconej
$\psi$	promieniowa składowa strumienia neutronów
$P_{TH}$	średnia moc cieplna reaktora jądrowego,
$P_{TH,N}$	nominalna średnia moc cieplna wytwarzana przez reaktor
$P_{TH,R}$	zadana moc cieplna reaktora
PWR	reaktor ciśnieniowy chłodzony i moderowany lekką wodą ( <i>ang. Pressurized light Water moderated and cooled Reactor</i> )
$r$	współrzędna promieniowa występująca w walcowym układzie współrzędnych
$\tilde{r}$	promień rdzenia reaktora
$\rho$	reaktywność, bilans reaktywności
$\rho_b$	wkład reaktywności zespołu prętów sterujących przy jego całkowitym zagłębieniu w rdzeń reaktora
$\rho_{EXT,R}$	reaktywność wprowadzana do rdzenia reaktora za pośrednictwem prętów sterujących (zespołu prętów sterujących)
$S_{\tilde{A}_{i,j}}$	funkcja przynależności klasy $S$ przypisana do zbioru rozmytego $\tilde{A}_{i,j}$
$\Sigma_a$	makroskopowy przekrój czynny na absorpcję
$\sigma_F$	mikroskopowy przekrój czynny na rozszczepienie
$\Sigma_r$	makroskopowy przekrój czynny na usuwanie
SISO	układ jedno wejście, jedno wyjście ( <i>ang. Single Input Single Output</i> )
$T_{av}$	średnia temperatura chłodziwa reaktora
$T_C$	temperatura chłodziwa
$T_{C,in}$	temperatura chłodziwa na wejściu do reaktora
$T_F$	temperatura paliwa jądrowego
$\theta$	współrzędna kątowa występująca w walcowym układzie współrzędnych
Trace	śląd macierzy, suma elementów na głównej przekątnej macierzy kwadratowej
TS	wnioskowanie Takagi-Sugeno

$V$	objętość reaktora jądrowego
$v_R$	prędkość przesuwu prętów sterujących
$v_{R,sat}$	prędkość przesuwu prętów sterujących realizowana przez urządzenie wykonawcze
$w$	energia powstała wskutek aktu rozszczepienia
$W_C$	masowy przepływ chłodziwa przez reaktor
$x$	położenie prętów sterujących w rdzeniu reaktora
$Y_0$	funkcja Bessela drugiego rodzaju o rzędzie 0
$z$	współrzędna osiowa występująca w walcowym układzie współrzędnych
$Z_{\tilde{A}_{i,j}}$	funkcja przynależności klasy $Z$ przypisana do zbioru rozmytego $\tilde{A}_{i,j}$
ZPS	zespół prętów sterujących

# 1. Wstęp

---

Przyjęcie przez Radę Ministrów RP w dniu 11 sierpnia 2009r. Ramowego Harmonogramu Działań na Rzecz Energetyki Jądrowej zainicjowało realizację nowego Polskiego Programu Energetyki Jądrowej. Jego ostatnia nowelizacja została przyjęta przez rząd RP 28 stycznia 2014r. Pomimo niepewności związanych z terminami realizacji poszczególnych etapów programu, wybudowanie w Polsce elektrowni jądrowej można uznać za wysoce prawdopodobne. Oznacza to dla polskich ośrodków naukowych otwarcie nowych perspektyw badawczych i edukacyjnych.

Okres po zamknięciu pierwszego programu jądrowego w Polsce w roku 1990 nie sprzyjał motywacyjnie kontynuowaniu i rozwijaniu badań w zakresie podstaw teoretycznych i metod modelowania i sterowania z ukierunkowaniem na zastosowania w sektorze energetyki jądrowej. Przerwanie budowy spowodowało odejście od tematyki związanej w zagadnieniami mogącymi znaleźć przyszłe zastosowanie w okresie eksploatacji budowanej elektrowni jądrowej.

Terminy etapów harmonogramu działań dla polskiej energetyki jądrowej wskazują, że istnieje już potrzeba reaktywacji badań zarzuconych po roku 1990. Nowy impuls badawczy powinien pojawić się przede wszystkim w kierunkach, które otworzą perspektywy włączenia polskich rozwiązań w rozwój energetyki jądrowej na świecie. Bez wątpienia można tu wymienić badania w zakresie: analiz, prognoz i planów rozwoju polskiej energetyki jądrowej w różnych horyzontach, kształtowania optymalnych warunków współpracy elektrowni jądrowej z jej otoczeniem elektroenergetycznym; analiz efektywności przedsięwzięć kogeneracyjnych w energetyce jądrowej, systemów aktywnego wspomaganie decyzji operatorskich, zrównoważonego podziału zadań sterowania pomiędzy zespoły operatorskie i systemy automatyki, budowy systemów sterowania automatycznego urządzeniami bloku jądrowego przy zmiennym punkcie pracy, budowy systemów zsynchronizowanego sterowania automatycznego zespołami urządzeń bloku jądrowego, inteligentnego monitorowania stanu operacyjnego bloku jądrowego, sterowania odpornego na uszkodzenia, sterowania optymalizującego efektywność ekonomiczną wytwarzania energii elektrycznej, inteligentnych metod diagnozowania i lokalizacji uszkodzeń, systemów bezobsługowego monitorowania środowiska wewnętrznego i zewnętrznego elektrowni jądrowej, skomputeryzowanych implementacji systemów wspomaganie decyzji i sterowania. Rozprawa doktorska lokuje się w nurcie takich prac badawczych i dotyczy budowy systemów sterowania automatycznego urządzeniami bloku jądrowego przy zmiennym punkcie pracy.

## 1.1 Wprowadzenie

Zgodnie z wymogami Unii Europejskiej, które kładą największy nacisk na bezpieczeństwo, Polska może wybrać reaktory wyłącznie generacji III lub III+. Rozważane dotychczas do realizacji w Polsce technologie bloku jądrowego, to w przeważającej części technologie z reaktorami lekko wodnymi, pięć spośród nich to reaktory ciśnieniowe, a jeden wrzący. Z dużym prawdopodobieństwem można twierdzić, że będzie to reaktor ciśnieniowy chłodzony i moderowany lekką wodą pracujący w układzie dwuobiegowym (*ang. PWR*).

Układy technologiczne bloku jądrowego z wybranym reaktorem nie podlegają zmianom w okresie cyklu jego życia. Nie dotyczy to wszelako systemów monitorowania i sterowania bloku energetycznego z reaktorem jądrowym. Niezwykle szybki rozwój nowych, opartych na rozwiązaniach mikro-technologicznych środków techniki komputerowej, w tym rozwiązań sieciowych, stwarza możliwości zastosowania w elektrowniach jądrowych nowoczesnych podejść do sterowania wypracowanych w ostatnich latach [1]. O ile zatem nie ma potrzeby rozważania problemu modyfikacji technologii bloków energetycznych z reaktorami jądrowymi w wybudowanych elektrowniach o tyle istnieje otwarta możliwość doskonalenia systemów monitorowania i sterowania takimi blokami w okresie ich eksploatacji. Stanowi to istotną motywację dla prowadzenia badań w tym obszarze w Polsce. Jej zasadność potwierdzają przypadki krajów, które zakupiły technologie jądrowe za granicą, takich na przykład jak Słowacja, Węgry czy Finlandia.

Podstawowym celem eksploatacji nowoczesnej elektrowni jądrowej (EJ) jest produkcja energii elektrycznej przy osiągnięciu jak najwyższej sprawności wytwarzania. Nadrzędnym wymogiem jest zapewnienie bezpieczeństwa ludności z otoczenia elektrowni i jej personelu oraz utrzymanie szkodliwych zagrożeń poniżej dopuszczalnego poziomu.

Blok energetyczny z reaktorem jądrowym współpracujący z systemem elektroenergetycznym działającym według zasad deregulacji rynku energii powinien być traktowany jako całościowy system. Sterowanie w czasie rzeczywistym tak określonym systemem jest zadaniem złożonym. Powszechnie zaakceptowanym, posiadającym już ugruntowane podstawy teoretyczne podejściem do jego rozwiązywania jest dekompozycja hierarchiczna. Zastosowanie tego podejścia pozwala na zaproponowanie struktur sterowania rozważanego systemu, które zapewniają z jednej strony realizację nadrzędnego celu działania systemu, a z drugiej pozwalają rozwiązywać skutecznie poszczególne zadania sterowania systemu. Prowadzi to do zdefiniowania w najniższej warstwie sterowania bezpośredniego zadań sterowania dla poszczególnych obiektów bloku jądrowego.

W praktyce zatem sterowanie mocą bloku dekomponowane jest na sterowanie poszczególnymi układami technologicznymi związanymi z reaktorem, stabilizatorem ciśnienia, wytwornicą

pary, turbiną, generatorem synchronicznym i wyprowadzeniem mocy do systemu elektroenergetycznego (SEE). Przedmiotem rozprawy jest zadanie sterowania mocą cieplną reaktora jądrowego. Reaktor jądrowy posiada następujące cechy z punktu widzenia dynamiki:

- różne skale czasowe zachodzących w nim procesów, np. dla rdzenia reaktora można wyróżnić:
  - procesy szybkie – kinetyka neutronów, wymiana ciepła pomiędzy elementami paliwowymi a chłodziwem,
  - procesy wolne – zatrucie produktami rozszczepienia, np. ksenonem
  - procesy bardzo wolne – zapozielenie produktami rozszczepienia, np. samarem,
- nieliniowość, np. biliniowa punktowa kinetyka neutronów,
- niestacjonarność, np. zmiana składu izotopowego paliwa,
- przestrzenny charakter zjawisk, np. proces generacji i odbioru ciepła w reaktorze.

## 1.2 Teza rozprawy

Rozprawa doktorska ma na celu rozwiązanie problemu naukowego zdefiniowanego jako sterowanie szybkimi procesami reaktora wodnego ciśnieniowego elektrowni jądrowej. Wielkością sterowaną jest moc cieplna reaktora przy szerokim zakresie zmian punktu pracy. Podstawowe nowe podejście do sterowania rozważane przy rozwiązywaniu problemu sterowania to połączenie rachunku niecałkowitego rzędu i technologii rozmytych. W związku z powyższym w rozprawie stawiana jest następująca teza:

***Zastosowanie sterowania z wykorzystaniem operatorów rachunku niecałkowitego rzędu pozwala uzyskać lepsze wartości wskaźników jakości sterowania szybkimi procesami reaktora wodnego ciśnieniowego elektrowni jądrowej.***

Motywacja podjęcia wymienionego problemu jest dwojaka. Szeroki zakres zmian punktu pracy elektrowni jądrowej może być spowodowany:

1. działaniem mechanizmów deregulacji rynku energii elektrycznej powodujących, że od coraz większej części elektrowni będzie wymagana praca ze zmiennym obciążeniem,
2. stanami zakłóceniovymi w obrębie EJ i w jej otoczeniu.

Dodatkowym czynnikiem motywującym jest rozwój techniki komputerowej, który pozwala na syntezę i implementację zaawansowanych metod sterowania.

Jak wspomniano, elektrownie jądrowe są obiektami o złożonej budowie. Zjawiska fizyczne zachodzące w ich instalacjach procesowych mają nieliniową i niestacjonarną naturę. Aby skutecznie i wydajnie sterować automatycznie tego typu obiektami/instalacjami w szerokim zakresie



zmian ich punktu pracy wymagane jest zastosowanie odpowiednich algorytmów sterowania. Stosowanie pojedynczych regulatorów z nastawami dobraćnymi dla nominalnych warunków pracy jest niewystarczające.

W rozprawie doktorskiej zostanie przedstawiona charakterystyka procesów reaktora jądrowego wodnego ciśnieniowego ze szczególnym uwzględnieniem procesów szybkich: generacja ciepła (kinetyka neutronów) i jego odbiór (wymiana ciepła pomiędzy paliwem a chłodziwem). Następnie zostaną zaprezentowane dwie grupy modeli wymienionych procesów. Jedne z nich zostaną wykorzystane do opracowania metody syntezy układu automatycznego sterowania wykorzystującego postulowane zaawansowane metody związane z rachunkiem niecałkowitego rzędu oraz technologią rozmytą. Drugie będą wykorzystane przy symulacyjnej weryfikacji proponowanego układu sterowania. Zaprezentowana metoda syntezy będzie bazować na całkowych kryteriach jakości sterowania. W rozprawie zostanie również podjęta analiza jakościowa opracowanego układu sterowania.

### 1.3 Struktura i zawartość rozprawy

Rozprawa doktorska swoim zakresem obejmuje:

- charakterystykę procesów zachodzących w reaktorze jądrowym,
- przedstawienie problemu sterowania mocą cieplną reaktora jądrowego oraz jego rozwiązania w postaci wieloobszarowego rozmytego regulatora z lokalnymi regulatorami  $PI^{\lambda}D^{\mu}$ ,
- przedstawienie podejścia do modelowania węzłowego procesów szybkich reaktora jądrowego z uwzględnieniem zmiennego rozkładu generowanej mocy cieplnej,
- charakterystykę technologii, które zostały wykorzystane przy opracowaniu algorytmu sterowania mocą cieplną reaktora jądrowego pozwalającego na zmianę punktu pracy w szerokim zakresie,
- przedstawienie metody syntezy opracowanego algorytmu sterowania,
- badania symulacyjne obejmujące weryfikacje zastosowanego algorytmu sterowania.

Tematyka przedstawiona powyżej została zawarta w następujących rozdziałach:

#### **Rozdział 1 – Wstęp**

W rozdziale tym przedstawiono stan oraz motywację do podjęcia tematu rozprawy doktorskiej, zawarto w nim również tezę oraz zakres pracy.

## **Rozdział 2 – Reaktor jądrowy typu PWR jako obiekt sterowania**

Rozdział ten zawiera charakterystykę procesów zachodzących w reaktorze jądrowym typu PWR ze szczególnym uwzględnieniem zjawisk, które pozwalają na sterowanie jego mocą cieplną.

## **Rozdział 3 – Sformułowanie problemu sterowania mocą cieplną reaktora jądrowego**

W rozdziale tym został sformułowany problem sterowania mocą cieplną reaktora jądrowego wraz z przedstawieniem założeń, które dotyczą algorytmu sterowania opracowanego w ramach rozprawy doktorskiej. Rozdział ten zawiera również charakterystykę zaproponowanego algorytmu sterowania tj. wieloobszarowego rozmytego regulatora z lokalnymi regulatorami  $PI^{\lambda}D^{\mu}$ . Poza tym w rozdziale przedstawiono charakterystykę urządzenia wykonawczego pełniącego rolę napędu realizującego zmianę położenia prętów sterujących w rdzeniu reaktora. Na końcu rozdziału został przedstawiony aktualny stan badań z zakresu metod sterowania mocą reaktora jądrowego oraz technik związanych z wykorzystaniem operatorów rachunku różniczkowo-całkowego niecałkowitego rzędu oraz technologii rozmytych.

Rozwiązania zawarte w tym rozdziale zostały częściowo przedstawione w publikacjach:

B. Puchalski, T. Rutkowski i K. Duzinkiewicz, „Wieloobszarowa rozmyta regulacja PID mocy reaktora jądrowego”, *Pomiary Automatyka Kontrola*, t. 59, nr 12, 2013.

B. Puchalski, K. Duzinkiewicz i T. Rutkowski, „Analiza sterowania ułamkowego  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  mocą reaktora jądrowego”, *Informatyka, Automatyka, Pomiary w Gospodarce i Ochronie Środowiska*, t. 4, s. 63–68, 2013.

B. Puchalski, K. Duzinkiewicz i T. Rutkowski, „Wieloobszarowa rozmyta regulacja  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  mocy reaktora jądrowego” w *Aktualne Problemy Automatyki i Robotyki*, t. 20, Warszawa: Akademicka Oficyna Wydawnicza EXIT, 2014, s. 544–557.

## Rozdział 4 – Modele matematyczne obiektu sterowania

W rozdziale tym zostały szczegółowo przedstawione dwa opracowane modele matematyczne procesów szybkich reaktora jądrowego typu PWR. Pierwszy z modeli, o znacznie prostszej strukturze, został wykorzystany w etapie syntezy zaproponowanego w rozprawie algorytmu sterowania, natomiast drugi z nich uwzględniający zmianę rozkładu generowanej mocy cieplnej został wykorzystany w badaniach symulacyjnych prowadzących do weryfikacji opracowanego algorytmu sterowania.

Rozwiązania zawarte w tym rozdziale zostały częściowo przedstawione w publikacjach:

B. Puchalski, T. A. Rutkowski i K. Duzinkiewicz, „Multi-nodal PWR reactor model Methodology proposition for power distribution coefficients calculation”, w *2016 21st International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics (MMAR)*, 2016, s. 385–390.

B. Puchalski, T. A. Rutkowski i K. Duzinkiewicz, „Nodal models of Pressurized Water Reactor core for control purposes – A comparison study”, *Nuclear Engineering and Design*, t. 322, s. 444–463, paź. 2017.

## Rozdział 5 – Technologie matematyczne syntezy układu sterowania

W rozdziale tym zostały opisane technologie wykorzystane przy opracowaniu zaproponowanego w rozprawie algorytmu sterowania – wieloobszarowego rozmytego regulatora z lokalnymi regulatorami  $PI^{\lambda}D^{\mu}$ , tj. rachunek różniczkowo-całkowy niecałkowitego rzędu oraz sterowanie rozmyte. Poprzez połączenie tych technologii uzyskano algorytm sterowania pozwalający na regulację mocy cieplnej reaktora jądrowego w szerokim zakresie zmian punktu pracy.

## Rozdział 6 – Synteza układu sterowania mocą cieplną reaktora jądrowego

Rozdział ten przedstawia dwuetapową metodę syntezy wieloobszarowego rozmytego regulatora z lokalnymi regulatorami  $PI^{\lambda}D^{\mu}$ , która wykorzystuje optymalizację. Pierwszy etap zaproponowanej metody obejmuje optymalny dobór nastaw lokalnych regulatorów  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  w zdefiniowanych a priori punktach pracy. Drugi etap metody obejmuje optymalny dobór parametrów funkcji przynależności rozmytej części regulatora. Na końcu tego rozdziału zostały zaprezentowane wyniki syntezy zaproponowanego w rozprawie wieloobszarowego regulatora  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  oraz dla porównania, jego klasycznego odpowiednika (wieloobszarowego regulatora PID).

Rozwiązania zawarte w tym rozdziale zostały częściowo przedstawione w publikacjach:

B. Puchalski, T. Rutkowski i K. Duzinkiewicz, „Wieloobszarowa rozmyta regulacja PID mocy reaktora jądrowego”, *Pomiary Automatyka Kontrola*, t. 59, nr 12, 2013.

B. Puchalski, K. Duzinkiewicz i T. Rutkowski, „Analiza sterowania ułamkowego  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  mocą reaktora jądrowego”, *Informatyka, Automatyka, Pomiarzy w Gospodarce i Ochronie Środowiska*, t. 4, s. 63–68, 2013.

B. Puchalski, K. Duzinkiewicz i T. Rutkowski, „Wieloobszarowa rozmyta regulacja  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  mocy reaktora jądrowego”, w *Aktualne Problemy Automatyki i Robotyki*, t. 20, Warszawa: Akademicka Oficyna Wydawnicza EXIT, 2014, s. 544–557.

B. Puchalski, K. Duzinkiewicz i T. Rutkowski, „Multi-region fuzzy logic controller with local PID controllers for U-tube steam generator in nuclear power plant”, *Archives of Control Sciences*, t. 25, nr 4, s. 429–444, 2015.

B. Puchalski, T. Rutkowski, J. Tarnawski i K. Duzinkiewicz, „Comparison of tuning procedures based on evolutionary algorithm for multi-region fuzzy-logic PID controller for non-linear plant”, w *2015 20th International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics (MMAR)*, 2015, s. 897–902.

## **Rozdział 7 – Analiza stabilności układu sterowania**

W rozdziale tym została przedstawiona analiza stabilności układu regulacji mocy cieplnej reaktora jądrowego typu PWR, w którym wykorzystano opracowany w rozprawie wieloobszarowy regulator  $PI^{\lambda}D^{\mu}$ .

## **Rozdział 8 – Symulacyjna weryfikacja układu sterowania**

W rozdziale tym zostały zaprezentowane symulacyjne badania weryfikacyjne przedstawiające działanie układu regulacji, w którym wystąpił opracowany w rozprawie wieloobszarowy rozmyty regulator z lokalnymi regulatorami  $PI^{\lambda}D^{\mu}$ . Badania te zostały wykonane w oparciu o model reaktora jądrowego uwzględniający zmianę rozkładu generowanej mocy cieplnej – obiekt wirtualny. Swym zakresem obejmują one porównanie jakości sterowania układu regulacji mocy cieplnej, w którym wystąpił pojedynczy regulator PID i  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  oraz wieloobszarowy rozmyty regulator z lokalnymi regulatorami PID i  $PI^{\lambda}D^{\mu}$ . Zachowanie układu regulacji mocą cieplną reaktora jądrowego z ww. regulatorami było badane dla scenariuszy regulacji nadążnej oraz stałowartościowej. W rozdziale tym zawarte są również wyniki symulacyjne pokazujące rozszerzone możliwości wykorzystanego w weryfikacji modelu uwzględniającego zmianę rozkładu generowanej mocy cieplnej.

## **Rozdział 9 – Podsumowanie i wnioski**

Rozdział ten stanowi podsumowanie rozprawy doktorskiej wraz z określeniem kierunków przyszłych badań.

## 2. Reaktor jądrowy typu PWR jako obiekt sterowania

Pierwsza na świecie elektrownia jądrowa została zbudowana w Obnińsku w Rosji [2]. Wówczas miała ona moc cieplną równą 30 MW. Reaktor jądrowy tej elektrowni został uruchomiony 5 maja, a turbina wraz z prądnicą 27 czerwca 1954 r. Nastąpiło to niespełna sześć lat po detonacji pierwszej bomby atomowej (test Trinity) w Stanach Zjednoczonych 16 lipca 1945 r.

Elektrownie jądrowe różnią się budową, a ich podstawowym elementem jest reaktor energetyczny. Rozróżnić można dwie główne grupy reaktorów energetycznych tj. reaktory termiczne oraz reaktory prędkie. W reaktorach termicznych procesy rozszczepienia jąder atomowych spowodowane są głównie przez neutrony termiczne, których energia kinetyczna jest mniejsza niż 0,4 eV. W reaktorach prędkich procesy rozszczepienia jąder atomowych spowodowane są przez neutrony prędkie, których energia kinetyczna jest większa od 1 keV. Wszystkie dotychczas budowane reaktory jądrowe energetyczne są reaktorami niejednorodnymi tj. paliwo jądrowe jest w nich mechanicznie oddzielone od chłodziwa i moderatora [3]. W tabeli 2.1 została przedstawiona podstawowa klasyfikacja pięciu głównych typów reaktorów energetycznych.

Tabela 2.1. Klasyfikacja głównych typów reaktorów energetycznych [4].

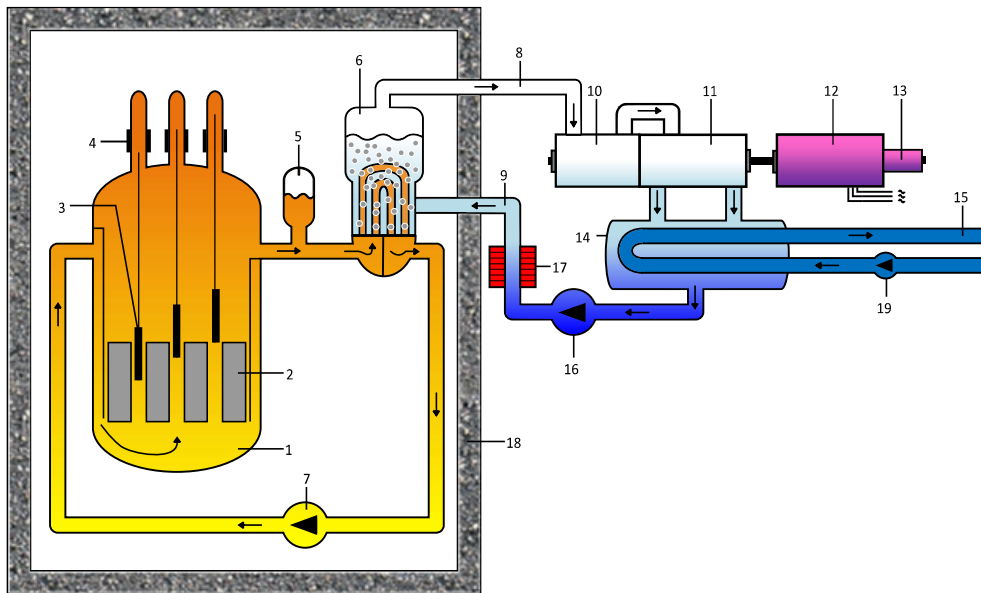
	Reaktor wodny ciśnieniowy (PWR)	Reaktor wodny wrzący (BWR)	Reaktor jądrowy ciężkowodny (CANDU)	Wysokotemperaturowy reaktor chłodzony gazem (HTGR)	Reaktor prędkie wielojądrowy z ciekłym metalem (LMFBR)
Paliwo	UO <sub>2</sub>	UO <sub>2</sub>	UO <sub>2</sub>	UC, ThC <sub>2</sub>	PuO <sub>2</sub> , UO <sub>2</sub>
Wzbogacenie	3% U-235	2,5% U-235	0,7% U-235	93% U-235	15% (stężenie procentowe) Pu-239
Moderator	woda	woda	ciężka woda	grafit	brak
Chłodziwo	woda	woda	ciężka woda	hel	ciekły sód
Materiał koszulki paliwowej	cyrkon	cyrkon	cyrkon	grafit	stal nierdzewna
Sterowanie	B <sub>4</sub> C lub pręty Ag-In-Cd	pręty w kształcie krzyża z B <sub>4</sub> C	poziom moderatora	pręty B <sub>4</sub> C	pręty z Ta lub B <sub>4</sub> C
Materiał zbiornika paliwa	stal	stal	stal	strunobeton	stal

W niniejszej rozprawie rozważany jest reaktor ciśnieniowy chłodzony i moderowany lekką wodą [5], pracujący w układzie dwu-obiegowym, który nazywany jest potocznie reaktorem wodnym ciśnieniowym. Jego rozwinięta anglojęzyczna nazwa to *Pressurized light Water moderated*

*and cooled Reactor*, w skrócie PWR. Należy on do rodziny reaktorów wodnych, które są najbardziej rozpowszechnione wśród reaktorów energetycznych oraz stanowią 90% wszystkich reaktorów pracujących na świecie [2]. Należą one również do najbezpieczniej pracujących urządzeń przemysłowych [2].

Elektrownia jądrowa z reaktorem typu PWR, na której skupiono uwagę w rozprawie, pod względem technologii wytwarzania energii elektrycznej przypomina konwencjonalną elektrownię opalaną węglem [6]. Główne różnice występują w elementach wytwarzających ciepło, parę jak i w parametrach technologicznych wykorzystanych urządzeń technicznych. W uproszczeniu palenisko oraz kocioł parowy elektrowni konwencjonalnej, w rozważanej elektrowni jądrowej jest zastąpiony odpowiednio reaktorem jądrowym oraz wytwornicą pary.

W reaktorze jądrowym, elektrowni typu PWR, wytwarzana jest moc cieplna wskutek przebiegu kontrolowanej reakcji łańcuchowej, w obrębie elementów paliwowych, których temperatura waha się od 1788 do 2021°C [6]. W zależności od producenta parametry pracy oraz moc cieplna wytwarzana w tego typu elektrowniach typowo zawiera się w przedziale od 3411 do 3800 MW [6]. W zbiorniku reaktora energia cieplna oddawana jest do chłodziwa, którym jest lekka woda. Temperatura wody na wlocie (wejściu) do reaktora waha się w przedziale od 296 do 300°C [6], zaś podgrzane chłodziwo na wylocie z reaktora ma temperaturę od 328 do 333°C [6]. Chłodziwo krąży w zamkniętej pętli obiegu pierwotnego z przepływem, wymuszonym przez pompy, zawierającym się w granicach od 62 do 72 · 10<sup>6</sup> kg/h [6]. Ciśnienie panujące w obiegu pierwotnym utrzymywane jest na poziomie 15,5 MPa [6] za pomocą stabilizatora ciśnienia, aby zapobiec wrzeniu. Podgrzane chłodziwo przekazywane jest do wytwornicy pary, która jest elementem łączącym obieg pierwotny z obiegiem wtórnym. W wytwornicy pary chłodziwo przepływa przez wiązkę rur grzejnych w kształcie litery U, przekazując ciepło do wody zasilającej. W skutek przyjmowania ciepła, woda zasilająca o ciśnieniu 7,5 MPa [7], zaczyna wrzeć, wytwarzając parę wodną. Pęcherzyki pary wodnej unoszące się w wytwornicy napotykają separatory wilgoci, które oddzielają wodę od pary. Osuszona para o stopniu suchości większym niż 99,75% [8] opuszcza wytwornicę oraz betonową osłonę bezpieczeństwa budynku reaktora. Para przekazywana jest dalej, za pomocą rurociągów, do turbiny parowej sprzęgniętej z generatorem elektrycznym. W generatorze wytwarzana jest moc elektryczna zawierająca się w przedziale od 1150 do 1300 MW [6]. Rozprężona para wodna z turbiny parowej przekazywana jest do skraplacza, w którym zmienia stan skupienia. Skroplona para ze skraplacza pompowana jest przez podgrzewacze regeneracyjne na nowo do wytwornicy pary. Sprawność tego typu elektrowni pracującej w układzie dwuobiegowym zawiera się w przedziale od 33,3 do 34,2% [6]. Uproszczony schemat poglądowy elektrowni jądrowej z reaktorem typu PWR, której opis technologiczny został zamieszczony powyżej, przedstawiono na rysunku 2.1.



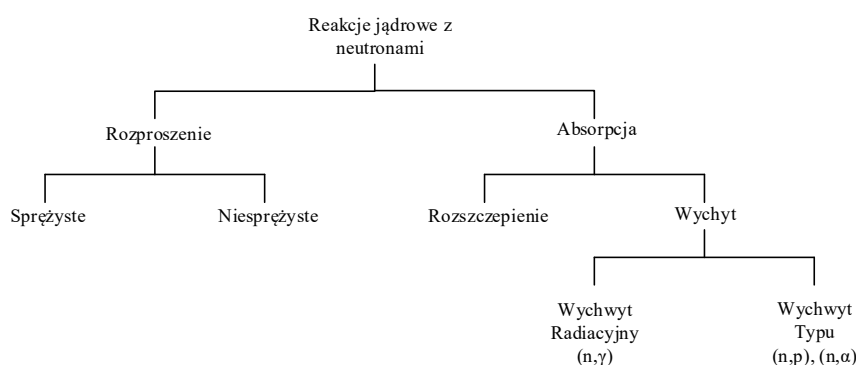
Rysunek 2.1. Schemat poglądowy elektrowni jądrowej z reaktorem typu PWR [2]  
 1 – zbiornik reaktora, 2 – rdzeń, 3 – pręty sterujące, 4 – napędy prętów sterujących, 5 – stabilizator ciśnienia, 6 – wytwornica pary, 7 – pompa chłodziwa, 8 – para świeża, 9 – woda zasilająca, 10 – część WP (wysokoprężna) turbiny, 11 – część NP (niskoprężna) turbiny, 12 – generator, 13 – wzбудnica, 14 – skraplacz, 15 – układ wody chłodzącej, 16 – pompa wody zasilającej, 17 – podgrzewacz regeneracyjny, 18 – betonowa osłona bezpieczeństwa, 19 – pompa wody chłodzącej.

## 2.1 Reaktor jądrowy typu PWR jako obiekt sterowania

Podstawowym celem stawianym podczas procesów projektowania oraz eksploatacji reaktora jądrowego jest wydajne wykorzystanie energii powstającej w procesie kontrolowanej reakcji łańcuchowej w obszarze rdzenia reaktora. Zjawisko, dzięki któremu możliwe jest wywołanie i podtrzymanie reakcji łańcuchowej ma miejsce, gdy jądra atomowe pierwiastków ciężkich są rozszczepiane na dwa pomniejsze. Częstką najefektywniej rozszczepiającą jądra atomowe pierwiastków ciężkich jest neutron, głównie z powodu braku ładunku elektrycznego. W akcie rozszczepienia ciężkiego jądra generowanych jest kilka nowych neutronów oraz uwalniana jest energia cieplna. Produkty reakcji rozszczepienia powstają z ogromną energią kinetyczną, która jest zamieniana na ciepło podczas ich spowalniania w moderatorze, który znajduje się w obszarze rdzenia. Energia kinetyczna produktów rozszczepienia stanowi ok. 80% całkowitej energii uwalnianej w tym procesie [6]. Mniej istotnymi elementami reakcji rozszczepienia generującymi energię cieplną są: neutrony prędkie (3%), promieniowanie gamma (4%) oraz promieniowanie beta (4%) [6].

### 2.1.1 Reakcje jądrowe i typy neutronów w rdzeniu reaktora

Oprócz rozszczepienia ciężkich jąder przez neutrony, w obrębie rdzenia występują również inne rodzaje reakcji jądrowych zachodzących z ich udziałem. Pierwszą z nich jest absorpcja neutronu przez jądro atomowe ciężkiego pierwiastka. Absorbpcja może bezpośrednio prowadzić do rozszczepienia lub wychwytu. W wyniku wychwytu neutronu przez jądro atomowe może nastąpić emisja kwantu  $\gamma$  (wychwyt radiacyjny), jądra helu ( $n, \alpha$ ) lub protonu ( $n, p$ ). Drugą możliwą reakcją z udziałem neutronu jest rozproszenie. Rozproszenie można podzielić na sprężyste lub niesprężyste. Rozproszenie sprężyste występuje, gdy neutron zderza się z jądrem atomowym, wytracając w ten sposób część swojej energii oraz zmieniając swój kierunek i prędkość [9]. Rozproszenie niesprężyste występuje, gdy neutron na krótki czas wnika w jądro atomowe, które następnie wyemituje z powrotem neutron o mniejszej energii oraz promieniowanie  $\gamma$  jako różnicę energii [9]. Na rysunku 2.2 przedstawiono opisane powyżej oddziaływania neutronów z materią znajdującą się w rdzeniu reaktora.



Rysunek 2.2. Reakcje jądrowe z udziałem neutronów [2], [6];  
 $n$  – neutron,  $p$  – proton,  $\alpha$  – cząsteczka alfa,  $\gamma$  – promieniowanie gamma.

Neutrony powstające w reakcjach rozszczepienia można podzielić ze względu na czas ich powstawania oraz energię kinetyczną, którą posiadają. Większość neutronów jest produkowanych w akcie rozszczepienia bezzwłocznie (w przeciągu ok.  $10^{-14}$  sekundy). Takie neutrony są nazywane neutronami natychmiastowymi. Istnieją również neutrony, zwane opóźnionymi, produkowane w procesie rozpadu produktów rozszczepienia. Proces ten jest opóźniony względem pierwotnego aktu rozszczepienia od kilku milisekund do kilku, kilkunastu sekund. Ilość tych neutronów waha się od ok. 0,6% do ok. 1% wszystkich nowo powstałych neutronów.

Uproszczony podział neutronów ze względu na energię kinetyczną, którą posiadają jest następujący [9]:



- neutrony termiczne:  $E < 0,4$  eV,
- neutrony rezonansowe:  $0,5$  eV  $< E <$  kilkaset eV,
- neutrony prędkie:  $E > 1$  keV.

Z punktu widzenia reakcji rozszczepienia najbardziej korzystnym przedziałem energetycznym jest przedział neutronów termicznych, gdyż dla niego rozszczepienie pierwiastków ciężkich jest najbardziej prawdopodobne [9], [10]. Neutrony zawierające się w tym przedziale posiadają energię przybliżoną do ruchów cieplnych otaczających atomów.

### 2.1.2 Moc cieplna, współczynnik mnożenia i reaktywność

Podstawową wielkością sterowaną w reaktorze jądrowym jest całkowita moc cieplna  $P_{TH}$  wyrażona poniższą zależnością [3], [4]

$$P_{TH} = w\sigma_F N\bar{\phi}V, \quad (2.1)$$

gdzie  $w$  jest energią powstałą wskutek aktu rozszczepienia,  $\sigma_F$  jest przekrojem czynnym na rozszczepienie,  $N$  jest ilością jąder paliwa jądrowego w centymetrze sześciennym,  $\bar{\phi}$  jest uśrednionym po objętości rdzenia strumieniem neutronów, a  $V$  jest objętością reaktora.

Wielkości  $w$ ,  $\sigma_F$ ,  $N$  oraz  $V$  można traktować, jako stałe i zastąpić współczynnikiem  $\Gamma$ . Przy takim założeniu równanie (2.1) upraszcza się do następującej postaci [3]

$$P_{TH} = \Gamma\bar{\phi}, \quad (2.2)$$

gdzie  $\Gamma = w\sigma_F NV$ . Równanie (2.2) pokazuje, że istnieje proporcjonalna zależność pomiędzy mocą cieplną reaktora  $P_{TH}$ , a uśrednionym po objętości rdzenia strumieniem neutronów  $\bar{\phi}$ . Wiedząc, że uśredniony strumień neutronów jest wyrażony poprzez następujący iloczyn [3], [4]

$$\bar{\phi} = \bar{n}\bar{v}, \quad (2.3)$$

gdzie  $\bar{n}$  to uśredniona po objętości rdzenia gęstość neutronów termicznych, a  $\bar{v}$  to średnia prędkość neutronów termicznych w rdzeniu, można zapisać zależność pomiędzy  $P_{TH}$ , a  $\bar{n}$  w następującej postaci

$$P_{TH} = \Gamma\bar{v}\bar{n}. \quad (2.4)$$

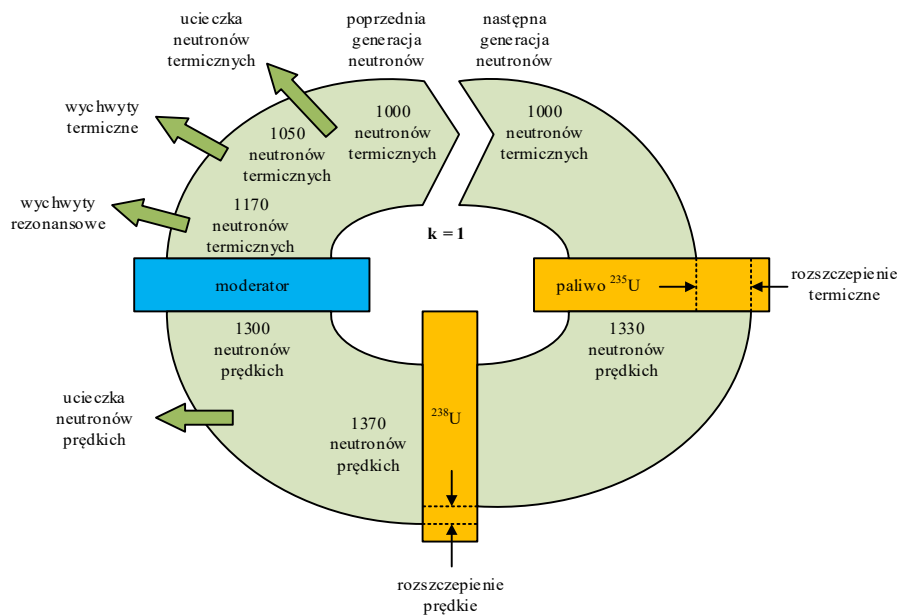
Średnią prędkość neutronów termicznych w rdzeniu  $\bar{v}$  również można traktować jako wielkość stałą. Zastępując średnią prędkość neutronów  $\bar{v}$  oraz współczynnik  $\Gamma$  wielkością  $Y$ , równanie (2.4) przyjmuje następującą postać [3]

$$P_{TH} = Y\bar{n}, \quad (2.5)$$

gdzie  $Y = \Gamma \bar{\nu}$ . Z zależności opisanej równaniem (2.5) wynika, że całkowita moc cieplna reaktora jądrowego jest proporcjonalna do średniej gęstości neutronów termicznych w rdzeniu. Powyższe rozważania pokazują, że moc cieplna generowana w reaktorze jądrowym jest proporcjonalna do średniego strumienia oraz średniej gęstości neutronów w rdzeniu, tj. [3]

$$P_{TH} \sim \bar{\phi} \sim \bar{n}. \quad (2.6)$$

Wpływając na średni strumień neutronów  $\bar{\phi}$  w rdzeniu reaktora jądrowego jest możliwa zmiana aktualnie generowanej w nim mocy cieplnej. Aby reaktor generował stałą moc, wymagane jest, żeby wystąpiła w nim samopodtrzymująca się reakcja łańcuchowa, w której bilans neutronów będzie stały. Obrazowe przedstawienie idei samopodtrzymującej się reakcji łańcuchowej w reaktorze wodnym ciśnieniowym, w którym bilans neutronów jest stały został zaprezentowany na rysunku 2.3.



Rysunek 2.3. Obrazowe przedstawienie bilansu neutronów w reaktorze wodnym ciśnieniowym [11].

Neutrony powstające w reakcji łańcuchowej mogą zainicjować kolejne rozszczepienia, zostać wychwycone przez jądra izotopów niepodlegających rozszczepieniu lub bezpowrotnie uciec z obszaru rdzenia reaktora. Spoglądając na przebieg reakcji łańcuchowej, przez pryzmat ilości neutronów powstających w akcie rozszczepienia, można wyróżnić generacje neutronów. Wielkość  $k$  przedstawiona jako iloraz liczby neutronów następnego pokolenia (nowo wytworzone neutrony) do liczby neutronów poprzedniego pokolenia nazywana jest współczynnikiem mnożenia [6]

$$k = \frac{\text{liczba neutronów następnego pokolenia}}{\text{liczba neutronów poprzedniego pokolenia}}. \quad (2.7)$$

Łatwo zauważyć, że gdy współczynnik mnożenia  $k$  jest równy jedności to liczba neutronów w reaktorze jest stała. Taki stan reaktora nazywany jest stanem krytycznym [6]. Gdy współczynnik mnożenia jest mniejszy od jedności ( $k < 1$ ), wtedy ilość neutronów w reaktorze zmniejsza się z generacji na generację. Taki stan pracy reaktora nazywany jest stanem podkrytycznym [6]. Ostatni możliwy przypadek odzwierciedla stan, w którym ilość neutronów w reaktorze rośnie bezgranicznie, tj., gdy współczynnik mnożenia jest większy od jedności ( $k > 1$ ). Taki stan reaktora nazywany jest stanem nadkrytycznym [6].

Stan reaktora można również określić za pomocą wielkości zwanej reaktywnością  $\rho$ . Reaktywność wyraża odchylenie współczynnika mnożenia  $k$  od jedności:

$$\rho(t) = \frac{k(t) - 1}{k(t)}. \quad (2.8)$$

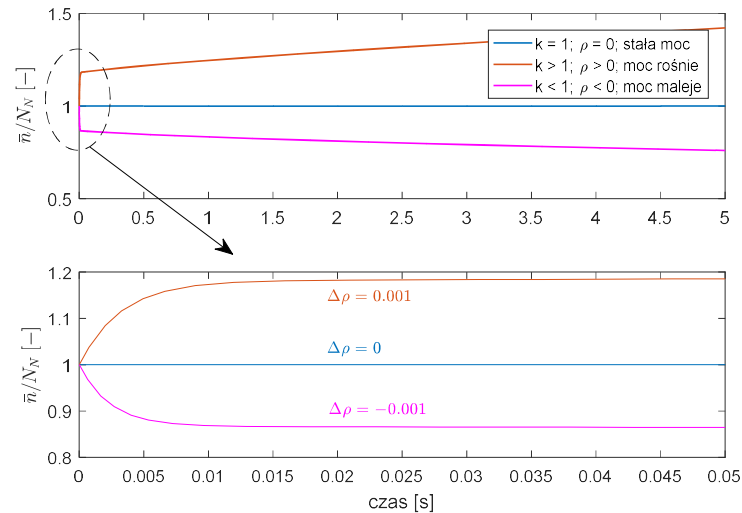
Reaktywność  $\rho(t)$  jest stosowana głównie w przypadku niewielkich odchyżeń od stanu krytycznego reaktora, tj. gdy  $k \cong 1$  [12]. Dodatkowo jako zmienna bardzo często pojawia się w modelach matematycznych opisujących kinetykę reaktora jako ekwiwalent współczynnika mnożenia, w celu ułatwienia zapisu matematycznego.

Zarówno reaktywność jak i współczynnik mnożenia są funkcjami zależnymi od czasu. Jak już wcześniej wspomniano wielkości te są bezpośrednio związane ze stanem, w jakim aktualnie znajduje się reaktor. W tabeli 2.2 przedstawiono zestawienie stanów, w których może znajdować się reaktor w zależności od współczynnika mnożenia oraz od reaktywności [9].

Tabela 2.2. Zestawienie stanów reaktora jądrowego [9].

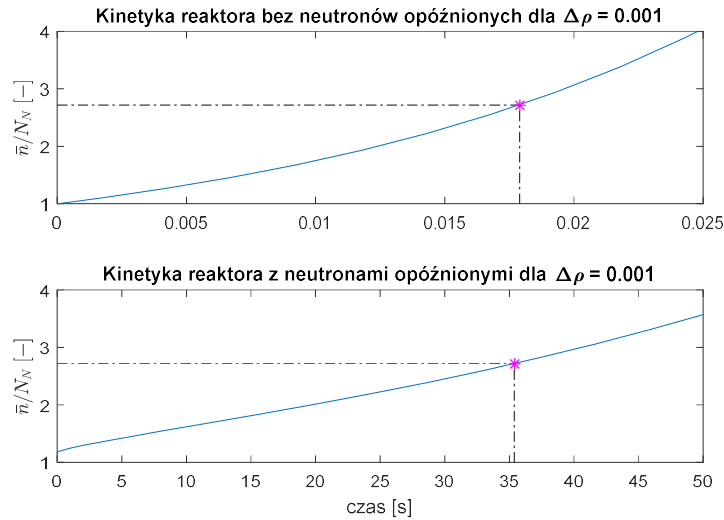
Stan reaktora	krytyczny	nadkrytyczny	podkrytyczny
wsp. mnożenia $k$	1	>1	<1
reaktywność $\rho$	0	>0	<0
gęstość neutronów $\bar{n}$	stała	rośnie	maleje
moc reaktora $P_{TH}$	stała	rośnie	maleje
stany ruchowe reaktora	ruch z ustaloną mocą	rozruch, zwiększanie mocy	wyłączanie reaktora, zmniejszanie mocy

Na rysunku 2.4 zostały obrazowo przedstawione stany reaktora opisane w tabeli 2.2. Zmiany mocy cieplnej reaktora na poniższym rysunku reprezentowane są poprzez zmiany gęstości neutronów w odpowiedzi na skoki reaktywności  $\Delta\rho$  (z uwzględnieniem sześciu grup prekursorów neutronów opóźnionych).

Rysunek 2.4. Zmiany gęstości neutronów w odpowiedzi na skoki reaktywności  $\Delta\rho$ .

### 2.1.3 Neutrony opóźnione

Prawie wszystkie neutrony wytwarzane w reakcji rozszczepienia są neutronami natychmiastowymi. Niewielką grupę, zaledwie ok. 0,7%, stanowią neutrony opóźnione [13]. Produkowane są one z mierzalnym opóźnieniem w stosunku do neutronów natychmiastowych i odgrywają one bardzo ważną rolę w zagadnieniu sterowania reaktorem [13]. Gdyby neutrony opóźnione nie istniały przyrost mocy reaktora, przy odchyleniu reaktywności od stanu krytycznego, byłby praktycznie natychmiastowy. Dzięki tym neutronom przyrost mocy jest o wiele wolniejszy, a przy rozważanej w rozprawie technologii jądrowej, możliwe jest sterowanie przebiegiem reakcji łańcuchowej w reaktorze. Dla porównania na rysunku 2.5 został przedstawiony przyrost gęstości neutronów w przypadku, w którym nie występują neutrony opóźnione oraz z ich uwzględnieniem. Jak już wcześniej wspomniano, gęstość neutronów jest wielkością, która jest proporcjonalna do mocy cieplnej reaktora. Na rysunku 2.5 zaznaczono również okres reaktora, który jest zdefiniowany, jako czas potrzebny na zwiększenie mocy o  $e \approx 2,718$  razy. Jak można zaobserwować, okres reaktora z pominięciem neutronów opóźnionych wynosi ok. 0,018 s, natomiast przy obecności neutronów opóźnionych okres reaktora wydłuża się do ok. 35 s. Tak znaczna różnica w zwiększaniu się ilości neutronów w czasie, a co za tym idzie mocy cieplnej, powoduje, że reaktor jądrowy jest obiektem dającym się kontrolować, głównie ze względu na występowanie neutronów opóźnionych. W przykładzie przedstawionym na rysunku 2.5 wykorzystano punktowy model kinetyki reaktora opisany w podrozdziale 4.1.



Rysunek 2.5. Wpływ neutronów opóźnionych na kinetykę reaktora jądrowego.

### 2.1.4 Efekty reaktywnościowe

Neutrony opóźnione to integralne zjawisko wykorzystywane w sterowaniu reaktorem jądrowym typu PWR. Równie istotnymi zjawiskami, które występują w trakcie jego pracy są efekty reaktywnościowe. Zmianom mocy cieplnej reaktora towarzyszą zmiany temperatur paliwa i chłodziwa, gromadzenie się produktów rozszczepienia w rdzeniu oraz wypalanie paliwa [9]. Z kolei zmiany temperatur wpływają na zmiany gęstości materiałów, z których wykonany jest rdzeń reaktora oraz na zmiany gęstości chłodziwa, które spełnia rolę moderatora i reflektora w reaktorach typu PWR. Również ze zmianami temperatur zmieniają się energie neutronów, co w następstwie powoduje istotne zmiany w zachodzeniu reakcji łańcuchowej. Natomiast w gromadzących się produktach rozszczepienia pojawiają się jądra o bardzo dużym przekroju czynnym na wychwyty, które trwale pochłaniają neutrony, zmieniając ich ilość w bilansie neutronów. Jądra o bardzo dużych przekrojach czynnych na wychwyty nazywane są truciznami reaktorowymi [9]. Ich występowanie znacznie ogranicza liczbę neutronów, które podlegają rozszczepieniu w paliwie. Wymienione wyżej efekty wpływają bezpośrednio na zmianę współczynnika mnożenia  $k$ , co wiąże się również ze zmianami reaktywności zgodnie ze wzorem (2.8).

Biorąc pod uwagę powyższe rozważania w reaktorze jądrowym można wyróżnić efekty reaktywnościowe zależne od [9]:

- zmian temperatury paliwa,
- zmian temperatury moderatora,
- zatrucia,
- wypalania paliwa.

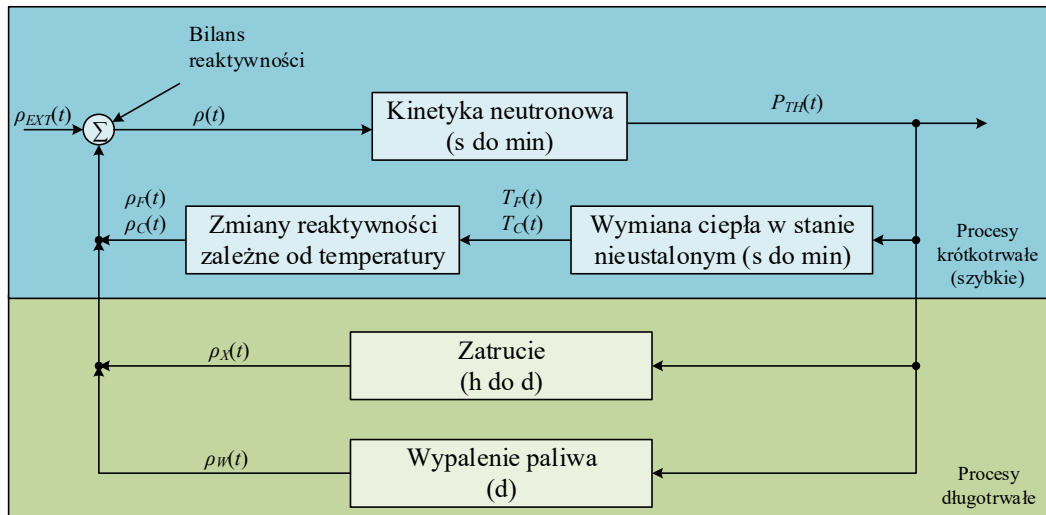
Procesy występujące w reaktorach jądrowych można podzielić m.in. ze względu na skalę czasu związaną z ich zachodzeniem. Wyróżnia się procesy krótkotrwałe (szybkie) oraz procesy długotrwałe (wolne) [9]. Te pierwsze zachodzą w przedziale czasu od sekund do minut, natomiast te drugie w przedziale od godzin do dni. Do procesów krótkotrwałych zalicza się: kinetykę neutronową, procesy wymiany ciepła oraz efekty reaktywnościowe zależne od zmian temperatur [9]. Do procesów długotrwałych zalicza się zatrucia truciznami reaktorowymi oraz wypalanie paliwa [9].

W rozprawie brane są pod uwagę tylko procesy krótkotrwałe, a w szczególności przedziały czasu od sekund do kilku minut od wystąpienia zmian reaktywności. W wymienionym przedziale czasu procesy dynamiczne związane z kinetyką i wymianą ciepła już zanikną, natomiast procesy związane z zatruciem oraz wypaleniem paliwa nie uwidoczną się dostatecznie. W ogólności sterowanie reaktorem jądrowym jest realizowane poprzez systemy: regulacji kwasem borowym, regulacji absorberami oraz regulacji prętami sterującymi. Wszystkie z wymienionych systemów charakteryzują się odmienną dynamiką, jednakże system regulacji prętami sterującymi jest spośród nich najszybszy i dlatego wyłącznie on jest rozważany w rozprawie.

W wyżej wymienionych procesach krótkotrwałych największą rolę pełnią sprzężenia reaktywnościowe od temperatury paliwa –  $\rho_F$  oraz temperatury chłodziwa –  $\rho_C$ . Reaktywność w reaktorze jądrowym może również ulegać zmianom wskutek zewnętrznych oddziaływań –  $\rho_{EXT}$ . W rozprawie przyjęto, że zewnętrzne zmiany reaktywności spowodowane są wyłącznie ruchem prętów sterujących w rdzeniu reaktora. Zmiany reaktywności wywołane zmianami temperatur paliwa lub chłodziwa przedstawia się w formie współczynników reaktywnościowych  $\alpha_F$  oraz  $\alpha_C$  zdefiniowanych jako [6]

$$\alpha_F \equiv \frac{\partial \rho_F}{\partial T_F} \quad \text{oraz} \quad \alpha_C \equiv \frac{\partial \rho_C}{\partial T_C}. \quad (2.9)$$

Na rysunku 2.6 przedstawiono idee sprzężeń reaktywnościowych. Zaznaczono na nim sprzężenia reaktywnościowe z uwzględnieniem procesów krótko oraz długotrwałych.



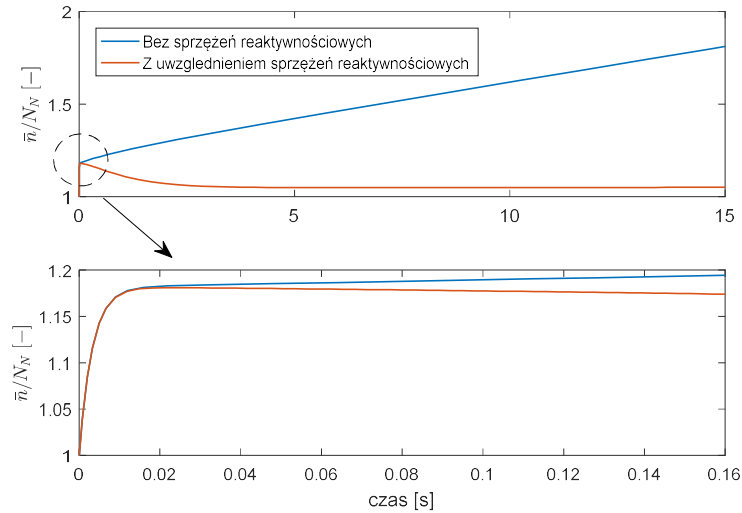
Rysunek 2.6. Sprzężenia reaktywnościowe występujące w reaktorze jądrowym z podziałem na skale czasowe [9].

Powyższy rysunek ilustruje, w jaki sposób sprzężenia reaktywnościowe oddziałują na kinetykę neutronów. Ważnym jest, aby sprzężenia należące do procesów krótkotrwałych miały charakter ujemny ze względów bezpieczeństwa pracy reaktora np. zwiększanie temperatury w reaktorze prowadzi do zmniejszania mocy cieplnej (współczynnik mnożenia  $k < 1$ ). Ujemny efekt reaktywnościowy wpływa korzystnie na obiekt sterowania, jakim jest reaktor, umożliwiając jego stabilną pracę. Gdyby efekt reaktywnościowy nie występował lub był dodatni, to przy nagłych wzrostach temperatury paliwa lub chłodziwa reaktor mógłby się stać obiektem niestabilnym. Zatem efekty reaktywnościowe od temperatury można traktować jako wewnętrzne ujemne sprzężenie zwrotne (rysunek 2.6) powodujące samoczynną stabilizację reaktora. Na rysunku 2.7 przedstawiono efekt zjawiska samoczynnej stabilizacji spowodowanej występowaniem ujemnych sprzężeń reaktywnościowych od temperatury paliwa oraz chłodziwa.

Bilans reaktywności  $\rho$  z uwzględnieniem ujemnych sprzężeń reaktywnościowych od temperatury paliwa  $T_F$  i chłodziwa  $T_C$  oraz zmian reaktywności wywołanej przez ruch prętów sterujących  $\rho_{EXT,R}$  opisany jest za pomocą następującej zależności

$$\rho(t) = \rho_{EXT,R}(t) + \alpha_F T_F(t) + \alpha_C T_C(t) = \rho_{EXT,R}(t) + \rho_F(t) + \rho_C(t), \quad (2.10)$$

przy czym  $\alpha_F < 0$  oraz  $\alpha_C < 0$ .



Rysunek 2.7. Gęstość neutronów z pominięciem oraz z uwzględnieniem sprzężeń reaktywnościowych.

## 2.2 Sterowanie reaktorem

Moc cieplna, jak już wcześniej wspomniano w podrozdziale 2.1.2, jest podstawową wielkością sterowaną w reaktorze jądrowym energetycznym. W równaniu (2.6) pokazano, że jest ona proporcjonalna do średniego strumienia oraz średniej gęstości neutronów w rdzeniu. W oparciu o równania (2.5) i (2.6) można zapisać następujące równanie różniczkowe, opisujące zmiany mocy cieplnej w czasie [3]:

$$\frac{dP_{TH}}{dt} = Y \frac{d\bar{n}}{dt}. \quad (2.11)$$

Zmianę uśrednionej gęstości neutronów termicznych można przybliżyć następującą zależnością [3], [6], [12]

$$\frac{d\bar{n}}{dt} \cong \frac{(k-1)\bar{n}}{l}, \quad (2.12)$$

gdzie  $l$  to czas życia neutronów natychmiastowych. Zakładając niewielkie odchylenia od stanu krytycznego, tj.  $k \cong 1$  oraz wprowadzając do równania (2.12) reaktywność  $\rho$  i nową wielkość reprezentującą średni czas generacji neutronów w następującej postaci [6], [12], [13]

$$\Lambda = \frac{l}{k}, \quad (2.13)$$

otrzyma się równanie opisujące zmianę średniej gęstości neutronów w rdzeniu reaktora

$$\frac{d\bar{n}}{dt} \cong \frac{\rho}{\Lambda} \bar{n}. \quad (2.14)$$



Dla niewielkich odchyień od stanu krytycznego, tj., gdy  $k \cong 1$  średni czas generacji neutronów  $\Lambda \cong l$ .

Wykorzystując związki (2.5) oraz (2.14) w równaniu (2.11) otrzyma się opis zmiany mocy cieplnej reaktora w czasie, w zależności od reaktywności [3]

$$\frac{dP_{TH}}{dt} = Y \frac{\rho}{\Lambda} \bar{n} = \frac{1}{\Lambda} P_{TH} \rho. \quad (2.15)$$

Równanie (2.15) odzwierciedla bezpośredni związek pomiędzy mocą cieplną wytwarzaną w reaktorze jądrowym a reaktywnością. Bazując na związku (2.15), można stwierdzić, że wpływ na moc cieplną reaktora jądrowego jest związany z umiejętnością prowadzenia bilansu reaktywności, który jest reprezentowany za pomocą zmiennej  $\rho$  [3]. Z równania (2.15) można również wywnioskować, że stan krytyczny reaktora jądrowego może być osiągnięty dla różnych poziomów generowanej mocy cieplnej.

Równanie (2.15) jest równaniem różniczkowym liniowym jednorodnym rzędu pierwszego o następującej postaci

$$\frac{dy(t)}{dt} - p(t)y(t) = 0, \quad (2.16)$$

gdzie  $y(t) = P_{TH}(t)$  oraz  $p(t) = \frac{\rho(t)}{\Lambda}$ . Jest to równanie o zmiennych rozdzielonych, którego rozwiązaniem ogólnym jest następująca funkcja

$$y(t) = y_0 e^{\int_{t_0}^t p(\xi) d\xi}. \quad (2.17)$$

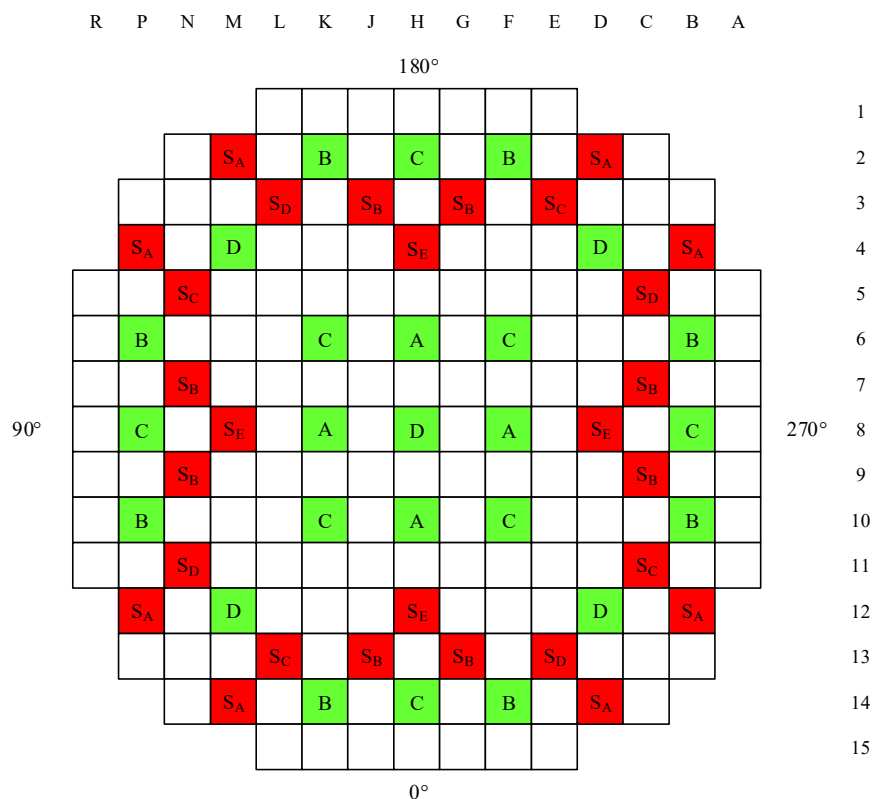
Rozwiązanie równania (2.15) może wydawać się łatwe ze względu na postać (2.16). Jednakże w praktyce rozwiązanie to nie jest trywialne z powodu wymienionych poniżej czynników. Po pierwsze równanie (2.15) nie uwzględnia występowania neutronów opóźnionych, które w znaczący sposób zmieniają rozwiązanie ze względu na występowanie stałych czasowych z przedziału od  $10^{-6}$  do 80 sekund [6]. Drugim czynnikiem utrudniającym rozwiązanie równania (2.15) jest reaktywność  $\rho(t)$ , która jest funkcją zależną od czasu jak i od gęstości neutronów  $\bar{n}(t)$  [6]. Z tego względu równanie (2.15) jest równaniem nieliniowym.

Reaktor jądrowy można sklasyfikować, jako obiekt nieliniowy, niejednorodny oraz niestacjonarny [3]. Nieliniowość wynika ze specyfiki procesów zachodzących w reaktorze, a pod względem sterowania poziomem mocy objawia się w zależności pomiędzy gęstością neutronów a reaktywnością. Niejednorodność jest związana głównie z budową reaktora jak i występowaniem nierównomierności w rozkładzie strumienia neutronów oraz w rozkładzie temperatur w rdzeniu.

Niestacjonarność, w największym stopniu, powodowana jest poprzez zmiany składu izotopowego rdzenia w czasie pracy reaktora oraz przez zmiany właściwości cieplno-fizycznych. Wymienione właściwości wymagają odpowiedniego podejścia do sterowania mocą cieplną, które w reaktorze jądrowym typu PWR jest realizowane poprzez układ regulacji zagłębienia prętów sterujących w rdzeniu (oddziaływanie szybkie) oraz poprzez układy regulacji stężenia kwasu borowego rozpuszczonego w chłodziwie i wypalające się absorbery neutronów (oddziaływanie wolne). W rozprawie brany jest pod uwagę wyłącznie pierwszy rodzaj regulacji mocy cieplnej.

Pręty sterujące zbudowane są z materiałów absorbujących neutrony takich jak hafn, kadm lub bor [9], [14]. Ich podstawowym zadaniem jest usuwanie neutronów z reakcji rozszczepienia. Pojedyncze pręty sterujące zgrupowane są w zespoły, które następnie zagłębiane są wewnątrz kaset paliwowych zamiast elementów paliwa [9]. Kasety, w których występują pręty sterujące rozmieszczone są symetrycznie w rdzeniu reaktora w odpowiednich grupach [3]. Ich wsuwanie lub wysuwanie z rdzenia nigdy nie odbywa się pojedynczo, lecz w grupach [15], [16].

Typowo występują dwa rodzaje prętów sterujących, które różnią się przeznaczeniem jak i materiałem, z którego są zbudowane. Wyróżnia się pręty „czarne” oraz pręty „szare”. Pręty „szare” pochłaniają mniej neutronów w porównaniu do prętów „czarnych” oraz powodują mniejsze zniekształcenia strumienia neutronów w pobliżu ich działania [14]. Ze względu na te właściwości wykorzystywane są one głównie do automatycznej regulacji mocy bez wywoływania dużych nierównomierności w rozkładzie strumienia neutronów [9], [14]. Pręty „czarne” składają się z bardzo silnych absorbentów neutronów. Ich głównym zadaniem jest planowane jak i awaryjne wyłączenie reaktora [9], [15]. Podczas typowej pracy reaktora jądrowego pręty „czarne” są wysunięte z rdzenia. Na rysunku 2.8 przedstawiono przykładowe rozmieszczenie kaset paliwowych w reaktorze typu PWR, w których występują obydwa typy prętów sterujących.



Rysunek 2.8. Rozmieszczenie kaset paliwowych w reaktorze PWR z podziałem na grupy, w których występują pręty sterujące. Kolorem zielonym zaznaczono grupy prętów szarych, a kolorem czerwonym grupy prętów czarnych [17].

Oprócz prętów sterujących wykorzystuje się również związki pochłaniające neutrony, które wprowadzane są do chłodziwa ze zmiennym stężeniem [9]. Typowo stosowanym związkiem rozpuszczanym w chłodziwie, w celu pochłaniania neutronów, jest kwas borowy. Bor jest pierwiastkiem, który silnie pochłania neutrony, nie powoduje korozji oraz nie osadza się na elementach rdzenia [6]. Regulację stężenia kwasu borowego w chłodziwie używa się głównie do kompensacji nadmiaru reaktywności w trakcie trwania kampanii paliwowej oraz w przypadku powolnych jej zmian spowodowanych np. wypalaniem paliwa, gromadzeniem się w paliwie produktów rozszczepienia silnie pochłaniających neutrony (trucizny reaktorowe) lub zmianami temperatury moderatora (efekt reaktywnościowy zależny od temperatury moderatora) [6], [9]. Niewątpliwą zaletą regulacji kwasem borowym jest równomierność rozkładu czynnika pochłaniającego neutrony oraz niezależność od innych elementów wpływających na reaktywność [6]. Dzięki temu ułatwiony jest załadunek paliwa świeżego w taki sposób, aby wyrównać rozkład mocy w rdzeniu reaktora [6]. Kolejną zaletą stosowania kwasu borowego jest redukowanie przemieszczania prętów sterujących.

Dynamika układu regulacji zagłębienia prętów sterujących (sekundy) w porównaniu do dynamiki układu regulacji kwasem borowym (dziesiątki minut) jest o wiele szybsza, dlatego też układ ten jest stosowany w przypadkach, gdy występuje potrzeba nagłej zmiany reaktywności. Główną

wadą układu regulacji zanurzenia prętów w stosunku do układu regulacji kwasem borowym jest znaczny wpływ na poziom nierównomierności rozkładu mocy w rdzeniu reaktora.

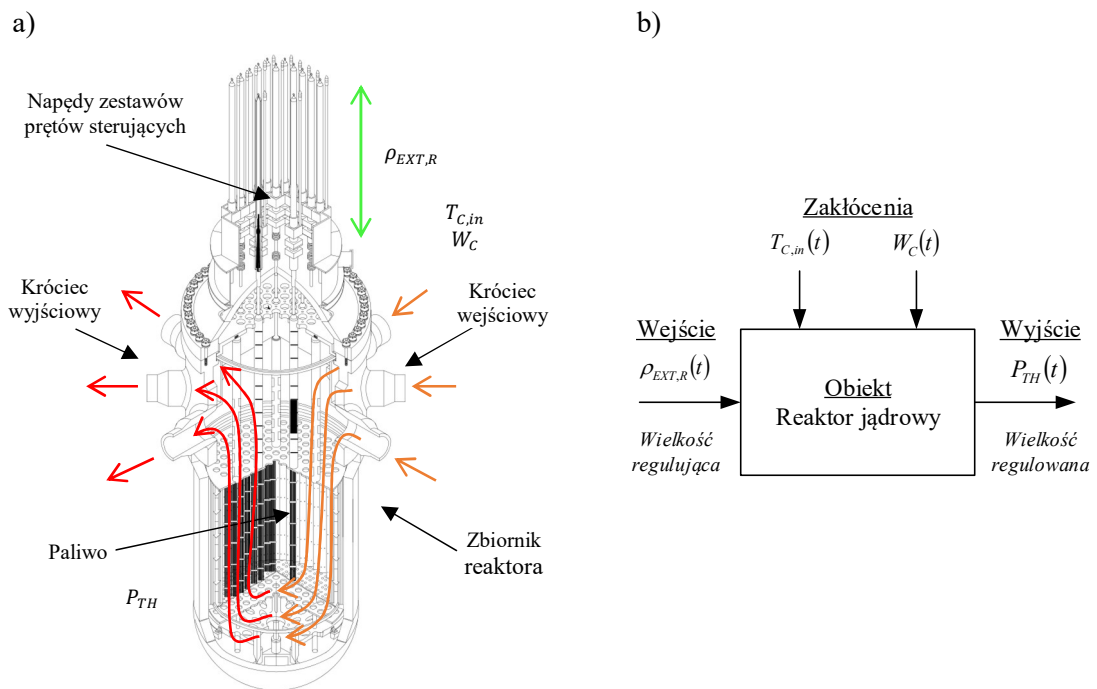
Z powodu ograniczeń związanych z wprowadzaniem jak i wyprowadzaniem kwasu borowego z objętości chłodziwa, zmiany reaktywności w czasie powodowane tą formą regulacji są mniejsze w stosunku do regulacji prętami sterującymi. Obecność rozpuszczalnych związków pochłaniających neutrony w chłodziwie reaktora powoduje również zmiany w próżniowym współczynniku reaktywności, który wraz z ich wprowadzaniem zmienia swój znak z ujemnego na dodatni. [6]. Próżniowy współczynnik reaktywności określa zawartość fazy gazowej w chłodziwie [14]. Podobnie do temperaturowego współczynnika reaktywności jego wzrost oznacza zmniejszanie gęstości moderatora, co bezpośrednio przekłada się na zmniejszenie możliwości spowalniania neutronów – dodatni przyrost reaktywności [6]. Utrzymanie negatywnego próżniowego współczynnika reaktywności wiąże się z ograniczeniem dopuszczalnego stężenia kwasu borowego w chłodziwie [6].

Zmiany w bilansie reaktywności wywołane przedstawionymi powyżej układami regulacji reaktora jądrowego typu PWR mają odmienny charakter zarówno pod względem fizyki zjawisk jak i skal czasowych. Komplementarność tych układów powoduje, że możliwe jest wpływanie na procesy krótkotrwałe jak i długotrwałe. Jak już wcześniej wspomniano w rozprawie będą rozpatrywane tylko procesy krótkotrwałe reaktora jądrowego. Proces syntezy algorytmów sterowania jak i proces ich weryfikacji został oparty wyłącznie o układ regulacji prętami sterującymi. Układ regulacji kwasem borowym nie jest brany pod uwagę.

Z punktu widzenia bezpieczeństwa, sterowanie reaktorem musi uwzględniać jego przestrzenną naturę. Podczas sterowania mocą reaktora należy zadbać o to, aby paliwo było równomiernie wypalane oraz aby nie przekroczyć gęstości mocy lub temperatur granicznych w danej objętości rdzenia. Nieodpowiednie sterowanie może doprowadzić do lokalnego uszkodzenia koszulek paliwowych, w których umieszczone jest paliwo i wydostania się pierwiastków promieniotwórczych do obiegu chłodziwa. W bardziej krytycznych przypadkach niewłaściwe sterowanie może doprowadzić do uszkodzenia całego rdzenia reaktora, a co za tym idzie do awaryjnego zatrzymania całej elektrowni jądrowej. Dlatego ważnym jest, aby algorytmy odpowiedzialne za sterowanie mocą cieplną reaktora jądrowego pozwalały na wydajną jak i bezpieczną jej zmianę. Drugim ważnym aspektem jest opracowanie i wykorzystanie modeli matematycznych reaktora, które będą pozwalały na syntezę oraz analizę projektowanych układów sterowania.

Z punktu widzenia syntezy algorytmów sterowania w rozprawie reaktor jądrowy traktowany jest jako obiekt o jednym wejściu oraz o jednym wyjściu (obiekt SISO). Rysunek 2.9a obrazowo przedstawia reaktor jądrowy wraz z zaznaczonymi wielkościami interesującymi pod względem

sterowania mocą cieplną. Na rysunku tym zaznaczono wielkość regulującą tj. reaktywność wprowadzaną do rdzenia reaktora za pośrednictwem prętów sterujących –  $\rho_{EXT,R}$  oraz wielkość regulowaną, czyli moc cieplną reaktora jądrowego –  $P_{TH}$ . Dodatkowo na rysunku poglądowo zaznaczono przepływ chłodziwa przez reaktor (kolory strzałek oznaczają temperaturę chłodziwa) wraz ze zmiennymi go charakteryzującymi, tj. temperaturą chłodziwa na wejściu reaktora –  $T_{C,in}$  oraz masowym przepływem chłodziwa przez reaktor –  $W_C$ . Zmienne te stanowią wejścia zakłócające. Na rysunku 2.9b został przedstawiony model reaktora jądrowego, w formie bloku, uwzględniający wielkości brane pod uwagę w kontekście sterowania.



Rysunek 2.9. Opis wejść i wyjść reaktora jądrowego z punktu widzenia układu sterowania mocą cieplną [18].

### 3. Sformułowanie problemu sterowania mocą cieplną reaktora jądrowego

---

Elektrownie jądrowe funkcjonują przeważnie jako podstawowe źródło energii elektrycznej w sieciach elektroenergetycznych. Oznacza to, że pracują one głównie w nominalnym punkcie pracy odpowiadającym 100% obciążeniu (obciążeniu znamionowemu). Wprowadzane mechanizmy deregulacji rynku energii oraz wzrastający udział elektrowni jądrowych w bilansie energetycznym sieci może prowadzić do zmian tej sytuacji, czyli do pracy elektrowni jądrowych ze zmieniającym się punktem pracy, to znaczy z różnym obciążeniem.

Dotychczas sterowanie reaktorem jądrowym (mocą cieplną reaktora jądrowego) przy zmianie punktu pracy odbywało się z udziałem operatorów bloku, czyli z wykorzystaniem sterowania ręcznego. Realizacja tego zadania z użyciem wyłącznie sterowania automatycznego wymaga rozwoju nowych podejść do określenia struktury i parametrów układu sterującego. Niniejsza rozprawa jest próbą wypracowania takiego nowego podejścia poprzez wykorzystanie rachunku różniczkowo-całkowego niecałkowitego rzędu oraz technologii systemów rozmytych.

Postęp technologiczny pozwala uzyskać większą wydajność elektrowni jądrowych w sensie ekonomicznym [19]. Dzięki rozwijaniu nowych technologii i ich aplikacji, praca elektrowni jądrowej w warunkach zmiennego zapotrzebowania na energię elektryczną jest coraz łatwiejsza w realizacji. Wraz z postępowaniem technologicznym istnieje ciągła potrzeba rozwijania wszystkich podsystemów elektrowni jądrowej, a zwłaszcza nowoczesnych układów sterowania związanych z jej najważniejszym elementem, tj. reaktorem energetycznym. Zainteresowanie elektrowniami jądrowymi jest podyktowane nie tylko postępowaniem w rozwoju ich technologii związanych z bezpieczeństwem, dostępnością czy wzrastającą efektywnością ekonomiczną. Jako nieocenione zalety elektrowni jądrowych można wyróżnić również zerową emisję CO<sub>2</sub> oraz stabilne koszty paliwa jądrowego [20].

W rozprawie podjęto temat sterowania procesami szybkimi reaktora jądrowego typu PWR, gdzie wielkością sterowaną jest moc cieplna reaktora. Z rozważań wyłączone zostały zagadnienia oddziaływania procesów wolnych na moc reaktora. Realizacja wyżej wymienionego zadania została oparta o nowe podejście w dziedzinie sterowania wykorzystujące połączenie technologii takich jak: algorytm regulacji PI<sup>λ</sup>D<sup>μ</sup><sup>1</sup>, który bazuje na operatorach rachunku różniczkowo-całkowego niecałkowitego rzędu oraz system rozmyty z wnioskowaniem Takagi-Sugeno (TS) [21]. W niniejszym rozdziale przedstawiono kluczowe elementy związane z podejmowaną tematyką,

---

<sup>1</sup> Greckie litery  $\lambda$  oraz  $\mu$  oznaczają odpowiednio rząd operatora całowania oraz różniczkowania.

tj. określenie założeń odnoszących się do modelu sterowanego procesu oraz do wykorzystywanych algorytmów sterowania, sformułowanie problemu sterowania podjętego w rozprawie oraz przedstawienie współczesnego stanu wiedzy i badań związanych z poruszaną tematyką.

### 3.1 Założenia

Systemem rozważanym w rozprawie są procesy i oddziaływania sterujące szybkie, które kształtują moc cieplną reaktora jądrowego. Oznacza to, że spośród wszystkich procesów i oddziaływań sterujących kształtujących tę moc wybrane zostają procesy generacji ciepła (kinetyka neutronów) i jego odbioru z reaktora oraz oddziaływania sterujące realizowane za pomocą zmian położenia zespołu prętów sterujących.

W podrozdziale 2.2 wskazano, że praca reaktora na energetycznych poziomach mocy odpowiada jego stanowi krytycznemu, to znaczy stanowi, w którym reaktywność  $\rho$  jest równa zero (współczynnik mnożenia neutronów  $k$  jest równy jedności). Wskazano też, że stan krytyczny reaktora może być związany z dowolnym poziomem mocy. Sumaryczna reaktywność kształtująca przebieg procesów kinetyki neutronów jest wynikiem realizacji wszystkich procesów (załadunek paliwa świeżego, wypalenie paliwa, zatrucie i zapopielenie paliwa, odbiór ciepła) i wszystkich oddziaływań sterujących (położenie zespołu prętów sterujących, stężenie kwasu borowego w chłodziwie). Biorąc powyższe pod uwagę można stwierdzić:

1. przechodzenie od jednego energetycznego poziomu mocy do innego oznacza przechodzenie od stanu krytycznego z jednym poziomem mocy do stanu krytycznego z innym poziomem mocy,
2. w bilansie reaktywności kształtującej proces przejścia wystarczy uwzględnić tylko te jego składniki, które zmieniają swoją wartość w okresie przejścia; zatem rozważając krótkie okresy przejścia wystarczy ograniczyć się wyłącznie do zmian reaktywności wnoszonych przez procesy prężkie i szybkie oddziaływania sterujące; zmiany reaktywności wynikające z realizacji pozostałych procesów i oddziaływań można przyjąć, jako zerowe.

Podsumowując, można stwierdzić, że procesy kinetyki neutronów o przyjętym spojrzeniu będą kształtowane przez dwie wielkości – efekty reaktywnościowe od stanu termicznego rdzenia i efekty reaktywnościowe od położenia zespołu prętów sterujących. Stan termiczny rdzenia charakteryzowany będzie przez temperatury materiału paliwowego i chłodziwa. Ciepło odbierane jest z reaktora przez przepływające chłodziwo. Proces ten kształtowany jest przez stan termiczny rdzenia (temperatura paliwa, temperatura chłodziwa w objętości rdzenia). Wielkości zewnętrzne wpływające na ten proces to temperatura chłodziwa na wlocie do reaktora i masowy przepływ

chłodziwa przez rdzeń reaktora. Z wyżej wymienionych względów, założenia przyjęte w rozprawie dzielą się na dwie podstawowe kategorie, tj. założenia odnoszące się do modeli matematycznych obiektu zainteresowania oraz założenia odnoszące się do opracowanych algorytmów sterowania.

### 3.1.1 Założenia odnoszące się do modeli matematycznych reaktora jądrowego

Z powodu braku dostępu do obiektu rzeczywistego w rozprawie zostały opracowane dwa modele matematyczne reaktora jądrowego, które znacząco różnią się strukturą oraz funkcjonalnością. Różnice te w znaczący sposób wpływają na odzwierciedlenie procesów szybkich (podrozdział 2.1.4) zachodzących w rdzeniu reaktora jądrowego. Cechą wspólną obydwu opracowanych modeli matematycznych jest punktowe podejście do modelowania kinetyki neutronów oraz węzłowe podejście do modelowania procesów wymiany ciepła pomiędzy paliwem a chłodziwem reaktora jądrowego.

Pierwszy z opracowanych modeli (podrozdział 4.1 i 4.2) stanowi model projektowy i służy do celów syntezy zaproponowanych w rozprawie algorytmów sterowania. Drugi z opracowanych modeli (podrozdział 4.1 i 4.3) stanowi obiekt wirtualny i został on wykorzystany do celów weryfikacji projektowanych algorytmów sterowania. Model projektowy charakteryzuje się uproszczonym węzłowym podejściem do modelowania procesów wymiany ciepła, natomiast obiekt wirtualny cechuje się rozszerzonym podejściem uwzględniającym przestrzenny charakter tych procesów. Obydwa modele zostały opracowane w oparciu o nieliniowe równania różniczkowe zwyczajne. Nieliniowy charakter równań wynika bezpośrednio z dynamiki procesów zachodzących w rdzeniu reaktora jądrowego, pozwala także na odwzorowanie procesów modelowanego obiektu w zakresie szerokich zmian punktu pracy [6]. Takie podejście, poprzez model, umożliwia uwzględnienie w projektowanym systemie sterowania możliwości pracy elektrowni jądrowej ze zmiennym obciążeniem.

Cechami charakterystycznymi procesów zachodzących w rdzeniu reaktora jest ich przestrzenny i niestacjonarny charakter. Pierwszy czynnik związany z przestrzenną naturą zjawisk występujących w rdzeniu reaktora jądrowego jest naturalnym elementem węzłowego podejścia do modelowania procesów wymiany ciepła reaktora. Zwykle modele obiektów przemysłowych wykorzystywane do celów syntezy algorytmów sterowania charakteryzują się uproszczoną formą, gdyż główny nacisk w zadaniach syntezy położony jest na algorytmie regulacji. Dlatego też model projektowy stanowi uproszczoną wersję obiektu wirtualnego. Pomimo wykorzystania w nim węzłowego podejścia do modelowania, nie odzwierciedla on procesów przestrzennych



z powodu ograniczonej ilości węzłów. Z drugiej strony obiekt wirtualny ze względu na swoje przeznaczenie zawiera takie odwzorowanie.

Ważnym elementem związanym z modelowaniem procesów przemysłowych jest niestacjonarność obiektu sterowania. Zmiany parametrów reaktora jądrowego związane z wielkościami takimi jak: współczynniki reaktywnościowe, współczynniki przenikalności cieplnej, stałe rozpadu oraz wydajności prekursorów neutronów opóźnionych nie są uwzględniane w rozprawie. Z tego względu równania różniczkowe wykorzystywane w modelach są stacjonarne.

### 3.1.2 Założenia stawiane algorytmom sterowania

Systemy sterowania elektrowni jądrowych były poddawane ciągłym modernizacjom mającym na celu wydłużenie ich okresu eksploatacji i wydajności ekonomicznej. Pierwotnie były one budowane w oparciu o technologie analogowe. Układy sterowania mocą cieplną tych elektrowni typowo wykorzystywały dedykowane struktury sterowania [22], nieliniowe i programowe regulatory typu P [23], [24], PI [25], [26] oraz kompensatory całkująco-różniczkujące [27]. Na przestrzeni lat wyposażenie elektrowni jądrowych związane z systemami sterowania oraz układami pomiarowymi ulegało zmianom głównie ze względu na wprowadzanie technik cyfrowych, które z powodzeniem wypierały techniki analogowe [28]. W ewolucji systemów sterowania i układów pomiarowych elektrowni jądrowych można wyróżnić trzy charakterystyczne generacje [19]. Pierwsza generacja wykorzystywała głównie systemy oparte o technikę analogową oraz przekaźnikową [19]. W drugiej generacji występowały układy dyskretne oraz półprzewodnikowe [19]. Natomiast trzecia generacja, stosowana obecnie, charakteryzuje się głównie występowaniem układów cyfrowych [19]. Układy cyfrowe stosowane w systemach sterowania oraz układach pomiarowych ewoluowały bezpośrednio z urządzeń opartych o architekturę mikroprocesorową takich jak sterowniki programowalne PLC oraz komputery przemysłowe [19].

Obecnie najczęściej wykorzystywaną w przemyśle formą sterowania jest regulacja PID. Ponad 95% wszystkich przemysłowych pętli sterowania wykorzystuje ten algorytm regulacji [29], [30]. Jest on powszechnie stosowany głównie ze względu na prostą strukturę algorytmu, łatwość jego implementacji na wszelkich platformach sterowania cyfrowego oraz ze względu na możliwości odrzucania zakłóceń (regulacja stałowartościowa). Gwałtowny rozwój technologii cyfrowych umożliwia stosowanie coraz bardziej zaawansowanych algorytmów sterowania. Powszechnie stosowane układy regulacji w elektrowniach jądrowych nie są w stanie osiągać dobrej jakości sterowania w przypadku szerokich zmian punktu pracy głównie ze względu na nieliniowy charakter dynamiki i różnych skal czasowych procesów w nim zachodzących. Zaproponowany w rozprawie algorytm sterowania wykorzystujący połączenie dwóch nowoczesnych technologii, tj. rachunku różniczkowo-całkowego niecałkowitego rzędu oraz systemu rozmytego, który bazuje

na wnioskowaniu Takagi-Sugeno, są próbą poszukiwania metod regulacji będących w stanie zapewnić lepszą jakość sterowania przy szerokich zmianach punktu pracy w stosunku do obecnie stosowanych rozwiązań. Dodatkowo zaproponowane algorytmy charakteryzują się łatwością w implementacji na platformach sterowania cyfrowego.

Pierwsza technologia wykorzystana w rozprawie jest rozszerzeniem klasycznego algorytmu sterowania PID. Poprzez wprowadzenie do algorytmu PID operatorów rachunku różniczkowo-całkowego niecałkowitego rzędu możliwe jest uzyskanie dwóch dodatkowych stopni swobody związanych z operacją całkowania i różniczkowania, tj.  $s^{-\lambda}$  oraz  $s^{\mu}$  [31]. Poprzez taką modyfikację dobór stopnia całkowania  $\lambda$  oraz różniczkowania  $\mu$  w regulatorze  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  jest dowolny, gdyż stopnie te mogą przyjmować wartości rzeczywiste  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . Zadaniem stawianym regulatorom  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  w rozprawie jest regulacja mocy cieplnej reaktora w otoczeniu lokalnych punktów pracy, które zostały zdefiniowane a priori (podrozdział 5.1.5). System rozmyty oparty o wnioskowanie Takagi-Sugeno (TS) jest drugą technologią wykorzystaną w pracy [32]. Jej zadaniem jest powiązanie lokalnych regulatorów  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  w jeden globalny nieliniowy regulator sterujący mocą cieplną reaktora jądrowego z uwzględnieniem szerokich zmian punktu pracy (podrozdział 5.2.1).

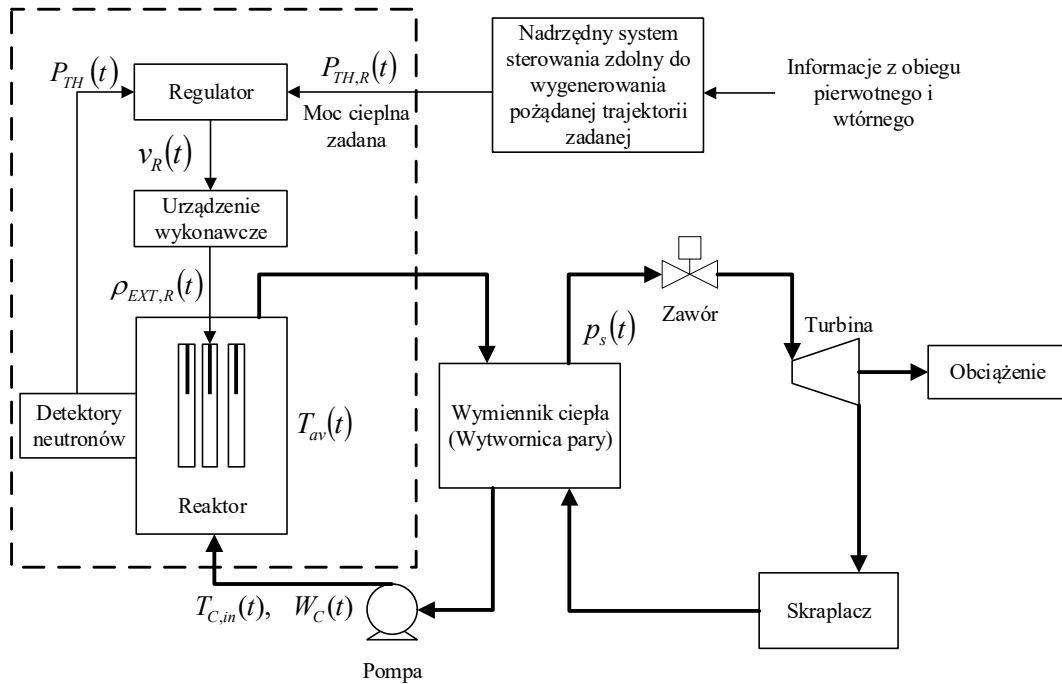
Pomiar generowanej mocy cieplnej oraz pomiar rozkładu strumienia neutronów w reaktorze jądrowym odbywa się za pośrednictwem detektorów neutronów rozlokowanych w rdzeniu i poza nim. Pomiar realizowany przez detektory neutronów wykonywane są praktycznie bez opóźnienia [9]. Mierzone wielkości przekazywane są do poszczególnych systemów elektrowni jądrowej przez wyspecjalizowane magistrale danych i są natychmiast dostępne dla układów sterowania reaktorem [28]. W związku z powyższymi uwagami dynamika detektorów neutronów oraz systemu pomiarowego mocy cieplnej została pominięta w modelu proponowanego w rozprawie układu sterowania mocą cieplną.

W przeciwieństwie do układów pomiarowych mocy cieplnej, układy wykonawcze realizujące przemieszczanie zespołów prętów sterujących, które zawierają substancje pochłaniające neutrony charakteryzują się dynamiką, której nie można pominąć w zadaniach syntezy algorytmów sterowania [13]. W rozprawie został opracowany model matematyczny urządzenia wykonawczego odzwierciedlający ruch zespołu prętów sterujących w rdzeniu reaktora. Model ten charakteryzuje się głównie ograniczeniami związanymi z: prędkością przemieszczania zespołu prętów sterujących, maksymalnym oraz minimalnym poziomem ich zagłębienia oraz nieliniową charakterystyką wkładu reaktywności w funkcji położenia (podrozdział 3.2.2).

## 3.2 Sformułowanie problemu

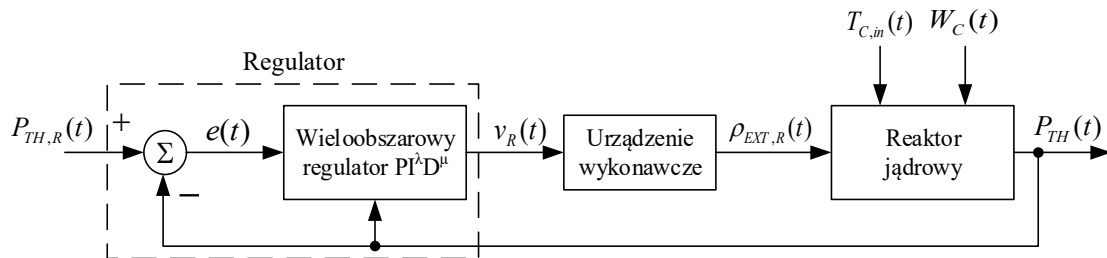
Rozprawa doktorska ma na celu rozwiązanie problemu naukowego zdefiniowanego jako sterowanie automatyczne szybkimi procesami reaktora wodnego ciśnieniowego elektrowni jądrowej przy zmianach punktu pracy reaktora. Wielkością sterowaną jest moc cieplna reaktora przy szerokim zakresie zmian punktu pracy (od 35% do 105% mocy znamionowej). Zrealizowanie celu wiąże się z opracowaniem algorytmu sterowania, który będzie w stanie zapewnić lepsze wartości wskaźników jakości w porównaniu do aktualnie stosowanych rozwiązań z uwzględnieniem zmian punktu pracy wynikających bezpośrednio ze zmiennego zapotrzebowania na energię elektryczną lub cieplną. Zaproponowane w rozprawie podejście bazuje na jednowymiarowym rozmytym wieloobszarowym sterowaniu mocą cieplną reaktora jądrowego, które wykorzystuje lokalne regulatory  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  oparte o operatory rachunku różniczkowo-całkowego niecałkowitego rzędu oraz system rozmyty z wnioskowaniem Takagi-Sugeno.

Praca elektrowni jądrowej w warunkach normalnych (ruch ze stałą mocą lub ruch nadażny) polega na dostosowaniu mocy reaktora do zadanej mocy turbogeneratorskiej [9]. Taka praca realizowana jest z pomocą programów sterujących mających za zadanie utrzymanie najważniejszych zmiennych stanu elektrowni, zależnych od mocy, w pożądanym zakresie [9]. Typowo stosowane programy to: program utrzymania stałej temperatury średniej chłodziwa oraz program utrzymania stałego ciśnienia pary nasyconej na wyjściu wytwornicy pary [9], [13]. Pierwszy z wymienionych programów jest korzystniejszy z punktu widzenia urządzeń obiegu pierwotnego, natomiast drugi jest preferowany przez elementy obiegu wtórnego [13]. Obydwa programy stoją w opozycji do siebie [9], [13]. W rozprawie przyjęto, że system sterowania mocą reaktora jądrowego jest w stanie zrealizować dowolny program sterowania zmiennymi stanu np. program stałej temperatury średniej chłodziwa  $T_{av}$ , stałego ciśnienia pary nasyconej  $p_s$  oraz dodatkowo programy, które mogą osiągać kompromis pomiędzy sterowaniem preferowanym przez obieg pierwotny lub wtórny. Na rysunku 3.1 przedstawiono uproszczony schemat blokowy systemu sterowania elektrowni jądrowej przygotowany do realizacji dowolnego programu sterującego.



Rysunek 3.1. Schemat blokowy elektrowni jądrowej z systemem sterowania przygotowanym do realizacji dowolnego programu sterującego [13]. Sygnał  $v_R(t)$  na wyjściu regulatora jest prędkością prętów sterujących.

Struktura układu sterowania typu SISO, w klasycznej formie z pominięciem układu pomiarowego, w oparciu, o którą będzie realizowana regulacja mocy cieplnej reaktora jądrowego została zobrazowana na rysunku 3.2. Struktura ta przedstawia wydzieloną pętlę sterowania z rysunku 3.1 zaznaczoną przerywanymi liniami.

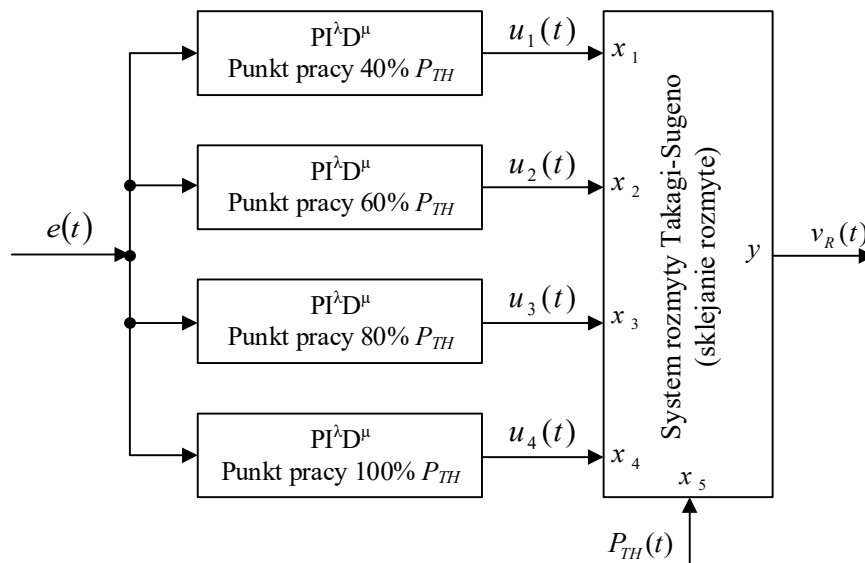


Rysunek 3.2. Struktura układu sterowania typu SISO pozwalająca na regulację mocy cieplnej reaktora jądrowego w warunkach szerokich zmian punktu pracy.

Struktura sterowania typu SISO przedstawiona na rysunku 3.2 składa się z trzech głównych elementów: regulatora wieloobszarowego  $PI^\lambda D^\mu$ , urządzenia wykonawczego oraz reaktora jądrowego, który w rozprawie zastąpiony jest odpowiednim modelem matematycznym. Wieloobszarowy regulator  $PI^\lambda D^\mu$  oprócz uchybu posiada dodatkowe wejście od aktualnie wytwarzanej mocy cieplnej (wyjście z obiektu regulacji), które stanowi zmienną wiodącą powodującą miękkie przełączanie pomiędzy występującymi w jego strukturze regulatorami lokalnymi. Poniżej zostanie scharakteryzowany regulator wieloobszarowy  $PI^\lambda D^\mu$  oraz urządzenie wykonawcze. Wykorzystane modele reaktora jądrowego zostały szczegółowo opisane w rozdziale 4.

### 3.2.1 Charakterystyka wieloobszarowego regulatora $PI^{\lambda}D^{\mu}$

Struktura zaproponowanego w rozprawie wieloobszarowego regulatora  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  została przedstawiona na rysunku 3.3. Składa się on z czterech lokalnych regulatorów  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  oraz bloku systemu rozmytego, który realizuje operację miękkiej agregacji lokalnych sterowań z regulatorów  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  według wnioskowania Takagi-Sugeno. Wnioskowanie dokonywane jest w oparciu o zmienną wiodącą, którą jest aktualnie wytwarzana moc cieplna reaktora jądrowego  $P_{TH}$ .



Rysunek 3.3. Struktura wieloobszarowego regulatora  $PI^{\lambda}D^{\mu}$ .

Baza reguł systemu rozmytego została określona w następujący sposób

$$R_1: \text{IF } x_5 \text{ is } \tilde{A}_{I5,1}, \text{ THEN } y = u_1(t), \quad (3.1)$$

$$R_2: \text{IF } x_5 \text{ is } \tilde{A}_{I5,2}, \text{ THEN } y = u_2(t), \quad (3.2)$$

$$R_3: \text{IF } x_5 \text{ is } \tilde{A}_{I5,3}, \text{ THEN } y = u_3(t), \quad (3.3)$$

$$R_4: \text{IF } x_5 \text{ is } \tilde{A}_{I5,4}, \text{ THEN } y = u_4(t), \quad (3.4)$$

gdzie  $\tilde{A}_{I5,j}$  są wejściowymi zbiorami rozmytymi systemu TS dla piątego wejścia ( $x_5$ ) oraz  $j$ -tej reguły rozmytej  $j \in \{1, \dots, 4\}$ .

Sygnaly sterujące z regulatorów  $u_{(\cdot)}$  są wyrażone za pomocą następujących zależności

$$u_1(t) = K_{P1}e(t) + K_{I1} {}_0\mathcal{D}_\infty^{-\lambda_1}e(t) + K_{D1} {}_0\mathcal{D}_\infty^{\mu_1}e(t), \quad (3.5)$$

$$u_2(t) = K_{P2}e(t) + K_{I2} {}_0\mathcal{D}_\infty^{-\lambda_2}e(t) + K_{D2} {}_0\mathcal{D}_\infty^{\mu_2}e(t), \quad (3.6)$$

$$u_3(t) = K_{P3}e(t) + K_{I3} {}_0\mathcal{D}_\infty^{-\lambda_3}e(t) + K_{D3} {}_0\mathcal{D}_\infty^{\mu_3}e(t), \quad (3.7)$$

$$u_4(t) = K_{P4}e(t) + K_{I4} {}_0\mathcal{D}_\infty^{-\lambda_4}e(t) + K_{D4} {}_0\mathcal{D}_\infty^{\mu_4}e(t), \quad (3.8)$$

gdzie  $K_P, K_I, K_D$  są odpowiednio wzmocnieniami części proporcjonalnej, całkującej i różniczkującej regulatorów lokalnych,  ${}_0\mathcal{D}_\infty^{-\lambda}$  jest operatorem całkowania niecałkowitego rzędu o stopniu  $\lambda$ ,  ${}_0\mathcal{D}_\infty^\mu$  jest operatorem różniczkowania niecałkowitego rzędu o stopniu  $\mu$ , natomiast granice działania operatorów zawarte są w przedziale  $\langle 0; \infty \rangle$ . Szczegóły związane z rachunkiem różniczkowo-całkowym niecałkowitego rzędu, regulatorem  $PI^\lambda D^\mu$  oraz systemem rozmytym Takagi-Sugeno zostały omówione w rozdziale 5.

Lokalne regulatory  $PI^\lambda D^\mu$  wykonujące operacje na podstawie sygnału uchybu generują sygnał sterujący, który następnie przekazywany jest do bloku systemu rozmytego realizującego operację agregacji lokalnych sterowań. Blok ten realizuje operacje wnioskowania rozmytego Takagi-Sugeno [21], bazując na aktualnym poziomie mocy cieplnej reaktora jądrowego. Wynikiem tych operacji jest globalny sygnał sterujący przekazywany do urządzenia wykonawczego (napęd zespołu prętów sterujących). Jego wartość obliczana jest na podstawie następującej zależności (wnioskowanie TS):

$$v_R(t) = \frac{\sum_{j=1}^4 \mu_{\tilde{A}_{I5,j}}(P_{TH}(t), \tilde{A}_{I5,j}) \cdot u_j(t)}{\sum_{j=1}^4 \mu_{\tilde{A}_{I5,j}}(P_{TH}(t), \tilde{A}_{I5,j})}, \quad (3.9)$$

gdzie  $v_R(t)$  jest globalnym sygnałem sterującym przyjmującym formę prędkości przemieszczania zespołu prętów sterujących zadawanej na urządzenie wykonawcze, indeks  $j \in \{1, \dots, 4\}$  reprezentuje indeks lokalnego sygnału sterującego oraz przypisanej do niego funkcji przynależności,  $u_j(t)$  jest sygnałem sterującym z  $j$ -tego lokalnego regulatora  $PI^\lambda D^\mu$ ,  $\mu_{\tilde{A}_{I5,j}}(\cdot)$  wyraża wagę związaną z funkcją przynależności przypisaną do  $j$ -tej reguły rozmytej, a  $P_{TH}(t)$  jest aktualną mocą cieplną reaktora jądrowego stanowiącą zmienną wiodącą dla regulatora wieloobszarowego.

Nastawy regulatorów dobierane są w sposób optymalny dla odpowiednich, znanych a priori, punktów pracy na podstawie wybranych wskaźników jakości sterowania (rozdział 6). Wnioskowanie rozmyte, bloku sklejania sterowań, realizowane jest z wykorzystaniem czterech funkcji przynależności różniących się klasami w zależności od punktu pracy. Ich podział jest następujący:

- punkt pracy 40%  $P_{TH,N}$  – funkcja przynależności klasy  $Z_{\tilde{A}_{I5,1}}$  przypisana do zbioru rozmytego  $\tilde{A}_{I5,1}$ ,
- punkt pracy 60%  $P_{TH,N}$  – funkcja przynależności klasy  $\Pi_{\tilde{A}_{I5,2}}$ , przypisana do zbioru rozmytego  $\tilde{A}_{I5,2}$ ,
- punkt pracy 80%  $P_{TH,N}$  – funkcja przynależności klasy  $\Pi_{\tilde{A}_{I5,3}}$ , przypisana do zbioru rozmytego  $\tilde{A}_{I5,3}$ ,
- punkt pracy 100%  $P_{TH,N}$  – funkcja przynależności klasy  $S_{\tilde{A}_{I5,4}}$  przypisana do zbioru rozmytego  $\tilde{A}_{I5,4}$ .

Funkcja przynależności klasy Z swoim kształtem przypomina literę Z. Jest to funkcja, o jednym argumencie  $x$  oraz o dwóch parametrach  $a$  i  $b$ , bazująca na splajnie. Parametry  $a$  i  $b$  określają ekstrema występujące w zboczu funkcji. Funkcja ta opisana jest następującą zależnością [33]

$$\mu_Z(x; a, b) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \leq a, \\ 1 - 2 \left( \frac{x-a}{b-a} \right)^2 & \text{dla } a \leq x \leq \frac{a+b}{2}, \\ 2 \left( \frac{x-b}{b-a} \right)^2 & \text{dla } \frac{a+b}{2} \leq x \leq b, \\ 0 & \text{dla } x \geq b. \end{cases} \quad (3.10)$$

Funkcja przynależności klasy S swoim kształtem przypomina literę S. Jest to funkcja, o jednym argumencie  $x$  oraz o dwóch parametrach  $a$  i  $b$ , oparta na splajnie. Podobnie jak w przypadku funkcji klasy Z parametry określają ekstrema występujące w zboczu funkcji. Funkcja ta opisana jest następującą zależnością [33]

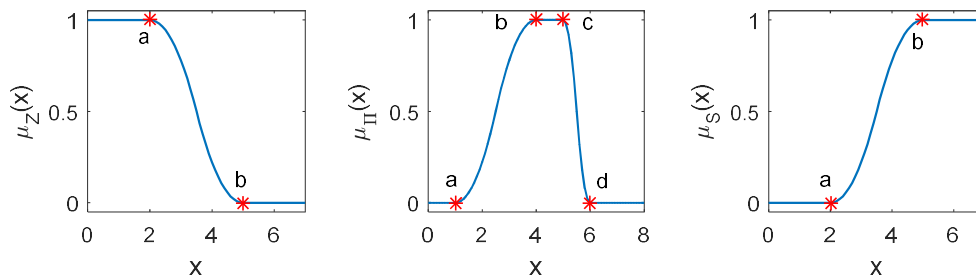
$$\mu_S(x; a, b) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq a, \\ 2 \left( \frac{x-a}{b-a} \right)^2 & \text{dla } a \leq x \leq \frac{a+b}{2}, \\ 1 - 2 \left( \frac{x-b}{b-a} \right)^2 & \text{dla } \frac{a+b}{2} \leq x \leq b, \\ 1 & \text{dla } x \geq b. \end{cases} \quad (3.11)$$

Funkcja przynależności klasy  $\Pi$  swoim kształtem przypomina literę  $\Pi$ . Jest to funkcja, o jednym argumencie  $x$  oraz o czterech parametrach  $a, b, c, d$ , bazująca na splajnie. Parametry  $a$  i  $b$  określają ekstrema występujące w zboczu narastającym, natomiast parametry  $c$  i  $d$  określają ekstrema występujące w zboczu opadającym. Funkcja ta składa się z połączenia dwóch przedstawionych powyżej funkcji klasy Z oraz klasy S i jest ona opisana następującą zależnością [33]



$$\mu_{\Pi}(x; a, b, c, d) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq a, \\ 2 \left( \frac{x-a}{b-a} \right)^2 & \text{dla } a \leq x \leq \frac{a+b}{2}, \\ 1 - 2 \left( \frac{x-b}{b-a} \right)^2 & \text{dla } \frac{a+b}{2} \leq x \leq b, \\ 1 & \text{dla } b \leq x \leq c, \\ 1 - 2 \left( \frac{x-c}{d-c} \right)^2 & \text{dla } c \leq x \leq \frac{c+d}{2}, \\ 2 \left( \frac{x-d}{d-c} \right)^2 & \text{dla } \frac{c+d}{2} \leq x \leq d, \\ 0 & \text{dla } x \geq d. \end{cases} \quad (3.12)$$

Na rysunku 3.4 zostały przedstawione przykładowe kształty opisanych wyżej funkcji przynależności z zaznaczonymi parametrami, które definiują ich postać.



Rysunek 3.4. Przykładowe kształty funkcji przynależności, które zostały wykorzystane, w rozmytej części regulatora wieloobszarowego.

Liczba regulatorów lokalnych, klasy funkcji przynależności oraz poziomy punktów pracy odpowiednio 40%, 60%, 80% oraz 100% mocy nominalnej  $P_{TH,N}$  zostały dobrane a priori. Dobór ilości regulatorów lokalnych, klasy funkcji przynależności oraz punktów pracy nie stanowi przedmiotu rozprawy. Dodatkowo zakłada się, że system sterowania mocą reaktora jądrowego nie będzie powodował całkowitego wyłączenia reaktora oraz że dopuszczalne graniczne wartości regulowanej mocy cieplnej zawierają się odpowiednio w przedziale od 35% do 105% mocy nominalnej reaktora jądrowego.

Zastosowanie regulatora wieloobszarowego wiąże się z dużą liczbą parametrów wymagających doboru zarówno w kontekście nastaw lokalnych regulatorów  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  jak i parametrów funkcji przynależności wykorzystanych w bloku sklejania rozmytego. Zadanie to jest złożone zwłaszcza dla większej ilości zakładanych punktów pracy, w pobliżu, których mają funkcjonować lokalne regulatory  $PI^{\lambda}D^{\mu}$ . Każdy nowy regulator wnosi ze sobą pięć nastaw oraz dodatkowo od 2 do 4 parametrów związanych z zastosowaną klasą funkcji przynależności w bloku sklejania rozmytego. Z tego powodu duże ilości regulatorów lokalnych nie są wskazane. Dla konfiguracji zaproponowanej w rozprawie (rysunek 3.3) wymagane jest dobranie 20 nastaw lokalnych regulatorów  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  (cztery regulatory po pięć nastaw) oraz 12 parametrów związanych z wykorzystanymi klasami

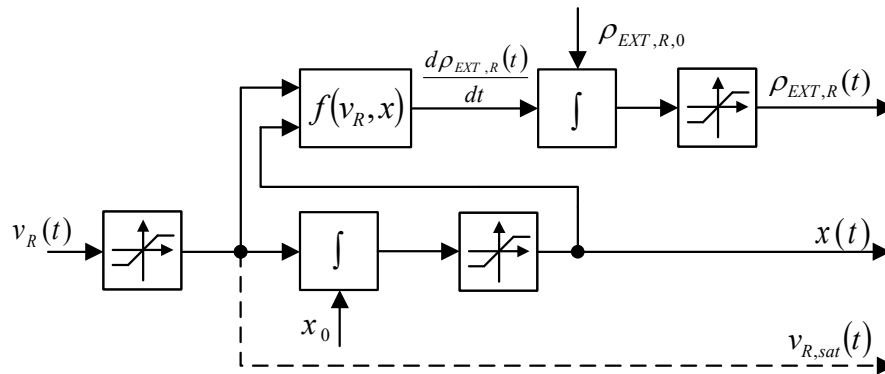


funkcji przynależności. Ilość parametrów funkcji przynależności w zależności od klasy wynosi odpowiednio: Z – 2, II – 4, S – 2. Zatem łączna liczba parametrów dla zaproponowanego w rozprawie systemu sterowania wynosi 32. Przy takiej ilości parametrów uzasadnione jest wykorzystanie technik optymalizacji w celu ich doboru.

Optymalizacja nastaw lokalnych regulatorów  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  oraz parametrów funkcji przynależności bloku sklejania rozmytego została wykonana w oparciu o metodę przedstawioną w pracy [34]. Metoda ta składa się z dwóch etapów, w których najpierw optymalizowane są nastawy lokalnych regulatorów  $PI^{\lambda}D^{\mu}$ , a następnie parametry funkcji przynależności bloku systemu rozmytego. W wykorzystanej metodzie optymalizowana funkcja celu składa się z całkowych kryteriów jakości bazujących na uchybie regulacji oraz z funkcji kary (w zależności od etapu optymalizacji). Szczegółowy opis metody optymalnego doboru parametrów regulatora wieloobszarowego został przedstawiony w rozdziale 6.

### 3.2.2 Charakterystyka urządzenia wykonawczego

Napęd zestawu prętów sterujących jest istotnym elementem układu sterowania mocy cieplnej reaktora jądrowego. Stanowi on bezpośrednie połączenie między regulatorem a obiektem, w związku z czym jego właściwości nie mogą zostać pominięte w zadaniach syntezy układu sterowania. Struktura opracowanego modelu urządzenia wykonawczego została przedstawiona na rysunku 3.5.



Rysunek 3.5. Struktura modelu urządzenia wykonawczego.

Model urządzenia wykonawczego posiada jedno wejście  $v_R(t)$ , którym jest sygnał z regulatora wieloobszarowego oraz trzy wyjścia, tj.  $\rho_{EXT,R}(t)$ ,  $x(t)$  oraz  $v_{R,sat}(t)$ . Wyjścia te reprezentują odpowiednio: sygnał wkładu reaktywności od położenia zestawu prętów sterujących, sygnał położenia prętów oraz sygnał prędkości przemieszczania prętów, która realizowana jest przez urządzenie wykonawcze. W modelu układu sterowania reaktora jądrowego wykorzystywany jest

jedynie sygnał  $\rho_{EXT,R}(t)$ , natomiast sygnał  $v_{R,sat}(t)$  wykorzystywany jest bezpośrednio w optymalizacji nastaw i parametrów wieloobszarowego regulatora  $PI^{\lambda}D^{\mu}$ . Sygnał  $x(t)$  wykorzystywany jest wyłącznie w przypadku symulacyjnej weryfikacji zaproponowanego w rozprawie układu sterowania z obiektem wirtualnymi. W tym przypadku służy on do wyliczania współczynników określających profil rozkładu mocy cieplnej, które uzależnione są od położenia prętów sterujących w rdzeniu reaktora jądrowego.

Sygnały  $\rho_{EXT,R}(t)$ ,  $v_R(t)$  i  $v_{R,sat}(t)$  mogą przyjmować wartości dodatnie oraz ujemne. Wartości ujemne tych sygnałów oznaczają odpowiednio, że reaktywność reaktora jest zmniejszana poprzez wsuwanie (zagłębianie) w rdzeń reaktora prętów sterujących. Natomiast wartości dodatnie oznaczają odpowiednio, że reaktywność reaktora jest zwiększana w wyniku wysuwania prętów sterujących z rdzenia reaktora.

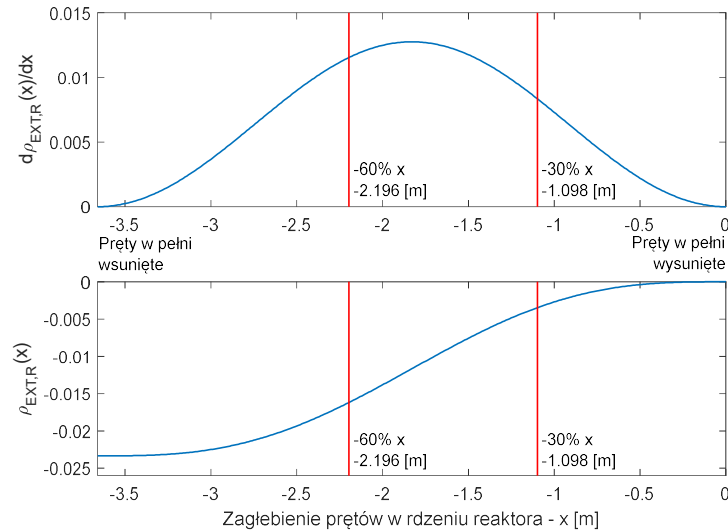
W skład zaproponowanego modelu urządzenia wykonawczego (napędu zespołu prętów sterujących) wchodzi elementy całkujące, ograniczenia na maksymalną i minimalną wartość sygnałów oraz nieliniowa funkcja opisująca zmianę reaktywności w czasie w zależności od przemieszczenia prętów sterujących. Funkcja ta jest opisana następującą zależnością

$$f(v_r, x) = \frac{d\rho_{EXT,R}(t)}{dt} = \frac{\rho_b}{\tilde{H}} \left( 1 - \cos\left(\frac{2\pi x(t)}{\tilde{H}}\right) \right) \cdot v_R(t), \quad (3.13)$$

gdzie  $\rho_b$  jest wkładem reaktywnościowym zespołu prętów sterujących przy całkowitym jego zanurzeniu w rdzeniu reaktora,  $\tilde{H}$  jest wysokością rdzenia oraz

$$\frac{\rho_b}{\tilde{H}} \left( 1 - \cos\left(\frac{2\pi x(t)}{\tilde{H}}\right) \right) = \frac{d\rho_{EXT,R}(x(t))}{dx}, \quad (3.14)$$

jest różniczkową zależnością określającą rozkład reaktywności w prętach sterujących [35]. Zależność ta została wykreślona na rysunku 3.6 wraz z towarzyszącą jej zależnością całkową, która określa bezpośredni wkład reaktywności w zależności od położenia prętów sterujących w rdzeniu reaktora jądrowego.



Rysunek 3.6. Różniczkowa  $\frac{d\rho_{EXT,R}(x)}{dx}$  oraz całkowita  $\rho_{EXT,R}(x)$  zależność rozkładu reaktywności w prętach sterujących.

Praca prętów sterujących typowo przebiega w liniowym zakresie całkowitej charakterystyki rozkładu reaktywności, gdyż pręty pracujące w zakresie minimalnego lub maksymalnego zagłębienia nie są w stanie dostatecznie szybko przeciwdziałać nagłym zmianom reaktywności, które mogą wystąpić w stanach awaryjnych lub zakłóceńowych. W rozprawie przyjęto, że ruch prętów sterujących będzie ograniczony w zakresie od 30% do 60% wysokości rdzenia oraz początkowe zagłębienie prętów będzie wynosiło 30% wysokości rdzenia (stan nominalnej pracy). Granice te zostały zaznaczone na rysunku 3.6 czerwonymi pionowymi liniami. Ograniczenia związane z modelem urządzenia wykonawczego zostały zestawione w tabeli 3.1. W tabeli tej zawarto również ograniczenia związane z przemieszczaniem prętów jak i z maksymalnymi oraz minimalnymi wartościami wkładów reaktywności, które można uzyskać w wyniku przemieszczania prętów z uwzględnieniem ograniczeń położenia.

Tabela 3.1. Dane modelu urządzenia wykonawczego.

	jednostka	Wartość względna	Wartość bezwzględna
Całkowity wkład reaktywności $\rho_b$	$\Delta k/k$	100%	0,2334
Nominalne zagłębienie $x_N$	m	** -30%	** -1,098
Nominalna reaktywność $\rho_{EXT,R,N}$	$\Delta k/k$	* 0%	* 0
Maksymalna wartość $x(t)$	m	0%	0
Minimalna wartość $x(t)$	m	** -60%	** -2,196
Maksymalna wartość $\rho_{EXT,R}(t)$	$\Delta k/k$	+30%	+0,00347
Minimalna wartość $\rho_{EXT,R}(t)$	$\Delta k/k$	-60%	-0,01272
Maksymalna wartość $v_r(t)$	m/s	100%	0,019
Minimalna wartość $v_r(t)$	m/s	-100%	-0,019

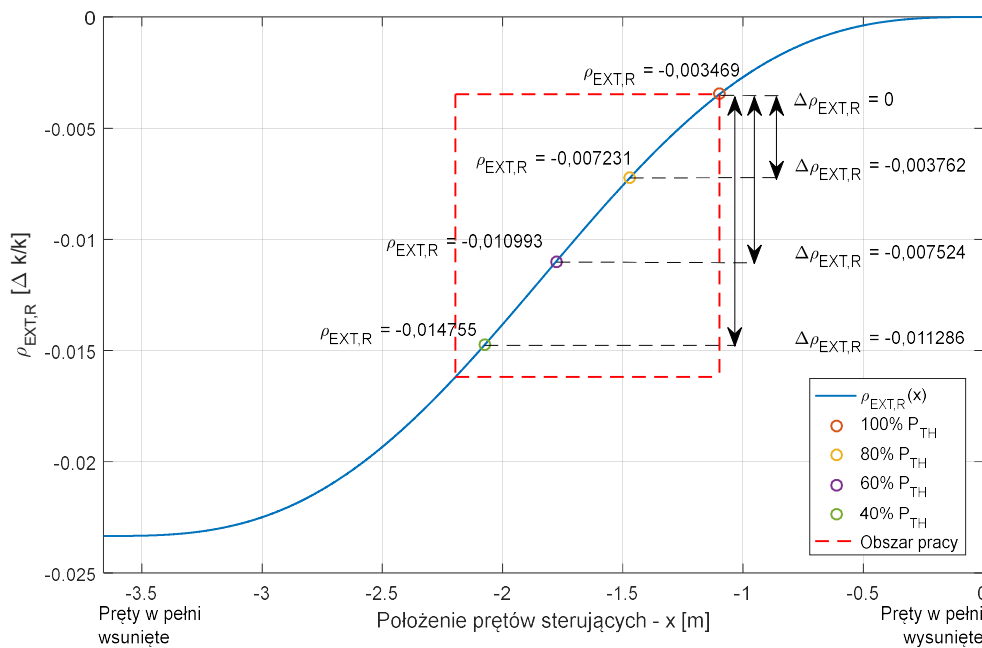
\* dla stanu równowagi  $\rho_{EXT,R,N} = 0$  przy zanurzeniu prętów sterujących  $x = 1,098$  m

\*\* minus oznacza zagłębienie w rdzeniu reaktora jądrowego

W tabeli 3.2 zostały zestawione parametry modelu urządzenia wykonawczego w czterech punktach pracy, tj. 40%, 60%, 80% 100%  $P_{TH,N}$ , w których przeprowadzono optymalizację nastaw lokalnych regulatorów PI<sup>3</sup>D<sup>4</sup> wchodzących w skład regulatora wieloobszarowego. Na rysunku 3.7 została przedstawiona charakterystyka całkowita rozkładu reaktywności w prętach sterujących, na której zobrazowano dane zawarte w tabeli 3.2. Na rysunku tym został również naniiesiony obszar pracy urządzenia wykonawczego.

Tabela 3.2. Parametry modelu urządzenia wykonawczego w różnych punktach pracy.

Punkt pracy	Reaktywność bezwzględna [Δk/k]	Reaktywność względem nominalnego zagłębienia [Δk/k]	Położenie prętów [%]	Położenie prętów [m]
100% $P_{TH}$	-0,003469	0	-30	-1,0980
80% $P_{TH}$	-0,007231	-0,003762	-40,186	-1,4708
60% $P_{TH}$	-0,010993	-0,007524	-48,549	-1,7769
40% $P_{TH}$	-0,014755	-0,011286	-56,707	-2,0755



Rysunek 3.7. Obszar pracy urządzenia wykonawczego wraz z punktami charakterystycznymi odpowiadającymi zagłębieniu w różnych punktach pracy.

Wykresy 3.6 i 3.7 zostały sporządzone dla sytuacji, w której prędkość  $v_R(t) < 0$ , tj. dla wsuwania prętów sterujących w rdzeń reaktora. Dla takiego przypadku wielkość  $\frac{d\rho_{EXT,R}(t)}{dt}$  opisana zależnością 3.13 przyjmuje wartości ujemne.

### 3.3 Stan badań

W rozprawie wykorzystano połączenie dwóch technologii tj. algorytmu regulacji  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  bazującego na operatorach rachunku różniczkowego niecałkowitego rzędu oraz systemu rozmytego wykorzystującego wnioskowanie Takagi-Sugeno. Obie z wymienionych technologii znajdują szerokie zastosowanie w wielu dziedzinach nauki i techniki. Rachunek różniczkowy niecałkowitego rzędu jest wykorzystywany m.in.:

- do sterowania dystrybucją wody w kanałach i zbiornikach nawadniających [36],
- do sterowania poziomem cieczy [37],
- w sieciowych systemach sterowania [26], [38],
- w modelowaniu i sterowaniu elementów fotowoltaicznych [39],
- w systemach sterowania turbin wodnych [40],
- w systemach regulujących częstotliwość napięcia sieciowego i mocy czynnej [41],
- w systemach sterowania manipulatorów robotów [42],
- w chaotycznych systemach dynamicznych [43]–[45],
- w finansach [46], [47],
- w astronomii [48], [49].

Szerszy przegląd zastosowań rachunku niecałkowitego rzędu można znaleźć w publikacjach [50], [51].

Systemy rozmyte znajdują zastosowanie m.in.:

- w systemach sterowania turbin wodnych [52],
- w systemach sterowania manipulatorów robotów [53],
- do modelowania i sterowania chaotycznych systemów dynamicznych [54],
- w biotechnologii [55],
- w modelowaniu infekcji wirusa HIV [56],
- w modelowaniu i sterowaniu procesów wsadowych [57],
- w modelowaniu i sterowaniu procesów oczyszczania wody [21],
- w modelowaniu i sterowaniu procesów wytwarzania stali [21],
- w systemach przetwarzania obrazu [58],
- w systemach diagnostyki medycznej [59].

Ze względu na zalety i dużą popularność wyżej wymienionych technologii oraz ich szerokie zastosowanie w wielu dziedzinach nauki i techniki wykorzystuje się również ich połączenie. Przykłady integracji można znaleźć m.in.:

- w sterowaniu hybrydowych systemów energetycznych [60],
- w robotyce [61], [62],
- w finansach [63],
- w sterowaniu prędkością silników prądu stałego [64],

oraz wielu innych.

Modelowanie rozmyte jak i rachunek różniczkowo całkowy niecałkowitego rzędu znajdują zastosowanie w dziedzinach związanych z energetyką jądrową, a zwłaszcza w systemach sterowania elementami obiegu pierwotnego elektrowni jądrowej. Aplikacje tych technologii można znaleźć m.in.:

- w systemach sterowania reaktorem w warunkach nagłej redukcji mocy cieplnej [24], [65],
- w systemach sterowania mocą cieplną reaktora jądrowego w warunkach występowania stochastycznych opóźnień w przesyłaniu sygnałów oraz szumów pomiarowych [26],
- w systemach sterowania mocą cieplną reaktora jądrowego [66]–[68],
- przy modelowaniu procesów reaktora jądrowego [69]–[71],
- w wykrywaniu i diagnostyce uszkodzeń urządzeń sterowania bezpośredniego [72],
- do sterowania poziomem wody w wytwornicy pary elektrowni jądrowej [73]–[75].

Aplikacje te można sklasyfikować głównie ze względu na obiekt sterowania, z którym współpracują oraz ze względu na warunki funkcjonowania. Z punktu widzenia tematyki podjętej w rozprawie, najbardziej istotne badania, z pośród wyżej wymienionych to prace nad systemami sterowania mocą cieplną reaktora jądrowego oraz nad modelowaniem procesów reaktora jądrowego. Zaproponowane w publikacjach [66]–[68] regulatory wykorzystujące technologię rozmytą charakteryzują się liczną bazą reguł, przez co są one skomplikowane i złożone. Ilość wykorzystanych reguł rozmytych w wymienionych pracach waha się od 22 do 99 reguł. W pracy [68] zostało zaproponowane połączenie regulatora rozmytego z wnioskowaniem Mamdaniego oraz technologii rachunku różniczkowo-całkowego niecałkowitego rzędu. Połączenie to również charakteryzuje się dużym stopniem złożoności głównie ze względu na wykorzystane wnioskowanie oraz nietypową strukturę regulatora. Zaproponowane przez autorów prac [66]–[68] regulatory, poprzez swoją złożoność, mogą stwarzać problemy w implementacji w typowych programowalnych systemach mikroprocesorowych takich jak sterowniki programowalne PLC lub programowalne kontrolery automatyki PAC. Z tego powodu ich zastosowanie w zagadnieniach sterowania mocą cieplną reaktora jądrowego może okazać się nieprzydatne. Dodatkowo stopień skomplikowania może powodować brak akceptacji w konserwatywnym środowisku technologów i operatorów pracujących w elektrowniach jądrowych, którzy mają bezpośrednią styczność ze sterowanym procesem.

Wykorzystanie operatorów rachunku różniczkowo-całkowego niecałkowitego rzędu w modelowaniu procesów reaktora jądrowego sprowadza się głównie do zastąpienia przez nie klasycznego podejścia do modelowania kinetyki neutronów wykorzystującego równania różniczkowe zwyczajne. W pracach [69]–[71] autorzy dokonali takiego właśnie zastąpienia, które jak pokazały wyniki badań, nie odbiegają znacząco od klasycznego podejścia do modelowania kinetyki neutronów. Pełny model dynamiki reaktora jądrowego obejmujący model kinetyki neutronów oraz model termo-hydrauliczny wykorzystujący wyłącznie operatory rachunku różniczkowo-całkowego niecałkowitego rzędu nie został jeszcze opracowany. Główna zaleta wynikająca z zastosowania operatorów rachunku niecałkowitego rzędu jest związana z możliwością dokładniejszego odwzorowania procesów fizycznych poprzez zwiększoną dowolność w doborze stopni pochodnych oraz całek, które w tym przypadku nie są ograniczone do zakresu liczb całkowitych. Jednakże z drugiej strony metody numeryczne wykorzystywane przy obliczaniu tych operatorów są bardziej skomplikowane w porównaniu do metod numerycznych wykorzystywanych przy obliczaniu równań różniczkowych zwyczajnych.

W energetyce jądrowej, oprócz technologii systemów rozmytych oraz rachunku różniczkowo-całkowego niecałkowitego rzędu, znajdują również zastosowanie inne technologie takie jak:

- sterowanie predykcyjne [76], [77];
- układy regulacji ze sprzężeniem od stanu [78];
- układy regulacji uwzględniające przestrzenność reaktora jądrowego [79], [80];
- regulatory krzepkie [81];
- sterowanie nadzorcze [82];
- sterowanie ślizgowe [83].

Pomimo zapotrzebowania na nowe technologie w energetyce jądrowej, ich aplikacje oraz wdrożenia są spowolnione przez względy bezpieczeństwa oraz długie okresy związane z procesami certyfikacji wykonywane przez główne instytucje zajmujące się bezpieczeństwem jądrowym [84], [85]. Przedstawione w rozprawie podejście do sterowania mocą cieplną reaktora jądrowego bazujące na technologii systemów rozmytych oraz regulacji  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  wykorzystującej operatory rachunku niecałkowitego rzędu nie odbiega daleko od obecnie stosowanych technologii wykorzystywanych w energetyce jądrowej oraz w przemyśle. Regulator  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  stanowi rozwinięcie szeroko stosowanego i dobrze poznanego regulatora PID, natomiast technologia systemów rozmytych pozwala na adaptacje tego regulatora do pracy ze zmiennym obciążeniem elektrowni jądrowej. Sposób połączenia i wykorzystania tych technologii zaprezentowany w rozprawie doktorskiej nie powinien powodować niechęci w akceptacji tego rodzaju technologii przez środowiska nadzorujące pracę elektrowni jądrowych. Dodatkowo, zaproponowane podejście do sterowa-

nia mocą cieplną reaktora jądrowego nie jest problematyczne w kontekście implementacji na platformach mikroprocesorowych i cyfrowych, które obecnie są wykorzystywane, jako nośniki algorytmów sterowania.

Jak już wcześniej wspomniano połączenie wykorzystanych w rozprawie technik generuje problem związany z odpowiednim doбором nastaw regulatorów  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  i parametrów funkcji przynależności systemu rozmytego. Problem ten związany jest głównie z dużą ilością parametrów do doboru. Jednakże na przeciw wychodzą aktualne postępy oraz badania nad nowoczesnymi metodami syntezy systemów sterowania. Metody te można podzielić w następujący sposób:

- metody wykorzystujące podejście inżynierskie oparte o metody „prób i błędów” [67], [86];
- metody analityczne [37], [87], [88];
- metody związane z wykorzystaniem zadań optymalizacji:
  - w dziedzinie czasu [89]–[93];
  - w dziedzinie częstotliwości [24], [94];
- metody automatycznego doboru parametrów [37], [95], [96].

W rozprawie wykorzystano głównie autorskie badania związane z metodyką doboru parametrów wieloobszarowego regulatora rozmytego opartego o klasyczne regulatory PID lub regulatory  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  wykorzystujące operatory rachunku różniczkowo-całkowego niecałkowitego rzędu. Poniżej, w skrócie, przedstawiono charakterystykę tych badań.

W pracy [97] został przedstawiony wieloobszarowy regulator rozmyty z lokalnymi regulatorami PID zastosowany do sterowania mocą reaktora jądrowego typu PWR. W badaniach wykorzystano model matematyczny o parametrach skupionych reaktora PWR obejmujący procesy generacji i wymiany ciepła oraz efekty reaktywnościowe zależne od temperatury paliwa oraz chłodziwa. Nastawy lokalnych regulatorów PID zostały dobrane w sposób optymalny, minimalizując pojedynczy całkowity wskaźnik jakości ISE. Przedstawione w publikacji wyniki symulacyjne pokazały, że zastosowane rozwiązanie może poprawić jakość sterowania układu regulacji mocy cieplnej reaktora jądrowego.

W artykule [98] przedstawiono syntezę regulatora  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  niecałkowitego rzędu dla potrzeb sterowania mocą reaktora jądrowego PWR. Do celów syntezy regulatora wykorzystano nieliniowy model matematyczny reaktora jądrowego o parametrach skupionych obejmujący procesy generacji i wymiany ciepła oraz termicznych efektów reaktywnościowych. Nastawy regulatora  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  niecałkowitego rzędu dobrano w sposób optymalny, minimalizując klasyczne całkowite wskaźniki jakości określone na bazie odpowiedzi skokowej. Na przykładzie układu oscylacyjnego drugiego



rzędu, oraz zlinearyzowanego modelu reaktora PWR wykazano, że badany regulator  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  wykazuje lepszą jakość sterowania w stosunku do klasycznego regulatora PID oraz że może on stać się jego alternatywą w układach sterowania mocy cieplnej reaktora jądrowego.

Artykuł [99] przedstawia syntezę wieloobszarowego regulatora rozmytego z lokalnymi regulatorami  $PI^{\lambda}D^{\mu}$ . Regulator ten został zaprojektowany do sterowania mocą reaktora jądrowego typu PWR. Do syntezy wieloobszarowego regulatora  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  wykorzystano model matematyczny reaktora PWR o parametrach skupionych obejmujący procesy generacji i wymiany ciepła oraz efektów reaktywnościowych. Nastawy lokalnych regulatorów  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  zostały dobrane optymalnie, minimalizując całkowite wskaźniki jakości sterowania ISE oraz ITAE. Wykorzystując nieliniowy model matematyczny reaktora PWR wykazano, że zastosowany regulator wieloobszarowy jest w stanie poprawić jakość działania układu sterowania mocą reaktora jądrowego w porównaniu do układu sterowania z wieloobszarowym regulatorem PID.

W artykule [100] przedstawiono syntezę wieloobszarowego regulatora rozmytego z lokalnymi regulatorami PID dla wytwornicy pary elektrowni jądrowej PWR pracującej w szerokim zakresie zmian punktu pracy mocy cieplnej. Wytwornica pary charakteryzuje się nieliniową dynamiką zależną od mocy cieplnej odbieranej z chłodziwa obiegu pierwotnego reaktora jądrowego. Sterowanie poziomem wody w wytwornicy pary w szerokim zakresie zmian punktu pracy realizowane przez klasyczny regulator PID, którego nastawy dobrane zostały do nominalnego poziomu mocy reaktora jądrowego jest niewystarczające, zwłaszcza przy niskich poziomach mocy cieplnej reaktora. Z tego powodu sterowanie wytwornicą pary jest często realizowane manualnie przez operatorów. Nieprawidłowy poziom wody w wytwornicy pary może doprowadzić do przypadkowego wyłączenia reaktora jądrowego i w konsekwencji strat finansowych. W artykule przedstawiono porównanie proponowanego wieloobszarowego regulatora rozmytego z lokalnymi regulatorami PID oraz klasycznego regulatora PID dostrojonego do nominalnych warunków pracy reaktora. Nastawy lokalnych regulatorów PID zostały dobrane poprzez rozwiązanie zadań optymalizacji z funkcją celu w postaci całkowitego kryterium jakości sterowania ISE. W obu przypadkach do celów syntezy algorytmów sterowania zastosowano liniowy model wytwornicy pary ze zmiennymi parametrami, które zależą od mocy cieplnej wytwarzanej przez reaktor jądrowy. Proponowany wieloobszarowy regulator rozmyty został poddany szerokim testom symulacyjnym, które potwierdziły jego przewagę nad klasycznym odpowiednikiem.

W artykule [34] przedstawiono porównanie procedur doboru parametrów dla wieloobszarowego regulatora rozmytego z lokalnymi regulatorami PID wykorzystanego do sterowania procesem nieliniowym. W pracy zaprezentowano trzy procedury strojenia regulatora w trybie off-line. Pierwsza z nich polegała na doborze nastaw lokalnych regulatorów PID w przypadku, gdy parametry funkcji przynależności rozmytej części regulatora dane są a priori. Druga procedura składa

się z dwóch etapów. W pierwszym etapie, dobierane były nastawy lokalnych regulatorów PID natomiast w drugim etapie zostały dobrane parametry funkcji przynależności części rozmytej regulatora. W trzeciej procedurze nastawy lokalnych regulatorów PID oraz parametry funkcji przynależności zostały dobrane jednocześnie w jednym zadaniu optymalizacji. Procedury wyznaczenia nastaw lokalnych regulatorów PID oraz parametrów funkcji przynależności, opisane wyżej, zostały wykonane w oparciu o optymalizację algorytmem ewolucyjnym, którego funkcją celu było kryterium IAE. Skuteczność doboru nastaw i parametrów regulatorów została zweryfikowana w oparciu o dobrze znany w literaturze nieliniowy model procesu zobojętniania pH.

## 4. Modele matematyczne obiektu sterowania

---

Dynamika procesów zachodzących w reaktorze jądrowym rozważana dla długich horyzontów czasowych przedstawiana jest za pomocą nieliniowych równań różniczkowych ze zmieniającymi się parametrami [99]. Parametry te są funkcjami odpowiednich wielkości charakteryzujących środowisko i stan rdzenia reaktora jądrowego. Parametry związane są ze składem izotopowym, wytworzoną energią cieplną oraz właściwościami cieplno-hydraulicznymi [99].

Dla krótkich horyzontów czasowych, rozpatrywanych w rozprawie, przy rozważaniu jedynie szybkich procesów zachodzących w obrębie rdzenia, zmienność parametrów wynikająca z przebiegu procesów wolnozmiennych można zaniedbać [99]. Z tego względu rozważane w rozprawie modele nie uwzględniają procesów wolnozmiennych, takich jak zatrucie i wypalenie paliwa [99]. Można je pominąć, gdyż powodowane ich zachodzeniem zmiany reaktywności ujawniają się dopiero po zaniku przebiegów przejściowych procesów szybkozmiennych związanych z kinetyką neutronów (generacją mocy cieplnej), wymianą ciepła oraz temperaturowymi zmianami reaktywności [99]. Skala czasowa procesów wolnozmiennych wynosi od kilku godzin do kilku dni zaś szybkozmiennych ułamki sekund do kilku minut [99].

Modele matematyczne reaktora jądrowego wykorzystane w rozprawie oparte są o klasyczne podejście do modelowania, w którym zmienne oraz parametry zostały uśrednione po objętości rdzenia lub określonych obszarach rdzenia [3]. Zakłada się w nich niezmienność parametrów w rozważanych przedziałach czasu. W rozprawie zostały opracowane dwa modele matematyczne reaktora jądrowego różniące się złożonością jak i przeznaczeniem. Pierwszy z modeli traktowany jest jako model projektowy, który został opracowany do celów syntezy algorytmów sterowania mocą cieplną reaktora jądrowego. Drugi model traktowany jest jako obiekt wirtualny i został on opracowany do celów weryfikacji proponowanych algorytmów sterowania.

W opracowanych w rozprawie modelach matematycznych reaktora jądrowego wyróżnić można składniki w postaci pomniejszych modeli, które opisują procesy szybkie reaktora jądrowego tj. proces generacji mocy cieplnej oraz proces wymiany ciepła wraz z temperaturowymi efektami reaktywnościowymi. Składnik odpowiedzialny za proces generacji mocy cieplnej zarówno w modelu projektowym oraz w obiekcie wirtualnym został zrealizowany przy pomocy punkowego modelu kinetyki neutronów. Obydwa wykorzystane modele reaktora jądrowego różnią się składnikiem odpowiedzialnym za modelowanie procesów wymiany ciepła między paliwem a chłodziwem oraz za temperaturowe efekty reaktywnościowe. Te składniki stanowią główną różnicę pomiędzy modelem projektowym a obiektem wirtualnym.

Pierwszy z wykorzystanych w rozprawie modeli reaktora jądrowego, tj. model projektowy, cechuje się punktowym podejściem do modelowania procesów związanych z generacją ciepła oraz uproszczonym podejściem węzłowym do modelowania procesów wymiany ciepła w reaktorze jądrowym. Uproszczone podejście węzłowe wykorzystuje model wymiany ciepła z pojedynczym węzłem paliwa oraz dwoma węzłami chłodziwa oparte jest o propozycję przedstawioną w pozycjach [22], [27], [101]–[105]. Model ten umożliwia odwzorowanie dynamiki procesów szybkich w sposób dostateczny do wykorzystania go w etapie syntezy algorytmów sterowania mocą cieplną reaktora jądrowego.

Drugi wykorzystany w rozprawie model traktowany jest jako wirtualny obiekt sterowania. Został on opracowany w taki sposób, aby odzwierciedlić, w ujęciu jednowymiarowym, proces wymiany ciepła pomiędzy paliwem a chłodziwem wzdłuż wysokości rdzenia. Model ten został zbudowany w oparciu o rozszerzone węzłowe podejście do modelowania procesów wymiany ciepła, które również opiera się o propozycję przedstawioną w [22], [27], [101]–[105]. Możliwości tego modelu zostały rozszerzone o zmienne współczynniki liczbowe określające ilość generowanej mocy cieplnej w poszczególnych węzłach paliwa i chłodziwa. Współczynniki te aproksymują osiowy profil generacji mocy cieplnej. Poprzez zmianę wartości tych współczynników możliwe jest modelowanie zmian kształtu tego profilu. Współczynniki określające profil generacji ciepła zostały uzależnione od położenia prętów sterujących w rdzeniu reaktora, gdyż w rozprawie skupiono się wyłącznie na regulacji reaktywności, w krótkich horyzontach czasowych, za pomocą prętów sterujących zagłębianych w rdzeń reaktora. Rozszerzony w ten sposób model reaktora jądrowego stanowi obiekt wirtualny, którego przeznaczeniem jest symulacyjne testowanie i weryfikacja zaproponowanych w rozprawie algorytmów sterowania. W tabeli 4.1 została przedstawiona charakterystyka wykorzystanych w rozprawie modeli matematycznych reaktora jądrowego.

Tabela 4.1. Charakterystyka wykorzystanych w rozprawie modeli matematycznych reaktora jądrowego.

Składnik/Funkcja	Model projektowy	Obiekt wirtualny
Generacja mocy	punktowy model kinetyki neutronów	punktowy model kinetyki neutronów
Wymiana ciepła	model wymiany ciepła i efektów reaktywnościowych z pojedynczym węzłem paliwowym i podwójnym węzłem chłodziwa	model wymiany ciepła i efektów reaktywnościowych z wieloma <sup>1</sup> węzłami paliwa i chłodziwa
Przeznaczenie	synteza algorytmów sterowania mocą cieplną reaktora jądrowego	testowanie i weryfikacja algorytmów sterowania mocą cieplną reaktora jądrowego

<sup>1</sup>W rozprawie wykorzystano model wymiany ciepła z pięcioma węzłami paliwa i dziesięcioma węzłami chłodziwa

## 4.1 Punktowy model kinetyki neutronów

Rdzeń reaktora jądrowego traktowany jest jako medium mnożące, w którym występuje określona w czasie liczba neutronów. Jak już wcześniej wspomniano w podrozdziale 2.1.2, zmianę

liczby neutronów można opisać za pomocą dwóch wielkości określających stan, w jakim znajduje się reaktor jądrowy. Te wielkości to: współczynnik mnożenia  $k$  lub reaktywność  $\rho$ . Reaktywność  $\rho$  w bezpośredni sposób określa przyrost neutronów w stosunku do poprzedniej generacji [13]. Jeżeli w rdzeniu reaktora jądrowego znajduje się średnio  $\bar{n}$  neutronów w centymetrze sześciennym, to iloczyn  $\rho\bar{n}$  mówi o średnim przyroście gęstości neutronów w każdej generacji [13]. Zatem po wprowadzeniu parametru  $\Lambda$  oraz traktowaniu go, jako średni czas pomiędzy kolejnymi generacjami neutronów natychmiastowych można określić zależność na zmianę średniej gęstości neutronów w czasie, która opisana jest następującym równaniem różniczkowym [6], [12], [13]

$$\frac{d\bar{n}(t)}{dt} = \frac{\rho}{\Lambda} \bar{n}(t). \quad (4.1)$$

Rozwiązaniem zależności (4.1) jest całka ogólna równania jednorodnego o następującej postaci

$$\bar{n}(t) = \bar{n}_0 e^{\left(\frac{\rho}{\Lambda}\right)t}, \quad (4.2)$$

gdzie:  $\bar{n}_0$  jest warunkiem początkowym (pierwotna ilość neutronów w rdzeniu),  $\Lambda$  pełni funkcję stałej czasowej natomiast  $\rho$  pełni rolę współczynnika określającego rosnący lub malejący charakter funkcji  $\bar{n}(t)$  w miarę upływu czasu  $t$ .

W równaniach (4.1) oraz (4.2) wzięto pod uwagę tylko i wyłącznie neutrony natychmiastowe zaś pominięto w nich udział neutronów opóźnionych, które w znaczący sposób zmieniają właściwości reaktora jądrowego w kontekście przebiegu reakcji łańcuchowej w nim zachodzącej. Neutron opóźniony powstaje wskutek emisji ze wzbudzonego jądra atomowego, tzw. prekursora, powstałego w wyniku rozpadu  $\beta$  [14]. Przez to, że generacja neutronu następuje poprzez rozpad  $\beta$ , pojawienie się tych neutronów jest znacznie opóźnione względem pierwotnych aktów rozszczepienia (neutronów natychmiastowych). Według szacunków istnieje ponad 100 prekursorów neutronów opóźnionych, które ze względów praktycznych dzieli się na 6 grup różniących się okresem rozpadu [14]. Szacuje się, że czas życia neutronów natychmiastowych  $l$  zawiera się w przedziale od  $10^{-6}$  do  $10^{-4}$  sekundy [6]. Aby oszacować średni czas życia neutronów z uwzględnieniem neutronów opóźnionych  $\bar{l}$  można posłużyć się następującą zależnością [6]

$$\bar{l} = (1 - \beta)l + \sum_{n=1}^6 \beta_i \left[ \frac{1}{\lambda_i} + l \right]. \quad (4.3)$$

Po przyjęciu, że  $l = 10^{-6}$  sekundy oraz uwzględnieniu parametrów prekursorów neutronów opóźnionych  $(\beta_i, \lambda_i)$  zestawionych w załączniku 2, otrzyma się średni czas życia neutronów z uwzględnieniem neutronów opóźnionych, który jest równy  $\bar{l} = 0,0848$  sekundy. Jest to wartość

o 5 rzędów wielkości większa niż wartość  $10^{-6}$ . Powyższy przykład obrazuje w jaki sposób neutrony opóźnione, w kontekście dynamiki reakcji łańcuchowej, wpływają na stałą czasową reaktora, umożliwiając sterowanie przebiegiem tej reakcji [6]. Uwzględnienie w równaniu (4.1) prekursorów neutronów opóźnionych prowadzi do następującej struktury punktowego modelu kinetyki reaktora jądrowego [13]

$$\begin{aligned} \text{zmiana średniej gęstości neutronów w czasie} &= \\ &= \text{produkcja neutronów natychmiastowych} + \\ &- \text{udział neutronów opóźnionych w aktualnej generacji} + \\ &+ \text{udział neutronów opóźnionych z poprzedniej generacji.} \end{aligned}$$

Biorąc pod uwagę powyższą strukturę, można napisać zależność określającą zmianę średniej gęstości neutronów  $\bar{n}$  w czasie, z uwzględnieniem występowania sześciu grup prekursorów neutronów opóźnionych, jako [13]

$$\frac{d\bar{n}(t)}{dt} = \frac{\rho(t)}{\Lambda} \bar{n}(t) - \frac{\beta}{\Lambda} \bar{n}(t) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i(t). \quad (4.4)$$

Zmiana gęstości  $i$ -tej grupy prekursorów neutronów opóźnionych  $C_i$  jest opisana przy pomocy następujących równań różniczkowych [13]:

$$\frac{dC_i(t)}{dt} = \frac{\beta_i}{\Lambda} \bar{n}(t) - \lambda_i C_i(t), \quad i = 1, \dots, 6. \quad (4.5)$$

Pierwszy składnik  $\frac{\beta_i}{\Lambda} \bar{n}(t)$  w równaniach (4.5) opisuje ilość wyprodukowanych prekursorów neutronów opóźnionych w czasie, natomiast drugi składnik  $\lambda_i C_i(t)$  opisuje ilość prekursorów podlegających rozpadowi.

Uwzględnienie neutronów opóźnionych w równaniu (4.1) oraz wprowadzenie sześciu dodatkowych równań opisujących koncentrację prekursorów neutronów opóźnionych powoduje, że rozwiązanie przedstawionego powyżej układu równań różniczkowych składającego się z równań (4.4)-(4.5) nie jest prostym zadaniem w szczególności, gdy reaktywność  $\rho(t)$  nie jest traktowana jako stały parametr, a zależy zarówno od czasu jak i pośrednio od gęstości neutronów. Ze względu na występowanie nieliniowego czynnika  $\rho(t)\bar{n}(t)$  w równaniu (4.4) rozwiązania układu równań (4.4)-(4.5) sprowadzają się do wykorzystania metod numerycznych lub linearyzacji tych równań [106]. W dalszych rozważaniach zawartych w podrozdziałach 4.2, 4.3 oraz 4.3.1 reaktywność  $\rho(t)$  zostanie przedstawiona jako wielkość reprezentująca bilans reaktywności, który zależy zarówno od zewnętrznych jak i wewnętrznych procesów zachodzących w rdzeniu reaktora (np. wprowadzanie prętów sterujących lub sprzężenia reaktywnościowe).

Zależności (4.4)-(4.5) opisane siedmioma równaniami różniczkowymi zwyczajnymi stanowią punktowy model kinetyki neutronów z sześcioma grupami prekursorów neutronów opóźnionych wykorzystany w rozprawie. Został on wykorzystany w modelu projektowym oraz w obiekcie wirtualnym w postaci składnika odpowiedzialnego za obliczanie średniej mocy generowanej w rdzeniu reaktora jądrowego. Znając rozwiązanie równania (4.4), można wyliczyć średnią moc generowaną przez reaktor jądrowy przy pomocy następującej zależności

$$P_{TH}(t) = \frac{\bar{n}(t)}{N_N} P_{TH,N}, \quad (4.6)$$

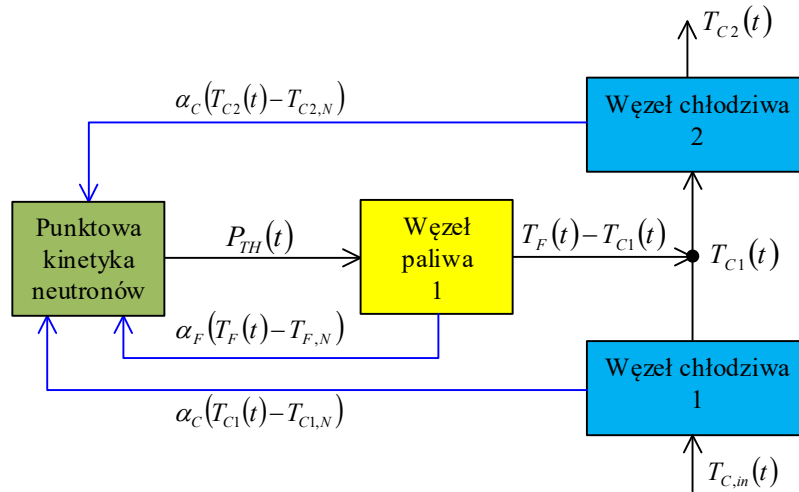
gdzie  $N_N$  jest nominalną wartością gęstości neutronów, a  $P_{TH,N}$  jest nominalną mocą cieplną.

Parametry jak i warunki początkowe dla równań różniczkowych wyżej wymienionego punkowego modelu kinetyki neutronów zostały zawarte w załączniku 2.

## 4.2 Model wymiany ciepła i efektów reaktywnościowych z pojedynczym węzłem paliwa i dwoma węzłami chłodziwa

Wykorzystany w rozprawie model wymiany ciepła z pojedynczym węzłem paliwa i dwoma węzłami chłodziwa wraz z modelem efektów reaktywnościowych stanowi rozwinięcie klasycznego modelu spotykanego w literaturze [3], [13], [106]. Podejście klasyczne opiera się o punktowy model elementu paliwowego oraz chłodziwa wraz z odpowiednim punktowym modelem reaktywnościowych zmian temperatury. W kontekście węzłowym można przedstawić go jako model wymiany ciepła o pojedynczym węźle paliwowym oraz pojedynczym węźle chłodziwa. Główną wadą podejścia klasycznego jest występowanie nienaturalnych natychmiastowych statycznych zmian temperatury w węźle chłodziwa podczas nagłych skoków temperatury wejściowej chłodziwa [107].

Modele wymiany ciepła wykorzystane w niniejszej rozprawie oparte są o propozycje literaturowe, w których zakłada się przypisanie dwóch węzłów chłodziwa do pojedynczego węzła paliwa [22], [27], [101]–[105]. Dzięki temu podejściu likwiduje się występowanie nienaturalnych statycznych zmian temperatury w ostatnim węźle chłodziwa, którego stan traktowany jest jako temperatura chłodziwa na wyjściu z modelu [107]. Ilustracja idei przypisania dwóch węzłów chłodziwa do pojedynczego węzła paliwa została przedstawiona na rysunku 4.1. Informacja o generowanej średniej mocy cieplnej przekazywana jest do węzła paliwowego z wykorzystaniem punkowego modelu kinetyki neutronów.



Rysunek 4.1. Model wymiany ciepła i efektów reaktywnościowych z pojedynczym węzłem paliwowym. Indeks  $N$  oznacza nominalną wartość. Strzałki koloru niebieskiego oznaczają sprzężenia reaktywnościowe.

Równania opisujące proces wymiany ciepła między węzłami, oparte o pierwszą zasadę termodynamiki oraz o prawo stygnięcia Newtona [108], [109], zostały zamieszczone poniżej. Pierwsze z przedstawionych równań opisuje bilans cieplny w węźle paliwa w następujący sposób

$$m_F c_{pF} \frac{dT_F(t)}{dt} = f_F P_{TH}(t) - Ah(T_F(t) - T_{C1}(t)), \quad (4.7)$$

gdzie  $m_F$  to masa paliwa jądrowego,  $c_{pF}$  to ciepło właściwe paliwa,  $T_F(t)$  temperatura paliwa jądrowego, współczynnik  $f_F$  definiuje ilość mocy cieplnej generowanej w paliwie,  $A$  to efektywne pole powierzchni wymiany ciepła pomiędzy paliwem a chłodziwem,  $h$  to średni współczynnik przenikania ciepła z paliwa do chłodziwa, a  $T_{C1}(t)$  to temperatura w pierwszym węźle chłodziwa.

Człon  $m_F c_{pF} \frac{dT_F(t)}{dt}$  w równaniu (4.7) reprezentuje zmianę energii cieplnej w węźle paliwowym, człon  $f_F P_{TH}(t)$  reprezentuje energię cieplną dostarczoną do węzła paliwowego w wyniku reakcji łańcuchowej opisanej przy pomocy punkowego modelu kinetyki neutronów, natomiast człon  $Ah(T_F(t) - T_{C1}(t))$  reprezentuje energię cieplną odebraną z węzła paliwowego [105]. Wielkość  $A$  w równaniu (4.7) jest obliczana jako pole powierzchni wszystkich koszulek paliwowych, które osłaniają paliwo w rdzeniu reaktora, gdyż styka się ona bezpośrednio z przepływającym chłodziwem, przekazując do niego energię cieplną.

Poniższe zależności opisują bilans cieplny w węzłach chłodziwa w następujący sposób

$$\begin{aligned} \frac{m_C}{2} c_{pC} \frac{dT_{C1}(t)}{dt} = & (1 - f_F) \frac{P_{TH}(t)}{2} + \frac{A}{2} h(T_F(t) - T_{C1}(t)) + \\ & - W_C(t) c_{pC} (T_{C1}(t) - T_{C,in}(t)), \end{aligned} \quad (4.8)$$



$$\frac{m_C}{2} c_{pC} \frac{dT_{C2}(t)}{dt} = (1 - f_F) \frac{P_{TH}(t)}{2} + \frac{A}{2} h (T_F(t) - T_{C1}(t)) + \quad (4.9)$$

$$- W_C(t) c_{pC} (T_{C2}(t) - T_{C1}(t)),$$

gdzie  $m_C$  to masa chłodziwa,  $c_{pC}$  to ciepło właściwe chłodziwa,  $T_{C(i)}(t)$  to temperatura chłodziwa w odpowiednim węźle, a  $W_C$  to masowy przepływ chłodziwa przez reaktor.

W równaniach (4.8) i (4.9) człony  $\frac{m_C}{2} c_{pC} \frac{dT_{C(i)}(t)}{dt}$  reprezentują zmianę energii cieplnej w węzłach chłodziwa, człony  $(1 - f_F) \frac{P_{TH}(t)}{2}$  reprezentują część energii cieplnej reaktora wytworzoną w chłodziwie, człon  $\frac{A}{2} h (T_F(t) - T_{C(i)}(t))$  reprezentują energię cieplną dostarczoną do chłodziwa z węzła paliwowego, natomiast człon  $W_C c_{pC} (T_{C2}(t) - T_{C1}(t))$  reprezentują energię cieplną odebraną z chłodziwa na skutek jego przepływu. Wielkość  $f_F$  występująca w równaniach przedstawionych powyżej związana jest ze zjawiskiem generacji ciepła w różnych częściach rdzenia. Część energii cieplnej jest generowana bezpośrednio w paliwie i jest ona reprezentowana przez wielkość  $f_F$ , natomiast inna część, opisana przez wielkość  $(1 - f_F)$ , jest generowana poza paliwem w moderatorze lub w elementach konstrukcyjnych reaktora. Energia ta jest generowana w skutek promieniowania gamma lub wychwyty neutronów.

Model opisujący zmiany reaktywności, które wynikają ze zmian położenia prętów sterujących w rdzeniu, zmian temperatury paliwa oraz temperatury chłodziwa w poszczególnych węzłach został opisany za pomocą następującego równania algebraicznego

$$\rho(t) = \rho_{EXT,R}(t) + \alpha_F (T_F(t) - T_{F,N}) + \frac{\alpha_C}{2} (T_{C1}(t) - T_{C1,N}) + \frac{\alpha_C}{2} (T_{C2}(t) - T_{C2,N}). \quad (4.10)$$

Równanie to jest traktowane, jako bilans reaktywności, a jego składniki są następujące:  $\rho_{EXT,R}$  odpowiada za reaktywność zewnętrzną wprowadzaną za pośrednictwem prętów sterujących,  $\alpha_F (T_F(t) - T_{F,N})$  odpowiada za efekt sprzężenia reaktywnościowego od temperatury paliwa,  $\frac{\alpha_C}{2} (T_{C1}(t) - T_{C1,N})$  odpowiada za efekt sprzężenia reaktywnościowego od temperatury pierwszego węzła chłodziwa,  $\frac{\alpha_C}{2} (T_{C2}(t) - T_{C2,N})$  odpowiada za efekt sprzężenia reaktywnościowego od temperatury drugiego węzła chłodziwa. Stałe niezależne od czasu związane z temperaturą paliwa i chłodziwa z indeksem  $N$  oznaczają warunki początkowe dla temperatur w danych węzłach i stanowią one temperaturowy punkt odniesienia (punkt nominalny) dla obliczeń związanych z efektami reaktywnościowymi. Współczynniki  $\alpha_F$  oraz  $\alpha_C$  występujące w równaniu (4.10) są temperaturowymi współczynnikami reaktywności odpowiednio dla paliwa oraz chłodziwa.

Typowo temperatury te, jak i warunki początkowe dla równań różniczkowych modelu określone są dla stanu nominalnego pracy reaktora np. dla 100% generowanej mocy cieplnej lub dla

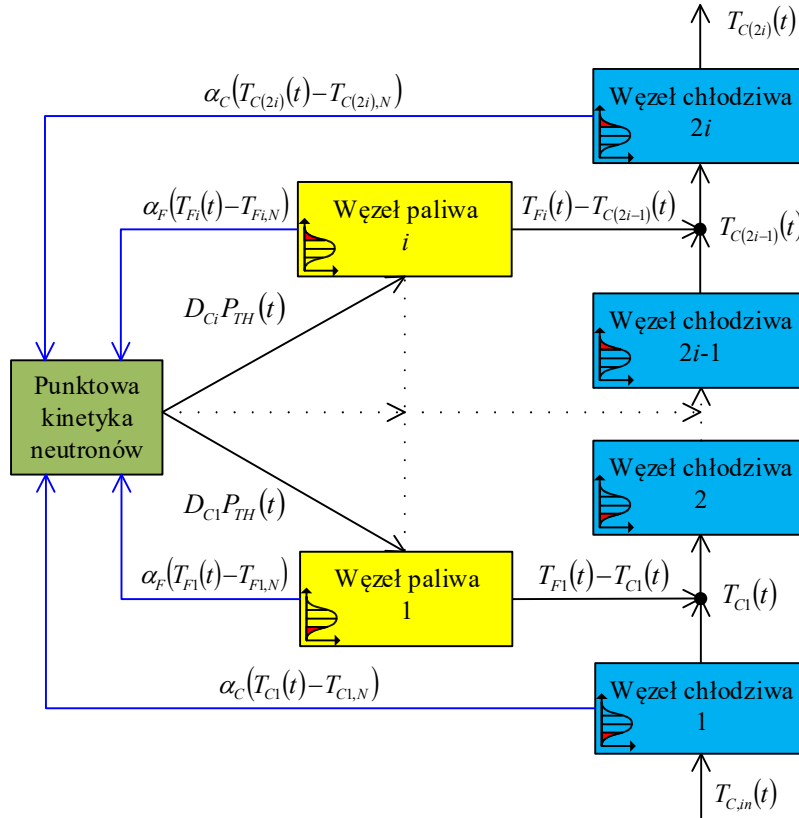
stanu równowagi modelu, od którego zamierza się prowadzić obserwacje. Parametry jak i warunki początkowe dla równań różniczkowych wyżej wymienionego modelu wymiany ciepła i efektów reaktywnościowych z pojedynczym węzłem paliwa i dwoma węzłami chłodziwa zostały przedstawione w załączniku 2.

Model matematyczny opisujący składnik związany z wymianą ciepła i efektami reaktywnościowymi przedstawiony w tym rozdziale jest podstawową „komórką obliczeniową” w oparciu, o którą możliwe jest budowanie bardziej zaawansowanych węzłowych modeli rdzenia reaktora jądrowego wzdłuż jego osi. W oparciu o ten model i koncepcję wykorzystania dwóch węzłów chłodziwa na jeden węzeł paliwa [105] został wyprowadzony model wymiany ciepła w postaci ogólnej charakteryzujący się dowolnością w definiowaniu ilości węzłów paliwa. Model ten został przedstawiony w następnym podrozdziale.

### **4.3 Model wymiany ciepła i efektów reaktywnościowych z wieloma węzłami paliwa i chłodziwa**

Wielowęzłowy model wymiany ciepła i efektów reaktywnościowych, przedstawiony w tym podrozdziale, zbudowany został m.in. w oparciu rozszerzone węzłowe podejście do modelowania zjawiska odprowadzania ciepła z elementów paliwowych. Jego struktura stanowi rozwinięcie propozycji przedstawionej w podrozdziale 4.2 na dowolną skończoną ilość węzłów paliwa. Zarówno w poprzednim jak i w tym podejściu liczba węzłów chłodziwa jest podwojona w stosunku do liczby węzłów paliwa. Jednowymiarowy osiowy układ węzłów występujący w tym modelu, stanowi dyskretne przybliżenie modelu przestrzennego.

Jak już wcześniej wspomniano w modelu tym wprowadzono autorskie podejście do modelowania osiowego profilu generacji mocy cieplnej w rdzeniu reaktora oraz jego zmian [107]. Osiowy profil generacji mocy cieplnej został aproksymowany za pomocą współczynników liczbowych. Średnia moc cieplna w reaktorze jest obliczana z wykorzystaniem punktowego modelu kinetyki neutronów. Poprzez iloczyn średniej mocy cieplnej reaktora i współczynników określających profil generacji mocy cieplnej otrzymuje się ilość mocy generowanej w poszczególnych węzłach paliwa oraz chłodziwa. Ilość współczynników, wykorzystanych do aproksymacji profilu, jest bezpośrednio zależna od ilości wykorzystanych węzłów paliwa. Wraz ze zmianą ilości tych węzłów liczba współczynników również ulega zmianie. Poprzez wprowadzanie większej ilości węzłów aproksymacja profilu generacji mocy cieplnej staje się dokładniejsza. Na rysunku 4.2 przedstawiono ilustrację idei wykorzystania wielu węzłów paliwa oraz chłodziwa w celu zamodelowania rdzenia reaktora wzdłuż jego wysokości. Na rysunku tym zarysowano poglądowo rolę współczynników, oznaczonych symbolem  $D_C$ , określających profil generacji mocy cieplnej.



Rysunek 4.2. Idea jednowymiarowego osiowego modelowania rdzenia reaktora z wykorzystaniem wielu węzłów paliwa i chłodziwa. Strzałki koloru niebieskiego oznaczają sprzężenia reaktywnościowe.

Równania dla dowolnej liczby węzłów paliwa  $i = 1, \dots, n$  opisujące strukturę modelu zostały przedstawione poniżej. Równania oraz człony w nich występujące są analogiczne do tych wymienionych w modelu z pojedynczym węzłem paliwa (podrozdział 4.2) z tą różnicą, że zostały one przedstawione w postaci normalnej. Poniższe zależności dla liczby węzłów paliwa  $n = 1$  opisują model wymiany ciepła z pojedynczym węzłem paliwowym i dwoma węzłami chłodziwa. W poniższych równaniach zmienna  $T_{C0}$  traktowana jest jako temperatura chłodziwa na wejściu reaktora (modelu reaktora)

$$T_{C0} = T_{C,in}. \quad (4.11)$$

Równanie na zmianę temperatury  $\frac{dT_{Fi}(t)}{dt}$  w  $i$ -tym węzle paliwa jest następujące

$$\frac{dT_{Fi}(t)}{dt} = D_{Ci}(x) \frac{nf_F P_{TH}(t)}{m_F c_{pF}} - \frac{Ah}{m_F c_{pF}} (T_{Fi}(t) - T_{C(2i-1)}(t)). \quad (4.12)$$

Równania na zmiany temperatur  $\frac{dT_{C(i)}(t)}{dt}$  w nieparzystych  $(2i - 1)$  oraz parzystych  $(2i)$  węzłach chłodziwa są następujące:

$$\begin{aligned} \frac{dT_{C(2i-1)}(t)}{dt} = & D_{Ci}(x) \cdot \frac{n(1-f_F)P_{TH}(t)}{m_C c_{pC}} + \frac{Ah}{m_C c_{pC}} (T_{Fi}(t) - T_{C(2i-1)}(t)) + \\ & - \frac{2nW_C(t)}{m_C} (T_{C(2i-1)}(t) - T_{C(2i-2)}(t)), \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} \frac{dT_{C(2i)}(t)}{dt} = & D_{Ci}(x) \cdot \frac{n(1-f_F)P_{TH}(t)}{m_C c_{pC}} + \frac{Ah}{m_C c_{pC}} (T_{Fi}(t) - T_{C(2i-1)}(t)) + \\ & - \frac{2nW_C(t)}{m_C} (T_{C(2i)}(t) - T_{C(2i-1)}(t)). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Równania od (4.12) do (4.14) zawierają w swojej strukturze współczynniki  $D_C$ , które są zależne od zagłębienia prętów sterujących w rdzeniu  $x$ . Zagłębienie to jest liczone od góry rdzenia. Współczynniki  $D_C$  określają ilość mocy cieplnej przekazywanej z modelu punktowej kinetyki neutronów do określonych węzłów paliwowych, a ich suma jest równa jedności

$$\sum_{i=1}^n D_{Ci} = 1. \quad (4.15)$$

Bilans reaktywności dla modelu z wieloma węzłami paliwa i chłodziwa jest analogiczny do tego przedstawionego wcześniej równaniem (4.10) i jest on jego rozwinięciem na dowolną ilość węzłów. Został on opisany poniższą zależnością

$$\begin{aligned} \rho(t) = & \rho_{EXT,R}(t) + \alpha_F \sum_{i=1}^n [D_{Ci}(x) \cdot (T_{Fi}(t) - T_{Fi,N})] + \\ & + \alpha_C \sum_{i=1}^n \left[ \frac{1}{2} D_{Ci}(x) \cdot (T_{C(2i-1)}(t) - T_{C(2i-1),N}) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} D_{Ci}(x) \cdot (T_{C(2i)}(t) - T_{C(2i),N}) \right]. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Bilans (4.16) zawiera w swojej strukturze następujące składniki: człon sprzężenia reaktywnościowego od węzłów paliwa  $D_{Ci}(x) \cdot (T_{Fi}(t) - T_{Fi,N})$ , człon sprzężenia reaktywnościowego od nieparzystych węzłów chłodziwa  $\frac{1}{2} D_{Ci}(x) \cdot (T_{C(2i-1)}(t) - T_{C(2i-1),N})$  oraz człon sprzężenia reaktywnościowego od parzystych węzłów chłodziwa  $\frac{1}{2} D_{Ci}(x) \cdot (T_{C(2i)}(t) - T_{C(2i),N})$ . Analogicznie jak w modelu przedstawionym w podrozdziale 4.2 tak i tutaj stałe niezależne od czasu związane z temperaturą paliwa i chłodziwa z indeksem  $N$  oznaczają warunki początkowe na temperatury w danych węzłach.

Zaletami przedstawionego modelu wymiany ciepła i efektów reaktywnościowych z wieloma węzłami paliwa i chłodziwa jest łatwość implementacji nowych węzłów poprzez wykorzystanie

identycznej struktury modelu przy wprowadzaniu nowych węzłów. Oczywistym jest, że wykorzystanie w modelu większej ilości węzłów prowadzi do zwiększenia dokładności odwzorowania jednowymiarowego osiowego procesu wymiany ciepła pomiędzy paliwem a chłodziwem. Natomiast wprowadzenie autorskiego rozwiązania w postaci liczbowych współczynników  $D_C$  określających rozkład profilu generacji mocy pozwala zarówno na modelowanie kształtu jak i zmian kształtu tego profilu. Dodatkowymi korzyściami związanymi z wprowadzeniem współczynników jest poszerzenie analizy działania opracowanego w rozprawie algorytmu sterowania mocą reaktora jądrowego w szerokim zakresie jej zmian. W skład takiej analizy może wejść np. określenie współczynnika nierównomierności rozkładu mocy cieplnej lub dokładniejsze dynamiczne śledzenie zmian temperatury w wybranych węzłach modelu, co z kolei pozwala otrzymać dynamiczny obraz zmian w profilach temperatury paliwa czy chłodziwa w wybranych lub wszystkich węzłach występujących w modelu [107]. Klasyczne podejście wykorzystujące punktowe modele wymiany ciepła nie pozwala na taką rozszerzoną analizę [107]. Szczegółowy opis współczynników  $D_C$  określających profil generacji mocy cieplnej w rdzeniu reaktora wraz z metodą ich obliczania został zamieszczony w podrozdziale 4.3.2.

### 4.3.1 Model wymiany ciepła i efektów reaktywnościowych z pięcioma węzłami paliwa i dziesięcioma węzłami chłodziwa

Zaprezentowany w poprzednim podrozdziale model wymiany ciepła został przedstawiony w postaci dopuszczającej dowolność w wyborze liczby węzłów paliwa i chłodziwa. Ze względu na możliwości implementacji oraz potrzeby analizy opracowanych w rozprawie układów sterowania mocą cieplną reaktora należy przyjąć skończoną liczbę węzłów. Dobór liczby węzłów w modelu wymiany ciepła został podyktowany głównie przez następujące czynniki:

- liczba węzłów w modelu nie powinna być zbyt duża, gdyż mogłoby to utrudniać analizę opracowanych układów sterowania, zwłaszcza, gdy liczba węzłów chłodziwa jest podwójna względem węzłów paliwa,
- liczba węzłów powinna być wystarczająca, aby możliwe było zaobserwowanie zmian w profilu generacji mocy w wyniku zagłębiania prętów sterujących,
- zwiększanie ilości węzłów w modelu wymiany ciepła powoduje wzrost czasu obliczeń oraz zwiększa zapotrzebowanie na moc obliczeniową oraz pamięć systemu i oprogramowania, w którym implementowany jest obiekt wirtualny.

Ze względu na wyżej wymienione czynniki zdecydowano się na wykorzystanie w obiekcie wirtualnym modelu wymiany ciepła, w którym występuje pięć węzłów paliwa oraz dziesięć węzłów chłodziwa. Struktura tego modelu dla  $i = 1, \dots, n$ , gdzie  $n = 5$  przedstawiona została poniżej:

- węzły paliwa:

$$\frac{dT_{F1}(t)}{dt} = D_{C1}(x) \cdot \frac{5f_F P_{TH}(t)}{m_F c_{pF}} - \frac{Ah}{m_F c_{pF}} (T_{F1}(t) - T_{C1}(t)), \quad (4.17)$$

$$\frac{dT_{F2}(t)}{dt} = D_{C2}(x) \cdot \frac{5f_F P_{TH}(t)}{m_F c_{pF}} - \frac{Ah}{m_F c_{pF}} (T_{F2}(t) - T_{C3}(t)), \quad (4.18)$$

$$\frac{dT_{F3}(t)}{dt} = D_{C3}(x) \cdot \frac{5f_F P_{TH}(t)}{m_F c_{pF}} - \frac{Ah}{m_F c_{pF}} (T_{F3}(t) - T_{C5}(t)), \quad (4.19)$$

$$\frac{dT_{F4}(t)}{dt} = D_{C4}(x) \cdot \frac{5f_F P_{TH}(t)}{m_F c_{pF}} - \frac{Ah}{m_F c_{pF}} (T_{F4}(t) - T_{C7}(t)), \quad (4.20)$$

$$\frac{dT_{F5}(t)}{dt} = D_{C5}(x) \cdot \frac{5f_F P_{TH}(t)}{m_F c_{pF}} - \frac{Ah}{m_F c_{pF}} (T_{F5}(t) - T_{C9}(t)), \quad (4.21)$$

- węzły chłodziwa:

$$\begin{aligned} \frac{dT_{C1}(t)}{dt} = & D_{C1}(x) \cdot \frac{5(1-f_F)P_{TH}(t)}{m_C c_{pC}} + \frac{Ah}{m_C c_{pC}} (T_{F1}(t) - T_{C1}(t)) + \\ & - \frac{10W_C}{m_C} (T_{C1}(t) - T_{C,in}(t)), \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} \frac{dT_{C2}(t)}{dt} = & D_{C1}(x) \cdot \frac{5(1-f_F)P_{TH}(t)}{m_C c_{pC}} + \frac{Ah}{m_C c_{pC}} (T_{F1}(t) - T_{C1}(t)) + \\ & - \frac{10W_C}{m_C} (T_{C2}(t) - T_{C1}(t)), \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} \frac{dT_{C3}(t)}{dt} = & D_{C2}(x) \cdot \frac{5(1-f_F)P_{TH}(t)}{m_C c_{pC}} + \frac{Ah}{m_C c_{pC}} (T_{F2}(t) - T_{C3}(t)) + \\ & - \frac{10W_C}{m_C} (T_{C3}(t) - T_{C2}(t)), \end{aligned} \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned} \frac{dT_{C4}(t)}{dt} = & D_{C2}(x) \cdot \frac{5(1-f_F)P_{TH}(t)}{m_C c_{pC}} + \frac{Ah}{m_C c_{pC}} (T_{F2}(t) - T_{C3}(t)) + \\ & - \frac{10W_C}{m_C} (T_{C4}(t) - T_{C3}(t)), \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} \frac{dT_{C5}(t)}{dt} = & D_{C3}(x) \cdot \frac{5(1-f_F)P_{TH}(t)}{m_C c_{pC}} + \frac{Ah}{m_C c_{pC}} (T_{F3}(t) - T_{C5}(t)) + \\ & - \frac{10W_C}{m_C} (T_{C5}(t) - T_{C4}(t)), \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned} \frac{dT_{C6}(t)}{dt} = & D_{C3}(x) \cdot \frac{5(1-f_F)P_{TH}(t)}{m_C c_{pC}} + \frac{Ah}{m_C c_{pC}} (T_{F3}(t) - T_{C5}(t)) + \\ & - \frac{10W_C}{m_C} (T_{C6}(t) - T_{C5}(t)), \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned} \frac{dT_{C7}(t)}{dt} = & D_{C4}(x) \cdot \frac{5(1-f_F)P_{TH}(t)}{m_C c_{pC}} + \frac{Ah}{m_C c_{pC}} (T_{F4}(t) - T_{C7}(t)) + \\ & - \frac{10W_C}{m_C} (T_{C7}(t) - T_{C6}(t)), \end{aligned} \quad (4.28)$$

$$\begin{aligned} \frac{dT_{C8}(t)}{dt} = & D_{C4}(x) \cdot \frac{5(1-f_F)P_{TH}(t)}{m_C c_{pC}} + \frac{Ah}{m_C c_{pC}} (T_{F4}(t) - T_{C7}(t)) + \\ & - \frac{10W_C}{m_C} (T_{C8}(t) - T_{C7}(t)), \end{aligned} \quad (4.29)$$

$$\begin{aligned} \frac{dT_{C9}(t)}{dt} = & D_{C5}(x) \cdot \frac{5(1-f_F)P_{TH}(t)}{m_C c_{pC}} + \frac{Ah}{m_C c_{pC}} (T_{F5}(t) - T_{C9}(t)) + \\ & - \frac{10W_C}{m_C} (T_{C9}(t) - T_{C8}(t)), \end{aligned} \quad (4.30)$$

$$\begin{aligned} \frac{dT_{C10}(t)}{dt} = & D_{C5}(x) \cdot \frac{5(1-f_F)P_{TH}(t)}{m_C c_{pC}} + \frac{Ah}{m_C c_{pC}} (T_{F5}(t) - T_{C9}(t)) + \\ & - \frac{10W_C}{m_C} (T_{C10}(t) - T_{C9}(t)), \end{aligned} \quad (4.31)$$

- bilans reaktywności:

$$\begin{aligned} \rho(t) = & \rho_{EXT,R}(t) + \alpha_F \sum_{i=1}^5 [D_{Ci}(x) \cdot (T_{Fi}(t) - T_{Fi,N})] + \\ & + \alpha_C \sum_{i=1}^5 \left[ \frac{1}{2} D_{Ci}(x) \cdot (T_{C(2i-1)}(t) - T_{C(2i-1),N}) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} D_{Ci}(x) \cdot (T_{C(2i)}(t) - T_{C(2i),N}) \right]. \end{aligned} \quad (4.32)$$

### 4.3.2 Współczynniki $D_C$ określające osiowy profil generacji mocy cieplnej

Klasyczne modele punktowe rdzenia reaktora jądrowego są powszechnie stosowane do celów syntezy algorytmów sterowania głównie ze względu na łatwość ich implementacji w komputerowych środowiskach szybkiego prototypowania. Pozwalają one w zadowalający sposób określić średni poziom mocy cieplnej generowanej w rdzeniu reaktora, jednakże nie pozwalają na uzyskanie informacji o drugiej wielkości związanej z generacją mocy, tj. z rozkładem mocy cieplnej lub

rozkładem strumienia neutronów. Reaktor jądrowy jest obiektem przestrzennym, a rozkłady wielkości w nim występujących są jego nieodłącznym elementem. W celu dokładnego zobrazowania zjawisk występujących w reaktorze jądrowym stosuje się modele przestrzenne. Jednakże są one trudne w implementacji, a ich przydatność w zadaniach syntezy algorytmów sterowania jest znikoma. Występują one najczęściej w komercyjnych symulatorach elektrowni jądrowych, co również przekłada się na ich ograniczoną dostępność.

Modele węzłowe stanowią kompromis pomiędzy podejściem klasycznym, a podejściem przestrzennym do modelowania procesów reaktora jądrowego. Ich struktura w naturalny sposób pozwala na wprowadzenie mechanizmów modelujących rozkłady przestrzenne różnych wielkości występujących w rdzeniu reaktora jądrowego takich jak strumień neutronów czy gęstość mocy. Motywacją wprowadzenia współczynników określających dyskretny rozkład profilu generacji mocy cieplnej do modelu węzłowego wymiany ciepła była związana z chęcią rozwinięcia aktualnie wykorzystywanych modeli węzłowych o nowe elementy, które pozwalają na rozszerzoną analizę zjawisk przestrzennych. Zmiany w dyskretnym profilu generacji mocy, a co za tym idzie zmiany w wartościach liczbowych współczynników, mogą być uzależnione np. od położenia prętów sterujących, zatrucia rdzenia produktami rozszczepienia silnie pochłaniającymi neutrony lub wypaleniem paliwa jądrowego. W rozprawie współczynniki określające dyskretny profil generacji mocy cieplnej zostały uzależnione wyłącznie od zagłębienia prętów sterujących w rdzeniu reaktora.

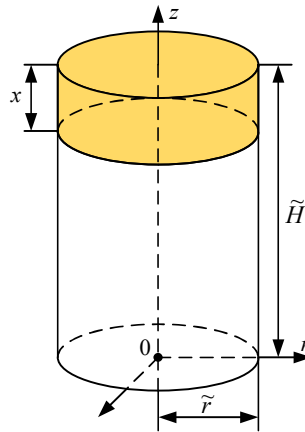
#### 4.3.2.1 Określenie osiowego rozkładu strumienia neutronów

Wyznaczenie wartości współczynników  $D_C$  dyskretnego rozkładu mocy cieplnej, zarówno dla przypadku, w którym są one całkowicie wysunięte z rdzenia reaktora jak i dla przypadku ich całkowitego zagłębienia w rdzeń oparto o metodę wyznaczania osiowego rozkładu strumienia neutronów. Elementy tej metody zostały opisane w [12] i są one oparte na następujących założeniach [12]:

- przyjmuje się, że rdzeń reaktora jest cylindrem o wysokości  $\tilde{H}$  i promieniu  $\tilde{r}$  (rysunek 4.3),
- przyjmuje się, że wielkości  $\tilde{H}$  oraz  $\tilde{r}$  są wymiarami rdzenia bez uwzględnienia ekstrapolowanej powierzchni brzegowej,
- rdzeń reaktora nie posiada reflektora neutronów,
- pręty sterujące z pochłaniaczami neutronów, które w fizycznym rdzeniu zgrupowane są w zespoły prętów sterujących, zastąpione zostały w modelowanym rdzeniu jednolitym obszarem, którego właściwości są modyfikowane wraz z poziomem ich zagłębienia,
- przekroje czynne nie zależą od położenia w cylindrycznym rdzeniu,
- pochłaniacze neutronów umieszczone w prętach sterujących nie mają wpływu na przekrój czynny na rozszczepienie i współczynnik dyfuzji,



- model rdzenia podzielony został na dwa jednolite podobszary tj. podobszar, w którym występują zespoły prętów sterujących oraz w którym nie występują pochłaniacze neutronów (rysunek 4.3),
- początek układu współrzędnych dla rozważanego przypadku znajduje się w środku okręgu stanowiącego dolną podstawę cylindrycznego rdzenia (rysunek 4.3),
- głębokość zagłębienia zespołu prętów sterujących określona jest przez zmienną  $x$  (rysunek 4.3), dla ułatwienia rozważań przyjęto, że zmienna ta przyjmuje wartości dodatnie,
- przyjmuje się, że strumień neutronów w rdzeniu jest funkcją zmiennych  $r$  i  $z$  (rysunek 4.3),
- strumień neutronów nie może być ujemny oraz musi być ograniczony tj.  $0 < \phi < \infty$ .



Rysunek 4.3. Cylindryczny rdzeń reaktora jądrowego z zespołem prętów sterujących zagłębionym do poziomu  $x$  [12].

Punktem wyjścia dla rozważań związanych z wyznaczeniem kształtu rozkładu strumienia neutronów w rdzeniu reaktora dla przypadku, w którym zespół prętów sterujących jest całkowicie wysunięty oraz dla przypadku, w którym zespół ten jest zagłębiony na dowolny poziom  $x$  jest równanie dyfuzji neutronów w stanie ustalonym w następującej postaci [12]

$$\nabla^2 \phi(r, z) + \frac{k_\infty - 1}{L^2} \phi(r, z) = 0, \quad (4.33)$$

gdzie  $k_\infty$  to współczynnik mnożenia neutronów w ośrodku nieskończonym, a  $L$  to długość dyfuzji neutronów.

Dla uproszczenia w równaniu (4.33) wielkość  $L$  opisującą długość dyfuzji zastąpiono wielkością  $M$  opisującą długość migracji [12]

$$\nabla^2 \phi(r, z) + \frac{k_\infty - 1}{M^2} \phi(r, z) = 0. \quad (4.34)$$

Długość migracji  $M$  jest wielkością wprowadzoną w rozważaniach związanych z dyfuzją neutronów w celu uniknięcia podziału równania dyfuzji na dwa oddzielne równania opisujące z osobna strumień neutronów prędkich oraz strumień neutronów termicznych [12]. Zastępując długość dyfuzji  $L$  długością migracji  $M$  w równaniu (4.33), możliwe jest wykorzystanie pojedynczego równania dyfuzji opisującego zachowanie strumienia dla pojedynczej grupy neutronów z uwzględnieniem neutronów prędkich oraz neutronów termicznych [12]. Długość migracji bezpośrednio zastępuje długość dyfuzji traktowaną jako odległość, którą pokonują neutrony od rodzin do absorpcji. Długość migracji jest wyrażona, jako [12]

$$M = \sqrt{L_1^2 + L_2^2}, \quad (4.35)$$

gdzie:

$$L_1 = \sqrt{\frac{D_1}{\Sigma_r}} \quad \text{oraz} \quad L_2 = \sqrt{\frac{D_2}{\Sigma_a}} \quad (4.36)$$

są odpowiednio długościami dyfuzji dla neutronów prędkich oraz neutronów termicznych,  $D_1$  jest współczynnikiem dyfuzji dla neutronów prędkich,  $D_2$  jest współczynnikiem dyfuzji dla neutronów termicznych,  $\Sigma_r$  jest makroskopowym przekrojem czynnym na usuwanie neutronów, a  $\Sigma_a$  jest makroskopowym przekrojem czynnym na absorpcję.

Wielkość  $k_\infty$  oraz  $M$  w równaniu (4.34) przyjmują różne wartości w podobszarach występowania i braku występowania zespołu prętów sterujących. Ze względu na traktowanie tych podobszarów jako jednolite, wielkości  $k_\infty$  oraz  $M$  są zależne wyłącznie od zmiennej  $z$  [12]. Po zastosowaniu operatora  $\nabla^2$  dla geometrii walcowej (cylindrycznej) w następującej postaci [12]

$$\Delta f = \nabla^2 f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (4.37)$$

w równaniu (4.34), otrzyma się

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \phi(r, z)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi(r, z)}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi(r, z)}{\partial z^2} + \frac{k_\infty - 1}{M^2} \phi(r, z) = 0. \quad (4.38)$$

Składnik  $\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi(r, z)}{\partial \theta^2}$  w równaniu (4.38) można pominąć, gdyż funkcja  $\phi(r, z)$  zależy wyłącznie od zmiennych  $r$  i  $z$ . Po uproszczeniu równanie (4.38) przyjmuje następującą postać:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \phi(r, z)}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \phi(r, z)}{\partial z^2} + \frac{k_\infty - 1}{M^2} \phi(r, z) = 0. \quad (4.39)$$

Równanie różniczkowe cząstkowe (4.39) opisujące rozkład strumienia neutronów dla geometrii cylindrycznej można przekształcić do dwóch równań różniczkowych zwyczajnych, stosując metodę rozdzielania zmiennych. Funkcję  $\phi(r, z)$  określającą strumień neutronów w przestrzeni cylindra można zapisać jako iloczyn dwóch składowych [12]

$$\phi(r, z) = \psi(r)\chi(z), \quad (4.40)$$

gdzie  $\psi(r)$  jest promieniową, a  $\chi(z)$  osiową składową strumienia neutronów.

Podstawiając zależność (4.40) do równania (4.39) i dzieląc je przez  $\psi(r)\chi(z)$ , otrzyma się następujące równanie różniczkowe zwyczajne [12]

$$\frac{1}{\psi(r)r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\psi(r)}{dr} \right) + \frac{1}{\chi(z)} \frac{d^2\chi(z)}{dz^2} + \frac{\frac{k_\infty}{k} - 1}{M^2} = 0. \quad (4.41)$$

Równanie (4.41) zawiera trzy składniki. Pierwszy składnik zależy wyłącznie od zmiennej  $r$ , natomiast drugi i trzeci składnik zależy wyłącznie od zmiennej  $z$ . Aby równanie to było spełnione, pierwszy składnik musi być stałą [12]. Przyjmuje się, że stała ta wynosi  $-B_r^2$ , przy czym musi ona spełniać następujące równanie różniczkowe wynikające z (4.41) oraz warunek brzegowy  $\phi(\tilde{r}, z) = 0$  [12]

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\psi(r)}{dr} \right) + B_r^2 \psi(r) = 0, \quad \text{dla } 0 \leq r \leq \tilde{r}. \quad (4.42)$$

Stała  $B_r^2$  jest składową promieniową parametru reaktora  $B^2 = B_r^2 + B_z^2$ , który w przybliżeniu jest miarą kwadratu krzywizny powierzchni reprezentującej przestrzenny rozkład gęstości strumienia neutronów. Wyznaczenie wartości parametru  $B_r$  wiąże się z rozwiązaniem równania (4.42), które dane jest w następującej postaci [12]

$$\psi(r) = C'_1 J_0(B_r r) + C'_2 Y_0(B_r r), \quad \text{dla } 0 \leq r \leq \tilde{r}, \quad (4.43)$$

gdzie:  $C'_1$  oraz  $C'_2$  są dowolnymi stałymi,  $J_0$  to funkcja Bessela pierwszego rodzaju, a  $Y_0$  to funkcja Bessela drugiego rodzaju. Charakterystyka funkcji Bessela została przedstawiona w załączniku 1.

Ostateczne rozwiązanie równania (4.42) opisuje rozkład strumienia neutronów w kierunku promieniowym. Funkcja  $Y_0$  występująca w tym rozwiązaniu dąży do  $-\infty$  dla wartości  $r \rightarrow 0$ , a co za tym idzie cała funkcja  $\psi(r)$  dla  $r = 0$  jest nieograniczona. Nie jest to zgodne z założeniem o nieujemności oraz nieograniczoności strumienia neutronów, dlatego stała  $C'_2$  w równaniu (4.43) musi być równa 0 [12]. Funkcja  $J_0$  dla przedziału od zera do pierwszego miejsca zerowego jest ograniczona oraz dodatnia. Konieczność spełnienia warunku brzegowego  $\phi(\tilde{r}, z) = 0$  jest

związana z przyrównaniem argumentu funkcji  $J_0(B_r r)$  dla  $r = \tilde{r}$  do wartości pierwszego miejsca zerowego tej funkcji [12]

$$B_r \tilde{r} \approx 2,405. \quad (4.44)$$

Z zależności (4.44) bezpośrednio wynika, że parametr  $B_r = \frac{2,405}{\tilde{r}}$ .

Podstawienie stałej  $-B_r^2$  z zależności (4.42) do równania (4.41) powoduje, że przyjmuje ono następującą postać [12]

$$\frac{d^2 \chi(z)}{dz^2} + \left( \frac{k_\infty}{M^2} - B_r^2 \right) \chi(z) = 0, \quad \text{dla } 0 \leq z \leq \tilde{H}. \quad (4.45)$$

Rozwiązanie równania (4.45) stanowi opis rozkładu strumienia neutronów w kierunku osiowym zarówno w przypadku występowania oraz braku zespołu prętów sterujących. W celu uwzględnienia pochłaniania neutronów w obszarze zajmowanym przez zespół prętów sterujących należy pomniejszyć współczynnik mnożenia w nieskończonym medium  $k_\infty$  o wartość  $\delta k_\infty$ . Dla tego obszaru wprowadza się następujące podstawienie dla parametru  $k_\infty$  [12]

$$k_\infty \rightarrow k_\infty - \delta k_\infty = k_\infty (1 - \rho_b), \quad (4.46)$$

gdzie  $\rho_b = \frac{\delta k_\infty}{k_\infty}$  jest wkładem reaktywnościowym zespołu prętów sterujących przy całkowitym jego zanurzeniu w rdzeń reaktora. Dla uproszczenia zakłada się, że obecność prętów sterujących nie ma wpływu na długość migracji neutronów tj.  $M = \text{const}$  [12]. Po wykorzystaniu zależności (4.46), równanie dyfuzji neutronów dla kierunku osiowego (4.45) przyjmuje dwa warianty.

Pierwszy wariant opisuje rozkład strumienia neutronów  $\chi_u$  w części, w której nie występuje zespół prętów sterujących. Wyrażony jest on następującą zależnością [12]

$$\frac{d^2 \chi_u(z)}{dz^2} + \alpha^2 \chi_u(z) = 0, \quad \text{dla } 0 \leq z \leq \tilde{H} - x. \quad (4.47)$$

Drugi wariant opisuje rozkład strumienia neutronów  $\chi_r$  w części, w której występuje zespół prętów sterujących. Strumień ten jest opisany za pomocą następującego równania [12]

$$\frac{d^2 \chi_r(z)}{dz^2} + (\alpha^2 - \beta^2) \chi_r(z) = 0, \quad \text{dla } \tilde{H} - x \leq z \leq \tilde{H}. \quad (4.48)$$

Zmienna  $x$  w zależnościach (4.47) i (4.48) określa zagłębienie zespołu prętów sterujących od góry rdzenia reaktora natomiast parametry  $\alpha^2$  oraz  $\beta^2$  zdefiniowane są w następujący sposób [12]:

$$\alpha^2 = \frac{1}{M^2} \left( \frac{k_\infty}{k} - 1 \right) - B_r^2, \quad (4.49)$$

$$\beta^2 = \frac{1}{M^2} \frac{k_\infty}{k} \rho_b. \quad (4.50)$$

Rozwiązania równań różniczkowych (4.47) i (4.48) muszą spełniać następujące warunki [12]:

- warunki brzegowe:

$$\chi_u(0) = 0 \quad \text{oraz} \quad \chi_r(\tilde{H}) = 0, \quad (4.51)$$

- warunek ciągłości:

$$\chi_u(\tilde{H} - x) = \chi_r(H - x), \quad (4.52)$$

- warunek gładkości:

$$\left. \frac{d}{dz} \chi_u(z) \right|_{\tilde{H}-x} = \left. \frac{d}{dz} \chi_r(z) \right|_{\tilde{H}-x}. \quad (4.53)$$

Zależności (4.47) i (4.48) to równania różniczkowe liniowe jednorodne rzędu drugiego, których równania charakterystyczne są następujące:

$$r_u^2 + \alpha^2 = 0, \quad (4.54)$$

$$r_r^2 + (\alpha^2 - \beta^2) = 0. \quad (4.55)$$

Równanie charakterystyczne (4.54) wynikające z (4.47) ma dwa pierwiastki zespolone  $r_{u1} = \zeta_u - \eta_u i$  oraz  $r_{u2} = \zeta_u + \eta_u i$  dlatego też rozwiązanie ogólne równania (4.47) jest w następującej postaci [109], [110]

$$\chi_u(z) = e^{\zeta_u z} (C_1 \cos \eta_u z + C_2 \sin \eta_u z). \quad (4.56)$$

Stosując powszechnie używane oznaczenia wykorzystywane przy obliczaniu pierwiastków równania kwadratowego ( $a, b, c$ ) można uprościć parametry pierwiastków równania charakterystycznego (4.54), tj.  $\zeta_u = -\frac{b}{2a} = 0$  oraz  $\eta_u = \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a} = \alpha$ . Wstawiając te uproszczone składniki do rozwiązania ogólnego, otrzymuje się

$$\chi_u(z) = C_1 \cos \alpha z + C_2 \sin \alpha z. \quad (4.57)$$

Po uwzględnieniu warunku brzegowego  $\chi_u(0) = 0$  w równaniu (4.57) otrzymujemy

$$\chi_u(0) = C_1 \cos(0) + C_2 \sin(0) = C_1. \quad (4.58)$$

Z powyższego równania wynika, że stała  $C_1$  musi być równa 0, aby warunek brzegowy  $\chi_u(0) = 0$  był spełniony. Ostatecznie dla  $C_1 = 0$ , równanie (4.57) przyjmuje następującą postać

$$\chi_u(z) = C_2 \sin \alpha z = C \sin(\alpha z). \quad (4.59)$$

Powyższe równanie stanowi rozwiązanie równania różniczkowego (4.47). Równanie to określa osiowy rozkład strumienia neutronów w rdzeniu reaktora dla podobszaru, w którym nie występuje zespół prętów sterujących i jest ono również poprawne, gdy zespół ten nie jest zagłębiony w rdzeń reaktora [12].

Rozwiązanie ogólne równania różniczkowego (4.48) może przyjąć trzy różne formy w zależności od różnicy parametrów  $\alpha^2 - \beta^2$  tego równania [109], [110]:

- jeżeli  $\alpha^2 < \beta^2$  to wyróżnik kwadratowy  $\Delta$  równania charakterystycznego (4.55) jest większy od zera  $-4(\alpha^2 - \beta^2) > 0$ , a równanie charakterystyczne posiada dwa różne pierwiastki rzeczywiste  $r_{r1} = -\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}$  i  $r_{r2} = \sqrt{\beta^2 - \alpha^2}$ . W tym przypadku rozwiązanie ogólne równania (4.48) jest następujące

$$\chi_r(z) = C_1 e^{-\sqrt{\beta^2 - \alpha^2} z} + C_2 e^{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2} z}. \quad (4.60)$$

Po podstawieniu warunku brzegowego  $\chi_r(\tilde{H}) = 0$  rozwiązanie (4.60) przyjmuje następującą uproszczoną postać

$$\chi_r(z) = C' \sinh\left(\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}(\tilde{H} - z)\right), \quad (4.61)$$

gdzie  $C'$  jest dowolną stałą.

- jeżeli  $\alpha^2 > \beta^2$  to wyróżnik kwadratowy  $\Delta$  równania charakterystycznego (4.55) jest mniejszy od zera  $-4(\alpha^2 - \beta^2) < 0$ , a równanie charakterystyczne posiada dwa różne pierwiastki zespolone  $r_{r1} = \zeta_r - \eta_r i$  oraz  $r_{r2} = \zeta_r + \eta_r i$ . W tym przypadku rozwiązanie ogólne równania (4.48) jest następujące

$$\chi_r(z) = e^{\zeta_r z} (C_1 \cos \eta_r z + C_2 \sin \eta_r z). \quad (4.62)$$

Podstawiając  $\zeta_u = -\frac{b}{2a} = 0$  oraz  $\eta_u = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$  do (4.62) otrzyma się

$$\chi_r(z) = C_1 \cos\left(\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} z\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} z\right). \quad (4.63)$$

Po uwzględnieniu warunku brzegowego  $\chi_r(\tilde{H}) = 0$  powyższe równanie przyjmuje następującą uproszczoną postać

$$\chi_r(z) = C' \sin\left(\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}(\tilde{H} - z)\right), \quad (4.64)$$

gdzie  $C'$  jest dowolną stałą.

- jeżeli  $\alpha^2 = \beta^2$  to wyróżnik kwadratowy  $\Delta$  równania charakterystycznego (4.55) jest równy zero  $-4(\alpha^2 - \beta^2) = 0$ , a równanie charakterystyczne posiada jeden pierwiastek podwójny  $r_1 = r_2 = -\frac{b}{2a} = 0$ . W tym przypadku rozwiązanie ogólne równania (4.48) jest następujące

$$X_r(z) = C_1 z + C_2. \quad (4.65)$$

Po podstawieniu warunku brzegowego  $\chi_r(\tilde{H}) = 0$  rozwiązanie to przyjmuje następującą postać

$$\chi_r(z) = -C'(H - z), \quad (4.66)$$

gdzie  $C'$  jest dowolną ujemną stałą.

Podsumowując powyższe rozważania, równania różniczkowe (4.47) i (4.48) mają następujące rozwiązania:

- dla części, w której nie występuje zespół prętów sterujących

$$\chi_u(z) = C \sin(\alpha z), \quad (4.67)$$

- dla części, w której występuje zespół prętów sterujących:

$$\chi_r(z) = \begin{cases} C' \sin\left(\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}(\tilde{H} - z)\right), & \text{dla } \alpha^2 > \beta^2 \\ C' \sinh\left(\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}(\tilde{H} - z)\right), & \text{dla } \alpha^2 < \beta^2 \\ -C'(\tilde{H} - z), & \text{dla } \alpha^2 = \beta^2 \end{cases} \quad (4.68)$$

W równaniach (4.67) i (4.68) występują niewiadome w postaci stałych  $C$ ,  $C'$  oraz  $k$  w parametrach  $\alpha$  i  $\beta$ . W celu wyrugowania stałych  $C$  i  $C'$  należy zastosować warunek ciągłości (4.52) oraz warunek gładkości (4.53). Po zastosowaniu tych warunków otrzyma się następujące zależności:

- dla  $\alpha^2 > \beta^2$

$$\begin{cases} C \sin(\alpha(\tilde{H} - x)) = C' \sin(\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}x) \\ C\alpha \cos(\alpha(\tilde{H} - x)) = -C' \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} \cos(\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}x) \end{cases}, \quad (4.69)$$

- dla  $\alpha^2 < \beta^2$

$$\begin{cases} C \sin(\alpha(\tilde{H} - x)) = C' \sinh(\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}x) \\ C\alpha \cos(\alpha(\tilde{H} - x)) = -C' \sqrt{\beta^2 - \alpha^2} \cosh(\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}x) \end{cases}, \quad (4.70)$$

- dla  $\alpha^2 = \beta^2$

$$\begin{cases} C \sin(\alpha(\tilde{H} - x)) = -C'x \\ C\alpha \cos(\alpha(\tilde{H} - x)) = C' \end{cases}, \quad (4.71)$$

w których jedyną niewiadomą jest stała  $k$  pod postacią parametrów  $\alpha$  i  $\beta$ . Aby wyznaczyć stałą  $k$ , należy porównać ze sobą stosunek wielkości  $C/C'$  dla każdego z wyżej wymienionych przypadków. Po przyrównaniu stosunków  $C/C'$  i przekształceniach otrzymuje się następujące równania przestępne:

- dla  $\alpha^2 > \beta^2$

$$\alpha \cot(\alpha(\tilde{H} - x)) = -\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} \cot(\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}x), \quad (4.72)$$

- dla  $\alpha^2 < \beta^2$

$$\alpha \cot(\alpha(\tilde{H} - x)) = -\sqrt{\beta^2 - \alpha^2} \coth(\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}x), \quad (4.73)$$

- dla  $\alpha^2 = \beta^2$

$$-\alpha x = \tan(\alpha(\tilde{H} - x)), \quad (4.74)$$

które należy rozwiązać dla niewiadomej  $k$  przy znajomości parametrów reaktora takich jak:  $M, k_\infty, B_r$  oraz  $\rho_b$ .

Obliczenia pozwalające na wyznaczenie współczynnika  $k$  z równań przestępnych (4.72)-(4.74) sprowadzają się do wykorzystania metod numerycznych lub graficznych. W rozprawie wykorzystano obliczenia symboliczne i numeryczne do określenia wartości współczynnika  $k$  z równań (4.72)-(4.74) dla różnych zagłębień zespołu prętów sterujących  $x$ .



W pierwszej kolejności wyznaczono granice zmienności współczynnika  $k$ . Górna granica współczynnika  $k$  oznaczona indeksem  $u$  obowiązuje dla pełnego wynurzenia zespołu prętów sterujących ( $x = 0$ ) i została ona obliczona w oparciu o zależność [12]

$$k_u = \frac{k_\infty}{1 + M^2(B_r^2 + B_z^2)}. \quad (4.75)$$

Dla pełnego wynurzenia zespołu prętów sterujących strumień neutronów w rdzeniu opisany jest za pomocą równania (4.67) oraz musi być spełniony warunek brzegowy  $\chi_u(\tilde{H}) = 0$ . Spełnienie tego warunku sprowadza się do przypadku, w którym parametr  $\alpha$  w równaniu (4.67) musi być równy wyrażeniu  $\alpha_u = \pi/\tilde{H}$ . Równanie (4.75) w tym przypadku otrzymuje się poprzez podstawienie parametru  $\alpha_u$  w następującej postaci  $\alpha_u^2 = (\pi/\tilde{H})^2 = B_z^2$  do równania (4.49) i wyznaczeniu współczynnika mnożenia  $k_u$ .

Dolna granica współczynnika  $k$  oznaczona indeksem  $r$  obowiązuje dla pełnego zagłębienia zespołu prętów sterujących w rdzeń reaktora ( $x = \tilde{H}$ ) i została ona obliczona w oparciu o zależność [12]

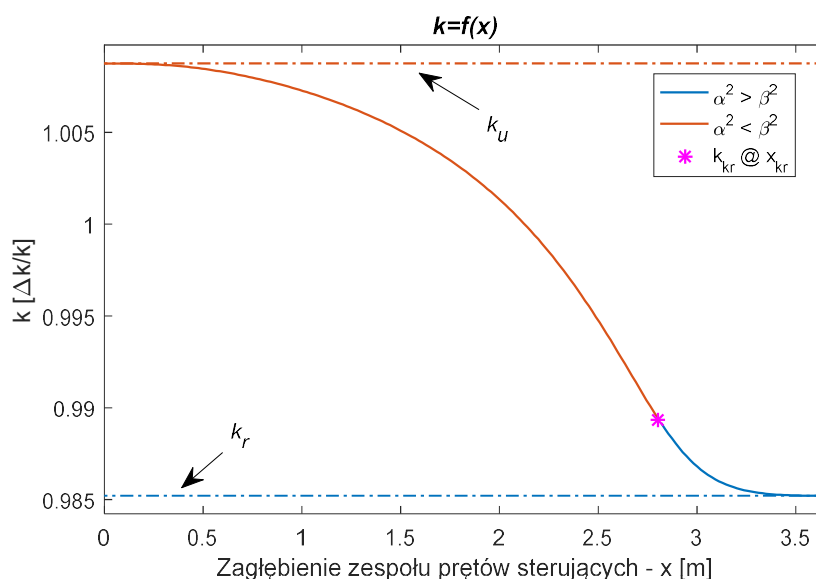
$$k_r = (1 - \rho_b)k_u. \quad (4.76)$$

Dla całkowitego zanurzenia zespołu prętów sterujących strumień neutronów w rdzeniu opisany jest układem równań (4.68) oraz musi być spełniony warunek brzegowy  $\chi_r(0) = 0$ . Tylko pierwsze równanie z układu (4.68) spełnia ten warunek brzegowy dla  $\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} = \pi/\tilde{H}$ . Równanie (4.76) w tym przypadku otrzymuje się poprzez wykorzystanie zależności (4.49) i (4.50) w równaniu  $\alpha_r^2 - \beta_r^2 = \left(\frac{\pi}{\tilde{H}}\right)^2 = B_z^2$ , a następnie wyznaczeniu z niego współczynnika mnożenia  $k_r$ . Równanie opisane zależnością (4.74) pozwala na obliczenie granicznego zagłębienia  $x_{gr}$  przy znajomości współczynnika mnożenia  $k_{gr}$ , który z kolei można wyliczyć bezpośrednio z warunku  $\alpha^2 = \beta^2$ . Współczynnik  $k_{gr}$  wraz z odpowiadającym mu zagłębieniem  $x_{gr}$  określa punkt przejścia pomiędzy warunkami  $\alpha^2 > \beta^2$  oraz  $\alpha^2 < \beta^2$ . W związku z powyższym przedział zmienności współczynnika  $k \in \langle k_r; k_u \rangle$  można podzielić na dwa podobszary i punkt

$$\begin{cases} k \in \langle k_r; k_{gr} \rangle & \text{dla } \alpha^2 > \beta^2 \\ k = k_{gr} & \text{dla } \alpha^2 = \beta^2 \\ k \in \langle k_{gr}; k_u \rangle & \text{dla } \alpha^2 < \beta^2 \end{cases}. \quad (4.77)$$

Zdefiniowane za pomocą zależności (4.77) przedziały pozwalają na określenie zbiorów rozwiązań dopuszczalnych równań przestępnych (4.72)-(4.74) dla metody symbolicznej i numerycznej, którą wykorzystano do wyznaczenia współczynnika  $k$  dla różnych zagłębień zespołu

prętów sterujących  $x$ . Obliczenia wykonano w oparciu o parametry reaktora zestawione w załączniku 2 dla  $n = 201$  punktów obliczeniowych  $x_i$  wyznaczonych z przyrostem  $\Delta x = 0,0183$ . Pierwszy punkt przyjął wartość  $x_0 = 0$  natomiast ostatni punkt obliczeniowy przyjął wartość  $x_n = \tilde{H}$ . Otrzymane wyniki zestawiono w formie wykresu przedstawionego na rysunku 4.4, który przedstawia niewiadomą funkcję  $k = f(x)$  wraz z granicami zmienności współczynnika  $k$ . Podczas wykonywania obliczeń wartości współczynnika  $k$  z wykorzystaniem metody symbolicznej i numerycznej otrzymano kilka rozwiązań spełniających równania (4.72) i (4.73) dla niektórych zagłębień  $x_i$ . W przypadku równania (4.74) otrzymano kilka wartości zagłębienia  $x_{gr}$  dla pojedynczego punktu  $k_{gr}$  obliczonego z zależności  $\alpha^2 = \beta^2$ . W celu odrzucenia nieprawidłowych rozwiązań w przypadku obliczeń współczynnika  $k$  wzięto pod uwagę tylko te wartości, które zapewniły ciągłość niewiadomej funkcji  $k = f(x)$  oraz były określone w zbiorach rozwiązań dopuszczalnych (4.77). W przypadku obliczeń  $x_{gr}$  wzięto tylko to rozwiązanie, które znajdowało się w otoczeniu punktu zmiany relacji między parametrami  $\alpha^2$  i  $\beta^2$  oraz pozostawało w zgodzie z zachowaniem nieciągłości niewiadomej funkcji  $k = f(x)$ . Sporządzenie wykresu funkcji  $k = f(x)$  jest bardzo istotne, ponieważ pomaga w szybkiej weryfikacji rozwiązań równań przestępnych (4.72)–(4.74) dla punktów  $x \neq x_i$ .



Rysunek 4.4. Zależność współczynnika mnożenia  $k$  od zagłębienia zespołu prętów sterujących  $x$ .

Znając wartości współczynnika mnożenia  $k$  dla różnych punktów  $x_i$  reprezentujących poziomy zagłębienia zespołu prętów sterujących, można posłużyć się równaniami (4.67) i (4.68) w celu określenia wartości rozkładu strumienia neutronów wzdłuż osi rdzenia reaktora jądrowego. Aby było to możliwe należy najpierw wyznaczyć wartości stałych  $C$  i  $C'$  występujących w równaniach (4.67) i (4.68). Wartości te można wyznaczyć w oparciu o układy równań (4.69)-

(4.71). Przyjmując w tych układach równań  $C$  oraz  $C'$  jako niewiadome, można je zapisać w następującej postaci

$$\begin{cases} a_{11}C + a_{12}C' = 0 \\ a_{21}C + a_{22}C' = 0 \end{cases} \quad (4.78)$$

gdzie:

- dla  $\alpha^2 > \beta^2$

$$\begin{aligned} a_{11} &= \sin(\alpha(\tilde{H} - x)) \\ a_{12} &= -\sin(\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} x) \\ a_{21} &= \alpha \cos(\alpha(\tilde{H} - x)) \\ a_{22} &= \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} \cos(\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} x) \end{aligned} \quad , \quad (4.79)$$

- dla  $\alpha^2 < \beta^2$

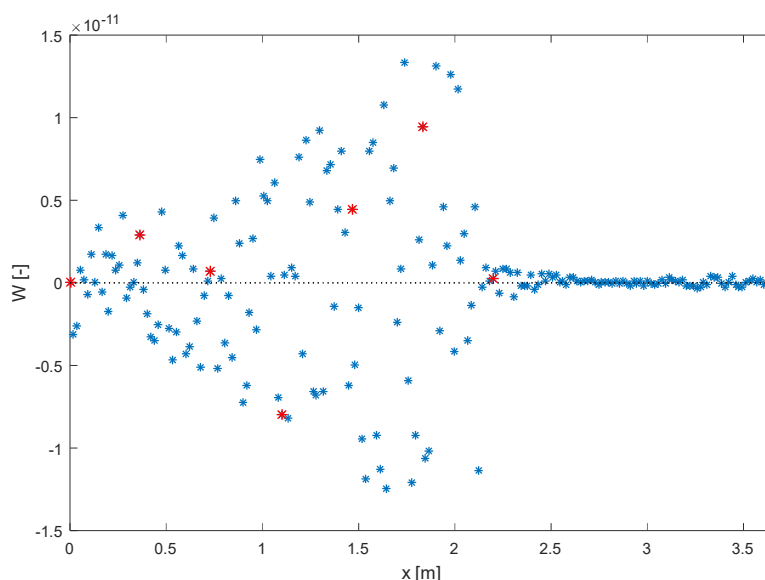
$$\begin{aligned} a_{11} &= \sin(\alpha(\tilde{H} - x)) \\ a_{12} &= -\sinh(\sqrt{\beta^2 - \alpha^2} x) \\ a_{21} &= \alpha \cos(\alpha(\tilde{H} - x)) \\ a_{22} &= \sqrt{\beta^2 - \alpha^2} \cosh(\sqrt{\beta^2 - \alpha^2} x) \end{aligned} \quad , \quad (4.80)$$

- dla  $\alpha^2 = \beta^2$

$$\begin{aligned} a_{11} &= \sin(\alpha(\tilde{H} - x)) \\ a_{12} &= x \\ a_{21} &= \alpha \cos(\alpha(\tilde{H} - x)) \\ a_{22} &= -1 \end{aligned} \quad (4.81)$$

Układ równań (4.78) jest układem jednorodnym. Jeżeli wyznacznik charakterystyczny  $W$  tego układu jest różny od zera, tzn.  $W \neq 0$ , to układ ten ma tylko rozwiązanie zerowe [111]. Jeżeli natomiast wyznacznik charakterystyczny  $W$  tego układu jest równy zero, tzn.  $W = 0$ , to układ ten ma nieskończenie wiele rozwiązań w tym również rozwiązanie zerowe [111]. Aby możliwe było określenie stałych  $C$  i  $C'$ , a co za tym idzie wyznaczenie rozkładów strumienia neutronów dla różnych zagłębień  $x$ , konieczne jest, aby wyznacznik charakterystyczny  $W$  układu jednorodnego (4.78) przyjmował wartości zero dla każdego zagłębienia  $x$ . W tym celu przeprowadzono obliczenia numeryczne wyznacznika charakterystycznego  $W$  układu jednorodnego (4.78). Obliczenia te pokazały, że dla zagłębień  $x_i$  wybranych do sporządzenia wykresu niewiadomej funkcji  $k = f(x)$  przedstawionej na rysunku 4.4 wartości wyznacznika charakterystycznego  $W$  zawierały się w przedziale  $W \in \langle -1,25 \cdot 10^{-11}; 1,33 \cdot 10^{-1} \rangle$ . Wyniki tych obliczeń zostały

przedstawione obrazowo na rysunku 4.5. Na podstawie obliczeń oraz rysunku 4.5 można przyjąć, że w danych punktach obliczeniowych  $x_i$  wartości wyznacznika charakterystycznego  $W$  układu (4.78) są na tyle małe, że można je traktować jako równe zero. W wyniku takiego uproszczenia można przyjąć, że układ jednorodny (4.78) w punktach obliczeniowych  $x_i$  ma nieskończenie wiele rozwiązań, a co za tym idzie istnieje dowolność w wyborze stałych  $C$  i  $C'$  dla tych punktów.



Rysunek 4.5. Wartości wyznacznika charakterystycznego układu (4.78) dla wybranych punktów obliczeniowych  $x_i$ . Kolorem czerwonym zaznaczono wartości wyznacznika charakterystycznego dla zagłębień branych pod uwagę podczas wyznaczania współczynników  $D_C$ .

#### 4.3.2.2 Wyznaczanie wartości współczynników $D_C$

Wyznaczanie wartości współczynników  $D_C$  dla rdzenia o wymiarach  $\tilde{r}$ ,  $\tilde{H}$  oraz stałych materiałowych  $M$ ,  $k_\infty$ ,  $B_r$  oraz  $\rho_b$  jest oparte o równania (4.67) i (4.68). Przed wyznaczeniem wartości współczynników  $D_C$  należy określić dla jakich zagłębień zespołu prętów sterujących  $x$  będą one wyznaczane. Następnie dla każdego wybranego zagłębienia  $x$  należy obliczyć współczynnik  $k$  na podstawie zależności (4.72)-(4.74). Obliczone współczynniki  $k$  należy zestawić z wcześniej sporządzonym wykresem niewiadomej funkcji  $k = f(x)$  w celu odrzucenia nieprawidłowych rozwiązań. Następnie należy określić stałe  $C$  i  $C'$  według układu jednorodnego (4.78), o ile wyznacznik charakterystyczny tego układu dla wybranych zagłębień będzie równy zero ( $W = 0$ ). Stałe  $C$  oraz  $C'$  można wyznaczyć w oparciu o poniższe zależności:

$$C = -\frac{a_{12}}{a_{11}} C' \text{ lub } C' = -\frac{a_{12}}{a_{11}} C. \quad (4.82)$$

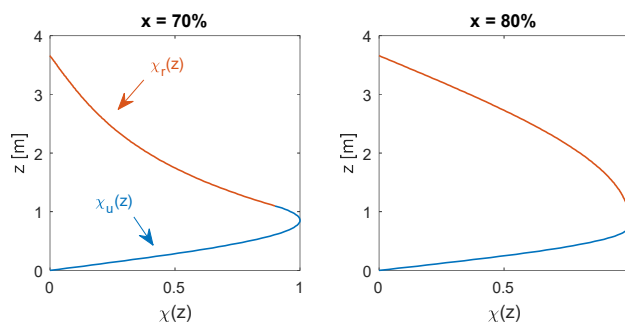
W rozprawie dokonano wyznaczenia kształtu rozkładów strumienia neutronów w rdzeniu reaktora dla siedmiu poziomów zagłębienia zespołu prętów sterujących, dla których wyznacznik  $W$  układu jednorodnego (4.78) był w przybliżeniu równy zero. Stałe  $C$  oraz  $C'$  dobrano w taki

sposób, aby największa wartość rozkładu strumienia neutronów w rdzeniu reaktora miała unormowaną wartość równą 1. Wyniki obliczeń dla wybranych zagłębień  $x$  zostały zestawione w poniższej tabeli. Zagłębienie zespołu prętów sterujących  $x$  liczone jest od góry rdzenia. Parametry reaktora niezbędne do obliczeń zostały zamieszczone w załączniku 2.

Tabela 4.2. Wyniki obliczeń parametrów niezbędnych do określenia rozkładu strumienia neutronów dla wybranych poziomów zagłębień zespołu prętów sterujących (ZPS).

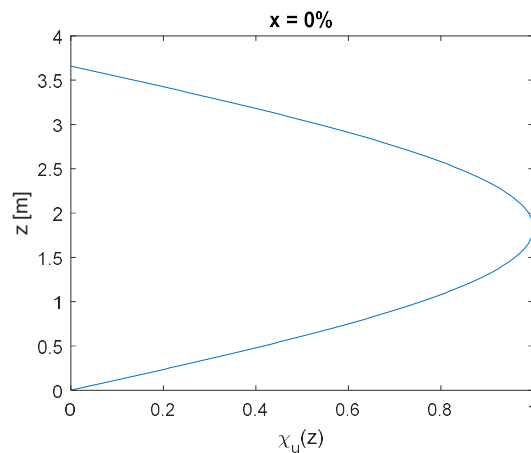
Lp.	Zagłębienie ZPS [m]	Zagłębienie ZPS [%]	Wartość współczynnika $k$	Wartość stałej $C$	Wartość Stałej $C'$	Wartość $\alpha$	Wartość $\beta$
1	0,0000	0	1,0088	1,0000	–	0,8584	–
2	0,3660	10	1,0086	1,0000	0,3738	0,8712	2,0211
3	0,7320	20	1,0080	1,0000	0,2367	0,9292	2,0217
4	1,0980	30	1,0069	1,0000	0,1480	1,0259	2,0228
5	1,4640	40	1,0053	1,0000	0,1001	1,1569	2,0245
6	1,8300	50	1,0029	1,0000	0,0795	1,3282	2,0269
7	2,1960	60	0,9992	1,0000	0,0866	1,5532	2,0306

W rozprawie przyjęto, że maksymalny poziom zagłębienia zespołu prętów sterujących będzie wynosił 60% wysokości rdzenia. Dla zagłębień przekraczających 60% wysokości rdzenia kształt osiowego rozkładu strumienia neutronów stawał się coraz bardziej zniekształcony. Jest to uzasadnione, gdyż przy coraz to większych zagłębieniach następuje zmiana rozwiązania równania dyfuzji neutronów zgodnie z równaniami (4.68) oraz relacją parametrów  $\alpha^2$  i  $\beta^2$ . Na podstawie rysunku 4.4 oraz równań (4.67) i (4.68) można zaobserwować, że dla zagłębień nieprzekraczających poziomu  $x_{kr}$  spełniony jest warunek  $\alpha^2 < \beta^2$ , a rozkład strumienia neutronów przyjmuje kształt funkcji  $\sinh(\cdot)$ . W punkcie  $x_{kr}$  prawdziwy jest warunek  $\alpha^2 = \beta^2$ , a strumień neutronów przyjmuje kształt funkcji liniowej. Dla zagłębień przekraczających wartość  $x_{kr}$  spełniony jest warunek  $\alpha^2 > \beta^2$ , a co za tym idzie strumień neutronów przyjmuje kształt funkcji  $\sin(\cdot)$ . Zagłębienia bliskie poziomowi  $x_{kr} = 2,8055 \text{ m} = 76,65\%$  będą charakteryzować się prawie liniowym przebiegiem strumienia neutronów w obszarze zagłębienia zespołu prętów sterujących  $\chi_r(z)$ , a co za tym idzie dużymi zniekształceniami ze względu na liniowy charakter rozwiązania równania dyfuzji neutronów w tym punkcie. Zjawisko to można zaobserwować na rysunku 4.6, na którym zaprezentowano rozkład strumienia neutronów dla zagłębienia  $x$  równego 70 i 80%.

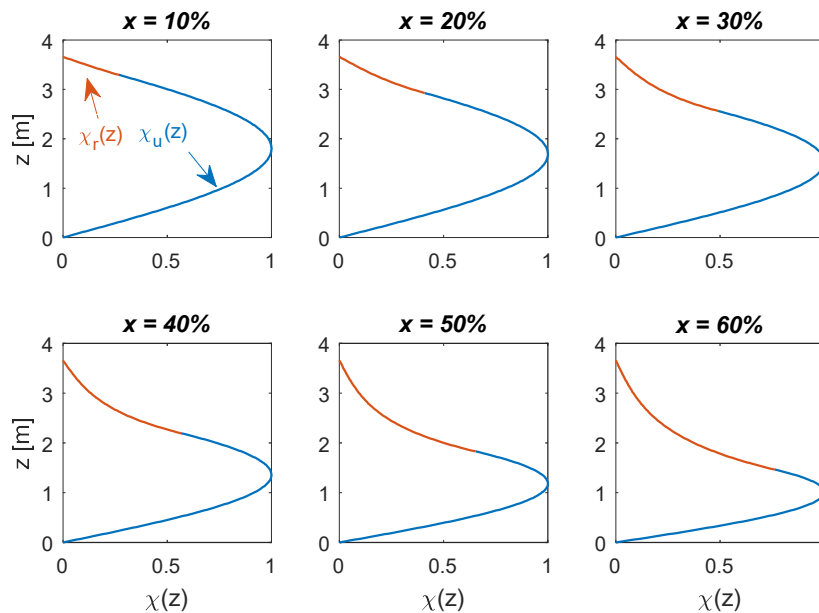


Rysunek 4.6. Rozkład strumienia neutronów dla zagłębienia  $x$  równego 70 i 80%.

Na kolejnych rysunkach zostały zaprezentowane wyniki obliczeń kształtów rozkładu strumienia neutronów dla danych zestawionych w tabeli 4.2. Na rysunku 4.7 przedstawiono osiowy rozkład strumienia neutronów w rdzeniu reaktora jądrowego dla przypadku, gdy w rdzeniu nie jest zanurzony zespół prętów sterujących. Rozkład ten jest opisany równaniem (4.67). Na rysunku 4.8 zostały przedstawione osiowe rozkłady strumienia neutronów dla różnych pozycji zagłębienia zespołu prętów sterujących  $x$  w rdzeniu reaktora. Na rysunku tym zaznaczono odpowiednio kolorem czerwonym i niebieskim obszary, w których występuje oraz nie występuje zespół prętów sterujących. Rozkłady zamieszczone na tym rysunku opisane są za pomocą równań (4.67) oraz (4.68).



Rysunek 4.7. Osiowy rozkład strumienia neutronów w rdzeniu reaktora jądrowego przy pełnym wysunięciu zespołu prętów sterujących.



Rysunek 4.8. Osiowe rozkłady strumienia neutronów  $\chi(z)$  w rdzeniu reaktora jądrowego dla wybranych zagłębień zespołu prętów sterujących.

W celu wyznaczenia współczynników  $D_C$  dla wyznaczonych osiowych rozkładów strumienia neutronów  $\chi$  należy w pierwszej kolejności określić liczbę przedziałów  $n_{DC}$ , dla których będą liczone współczynniki. Każdy przedział podzieli wysokość rdzenia reaktora  $\tilde{H}$  na równe odcinki  $\Delta\tilde{H} = \frac{\tilde{H}}{n_{DC}}$ . Następnie, znając punkty podziału wysokości rdzenia reaktora  $h_0, h_1, h_2, \dots, h_{n_{DC}}$ , należy wyliczyć pole pod krzywymi opisującymi rozkłady strumienia neutronów dla każdego przedziału wyznaczonego przez punkty podziału  $h_i$  według następującej zależności

$$P_{DCi} = \int_{h_{i-1}}^{h_i} \chi(z) dz, \quad \text{dla } i = 1, \dots, n_{DC}, \quad (4.83)$$

gdzie  $\chi(z)$  jest krzywą określającą osiowy strumień neutronów w rdzeniu reaktora złożoną z funkcji  $\chi_u(z)$  oraz  $\chi_r(z)$ . Jeden z wyznaczonych przedziałów będzie zawierał punkt  $\tilde{H} - x$  określający przejście pomiędzy funkcją  $\chi_u(z)$  oraz  $\chi_r(z)$ . Dla tego punktu spełnione są warunki (4.52) oraz (4.53). W tym przedziale należy obliczyć wartość pola pod krzywymi  $\chi_u(z)$  oraz  $\chi_r(z)$  według następującej zależności

$$P_{DC(\cdot)} = \int_a^b \chi(z) dz = \int_a^{\tilde{H}-x} \chi_u(z) dz + \int_{\tilde{H}-x}^b \chi_r(z) dz, \quad (4.84)$$

gdzie  $a$  i  $b$  są granicami przedziału, w którym występuje punkt  $\tilde{H} - x$ . W celu obliczenia wartości liczbowej współczynników  $D_C$  należy każde obliczone pole  $P_{DCi}$  podzielić przez całkowite pole pod krzywą  $\chi(z)$  określającą osiowy strumień neutronów w rdzeniu reaktora według zależności

$$D_{Ci} = \frac{P_{DCi}}{P_C}, \quad \text{dla } i = 1, \dots, n_{DC}. \quad (4.85)$$

Pole całkowite  $P_C$  należy obliczyć w następujący sposób

$$P_C = \int_0^{\tilde{H}} \chi(z) dz = \int_0^{\tilde{H}-x} \chi_u(z) dz + \int_{\tilde{H}-x}^{\tilde{H}} \chi_r(z) dz. \quad (4.86)$$

Wykorzystanie wzoru (4.85) powoduje, że suma współczynników  $D_{Ci}$  dla  $i = 1, \dots, n_{DC}$  jest zawsze równa jedności. Fakt ten jest istotny, gdyż ułatwia on w znacznym stopniu stosowalność współczynników  $D_C$  w węzłowych modelach reaktora jądrowego wykorzystujących model punktowej kinetyki neutronów w celach obliczenia generowanej mocy średniej. Normalizacja współczynników do jedności nie będzie powodowała nienaturalnego zwiększenia/zmniejszenia wartości mocy średniej.

Całki nieoznaczone przydatne w obliczeniach współczynników  $D_C$  dla funkcji  $\chi_u(z)$  oraz  $\chi_r(z)$  opisanymi równaniami (4.67) oraz (4.68) są następujące:

- dla  $\chi_u(z)$

$$\int C \sin(\alpha z) dz = -\frac{C}{\alpha} \cos(\alpha z) + C_c, \quad (4.87)$$

- dla  $\chi_r(z)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \int C' \sin(\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}(\tilde{H} - z)) = \\ = \frac{C'}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} \cos(\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}(\tilde{H} - z)) + C_c, \quad \text{dla } \alpha^2 > \beta^2 \\ \int C' \sinh(\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}(\tilde{H} - z)) dz = \\ = -\frac{C'}{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}} \cosh(\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}(\tilde{H} - z)) + C_c, \quad \text{dla } \alpha^2 < \beta^2 \\ \int -C'(\tilde{H} - z) dz = C' \left( \frac{z^2}{2} - \tilde{H}z \right) + C_c, \quad \text{dla } \alpha^2 = \beta^2 \end{array} \right., \quad (4.88)$$

gdzie  $C_c$  jest dowolną stałą całkowania.

W tabelach 4.3-4.5 zamieszczono wyniki obliczeń współczynników  $D_C$  dla siedmiu zagłębień zespołu prętów sterujących (ZPS)  $x$  odpowiednio dla podziału rdzenia na trzy, pięć oraz dziesięć obszarów obliczeniowych.

Tabela 4.3. Wartości współczynników  $D_{Ci}$  dla rdzenia podzielonego dla  $n_{DC} = 3$  obszary obliczeniowe.

Lp.	1	2	3	4	5	6	7
Zagłębienie ZPS [m]	0,0000	0,3660	0,7320	1,0980	1,4640	1,8300	2,1960
Zagłębienie ZPS [%]	0	10	20	30	40	50	60
$D_{C1}$	0,2500	0,2562	0,2834	0,3290	0,3904	0,4646	0,5370
$D_{C2}$	0,5000	0,5055	0,5234	0,5354	0,5170	0,4647	0,3974
$D_{C3}$	0,2500	0,2383	0,1932	0,1355	0,0926	0,0707	0,0656

Tabela 4.4. Wartości współczynników  $D_{Ci}$  dla rdzenia podzielonego dla  $n_{DC} = 5$  obszarów obliczeniowych.

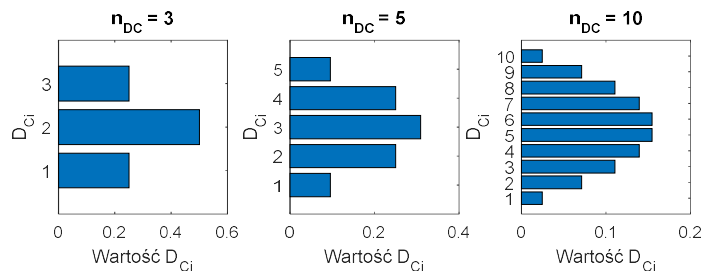
Lp.	1	2	3	4	5	6	7
Zagłębienie ZPS [m]	0,0000	0,3660	0,7320	1,0980	1,4640	1,8300	2,1960
Zagłębienie ZPS [%]	0	10	20	30	40	50	60
$D_{C1}$	0,0955	0,0981	0,1094	0,1290	0,1567	0,1933	0,2361
$D_{C2}$	0,2500	0,2556	0,2794	0,3175	0,3642	0,4110	0,4345
$D_{C3}$	0,3090	0,3127	0,3251	0,3352	0,3258	0,2810	0,2261
$D_{C4}$	0,2500	0,2468	0,2261	0,1794	0,1262	0,0934	0,0826
$D_{C5}$	0,0955	0,0868	0,0599	0,0389	0,0270	0,0213	0,0207



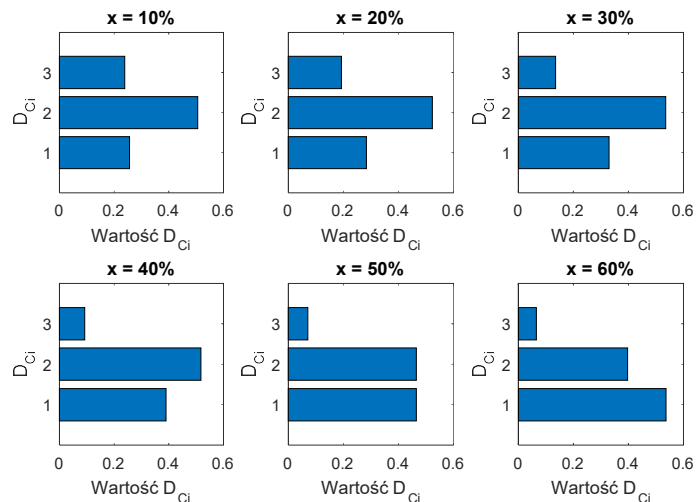
Tabela 4.5. Wartości współczynników  $D_{Ci}$  dla rdzenia podzielonego dla  $n_{DC} = 10$  obszarów obliczeniowych.

Lp.	1	2	3	4	5	6	7
Zagłębienie ZPS [m]	0,0000	0,3660	0,7320	1,0980	1,4640	1,8300	2,1960
Zagłębienie ZPS [%]	0	10	20	30	40	50	60
$D_{C1}$	0,0245	0,0251	0,0281	0,0334	0,0410	0,0513	0,0641
$D_{C2}$	0,0710	0,0729	0,0812	0,0956	0,1157	0,1420	0,1720
$D_{C3}$	0,1106	0,1133	0,1250	0,1444	0,1700	0,1998	0,2259
$D_{C4}$	0,1394	0,1423	0,1544	0,1731	0,1943	0,2113	0,2087
$D_{C5}$	0,1545	0,1569	0,1662	0,1777	0,1842	0,1738	0,1401
$D_{C6}$	0,1545	0,1558	0,1589	0,1575	0,1416	0,1072	0,0861
$D_{C7}$	0,1394	0,1389	0,1335	0,1154	0,0827	0,0604	0,0522
$D_{C8}$	0,1106	0,1080	0,0927	0,0640	0,0435	0,0330	0,0304
$D_{C9}$	0,0710	0,0662	0,0465	0,0301	0,0209	0,0163	0,0158
$D_{C10}$	0,0245	0,0206	0,0135	0,0088	0,0062	0,0049	0,0049

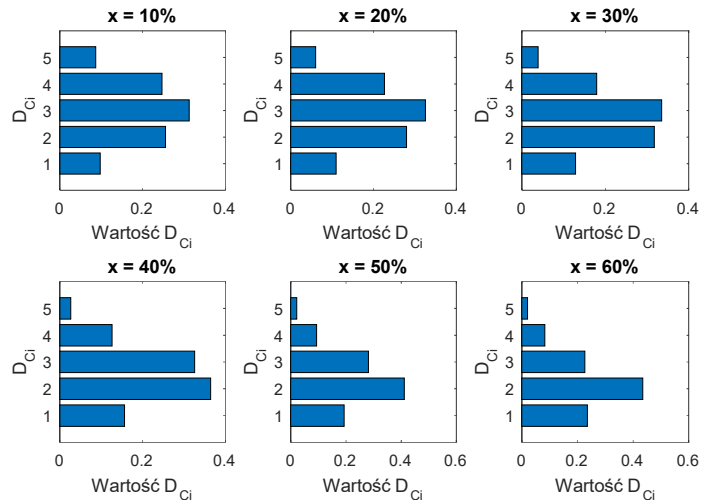
Na rysunku 4.9 zobrazowano histogramy współczynników  $D_C$  dla przypadku całkowitego wynurzenia zespołu prętów sterujących dla rdzenia podzielonego na 3, 5 i 10 obszarów obliczeniowych. Na rysunkach 4.10-4.12 zamieszczono histogramy dla różnych głębokości zagłębienia zespołu prętów sterujących  $x$  dla rdzenia podzielonego odpowiednio na 3, 5 i 10 przedziałów obliczeniowych.



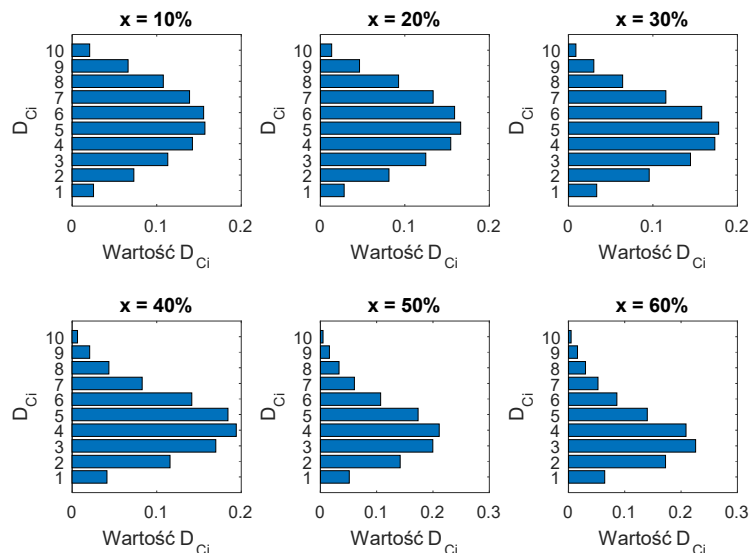
Rysunek 4.9. Wykresy słupkowe współczynników  $D_C$  dla całkowicie wynurzonego zespołu prętów sterujących.



Rysunek 4.10. Wykresy słupkowe współczynników  $D_C$  dla rdzenia podzielonego na trzy obszary obliczeniowe dla wybranych zagłębień zespołu prętów sterujących  $x$ .



Rysunek 4.11. Wykresy słupkowe współczynników  $D_C$  dla rdzenia podzielonego na pięć obszarów obliczeniowych dla wybranych zagłębień zespołu prętów sterujących  $x$ .



Rysunek 4.12. Wykresy słupkowe współczynników  $D_C$  dla rdzenia podzielonego na dziesięć obszarów obliczeniowych dla wybranych zagłębień zespołu prętów sterujących  $x$ .

Uwzględnienie powyższych rozważań w procedurach numerycznych modeli dynamicznych reaktora jądrowego wykorzystywanych w symulacjach komputerowych jest niekorzystne z powodu znaczącego wydłużenia czasu obliczeń.

W rozprawie współczynniki  $D_C$  wykorzystano w obiekcie wirtualnym w celu zamodelowania rozkładu mocy w węzłach modelu reaktora jądrowego. Pomimo tego, że współczynniki wyznaczają względne pole pod krzywymi określającymi rozkład strumienia neutronów, można je wykorzystać do modelowania rozkładu mocy w rdzeniu reaktora, gdyż jak to zostało wykazane

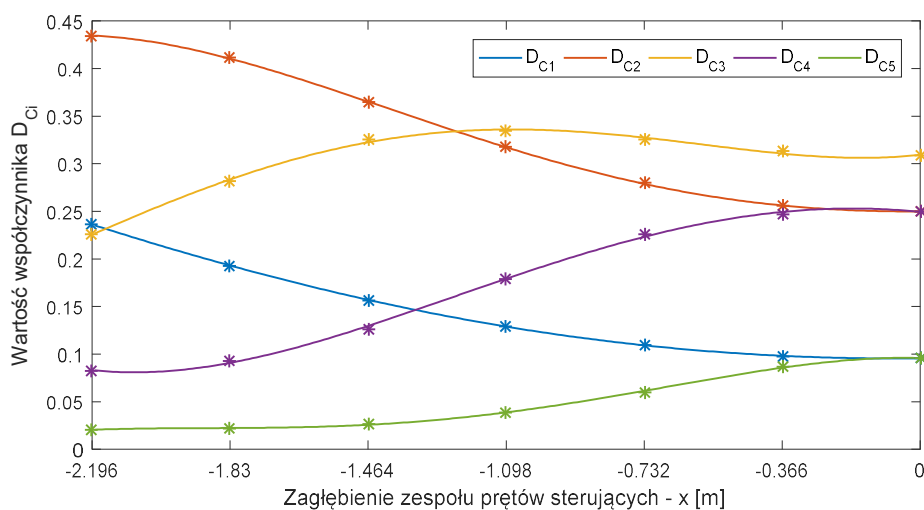
w podrozdziale 2.1.2, strumień neutronów jest wprost proporcjonalny do mocy reaktora jądrowego  $P_{TH} \sim \bar{\phi} \sim \bar{n}$ . W celu uproszczenia implementacji zmian współczynników  $D_C$  w zależności od zagłębienia zespołu prętów sterujących  $x$  w obiekcie wirtualnym wykorzystano technikę interpolacji. Za pomocą interpolacji wyznaczone są wartości współczynników  $D_C$  dla niewiadomych zagłębień zespołu prętów sterujących na podstawie znajomości wartości tych współczynników we wcześniej wybranych punktach obliczeniowych. Wartości współczynników  $D_C$  w szukanych punktach wyznaczone są na podstawie wielomianu czwartego stopnia, który opisany jest następującą funkcją

$$D_{Ci} = a_i x^4(t) + b_i x^3(t) + c_i x^2(t) + d_i x(t) + e_i \quad \text{dla } i = 1, \dots, n_{DC}. \quad (4.89)$$

Wyniki przeprowadzonej interpolacji dla podziału rdzenia na 5 przedziałów ( $n_{DC} = 5$ ) dla punktów obliczeniowych zestawionych w tabeli 4.3 zostały przedstawione na rysunku 4.13. Parametry wielomianu zestawiono w tabeli 4.6. Parametry te zostały wyznaczone dla ujemnych wartości położenia zespołu prętów sterujących  $x$  w celu zachowania zgodności z modelem urządzenia wykonawczego, którego charakterystyka została zamieszczona w podrozdziale 3.2.2.

Tabela 4.6. Parametry wielomianu czwartego stopnia wykorzystanego do interpolacji wartości współczynników  $D_C$  dla dowolnego zagłębienia zespołu prętów sterujących.

$i$	a	b	c	d	e
1	-0,0009879	-0,0032355	0,0283073	0,0032516	0,0954533
2	-0,0135524	-0,0279654	0,0429876	0,0015697	0,2498562
3	0,0236032	0,1330806	0,1824356	0,0470760	0,3095445
4	0,0094512	-0,0071732	-0,1140610	-0,0401373	0,2493770
5	-0,0185141	-0,0947065	-0,1396697	-0,0117600	0,0957690



Rysunek 4.13. Wynik interpolacji współczynników  $D_C$  dla podziału rdzenia reaktora na  $n_{DC} = 5$  przedziałów.

Technika wyznaczania współczynników  $D_C$  na podstawie interpolacji, dla której wyniki zostały przedstawione na rysunku 4.13, została zaimplementowana w obiekcie wirtualnym o strukturze przedstawionej w podrozdziale 4.3.1. Obiekt wirtualny opracowany i wykorzystany w rozprawie został podzielony na pięć węzłów paliwa oraz dziesięć węzłów chłodziwa. Z tego powodu wyniki przedstawione powyżej charakteryzują się podziałem rdzenia na 5 przedziałów obliczeniowych.

#### 4.4 Nieliniowa przestrzeń stanu

Modele przedstawione w tym rozdziale można zapisać w formie nieliniowych równań stanu i wyjścia

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{z}), \quad (4.90)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{z}), \quad (4.91)$$

gdzie  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ ,  $\mathbf{u} = [u_1, u_2, \dots, u_r]^T$ ,  $\mathbf{z} = [z_1, z_2, \dots, z_m]^T$ ,  $\mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_p]^T$  oraz

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{z}) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{z}) \\ f_2(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{z}) \\ \dots \\ f_n(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{z}) \end{bmatrix}, \quad (4.92)$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{z}) = \begin{bmatrix} g_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{z}) \\ g_2(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{z}) \\ \dots \\ g_p(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{z}) \end{bmatrix}. \quad (4.93)$$

Ta forma pozwala w przystępny i jednoznaczny sposób określić jakie wielkości występujące w modelu są traktowane jako stan, wejścia oraz wyjścia. Forma ta również jest przydatna przy przeprowadzaniu linearyzacji modelu. Linearyzacja modelu projektowego reaktora jądrowego została zamieszczona w załączniku 3.

W skład modelu projektowego (tabela 4.1), który przeznaczony jest do syntezy algorytmów sterowania mocą cieplną reaktora jądrowego, wchodzi punktowy model kinetyki neutronów (podrozdział 4.1) oraz model wymiany ciepła i efektów reaktywnościowych z pojedynczym węzłem paliwa i dwoma węzłami chłodziwa (podrozdział 4.2). Zgodnie z notacją nieliniowej przestrzeni stanu, która została przedstawiona powyżej, w modelu tym wyróżnia się następujące wielkości:

- stany:  $\mathbf{x} = [\bar{n}, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, T_F, T_{C1}, T_{C2}]^T$ ,
- wejścia:  $u = \rho_{EXT,R}$ ,
- wejścia zakłócające:  $\mathbf{z} = [T_{C,in}, W_C]^T$ ,
- wyjścia:  $y = \frac{\bar{n}}{N_N}$ .

Obiekt wirtualny (tabela 4.1), przeznaczony do testowania i weryfikacji algorytmów sterowania mocą cieplną reaktora jądrowego, składa się z punktowego modelu kinetyki neutronów (podrozdział 4.1) oraz modelu wymiany ciepła i efektów reaktywnościowych z pięcioma węzłami paliwa i dziesięcioma węzłami chłodziwa (podrozdział 4.3.1). Zgodnie z notacją nieliniowej przestrzeni stanu, która została przedstawiona za pomocą równań (4.90)-(4.93), w obiekcie wirtualnym wyróżnia się następujące wielkości:

- stany:  $\mathbf{x} = [\bar{n}, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, T_{F1}, T_{C1}, T_{C2}, T_{F2}, T_{C3}, T_{C4}, T_{F3}, T_{C5}, T_{C6}, T_{F4}, T_{C7}, T_{C8}, T_{F5}, T_{C9}, T_{C10}]^T$ ,
- wejścia:  $u = \rho_{EXT,R}$ ,
- zakłócenia:  $\mathbf{z} = [T_{C,in}, W_C]^T$ ,
- wyjścia:  $y = \frac{\bar{n}}{N_N}$ .

## 5. Technologie matematyczne syntezy układu sterowania

---

### 5.1 Rachunek różniczkowo-całkowy niecałkowitego rzędu

#### 5.1.1 Podstawowe definicje

Rachunek różniczkowo-całkowy niecałkowitego rzędu (w skrócie rachunek niecałkowitego rzędu) jest działem analizy matematycznej zajmującym się zagadnieniem uogólnienia rzędu operacji różniczkowania lub całkowania na wartości rzeczywiste lub zespolone. Pierwsze wzmianki dotyczące tego rachunku pojawiły się w 1695 roku w korespondencji dwóch znanych matematyków tamtego okresu, tj. Wilhelma Leibniza oraz Guillaume l'Hospitala [112]. Od tamtego czasu temat ten zdobył również zainteresowanie wśród innych znanych postaci ze środowiska matematyków takich jak: Euler, Laplace, Lacroix, Abel, Riemann oraz Liouville [113]. Pomimo tego, że badania nad rachunkiem niecałkowitego rzędu zostały zapoczątkowane w XVII w. nie stracił on zainteresowania do dziś. Obecnie rachunek niecałkowitego rzędu przeżywa swoją, druga młodość, co odzwierciedlone jest w liczbie publikacji z tej dziedziny. Najważniejsze publikacje oraz wydarzenia obejmujące tematykę rachunku niecałkowitego rzędu zostały zestawione w pracy [50].

Zainteresowanie rachunkiem niecałkowitego rzędu jest spowodowane głównie przez niestanny postęp technologiczny związany z urządzeniami cyfrowymi, w których możliwa jest implementacja operatorów tego rachunku. Ciągłe badania nad rachunkiem niecałkowitego rzędu powodują powstawanie coraz to nowych definicji określających sposób obliczania pochodnych oraz całek. Obecnie istnieje ponad 31 definicji pochodnych niecałkowitego rzędu oraz ponad 15 definicji określających sposób całkowania niecałkowitego rzędu [114]. W rozprawie zostaną przedstawione tylko najważniejsze definicje z punktu widzenia historycznego oraz aplikacyjnego.

##### 5.1.1.1 Definicja Riemanna-Liouvillea

W 1819 roku pierwsza wzmianka o rachunku niecałkowitego rzędu pojawiła się w publikacji naukowej, której autorem był francuski matematyk S. F. Lacroix [115]. W 1823 roku Niels Abel jako pierwszy znalazł zastosowanie dla rachunku różniczkowo-całkowego niecałkowitego rzędu. Odkrył on, że rozwiązanie równania całkowego problemu tautochrony może być opisane za pomocą pochodnej rzędu  $1/2$  [116]. Z kolei, w 1832 roku, Joseph Liouville został pierwszym uczonym, który podjął systematyczne studia związane z tematyką rachunku różniczkowo-całkowego

niecałkowitego rzędu. Zaowocowały one opracowaniem pierwszej definicji pochodnej niecałkowitego rzędu bazującej na szeregu nieskończonym [112]. Po Liouvilleu, niemiecki matematyk, Bernhard Riemann, sformułował odmienną definicję całki niecałkowitego rzędu, która wykorzystywała rozwinięcie w szereg Taylora [112]. Dwa odmienne sformułowania problemu rachunku niecałkowitego rzędu opracowane przez Liouville i Riemanna sprowadzają się do jednej zależności znanej obecnie jako definicja Riemanna-Liouvillea całki niecałkowitego rzędu [112]

$${}_{RL}J_c^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_c^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau, \quad (5.1)$$

gdzie  $J_c^\alpha$  jest operatorem całkowania niecałkowitego rzędu  $\alpha \in \mathbb{R}^+$ ,  $f(t)$  jest funkcją zależną od czasu, stałe  $c$  oraz  $t$  charakteryzują odpowiednio dolną i górną granicę całkowania, natomiast  $\Gamma$  jest funkcją gamma Eulera. Jeżeli w definicji (5.1) stałą  $c$  zastąpi się zerem ( $c = 0$ ) to otrzyma się definicję Riemanna, natomiast jeżeli stałą  $c$  zastąpi się minus nieskończonością ( $c = -\infty$ ) wtedy otrzyma się definicję Liouvillea. Definicja Riemanna-Liouvillea pochodnej rzędu niecałkowitego przy spełnieniu nierówności  $m - 1 < \alpha \leq m$ , gdzie  $m$  jest dowolną dodatnią stałą całkowitą,  $\alpha > 0$  oraz dla stałej  $c = 0$ , jest następująca [112]

$${}_{RL}D^\alpha f(t) = \mathcal{D}^m J^{m-\alpha} f(t) = \frac{d^m}{dt^m} \left[ \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-m}} d\tau \right]. \quad (5.2)$$

Należy tutaj zauważyć, że dla  $\alpha = m$  zależność (5.2) przyjmuje postać różniczkowania o rzędzie całkowitym. Definicje Riemanna-Liouvillea wykorzystuje się do analitycznego obliczania pochodnych oraz całek niecałkowitych rzędów prostych funkcji takich jak:  $x^a$ ,  $e^x$ ,  $\sin(x)$ , itp. [112].

### 5.1.1.2 Definicja Grunwalda-Letnikova

W 1867 roku Anton Karl Grunwald zaproponował formułę definiującą pochodną rzędu niecałkowitego, która bazuje na rozwinięciu definicji granicy  $n$ -tego ilorazu różnicowego wstecznego na liczby rzeczywiste tj. gdy  $n \in \mathbb{R}^+$  [51], [116]. Rok później A.V. Letnikov przedstawił bardziej rygorystyczną matematycznie wersję definicji. Definicja ta dziś znana jest jako pochodna niecałkowitego rzędu Grunwalda-Letnikova [112] o następującej postaci

$${}_{GL}D^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{m=0}^{\frac{t-a}{h}} (-1)^m \frac{\Gamma(\alpha+1)}{m! \Gamma(\alpha-m+1)} f(t-mh), \quad (5.3)$$

gdzie  $t$  oraz  $a$  są odpowiednio górną i dolną granicą przedziału różniczkowania. Operacja całkowania według formuły Grunwalda-Letnikova wyrażona jest w następujący sposób [112]

$${}_{GL}\mathcal{D}^{-\alpha}f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^\alpha \sum_{m=0}^{\frac{t-a}{h}} \frac{\Gamma(\alpha+m)}{m! \Gamma(\alpha)} f(t-mh). \quad (5.4)$$

Współczynniki określone wzorem  $(-1)^m \frac{\Gamma(\alpha+1)}{m! \Gamma(\alpha-m+1)}$  dla ujemnych wartości  $\alpha$  w definicji (5.3) są równoważne współczynnikom określonym wzorem  $\frac{\Gamma(\alpha+m)}{m! \Gamma(\alpha)}$  w definicji (5.4) dla dodatnich wartości  $\alpha$ . Dlatego też definicja (5.3) może być również stosowana do obliczenia całek niecałkowitego rzędu, przez co sama w sobie stanowi ona operator różniczkowo-całkowy niecałkowitego rzędu. Przykładowe obliczenia współczynników z definicji (5.3) oraz (5.4) zostały zestawione w tabeli 5.1.

Tabela 5.1. Przykładowe obliczenia współczynników w definicji Grunwalda-Letnikowa (5.3) oraz (5.4).

$m$	0	1	2	3	5	10	15	20	15	25
$\alpha = -0,5$	1,000	0,500	0,375	0,313	0,246	0,176	0,144	0,125	0,144	0,112
$\alpha = 0,5$	1,000	0,500	0,375	0,313	0,246	0,176	0,144	0,125	0,144	0,112

Poprzez wprowadzenie do definicji (5.3) symbolu Newtona dla liczb rzeczywistych, który określony jest w następującej postaci

$$\binom{\alpha}{m} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{m! \Gamma(\alpha-m+1)}, \quad (5.5)$$

otrzyma się jej uproszczoną postać wyrażoną poniższą zależnością

$${}_{GL}\mathcal{D}^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{m=0}^{\frac{t-a}{h}} (-1)^m \binom{\alpha}{m} f(t-mh). \quad (5.6)$$

Definicja Grunwalda-Letnikowa pochodnej i całki niecałkowitego rzędu opisana zależnością (5.6) ze względu na formułę w postaci ważonej sumy jest bardzo przydatna pod względem aplikacyjnym. Poprzez wprowadzenie skończonego kroku obliczeń  $h$ , uzyskuje się jej następujące przybliżenie [116]:

$${}_{GL}\mathcal{D}^\alpha f(t) \approx \Delta_h^\alpha f(t), \quad (5.7)$$

$$\Delta_h^\alpha f(t)|_{t=hk} = \frac{1}{h^\alpha} \sum_{m=0}^k w_m^{(\alpha)} f(kh-mh), \quad (5.8)$$

gdzie indeks  $k$  oznacza  $k$ -tą chwilę czasu, a współczynniki wagowe  $w_m^{(\alpha)}$  określone są następująco

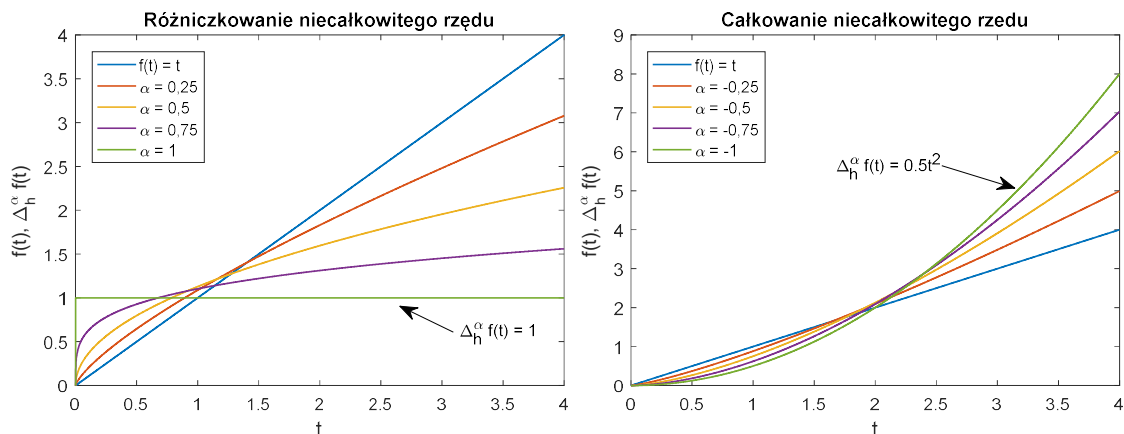


$$w_m^{(\alpha)} = (-1)^m \binom{\alpha}{m}. \quad (5.9)$$

W celu obliczenia wartości funkcji podlegającej różniczkowaniu lub całkowaniu z zastosowaniem metody (5.8) należy wyznaczyć współczynniki wagowe  $w_m^{(\alpha)}$  określone za pomocą symbolu Newtona dla znanego a priori parametru  $\alpha$  oraz zmieniającego się parametru  $m$ . Współczynniki  $w_m^{(\alpha)}$  można obliczyć rekursywnie za pomocą następującej zależności [116]

$$w_0^{(\alpha)} = 1; \quad w_m^{(\alpha)} = \left(1 - \frac{\alpha + 1}{m}\right) w_{m-1}^{(\alpha)}, \quad \text{dla } m = 1, 2, 3, \dots, \quad (5.10)$$

Metoda rekursywnego wyliczania współczynników  $w_m^{(\alpha)}$ , przedstawiona powyżej, pozwala na bezpośrednią implementację przybliżenia (5.8) w postaci metody numerycznej. Przykładowe obliczenia pochodnych oraz całek niecałkowitych rzędów dla funkcji  $f(t) = t$  za pomocą przybliżenia (5.8) zostały zamieszczone na rysunku 5.1.



Rysunek 5.1. Różniczkowanie i całkowanie niecałkowitych rzędów funkcji  $f(t) = t$  dla kroku  $h = 0,001$ .

### 5.1.1.3 Definicja Caputo

W 1967 roku Michele Caputo przedstawił definicję pochodnej rzędu niecałkowitego  $\alpha > 0$  przy spełnieniu warunku  $m - 1 < \alpha \leq m$ , w następującej postaci [112]

$${}_c\mathcal{D}_*^\alpha f(t) = \mathcal{J}^{m-\alpha} \mathcal{D}^m f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t \frac{f^{(m)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-m}} d\tau,$$

gdzie  $m$  jest dodatnią liczbą całkowitą. W wielu zastosowaniach inżynierskich definicja Caputo jest stosowana chętniej niż definicja Riemanna-Liouvillea. Ta druga z kolei jest najczęściej stosowana wśród środowiska matematyków [112]. Obliczenia wykonywane wedle definicji Caputo, w przeciwieństwie do definicji Riemanna-Liouvillea, nie wymagają znajomości warunków po-

czątkowych na pochodne niecałkowitych rzędów. Interpretacja fizyczna pochodnych rzędów niecałkowitych, a zwłaszcza ich wartości początkowych, może być nieznaną, a co za tym idzie mogą one być niemierzalne [112]. Z drugiej strony definicja Caputo została opracowana w taki sposób, aby wykorzystywać wyłącznie warunki początkowe na pochodne, których rząd jest całkowity [51]. Te zaś są mierzalne oraz w wielu przypadkach posiadają znaną interpretację fizyczną [112]. Z tego względu definicja Caputo jest najczęściej wykorzystywana przy obliczaniu transformaty Laplace'a dla równań różniczkowych, w których występują pochodne rzędu niecałkowitego [117]. Obliczanie transformaty Laplace'a zgodnie z definicją Riemanna-Liouvillea jest niezbędne, gdy wymagane jest wykorzystanie warunków początkowych na pochodne niecałkowitego rzędu [51].

### 5.1.2 Transformata Laplace'a

Transformata Laplace'a jest techniką stosowaną przy rozwiązywaniu liniowych równań różniczkowych zwyczajnych. Metoda ta sprowadza równanie różniczkowe do równania algebraicznego, które można rozwiązać przy pomocy prostych przekształceń matematycznych w dziedzinie zmiennej zespolonej  $s$ . Następnie poprzez wykorzystanie przekształcenia odwrotnego otrzymanego wcześniej rozwiązania otrzymuje się jego postać w dziedzinie czasu. Transformata Laplace'a jest podstawowym narzędziem matematycznym stosowanym do analizy i syntezy liniowych układów dynamicznych oraz w inżynierii systemów sterowania.

Transformata Laplace'a może być również wykorzystana do rozwiązywania równań różniczkowych i całkowych rzędu niecałkowitego. Zasady stosowania transformaty Laplace'a w przypadku układów dynamicznych niecałkowitego rzędu są analogiczne do tych, które wykorzystywane są w celu rozwiązywania układów o rzędzie całkowitym. Transformaty Laplace'a dla operatorów całkowania  $J^\alpha$  oraz dla operatorów różniczkowania  $\mathcal{D}^\alpha$  wedle definicji Riemanna-Liouvillea ( $RL$ ) oraz Caputo ( $C$ ), przy spełnieniu nierówności  $m - 1 \leq \alpha < m$ , są następujące [2]:

$$\mathcal{L}[J^\alpha f(t)] = s^{-\alpha} F(s), \quad (5.11)$$

$$\mathcal{L}[{}_{RL}\mathcal{D}^\alpha f(t)] = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^k [{}_{R}\mathcal{D}^{\alpha-k-1} f(t)]_{t=0}, \quad (5.12)$$

$$\mathcal{L}[{}_C\mathcal{D}^\alpha f(t)] = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0). \quad (5.13)$$

Warto w tym miejscu jeszcze raz zaznaczyć, że stosowanie transformaty Laplace'a według definicji Riemanna-Liouvillea wymaga znajomości warunków początkowych na pochodne rzędu niecałkowitego, gdzie warunki te są wyrażone w postaci składnika  $\sum_{k=0}^{m-1} s^k [{}_{R}\mathcal{D}^{\alpha-k-1} f(t)]_{t=0}$ .

Transformata Laplace'a według definicji Caputo wymaga wyłącznie znajomości warunków początkowych na pochodne rzędu całkowitego zgodnie ze składnikiem  $\sum_{k=0}^{m-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0)$ .

### 5.1.3 Realizacje rachunku niecałkowitego rzędu

Rachunek różniczkowo-całkowy niecałkowitego rzędu pomimo swoich zalet związanych głównie z nieograniczonym doбором rzędu operacji różniczkowania lub całkowania jest kłopotliwy pod względem implementacji na urządzeniach cyfrowych takich jak: komputery osobiste, komputery przemysłowe czy sterowniki programowalne zwłaszcza w warunkach wymagających pracy w czasie rzeczywistym [118]. Główną wadą związaną z implementacją operatorów tego rachunku jest nieograniczone zapotrzebowanie na pamięć. Ten fakt najlepiej obrazuje przybliżenie definicji Grunwalda-Letnikova wyrażone za pomocą zależności (5.8), które ze względu na swoją postać pozwala na bezpośrednią implementację na urządzeniach cyfrowych. Wraz ze zwiększaniem się przedziału czasu  $t$ , na którym określone jest działanie operatora  $\Delta_h^\alpha$ , zwiększa się ilość składników sumy potrzebnych do obliczenia aktualnego rozwiązania. Aktualne rozwiązanie operatora  $\Delta_h^\alpha$  dla niewiadomej funkcji  $f(t)$  zawiera w sobie historię wszystkich poprzednich próbkowanych wartości tej funkcji. W związku z tym dokładność obliczeń wynikających z działania operatora  $\Delta_h^\alpha$  jest ściśle ograniczona przez ilość pamięci systemu komputerowego, w którym zaimplementowany jest ten operator.

Z teoretycznego punktu widzenia transmitancja rzędu całkowitego  $G(s)$  zastępująca operator niecałkowity  $s^\alpha$  ma nieskończony rząd [116]. Jednakże możliwe jest zastąpienie operatora  $s^\alpha$  transmitancją o skończonym całkowitym rzędzie w zadanym paśmie częstotliwości. Metody pozwalające na taką aproksymację zdefiniowane są zarówno w dziedzinie czasu ciągłego i dyskretnego oraz w dziedzinie częstotliwości. Najpopularniejsze z nich są następujące [116]:

- przybliżenia w dziedzinie czasu ciągłego:
  - ułamki łańcuchowe,
  - filtry Oustaloup'a,
  - zmodyfikowanie filtry Oustaloup'a,
- przybliżenia w dziedzinie czasu dyskretnego:
  - filtry o skończonej odpowiedzi impulsowej (FIR),
  - dyskretyzacja z wykorzystaniem transformacji biliniowej (Tustina) z prewarpieniem,
  - wykorzystujące odpowiedź impulsową lub skokową,
- przybliżenia w dziedzinie częstotliwości:
  - dopasowanie (identyfikacja) charakterystyk częstotliwościowych,
- suboptymalne dopasowanie transmitancji.

W większości przypadków realizacja operatora niecałkowitego rzędu za pomocą przybliżenia filtrami Oustaloup'a daje zadowalające wyniki przy niewielkim nakładzie obliczeniowym [116]. Z tego powodu uwaga autora w rozprawie doktorskiej została skupiona głównie na wykorzystaniu filtrów Oustaloup'a do celów aproksymacji operatorów niecałkowitego rzędu  $s^\alpha$  dla  $\alpha \in \mathbb{R}$ , transmitancjami o rzędzie całkowitym.

### 5.1.4 Filtry Oustaloup'a

Alain Oustaloup w pracy [118] zaprezentował operator różniczkowania i całkowania niecałkowitego rzędu  $\alpha$  w postaci filtru o stopniu niecałkowitym, którego pasmo pracy zawiera się w przedziale pulsacji  $\omega \in \langle \omega_b; \omega_h \rangle$ . Filtr ten wyrażony jest za pomocą transmitancji w następujący sposób [118]

$$D(s) = \frac{S(s)}{E(s)} = \left(\frac{\omega_u}{\omega_h}\right)^\alpha \left(\frac{1 + \frac{s}{\omega_b}}{1 + \frac{s}{\omega_h}}\right)^\alpha, \quad (5.14)$$

gdzie  $E(s)$  jest sygnałem wejściowym,  $S(s)$  jest sygnałem wyjściowym,  $\omega_u = \sqrt{\omega_b \omega_h}$  jest częstotliwością, dla której wzmocnienie filtru wynosi 1 oraz  $\alpha \in \mathbb{R}$ . W [118] Oustaloup zaproponował również aproksymację ww. transmitancji układem stopnia całkowitego, którego zera i bieguny są rekursywnie rozmieszczone na płaszczyźnie zespolonej według następujących zależności [31], [118]:

$$D(s) = \lim_{N \rightarrow \infty} D_N(s), \quad (5.15)$$

$$D_N(s) = K \prod_{k=-N}^N \frac{s + \omega'_k}{s + \omega_k}. \quad (5.16)$$

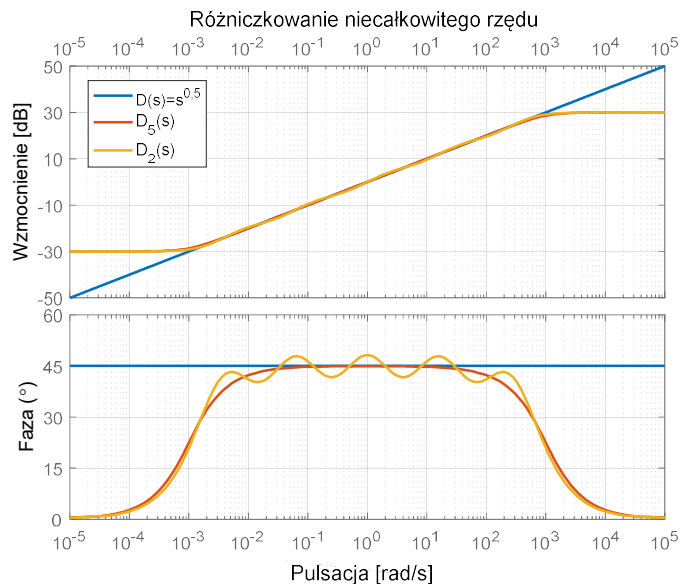
Zera, bieguny oraz wzmocnienie filtru Oustaloup'a zdefiniowanego za pomocą formuły (5.16) wyznaczane są na podstawie poniższych związków [31], [118]:

$$\omega'_k = \omega_b \left(\frac{\omega_h}{\omega_b}\right)^{\frac{k+N+\frac{1}{2}(1-\alpha)}{2N+1}}, \quad (5.17)$$

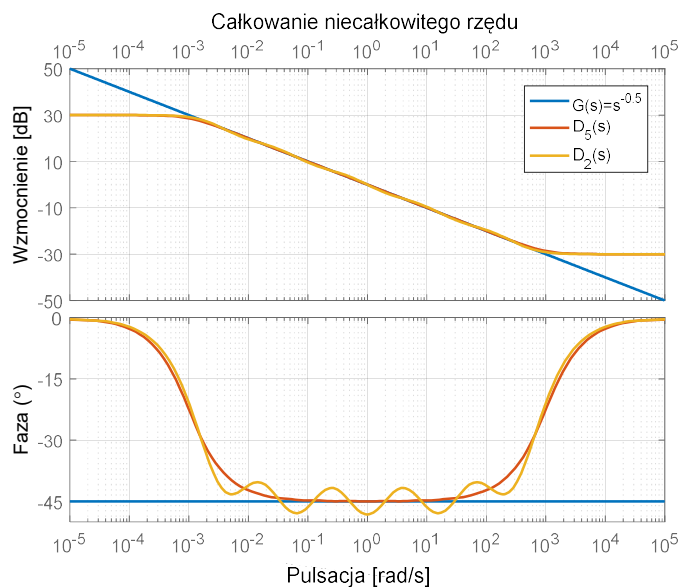
$$\omega_k = \omega_b \left(\frac{\omega_h}{\omega_b}\right)^{\frac{k+N+\frac{1}{2}(1+\alpha)}{2N+1}}, \quad (5.18)$$

$$K = \omega_h^\alpha. \quad (5.19)$$

Parametr  $N$  występujący we wzorach (5.16)-(5.19) jest bezpośrednio związany z określeniem stopnia filtru Oustaloup'a, który wynosi  $2N + 1$ . Z aplikacyjnego punktu widzenia, sygnały przechodzące przez filtr Oustaloup'a są poddane aproksymowanej operacji różniczkowania lub całkowania niecałkowitego rzędu  $\alpha$  w paśmie pracy, zdefiniowanym pulsacjami  $\omega_b$  oraz  $\omega_h$ . Na rysunkach 5.2 i 5.3 zostały przedstawione przykładowe charakterystyki Bodego obrazujące różnice pomiędzy charakterystykami teoretycznego operatora różniczkowania i całkowania rzędu niecałkowitego dla  $s^{0,5}$  i  $s^{-0,5}$  oraz charakterystykami filtrów Oustaloup'a o stopniu całkowitym, które aproksymują ten operator.



Rysunek 5.2. Charakterystyki Bodego operatora  $s^{0,5}$  i filtrów Oustaloup'a stopnia całkowitego dla  $\omega \in (10^{-3}, 10^3)$  oraz parametru  $N \in \{2, 5\}$ .



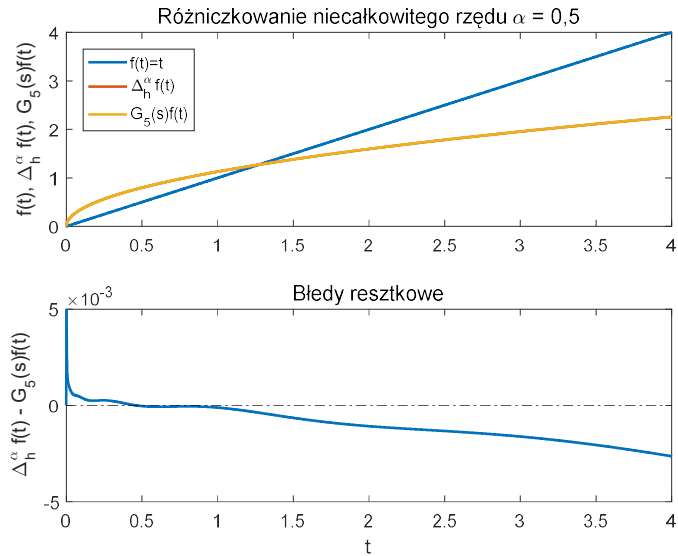
Rysunek 5.3. Charakterystyki Bodego operatora  $s^{-0,5}$  i filtrów Oustaloup'a stopnia całkowitego dla  $\omega \in (10^{-3}, 10^3)$  oraz parametru  $N \in \{2, 5\}$ .

Charakterystyki Bodego przedstawione na rysunku 5.3 pokazują, że filtry Oustaloup'a o rzędach całkowitych bardzo dobrze aproksymują charakterystykę modułu w zadanym paśmie pulsacji nawet w przypadku niskiego stopnia filtra (stopień filtra dla parametru  $N = 2$ , wynosi 5). Aproksymacja charakterystyki fazowej jest poprawna w zakresie pulsacji, które zawierają się w przedziale wyższym/niższym o ok. jeden rząd wielkości tj.  $\omega \in \langle 10^{-2}; 10^2 \rangle$  dla parametru  $N = 5$ . Z tego względu pasmo pracy filtra Oustaloup'a, zdefiniowane pulsacjami  $\omega_b$  oraz  $\omega_h$ , powinno zawierać w sobie przedział pulsacji  $\langle \omega_A; \omega_B \rangle$ , w którym zakłada się poprawną aproksymację operacji różniczkowania lub całkowania niecałkowitego rzędu  $\alpha$ . Zależności między tymi częstotliwościami powinny być następujące

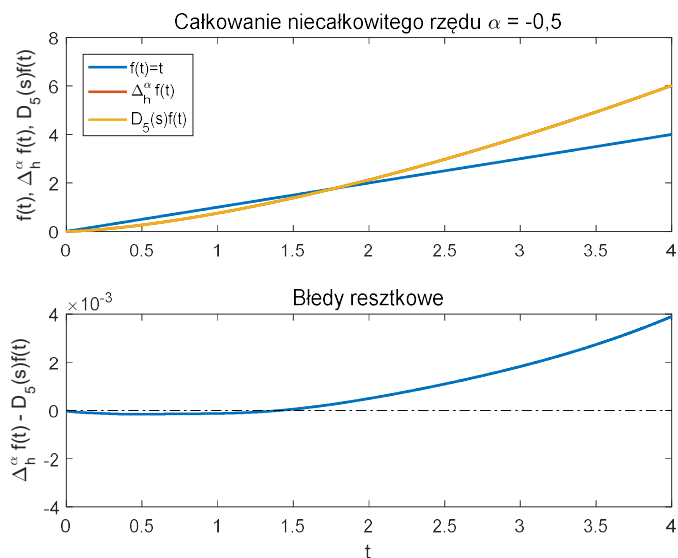
$$\omega_b \ll \omega_A \quad \text{oraz} \quad \omega_h \gg \omega_B \quad (5.20)$$

W charakterystyce fazowej filtra, dla którego parametr  $N = 2$  widoczne są wyraźne odkształcenia od teoretycznego przebiegu charakterystyki fazy. Świadczy to o niewłaściwym doborze parametru  $N$ . Parametr ten należy dobierać w taki sposób, aby nie występowały istotne deformacje zarówno w charakterystyce amplitudowej jak i w charakterystyce fazowej dla wybranego pasma pracy filtra. Poszerzenie pasma pracy powinno zawsze iść w parze ze wzrostem stopnia filtra, który określony jest zależnością  $2N + 1$ . Przy niskich stopniach oddalenie od siebie zer i biegunów filtra Oustaloup'a na płaszczyźnie zespolonej jest zbyt duże, aby w poprawny sposób odtworzyć charakterystykę amplitudową i fazową aproksymowanego operatora  $s^\alpha$ .

Na rysunkach 5.4 i 5.5 zostały przedstawione przykłady obrazujące działanie filtra Oustaloup'a w dziedzinie czasu dla całkowania i różniczkowania niecałkowitego rzędu liniowej funkcji  $f(t) = t$ . Na rysunkach, dla porównania, przedstawiono również wynik działania przybliżonego operatora  $\Delta_h^\alpha$ , według przybliżonej definicji Grunwalda-Letnikowa, opisanego wzorem (5.8). Dodatkowo na każdym z rysunków przedstawiono przebiegi zmian błędów resztkowych pomiędzy wynikami uzyskanymi za pośrednictwem filtra Oustaloup'a  $D_5(s)f(t)$  oraz działania operatora  $\Delta_h^\alpha f(t)$ .



Rysunek 5.4. Porównanie wyników uzyskanych w operacjach różniczkowania niecałkowitego rzędu dla operatora  $\Delta_h^\alpha$  oraz filtrów Oustaloup'a w dziedzinie czasu.



Rysunek 5.5. Porównanie wyników uzyskanych w operacjach całkowania niecałkowitego rzędu dla operatora  $\Delta_h^\alpha$  oraz filtrów Oustaloup'a w dziedzinie czasu.

Filtr Oustaloup'a stanowi bardzo dobre przybliżenie operatorów różniczkowania oraz całkowania niecałkowitego rzędu. Przykłady przedstawione na rysunkach 5.2-5.5 obrazują, że ten rodzaj filtru prawidłowo aproksymuje zachowanie operatorów niecałkowitego rzędu zarówno w dziedzinie częstotliwości oraz w dziedzinie czasu. Filtr ten ze względu na swoją postać i skończony stopień nie wymaga nieskończonego zasobu pamięci i może on być z powodzeniem implementowany na urządzeniach cyfrowych np. w formie dyskretnej. Bardzo ważną zaletą tego filtru, z punktu widzenia inżynierii systemów sterowania jest jego stabilność dla dowolnego rzędu  $\alpha \in \mathbb{R}$  [118].

### 5.1.5 Regulator $PI^\lambda D^\mu$ o niecałkowitych rzędach całkowania i różniczkowania

Rachunek różniczkowo-całkowy niecałkowitego rzędu  $\alpha$  można przedstawić za pomocą pojedynczego operatora ciągłego zdefiniowanego w następujący sposób [119]

$${}_a\mathcal{D}_t^\alpha = \begin{cases} \frac{d^\alpha}{dt^\alpha}, & \alpha > 0, \\ 1, & \alpha = 0, \\ \int_a^t (d\tau)^\alpha, & \alpha < 0, \end{cases} \quad (5.21)$$

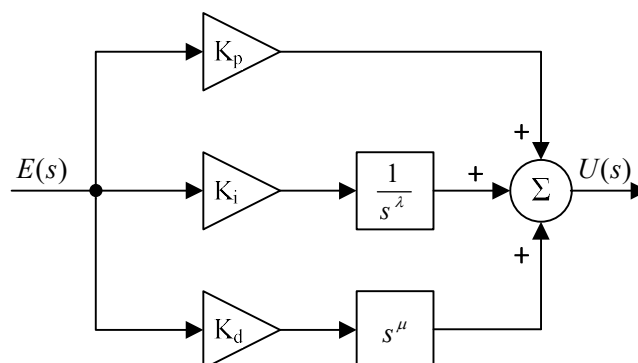
gdzie  $a$  oraz  $t$  są odpowiednio górną i dolną granicą działania operatora oraz  $\alpha \in \mathbb{R}$ . W 1998 roku Igor Podlubny [51] zaprezentował ogólną postać regulatora PID, w której wykorzystał operator różniczkowania i całkowania niecałkowitego rzędu  ${}_a\mathcal{D}_t^\alpha$ . Przedstawiony przez niego regulator  $PI^\lambda D^\mu$  został rozszerzony o dwa nowe parametry  $\lambda$  oraz  $\mu$ , które stanowią odpowiednio niecałkowity rząd całkowania oraz różniczkowania. Zaprezentowany regulator  $PI^\lambda D^\mu$ , w dziedzinie czasu, został zdefiniowany za pomocą następującej zależności [51], [119]

$$u(t) = K_p e(t) + K_i {}_0\mathcal{D}_t^{-\lambda} e(t) + K_d {}_0\mathcal{D}_t^\mu e(t), \quad \text{dla } \lambda, \mu > 0, \quad (5.22)$$

gdzie  $u(t)$  jest sygnałem sterującym,  $e(t)$  to uchyb regulacji,  $K_p$ ,  $K_i$ ,  $K_d$  są odpowiednio wzmocnieniami części proporcjonalnej, całkującej i różniczkującej regulatora. Transmitancja operatorowa tego regulatora jest opisana w następującej postaci

$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p + \frac{K_i}{s^\lambda} + K_d s^\mu, \quad (5.23)$$

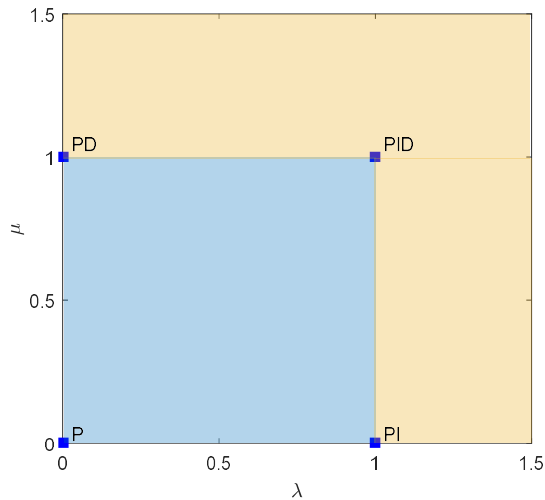
a jego struktura została przedstawiona na rysunku 5.6.



Rysunek 5.6. Struktura regulatora  $PI^\lambda D^\mu$ .

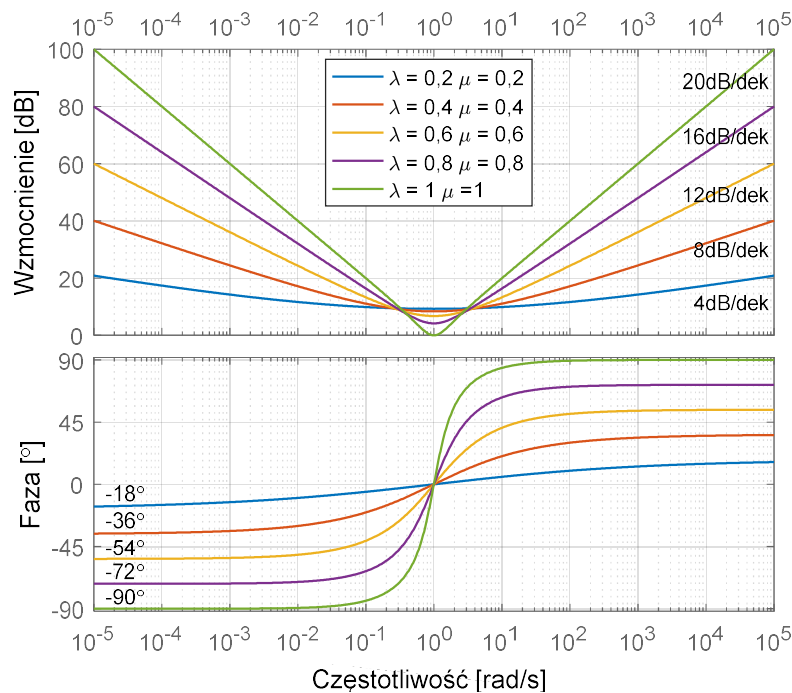


Możliwości wynikające z zastosowania dwóch nowych parametrów, w regulatorze  $PI^\lambda D^\mu$  można zobrazować na płaszczyźnie parametrów  $\lambda, \mu$ , przedstawionej na rysunku 5.7 [119]. Zgodnie z ideą płaszczyzny parametrów  $\lambda, \mu$  dla wartości parametrów  $\lambda, \mu \in \{0, 1\}$  regulator  $PI^\lambda D^\mu$  przyjmuje formę klasycznych regulatorów PID, PI, PD lub P, szeroko stosowanych w przemyśle. Z drugiej strony dla  $\lambda, \mu \notin \{0, 1\}$  płaszczyzna możliwych kombinacji parametrów  $\lambda, \mu$  jest nieograniczona.



Rysunek 5.7. Płaszczyzna parametrów  $\lambda$  oraz  $\mu$  regulatora  $PI^\lambda D^\mu$ . Obszar niebieski  $\lambda, \mu \leq 0$ , obszar żółty  $\lambda, \mu > 0$ .

Wykorzystanie operatora różniczkowania i całkowania niecałkowitego rzędu w regulatorze  $PI^\lambda D^\mu$  wiąże się z istotnym rozszerzeniem jego właściwości. Możliwości wynikające z zastosowania dodatkowych parametrów bardzo dobrze widoczne są z punktu widzenia analizy w dziedzinie częstotliwości. Dobór rzędów parametrów  $\lambda$  oraz  $\mu$  pozwala na dowolność w kształtowaniu asymptot nachylenia charakterystyki amplitudowej oraz asymptot charakterystyki fazowej. W zakresie niskich częstotliwości asymptota nachylenia charakterystyki amplitudowej wynosi  $-\lambda \cdot 20 \frac{dB}{dek}$ , natomiast asymptota charakterystyki fazowej wynosi  $-\lambda \frac{\pi}{2}$ . W przedziale wysokich częstotliwości występują asymptoty, które wynoszą  $\mu \cdot 20 \frac{dB}{dek}$  oraz  $\mu \frac{\pi}{2}$ , odpowiednio dla nachylenia charakterystyki amplitudowej oraz dla charakterystyki fazowej. Zwiększone możliwości kształtowania charakterystyki amplitudowej oraz fazowej regulatora  $PI^\lambda D^\mu$  zostały obrazowo przedstawione na rysunku 5.8 dla regulatora  $PI^\lambda D^\mu$ , którego wzmocnienia toru proporcjonalnego, całkowego i różniczkującego wynosiły  $K_p = K_i = K_d = 1$ , a wartości parametrów  $\lambda$  oraz  $\mu$  ulegały zmianom.



Rysunek 5.8. Charakterystyki Bodego regulatora  $PI^\lambda D^\mu$  dla różnych wartości rzędów całkowania  $\lambda$  oraz różniczkowania  $\mu$ , przy stałych parametrach  $K_p = K_i = K_d = 1$ .

Typowo w zastosowaniach przemysłowych klasyczny algorytm regulacji PID implementowany jest na urządzeniach mikroprocesorowych takich jak: systemy wbudowane, sterowniki programowalne PLC, kontrolery automatyki PAC lub komputery przemysłowe. Implementacja regulatora  $PI^\lambda D^\mu$ , który stanowi uogólnienie klasycznego algorytmu PID, na urządzeniach mikroprocesorowych wiąże się z problemem nieograniczonego zapotrzebowania na pamięć systemu w związku z występowaniem operatora rachunku różniczkowo-całkowego niecałkowitego rzędu (podrozdział 5.1.3). Jednakże w związku z metodami pozwalającymi na aproksymację operatora rachunku różniczkowo-całkowego niecałkowitego rzędu np. poprzez opisane w podrozdziale 5.1.4 filtry Oustaloup'a możliwa jest implementacja algorytmu  $PI^\lambda D^\mu$  na urządzeniach mikroprocesorowych z określoną dokładnością oraz w zdefiniowanym pasmie częstotliwości.

## 5.2 Systemy rozmyte

Konwencjonalne podejście do sterowania bazujące na teorii sterowania oparte jest głównie o modele matematyczne, które najczęściej występują pod postacią równań różniczkowych lub różnicowych. Dla tak zdefiniowanych modeli istnieje wiele dobrze znanych metod i procedur projektowania, analizy oraz weryfikacji układów sterowania. Niestety podejście bazujące na klasycznej teorii sterowania jest efektywne dla niewielkiej klasy modeli, tj. dla modeli liniowych oraz dla niektórych rodzajów modeli nieliniowych [120]. W wielu przypadkach pomimo możliwości uzyskania modelu matematycznego, brak jest czasu oraz środków na realizację procedur

jego budowania [120]. W związku z powyższym na przestrzeni lat zaistniała potrzeba alternatywnych podejść do modelowania matematycznego. Takim alternatywnym podejściem są technologie rozmyte, które zaliczane są do systemów sztucznej inteligencji [120].

Modelowanie matematyczne nie jest jedynym zastosowaniem technologii systemów rozmytych. W inżynierii systemów sterowania są one również wykorzystywane jako nieliniowe regulatory. Pierwszy regulator rozmyty został opracowany przez E. H. Mamdaniego w 1974 roku na potrzeby sterowania laboratoryjnym silnikiem parowym [121]. Regulator ten bazował na zbiorach rozmytych oraz logice rozmytej zaproponowanej przez L. A. Zadeha [122]. Od tamtego czasu nowa dyscyplina naukowa związana z logiką, modelowaniem oraz sterowaniem rozmytym stawała się coraz bardziej popularna. Jej gwałtowny rozwój można było zauważyć zarówno wśród środowisk akademickich jak i przemysłowych, głównie w Japonii. Systemy rozmyte szybko zdobywały zainteresowanie, gdyż były proste w nauce oraz łatwe w implementacji. Jednakże dużą popularność zdobyły głównie, dlatego że ich zasada działania bazuje na odwzorowaniu ludzkich sposobów komunikowania się, rozumowania oraz przekazywania informacji za pomocą mowy [120]. Praktycznie są one tożsame z pojmowaniem świata zewnętrznego przez człowieka w kontekście przetwarzania informacji nieprecyzyjnych i wieloznacznych. Pod tym względem stanowią one odwzorowanie rzeczywistych zachowań lub zjawisk w postaci prostych reguł lingwistycznych operujących na modelach informacji nieprecyzyjnej. Ze względu na prostą i intuicyjną postać formułowania elementów związanych z mechanizmami rozmytymi, dyscyplina ta znalazła szerokie zastosowanie w modelowaniu oraz sterowaniu procesami przemysłowymi oraz komercyjnymi.

Systemy rozmyte to modele, które przetwarzają informację zapisaną za pomocą zbioru reguł rozmytych „jeżeli – to” (if – then) oraz w oparciu o zasady wnioskowania rozmytego [120]. Rozmytość jest sposobem reprezentowania niejednoznaczności (niepewności) za pomocą określeń lingwistycznych (np. niska temperatura, wysokie ciśnienie) [120]. Jest ona definiowana z wykorzystaniem zbiorów rozmytych, których granice zachodzą na siebie. Jeden element, np. wejście do systemu, może należeć do kilku zbiorów rozmytych, lecz stopień jego przynależności do tych zbiorów będzie różny [120]. Wykorzystanie funkcji przynależności zdefiniowanych dla zbiorów rozmytych pozwala wyróżnić ich główną cechę związaną z możliwością przechodzenia pewnych elementów zbioru od przynależności do nieprzynależności w tym zbiorze rozmytym. Dzięki temu mechanizmowi ułatwione jest uzyskanie gładkiego wyniku wnioskowania wykorzystującego rozmyte reguły „jeżeli – to”, które stają się sposobem interpolacji odwzorowania typu wejście-wyjście [120].

Systemy rozmyte głównie wykorzystywane są jako wygodne narzędzie reprezentacji wiedzy jakościowej, która najczęściej dostarczana jest przez ekspertów dziedzinowych. W tym kontekście zastosowanie systemu rozmytego wiąże się ze sterowaniem rozmytym opartym na wiedzy [120]. Drugi sposób pozyskania wiedzy może odbyć się w sposób zautomatyzowany na podstawie zebranych danych. W tym przypadku zastosowanie systemu rozmytego jest związane głównie z indukowaniem reguł oraz uczeniem się [120]. Budowa modelu rozmytego, w większości przypadków, nie wymaga wykorzystania skomplikowanego aparatu matematycznego. Pomimo mniejszego stopnia skomplikowania modele rozmyte są w stanie aproksymować dany system z dowolną dokładnością [123]. Ze względu na swoją prostotę, implementacja modeli rozmytych nie wymaga wykorzystania skomplikowanych metod numerycznych oraz dużych mocy obliczeniowych, co również stanowi zaletę tego typu technologii.

Regulatory rozmyte, analogicznie do modeli, również cechują się wyżej wymienionymi właściwościami. W przypadku projektowania regulatorów rozmytych proces ten, tak jak w przypadku modelowania, nie wymaga zastosowania zaawansowanego aparatu matematycznego. Regulatory rozmyte bardzo dobrze sprawdzają się przy sterowaniu obiektami, dla których klasyczne podejście do sterowania bazujące głównie na liniowych regulatorach jest niewystarczające, tj. w warunkach zmian punktu pracy w szerokim zakresie. Są one w stanie realizować nieliniowe zadania sterowania zarówno w zakresie statycznym jak i dynamicznym przy wykorzystaniu niewielkiego nakładu związanego z zadaniami syntezy regulatora [123].

Zagadnienia związane z modelowaniem oraz sterowaniem rozmytym obejmują wiele metod wnioskowania rozmytego. Najczęściej stosowane systemy rozmyte w modelowaniu, sterowaniu oraz w systemach wspomaganie decyzji są następujące [124]:

- lingwistyczny model rozmyty (Mamdaniego),
- model rozmyty Takagi-Sugeno (TS),
- model rozmyty Tsukamoto,
- relacyjny model rozmyty.

W rozprawie wykorzystano system rozmyty oparty o wnioskowanie Takagi-Sugeno do zrealizowania rozmytej części regulatora wieloobszarowego do sterowania mocą cieplną reaktora jądrowego. To podejście w bezpośredni sposób umożliwia przeniesienie oraz rozszerzenie właściwości lokalnych regulatorów  $PI^{\lambda}D^{\mu}$ , zdefiniowanych w sposób analityczny, na grunt logiki rozmytej.

### 5.2.1 System rozmyty z wnioskowaniem Takagi-Sugeno (TS)

Baza reguł rozmytych w systemie Takagi-Sugeno jest zdefiniowana w następującej postaci [125]:

$$R_i: \text{IF } x_1 \text{ is } \tilde{A}_{1,1} \text{ and } \dots \text{ and } x_p \text{ is } \tilde{A}_{i,p}, \text{ THEN } y_i = c_{i,0} + c_{i,1}x_1 + \dots + c_{i,p}x_p, \quad (5.24)$$

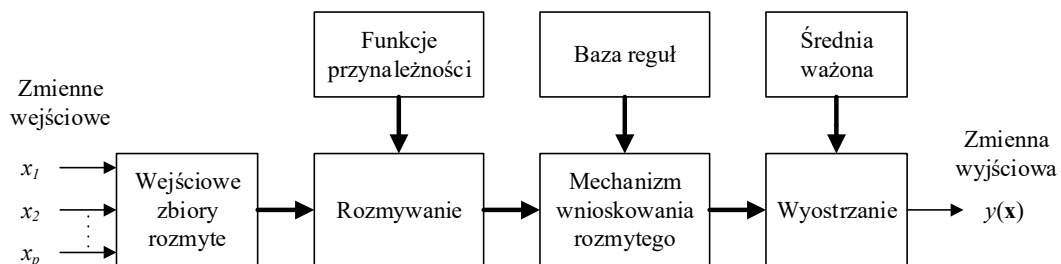
gdzie  $\tilde{A}_{i,j}$  są zbiorami rozmytymi,  $c_{i,j}$  są parametrami rzeczywistymi,  $y_i$  jest wyjściem systemu odpowiadającym regule  $R_i$ ,  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_p)^T$  jest wektorem wejść oraz  $i = 1, 2, \dots, K$  i  $j = 1, 2, \dots, p$ . System rozmyty TS charakteryzuje się tym, że w regułach występuje rozmyta przesłanka (część IF), natomiast konkluzja (część THEN) jest rzeczywista w postaci liniowej kombinacji zmiennych wejściowych. Głównie z powodu ostatniej cechy systemy oparte o wnioskowanie TS są łatwe w implementacji na platformach sterowania cyfrowego. Dla wektora wejściowego  $\mathbf{x}$  składającego się z liczb rzeczywistych, wyjście systemu rozmytego TS jest wyrażone w postaci średniej ważonej wartości  $y_i$

$$y(\mathbf{x}) = \frac{\sum_{i=1}^K w_i y_i}{\sum_{i=1}^K w_i}, \quad (5.25)$$

gdzie waga  $w_i$  określa ogólną prawdziwość przesłanki reguły  $R_i$  dla danego wejścia  $i$  oraz jest obliczana na podstawie następującej zależności

$$w_i = \prod_{j=1}^p \mu_{A_{i,j}}(x_j), \quad (5.26)$$

gdzie operator  $\prod_{j=1}^p (\cdot)$  jest przecięciem zbiorów rozmytych (T-norma). Struktura systemu logiki rozmytej Takagi-Sugeno została przedstawiona na rysunku 5.9.



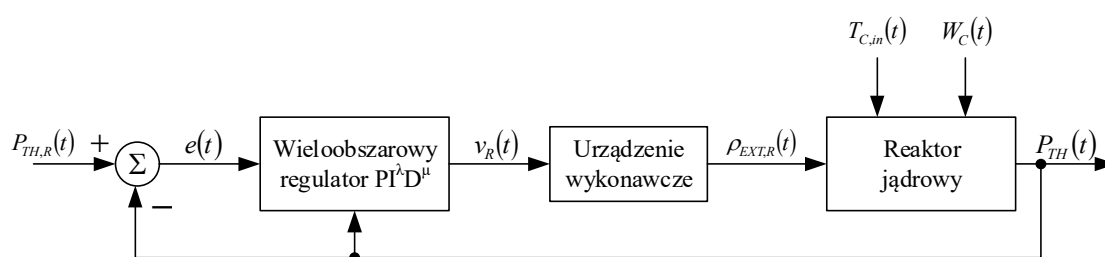
Rysunek 5.9. Struktura systemu rozmytego Takagi-Sugeno (TS) [32].

### 5.3 Połączenie technologii

Przedstawione w rozdziale nowoczesne technologie z zakresu sterowania i modelowania zostały wykorzystane w rozprawie w celu opracowania regulatora pozwalającego na funkcjonowanie systemu sterowania mocą reaktora jądrowego w warunkach szerokich zmian punktu pracy bez utraty jakości sterowania. Zastosowanie zestawu regulatorów  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  wykorzystujących rachunek różniczkowo-całkowy niecałkowitego rzędu pozwala na uzyskanie większej elastyczności w zadaniach optymalnego doboru nastaw regulatora dla określonych punktów pracy reaktora jądrowego. Z drugiej strony wykorzystanie technologii rozmytej bazującej na wnioskowaniu Takagi-Sugeno pozwala na połączenie lokalnych regulatorów  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  w jeden globalny regulator mocy cieplnej reaktora jądrowego.

## 6. Synteza układu sterowania mocą cieplną reaktora jądrowego

Zaproponowany w rozprawie regulator pracuje w układzie sterowania mocą cieplną reaktora jądrowego, który został przedstawiony na rysunku 6.1. Zastosowanie struktury z ujemnym sprzężeniem zwrotnym wraz z odpowiednim regulatorem pozwala realizować zadania regulacyjne (kształtowanie odpowiedzi dynamicznej) oraz śledzące (nadażanie za wartością zadaną). Struktura ta jest odporna na działanie sygnałów zewnętrznych, zakłóceń pomiarowych (szum pomiarowy) lub występowania niepewności w wykorzystanych modelach (niepewności parametrów modelów) [126].



Rysunek 6.1. Struktura układu sterowania typu SISO pozwalająca na regulację mocy cieplnej reaktora jądrowego.

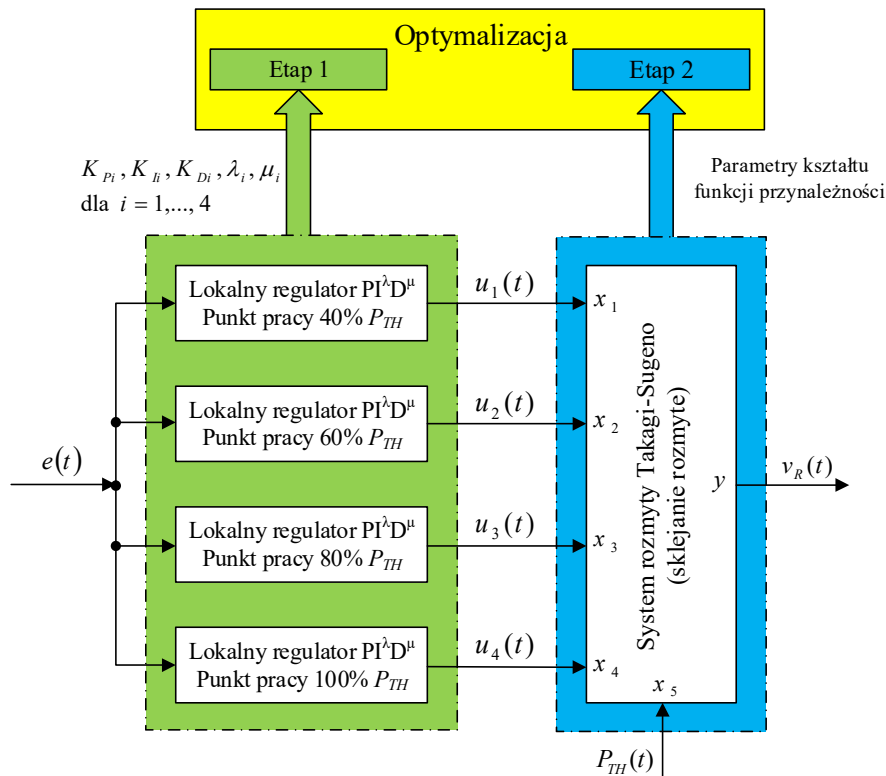
Synteza układu regulacji mocy cieplnej reaktora jądrowego, po określeniu struktury regulatora (rozdział 3.2.1), sprowadza się do wyboru i zastosowania metody doboru jego parametrów, tj. nastaw lokalnych regulatorów  $PI^\lambda D^\mu$  oraz parametrów funkcji przynależności wchodzących w skład rozmytej części regulatora. W rozprawie wykorzystano metodę suboptymalnego doboru parametrów zastosowanego regulatora wieloobszarowego w dziedzinie czasu, która bazuje na wybranych całkowitych kryteriach jakości sterowania. W zadaniu optymalizacji wykorzystano modele matematyczne kluczowych elementów układu regulacji, tj. urządzenia wykonawczego – model napędu zespołu prętów sterujących (podrozdział 3.2.2) oraz obiektu sterowania – nieliniowy model reaktora jądrowego (model projektowy, rozdział 4).

Wybór metody doboru parametrów zastosowanego regulatora został dokonany na podstawie przeprowadzonych badań porównujących wyselekcjonowane procedury doboru parametrów regulatora wieloobszarowego z lokalnymi regulatorami PID. Badania te zostały zaprezentowane w publikacji [34]. W rozprawie doktorskiej zastosowano metodę, opisaną w [34], która składa się z dwóch niezależnych etapów optymalizacji prowadzących do otrzymania suboptymalnego rozwiązania, tj. zestawu parametrów wieloobszarowego regulatora  $PI^\lambda D^\mu$ . Pierwszy etap tej metody

dotyczy strojenia nastaw lokalnych regulatorów  $PI^{\lambda}D^{\mu}$ , natomiast drugi etap związany jest z doborem parametrów funkcji przynależności rozmytej części proponowanego regulatora wieloobszarowego. Wykorzystana metoda pozwala na uwzględnienie w procesie optymalizacji ograniczeń na zmienne procesowe lub sterujące oraz zdefiniowanie, w drugim etapie optymalizacji, ograniczeń nakładanych na kształt zastosowanych funkcji przynależności.

## 6.1 Sformułowanie zadania optymalizacji

Na rysunku 6.2 obrazowo przedstawiono idee optymalizacji parametrów regulatora wieloobszarowego, opartą o zadanie optymalizacji rozwiązywane w dwóch kolejnych etapach. Celem tego zadania jest dobór nastaw lokalnych regulatorów  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  i parametrów funkcji przynależności występujących w części rozmytej regulatora wieloobszarowego, który pracuje w układzie regulacji mocy ciepłej reaktora jądrowego w warunkach zmian punktu pracy (rysunek 6.1).



Rysunek 6.2. Dwuetapowe zadanie optymalizacji.

W zadaniu optymalizacji obrazowo przedstawionym na rysunku 6.2, zostały wykorzystane następujące całkowite wskaźniki jakości sterowania:



- całka z kwadratu uchybu (*ang. ISE*)

$$J_{ISE} = \int_0^{t_f} e^2(\tau) d\tau, \quad (6.1)$$

- całka z iloczynu czasu i wartości bezwzględnej uchybu (*ang. ITAE*)

$$J_{ITAE} = \int_0^{t_f} \tau |e(\tau)| d\tau, \quad (6.2)$$

- całka z wartości bezwzględnej uchybu (*ang. IAE*)

$$J_{IAE} = \int_0^{t_f} |e(\tau)| d\tau, \quad (6.3)$$

- całka z sumy kwadratów uchybu oraz sygnału sterującego (*ang. LQ*)

$$J_{LQ} = \int_0^{t_f} (Q e^2(\tau) + v_{R,sat}^2(\tau)) d\tau, \quad (6.4)$$

gdzie  $t_f$  określa horyzont czasu, na którym jest obliczany wskaźnik jakości  $J_{(\cdot)}$ ,  $v_{R,sat}$  jest sygnałem reprezentującym prędkość zespołu prętów sterujących, która jest realizowana przez urządzenie wykonawcze, a współczynnik  $Q$  określa wagę przypisaną do kwadratu sygnału uchybu w kryterium LQ. W wyniku przeprowadzonych badań testowych przyjęto, że w kryterium LQ współczynnik określający wagę jakości sterowania wynosi  $Q = 0,0625$ . Przyjęta wartość pozwala osiągnąć przybliżone rzędy wielkości sygnałów  $e^2$  oraz  $v_{R,sat}^2$ .

Głównym celem regulatorów pracujących w strukturze ze sprzężeniem zwrotnym jest zapewnienie stabilnej pracy całego układu regulacji oraz sprowadzanie do zera lub do wartości bliskich zera błędu regulacji, który powstaje w wyniku zmian wartości zadanej lub występowania zakłóceń. Ważne jest również aby regulatory, w zależności od wymagań, optymalizowały występujące w układzie regulacji stany przejściowe. Charakter i dostępność w czasie wartości zadanej wpływają na dobór struktury i parametrów regulatora, który w ogólności może spełniać następujące zadania regulacyjne [126], [127]:

- regulacja stałowartościowa, gdy wartość zadana jest niezmienna w czasie,
- regulacja programowa, gdy wartość zadana jest zmienna w czasie, ale znana z góry,
- regulacja nadążna, gdy wartość zadana jest nieznaną i zmienną w czasie.

Istnieje również odrębna klasyfikacja zadań regulacyjnych, która jest bardziej zorientowana na występowanie zakłóceń w układzie regulacji. Zadania w tej klasyfikacji można podzielić na [127]:

- zadania nadążania, gdy układ regulacji jest w stanie sprowadzić błąd regulacji do wartości bliskich zeru w każdej chwili czasu, przy określonych klasach sygnałów wartości zadanej oraz zakłóceń; w tym przypadku głównym problemem regulacji jest określenie i osiągnięcie zadowalająco małych uchybów,
- zadania przestawiania, gdy wartość zadana lub zakłócenia wprowadzają na tyle silne oddziaływania, że z góry zakłada się, że błąd regulacji będzie dużo większy od zera w chwili pojawienia się tych oddziaływań; w tym przypadku powstaje problem określenia zadowalającego czasu, po którym możliwe jest sprowadzenie uchybu do wartości bliskich zeru,
- zadania kompensacji zakłóceń, gdy występuje problem wyeliminowania zakłóceń w jak najszerszym paśmie częstotliwości.

Poprzez modyfikację nastaw regulatora, przy jego znanej lub danej z góry strukturze, możliwe jest kształtowanie głównego celu regulacji, który może być zdefiniowany za pomocą przedstawionej powyżej klasyfikacji. Zastosowanie całkowych kryteriów jakości sterowania w procesie doboru parametrów regulatora, umożliwi przeprowadzenie sformalizowanej optymalizacji jak i znacznie ułatwia ten proces. gdyż wtedy dobór nastaw sprowadza się do określenia zadowalającego kryterium jakości oraz do przeprowadzenia samego zadania optymalizacji.

Układ regulacji, w którym nastawy regulatora będą dobierane za pośrednictwem różnych całkowych kryteriów jakości będzie charakteryzował się odmiennym charakterem odpowiedzi na wartość zadaną. Kształtowanie nastaw z wykorzystaniem kryterium ISE (zależność (6.1)) pozwala uzyskać „agresywne” nastawy charakteryzujące się oscylacjami oraz krótkimi czasami regulacji [128]. Kryterium to z uwagi na kwadratową funkcję podcałkową jest wrażliwe na duże błędy regulacji ( $e(t) > 1$ ), natomiast małe błędy ( $e(t) < 1$ ) są osłabiane. Dodatkowo wskaźnikowi ISE również przypisać można realną interpretację, gdyż całka kwadratu pewnego sygnału ma często sens energii [127].

Z drugiej strony wykorzystanie kryterium ITAE (zależność (6.2)) prowadzi do „konserwatywnych” nastaw regulatora, tzn. takich, które powodują, że odpowiedź układu regulacji jest powolna, zawiera duże przeregulowanie oraz nie charakteryzuje się znacznymi oscylacjami [128]. Konserwatywne nastawy w przeciwieństwie do agresywnych poświęcają jakość regulacji na rzecz krzepkości rozumianej jako niewrażliwość na niewielkie zmiany sterowanego procesu lub na niedokładności wynikające z jego modelowania [128]. Kryterium ITAE, ze względu na swoją

postać, jest czułe na błędy regulacji, które trwają przez długie okresy czasu z powodu występowania wagi w postaci czynnika czasu w funkcji podcałkowej.

Kryterium IAE (zależność (6.3)) stanowi kompromis pomiędzy opisanymi powyżej kryteriami ISE oraz ITAE [128]. Poprzez zastosowanie wyłącznie wartości bezwzględnej w funkcji podcałkowej, traktuje ono w równym stopniu zarówno małe jak i duże błędy regulacji.

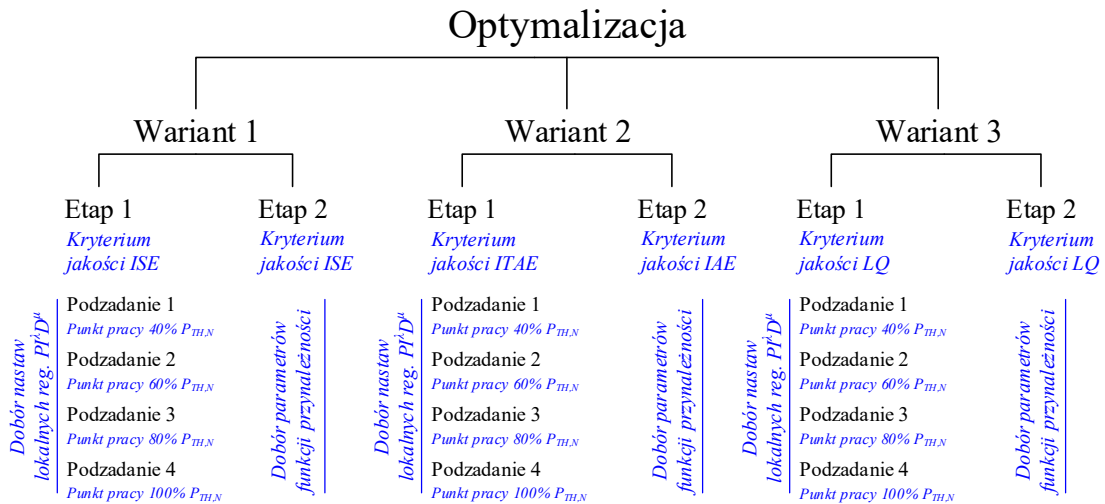
Ostatnim wśród wykorzystanych w rozprawie kryteriów jakości jest wskaźnik LQ opisany zależnością (6.4). Kryterium to ze względu na swoją postać kwadratową jest podobne do wskaźnika ISE, jednakże oprócz minimalizacji błędu regulacji minimalizuje ono również „koszt sterowania”, który występuje w postaci kwadratu sygnału sterującego, realizowanego przez urządzenie wykonawcze. Dzięki odpowiedniemu doborowi współczynnika  $Q$ , który występuje w funkcji podcałkowej tego kryterium, możliwe jest: ograniczenie wartości błędu regulacji, ograniczenie „kosztu sterowania” lub osiągnięcie kompromisu pomiędzy tymi dwoma celami.

W rozprawie zostały porównane trzy całkowite kryteria jakości sterowania, tj. kryterium ISE, kryterium ITAE oraz kryterium LQ. Wybór tych kryteriów został podyktowany głównie przeciwstawnymi celami regulacji, jakie można osiągnąć z wykorzystaniem kryteriów ISE oraz ITAE (odpowiednio jakość regulacji lub krzepkość) oraz możliwością uwzględnienia sygnału sterującego w funkcji celu.

Kryterium całkowite ITAE nie powinno być wykorzystywane w drugim etapie optymalizacji ze względu na zastosowanie w nim znacznie większego horyzontu czasu  $t_f$  w stosunku do etapu pierwszego. Przy dużych horyzontach czasowych, dla których liczone jest kryterium całkowite ITAE, występuje w nim znaczna nierównomierność w ważeniu wartości bezwzględnej uchybu przez współczynnik czasu. Zadaniem drugiego etapu optymalizacji jest optymalny dobór parametrów kształtu funkcji przynależności w związku z czym wykorzystane kryterium jakości powinno jednakowo traktować występujący uchyb regulacji na zadanym horyzoncie czasu. Z uwagi na tę niedogodność kryterium ITAE wykorzystane w pierwszym etapie optymalizacji zostało zastąpione kryterium IAE w drugim. W tabeli 6.1 zestawiono przeprowadzone warianty optymalizacji, wraz z wyszczególnieniem całkowitych kryteriów jakości sterowania przypisanych do odpowiednich etapów. Na rysunku 6.3 zamieszczono drzewo przedstawiające wszystkie elementy składające się na proces optymalizacji nastaw i parametrów regulatora wieloobszarowego.

Tabela 6.1. Warianty optymalizacji oraz przyjęte w nich całkowite kryteria jakości sterowania.

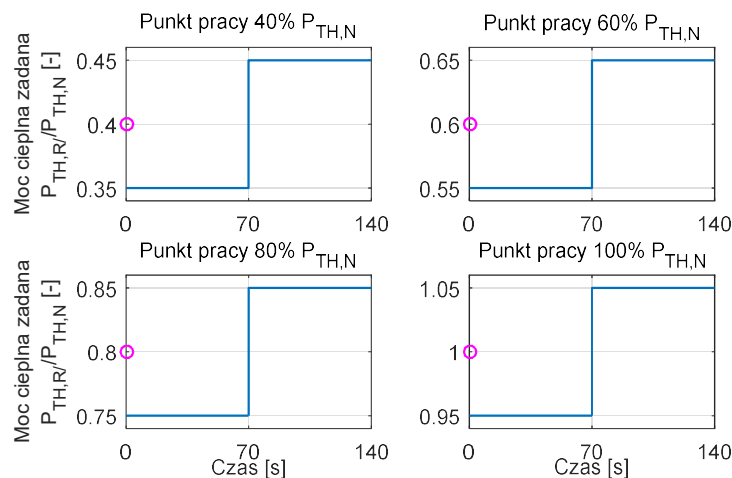
Etap/Wariant optymalizacji	Wariant 1	Wariant 2	Wariant 3
Etap 1	ISE	ITAE	LQ
Etap 2	ISE	IAE	LQ



Rysunek 6.3. Drzewo wariantów optymalizacji.

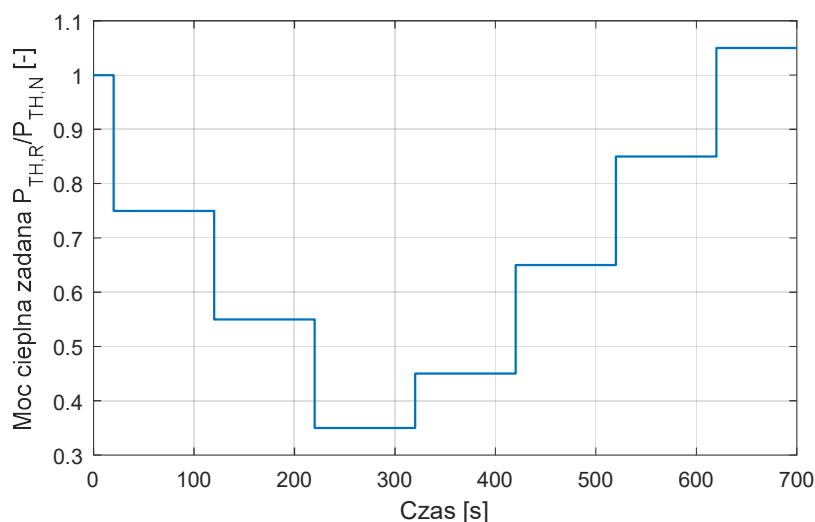
### 6.1.1 Trajektorie mocy cieplnej zadanej wykorzystane w etapach optymalizacji

W etapie pierwszym parametry regulatorów lokalnych są dobierane optymalnie dla wybranych punktów pracy według trajektorii skoku. Wartość początkowa skoku jest pomniejszona o 5% względem wartości mocy w danym punkcie pracy, tj. stanie równowagi. Następnie w 70 sekundzie występuje skok o 10% względem wartości początkowej. Łączny czas trwania wymuszenia oraz horyzont optymalizacji wynoszą 140 sekund. Każde podzadanie optymalizacji (dobór parametrów regulatora w danym punkcie pracy), występujące w etapie pierwszym rozpoczyna się w stanie równowagi wyznaczonym poprzez aktualnie rozpatrywany punkt pracy (40%, 60%, 80%, 100%  $P_{TH,N}$ ). Trajektorie mocy cieplnej zadanej dla każdego punktu pracy zostały obrazowo przedstawione na rysunku 6.4.



Rysunek 6.4. Trajektorie mocy cieplnej zadanej pierwszego etapu optymalizacji dla każdego rozpatrywanego punktu pracy. Kółkiem został zaznaczony punkt równowagi.

Trajektoria mocy cieplnej  $P_{TH,R}(t)$  dla drugiego etapu optymalizacji została przedstawiona na rysunku 6.5. Jest ona złożona z funkcji schodkowych i została ona zaprojektowana w taki sposób, aby przebiegać w pobliżu punktów pracy wybranych w pierwszym etapie optymalizacji. Zmiany poziomu mocy w trajektorii zadanej mają skokowy charakter, gdyż sygnał tego typu jest najbardziej wymagający dla układu sterowania, pod względem jego realizacji, głównie ze względu na występowanie miejsc o niekończonej pochodnej. Trajektoria tego typu pozwala ocenić efektywność badanego systemu sterowania podczas przechodzenia pomiędzy kolejnymi wybranymi punktami stacjonarnymi. W trajektorii zadanej zostały zdefiniowane obszary, w których następuje obniżenie jak i zwiększenie zadanej mocy cieplnej. Punktem początkowym trajektorii był punkt odpowiadający 100% mocy cieplnej  $P_{TH,N}$ , natomiast punkt końcowy odpowiadał wartości 105%  $P_{TH,N}$ . Najniższy poziom mocy cieplnej, w trajektorii, wynosi 35%  $P_{TH,N}$ . W rozprawie nie przeprowadzono oceny jakości wyboru scenariusza trajektorii mocy cieplnej zadanej  $P_{TH,R}(t)$ .



Rysunek 6.5. Trajektoria mocy cieplnej zadanej  $P_{TH,zad}$  drugiego etapu optymalizacji.

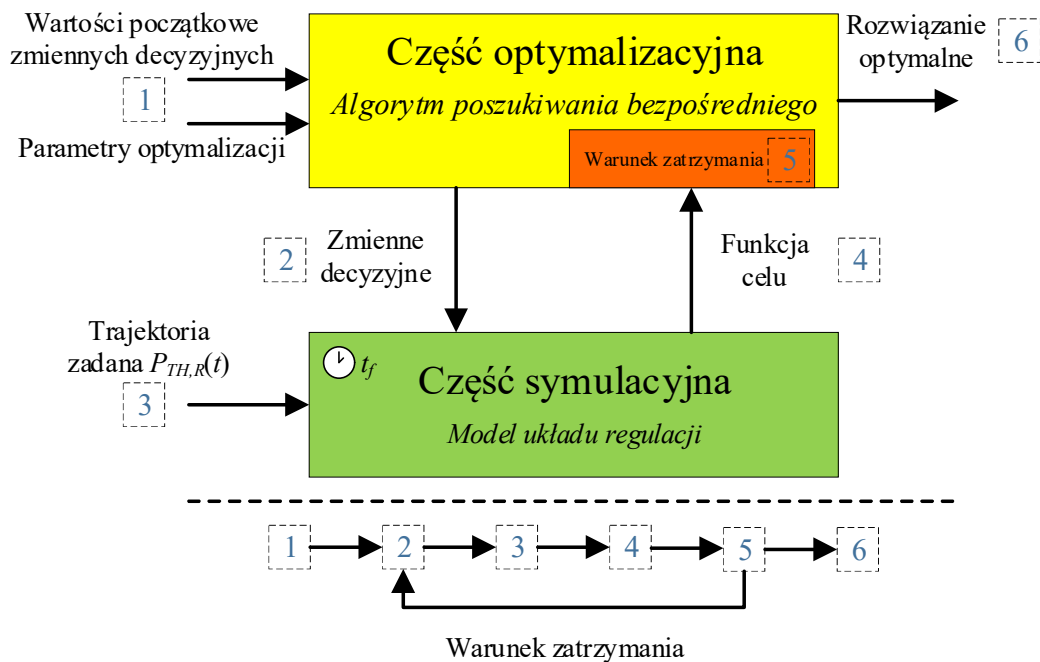
## 6.1.2 Ogólna metoda rozwiązania zadania optymalizacji

W podrozdziałach 6.1.3 oraz 6.1.4 zostały przedstawione szczegółowe charakterystyki etapów wchodzących w skład zadania optymalizacji. W obydwu etapach wykorzystano modele opisane w rozdziałach 3.2.2 oraz 4, tj. model urządzenia wykonawczego oraz model projektowy reaktora jądrowego. Zarówno w pierwszym jak i w drugim etapie wykorzystano metodę optymalizacji opartą o algorytm poszukiwania bezpośredniego, którego charakterystyka została zamieszczona w podrozdziale 6.2.

W obydwu etapach można rozróżnić dwa charakterystyczne komponenty, które razem stanowią metodę rozwiązania postawionego w rozprawie zadania optymalizacji. Pierwszym komponentem jest część optymalizacyjna, w której wykorzystano wybrany algorytm optymalizacji (podrozdział 6.2). Drugim komponentem jest część symulacyjna, która jest wykorzystana przez optymalizator do ewaluowania funkcji celu dla różnych zestawów zmiennych decyzyjnych. Część optymalizacyjna wywołuje część symulacyjną ze zmiennymi decyzyjnymi odpowiednimi dla następujących po sobie iteracji. W etapie pierwszym zmiennymi decyzyjnymi są nastawy lokalnych regulatorów  $P^{LD}$ , a w etapie drugim zmiennymi decyzyjnymi są parametry kształtu funkcji przyrzeczności rozmytej części regulatora wieloobszarowego (rysunek 6.3).

Po określeniu przez część optymalizacyjną (algorytm optymalizacji) zmiennych decyzyjnych dla danej iteracji algorytmu następuje przeprowadzenie symulacji modelu układu regulacji oraz w jej wyniku, obliczenie wielkości niezbędnych do określenia funkcji celu. W ogólności wybrany algorytm optymalizacji zawarty w części optymalizacyjnej wybiera zmienne decyzyjne dla pierwszego i drugiego etapu tak, aby zminimalizować funkcje celu. Cały proces powtarza się, dopóki nie zostanie spełniony warunek zatrzymujący część optymalizacyjną.

Na rysunku 6.6 obrazowo przedstawiono ogólną metodę rozwiązania przedstawionych w rozprawie wariantów optymalizacji, która jest właściwa dla obydwu następujących po sobie etapów. Na rysunku tym zostały również zamieszczone kroki przedstawiające kolejność operacji wykonywanych w trakcie działania optymalizatora.

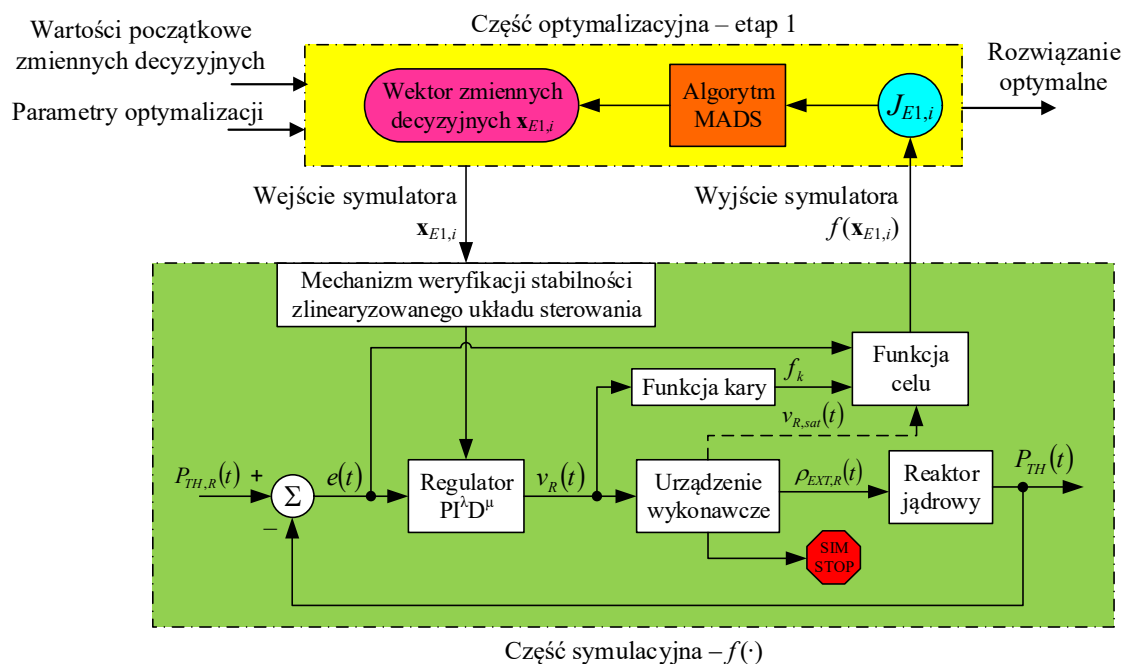


Rysunek 6.6. Ogólna metoda rozwiązywania zadania optymalizacji dla pierwszego i drugiego etapu.

Struktura przedstawiona na rysunku 6.6 jest zaliczana do zadań optymalizacji, w których z punktu widzenia algorytmu optymalizacji rozwiązywany problem występuje w postaci niejawniej tzw. czarnej skrzynki (*ang. black-box*) [129]. Optymalizacja tego typu charakteryzuje się tym, że funkcja celu oraz funkcje opisujące zbiór rozwiązań dopuszczalnych są obliczane na podstawie kodu komputerowego, symulacji lub eksperymentu, a algorytm optymalizacji jest odseparowany od modelu symulacyjnego [129], [130].

### 6.1.3 Optymalizacja nastaw lokalnych regulatorów $PI^{\lambda}D^{\mu}$ – etap 1

Pierwszy etap optymalizacji polega na doborze nastaw lokalnych regulatorów  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  wchodzących w skład regulatora wieloobszarowego. Etap ten z powodu występowania czterech odmiennych, wybranych a priori, punktów pracy, składa się z czterech analogicznych podzadań optymalizacji, które rozwiązywane są w sposób niezależny (rysunek 6.3). Trajektoria zadana mocy cieplnej  $P_{TH,R}(t)$  wykorzystana w tym etapie optymalizacji została przedstawiona w podrozdziale 6.1.1. Stany modelu projektowego reaktora jądrowego wraz ze stanami modelu urządzenia wykonawczego, w danych punktach pracy, zostały wyliczone w taki sposób, aby stanowiły one punkt równowagi. Zostały one zestawione w tabeli Z2.3 w załączniku 2. W ten sposób zniwelowano niepożądane stany przejściowe występujące w pierwszych chwilach symulacji aktualnie rozwiązywanego podzadania optymalizacji mogące wpływać niekorzystnie na wartość wskaźnika jakości. Poglądowy schemat przedstawiający zmodyfikowany układ regulacji przygotowany pod zadanie optymalizacji etapu pierwszego przedstawiono na rysunku 6.7.



Rysunek 6.7. Schemat układu regulacji przygotowany pod zadanie optymalizacji etapu pierwszego. Sygnal  $v_{R,sat}(t)$ , zaznaczony na rysunku przerywaną linią, uwzględniany jest wyłącznie w kryterium jakości  $LQ$ .

W tabeli 6.2 został przedstawiony plan wykonywania czterech podzadań optymalizacji występujących w etapie pierwszym. Plan ten jest scharakteryzowany poprzez właściwe dla każdego punktu pracy stany modelu projektowego reaktora jądrowego oraz modelu urządzenia wykonawczego jak i wartości trajektorii mocy cieplnej zadanej.

Tabela 6.2. Plan podzadań optymalizacji etapu pierwszego.

Lp.	Punkt pracy	Wartość początkowa	Wartość końcowa	Stan modelu reaktora	Zanurzenie początkowe ZPS	Reaktywność początkowa ZPS
	$P_{TH,pp}$	$P_{TH,R}$	$P_{TH,R}$	$P_{TH}$	$H_0$	$\rho_{EXT,R,0}$
1	40%	35%	45%	40%	-56,7%	-0,0113 $\Delta k/k$
2	60%	55%	65%	60%	-48,5%	-0,0075 $\Delta k/k$
3	80%	75%	85%	80%	-40,2%	-0,0038 $\Delta k/k$
4	100%	95%	105%	100%	-30,0%	0,0000 $\Delta k/k$

Podzadania optymalizacji etapu pierwszego dla każdego wybranego punktu pracy można przedstawić w następującej postaci

$$\min_{\mathbf{x}_{E1,i}} f(\mathbf{x}_{E1,i}), \quad \text{dla } i = 1, \dots, 4, \quad (6.5)$$

z uwzględnieniem, że

$$\mathbf{x}_{E1,i,lb} \leq \mathbf{x}_{E1,i} \quad \text{dla } i = 1, \dots, 4, \quad (6.6)$$

gdzie  $\mathbf{x}_{E1,i} = [K_{Pi}, K_{Ii}, K_{Di}, \lambda_i, \mu_i]$  jest wektorem zmiennych decyzyjnych etapu pierwszego optymalizacji,  $f(\mathbf{x}_{E1,i})$  jest funkcją celu, której wartość określona jest na podstawie przeprowadzonej symulacji, a  $\mathbf{x}_{E1,i,lb} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$  to wektor dolnych wartości granicznych dla zmiennych decyzyjnych. W pierwszym etapie optymalizacji zmienne decyzyjne nie są ograniczone z góry.

Sygnal generowany bezpośrednio przez regulator  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  może przyjmować niedopuszczalne wartości z punktu widzenia urządzenia wykonawczego, zwłaszcza dla sygnałów wielkości zadanej o charakterze skokowym, które są wykorzystywane w tym etapie optymalizacji. Z tego powodu wprowadzono składnik kary do funkcji celu. Zadaniem tego składnika jest oddziaływanie na optymalizator, poprzez wartości funkcji celu, w sposób ograniczający poszukiwanie nastaw regulatorów w obszarach przestrzeni decyzyjnej, które mogą wywołać znaczące naruszenia w ograniczeniach urządzenia wykonawczego na dozwolone wartości prędkości przesuwu zespołu prętów sterujących.

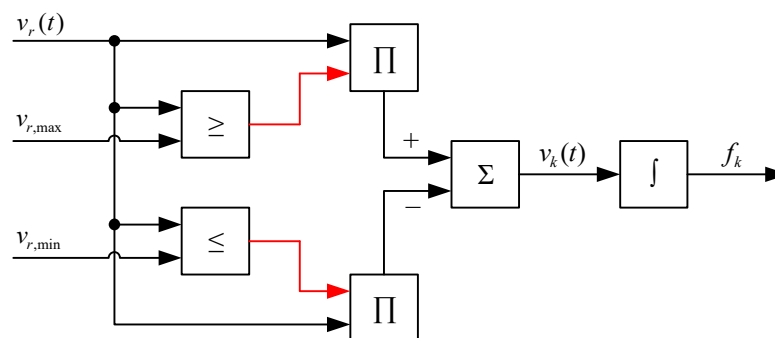
Wartość funkcji celu  $f(\mathbf{x}_{E1,i})$ , dla każdego podzadania występującego w pierwszym etapie optymalizacji, jest określana na podstawie symulacji modelu układu regulacji mocy cieplnej reaktora jądrowego. Funkcję tę można zdefiniować w następujący sposób



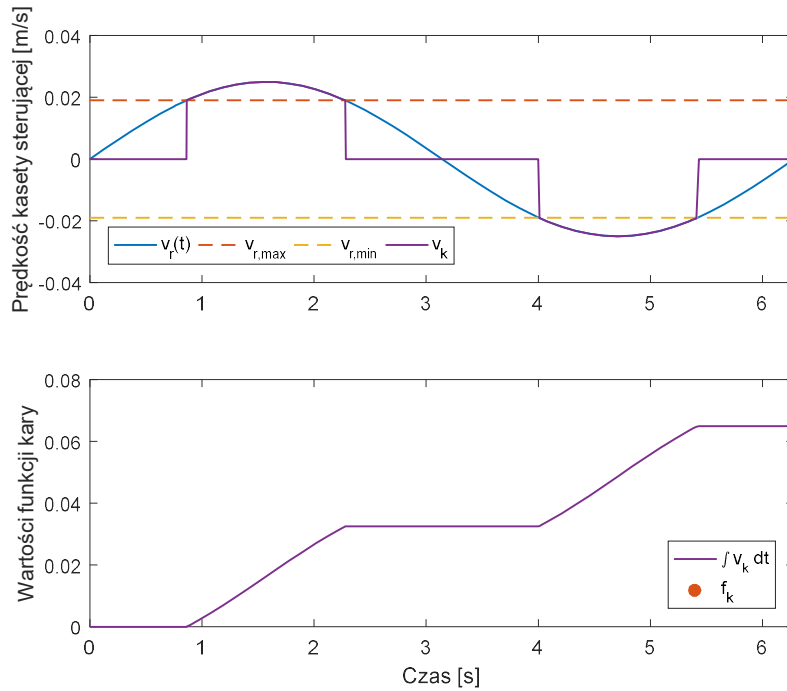
$$f(\mathbf{x}_{E1,i}) = J_{E1,i} = \frac{J_{CE1} + \kappa \cdot f_k}{1 + \kappa}, \quad (6.7)$$

gdzie  $J_{CE1} = \{J_{ISE}, J_{ITAE}, J_{LQR}\}$  jest wskaźnikiem jakości zależnym od wariantu optymalizacji i obliczanym na podstawie sygnałów  $e(t)$  i  $v_{R,sat}(t)$ ,  $f_k$  jest funkcją kary, a  $\kappa$  jest jej wagą. W każdym podzadaniu optymalizacji występującym w etapie pierwszym przyjęto, że waga funkcji kary  $\kappa = 0,5$ .

Funkcja kary  $f_k$  została opracowana w sposób pozwalający na rozpoznawanie naruszeń ograniczeń urządzenia wykonawczego, które są zdefiniowane przez wielkości  $v_{r,max}$  oraz  $v_{r,min}$ . Wielkości te związane są z sygnałem prędkości przesuwu zespołu prętów sterujących  $v_r$  mogącym przyjmować wartości dodatnie lub ujemne w zależności od kierunku przemieszczenia zespołu. Jeżeli występują naruszenia ograniczeń, funkcja kary całkuje aktualne wartości sygnału  $v_r$ , jeżeli natomiast prędkość przesuwu zespołu prętów sterujących zawiera się w ograniczeniach, aktualne wartości sygnału  $v_r$  nie są całkowane przez funkcję kary. W ten sposób, poprzez warunkowe wykorzystanie całki sygnału  $v_r$ , funkcja kary zwraca wartość liczbową odpowiadającą polu pod krzywą tego sygnału wyłącznie w chwilach, w których zostały naruszone ograniczenia. Schemat blokowy przedstawiający mechanizm działania funkcji kary został zamieszczony na rysunku 6.8, natomiast przykład obrazujący jej działanie, dla testowego sinusoidalnego sygnału  $v_r$  naruszającego ograniczenia urządzenia wykonawczego, został zamieszczony na rysunku 6.9.



Rysunek 6.8. Schemat blokowy funkcji kary. Kolorem czerwonym zaznaczono sygnały binarne przyjmujące wartości zero lub jeden w zależności od spełnienia warunku większości lub mniejszości.



Rysunek 6.9. Przebieg działania funkcji kary dla przykładowego sygnału sinusoidalnego, który narusza ograniczenia urządzenia wykonawczego.

W części symulacyjnej (rysunek 6.7) zostały również zaimplementowane mechanizmy pozwalające na określenie stabilności zlinearyzowanego modelu układu regulacji z aktualnie wybranymi przez optymalizator nastawami regulatora  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  [91] oraz warunkowe zatrzymanie symulacji. Pierwszy z wymienionych mechanizmów powoduje, że algorytm optymalizacji będzie poszukiwał nastaw regulatora  $PI^{\lambda}D^{\mu}$ , które gwarantują stabilność zlinearyzowanego układu regulacji. Nastawy, które nie spełnią tego warunku nie będą brane pod uwagę, gdyż dla takich nastaw zaimplementowany mechanizm badania stabilności ustawi wartość funkcji celu na nieskończoność  $f(x_{E1,i}) = \infty$ .

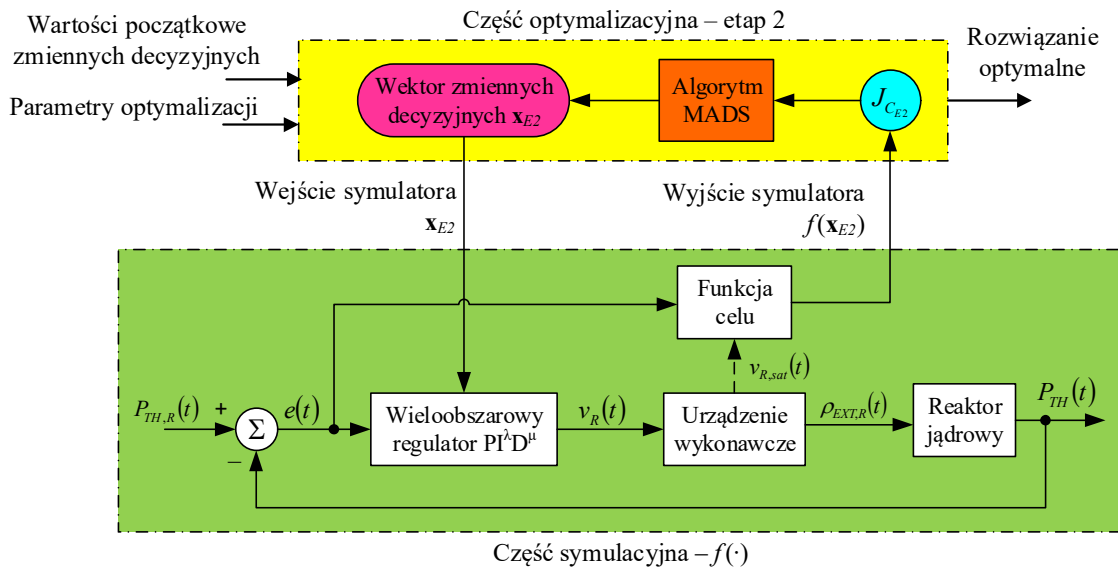
Zaimplementowany mechanizm badania stabilności ustawia wartość funkcji celu na nieskończoność  $f(x_{E1,i}) = \infty$ , gdy nastawy wybrane przez optymalizator powodują niestabilność zlinearyzowanego modelu układu regulacji. Takie podejście jest uzasadnione, gdyż pierwszy etap optymalizacji ma na celu dobór nastaw regulatorów  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  wyłącznie w lokalnych punktach pracy oraz przy niewielkich odchyłkach od tego punktu. Stabilność systemu zlinearyzowanego w punkcie pracy (stabilność lokalna) gwarantuje, że system ten będzie również stabilny w niewielkim jego otoczeniu [32].

Drugi z ww. mechanizmów zaimplementowanych w części symulacyjnej warunkowo przerywa symulację, gdy wystąpi bardzo duża ilość fluktuacji w okolicach punktów, w których system jest nieciągły (np. saturacje) w krótkim okresie czasu. Typowo symulacje systemów, w których

występują nieciągłości objawiają się znaczącym wydłużeniem czasu potrzebnego na symulację takiego systemu głównie z powodu automatycznego zwiększania dokładności zastosowanej w środowisku obliczeniowym (Matlab/Simulink) procedury numerycznej. W skrajnych przypadkach występowanie nieciągłości może powodować „zawieszanie się” obliczeń numerycznych wykonywanych w ramach symulacji systemu, w którym występują nieciągłości. Głównym źródłem nieciągłości w symulowanym modelu układu sterowania mocy cieplnej reaktora jądrowego jest saturacja występująca na wejściu modelu urządzenia wykonawczego (rysunek 3.5). Wspomniane mechanizmy zaimplementowano w części symulacyjnej zaproponowanej metody optymalizacji etapu pierwszego (rysunek 6.7). Szczegóły związane z ich implementacją w środowisku obliczeniowym Matlab/Simulink zostały przedstawione w podrozdziale 6.3.1.3. Rozważania związane z analizą stabilności modelowanego układu regulacji zaprezentowano w rozdziale 7.

#### **6.1.4 Optymalizacja parametrów funkcji przynależności rozmytej części regulatora wieloobszarowego – etap 2**

Drugi etap optymalizacji ma na celu dobór parametrów kształtu funkcji przynależności wykorzystanych w rozmytej części regulatora wieloobszarowego (podrozdział 3.2.1). W odróżnieniu od poprzedniego etapu, w którym występowały cztery analogiczne podzadania optymalizacji, w tym przypadku występuje pojedyncze zadanie. W tym etapie trajektoria referencyjna  $P_{TH,R}(t)$  stanowi istotny element, na podstawie którego będzie poszukiwana wartość rozwiązania. Wybór jej kształtu może znacznie wpłynąć na otrzymane wyniki. Z powodu odmiennego charakteru oraz odmiennych celów tego zadania, w przeciwieństwie do etapu pierwszego, w drugim etapie optymalizacji nie wykorzystano funkcji kary w funkcji celu (równanie (6.7)) oraz mechanizmów sprawdzania stabilności modelu układu regulacji i warunkowego zatrzymania symulacji. Rozważania związane z analizą stabilności przedstawione w rozdziale 7 obejmują również wyniki uzyskane w drugim etapie optymalizacji. Poglądowy schemat przedstawiający zmodyfikowany układ regulacji przygotowany pod zadanie optymalizacji etapu drugiego przedstawiono na rysunku 6.10.



Rysunek 6.10. Schemat układu regulacji przygotowany pod zadanie optymalizacji etapu drugiego. Sygnał  $v_{R,sat}(t)$ , zaznaczony na rysunku przerywaną linią, uwzględniany jest wyłącznie w kryterium jakości LQ.

Zadanie optymalizacji w etapie drugim można przedstawić w następującej postaci

$$\min_{\mathbf{x}_{E2}} f(\mathbf{x}_{E2}), \quad (6.8)$$

z uwzględnieniem, że

$$\mathbf{x}_{E2,lb} \leq \mathbf{x}_{E2} \leq \mathbf{x}_{E2,ub}, \quad (6.9)$$

$$\mathbf{A}_{E2}\mathbf{x}_{E2} \leq \mathbf{b}_{E2}, \quad (6.10)$$

gdzie  $\mathbf{x}_{E2}$  jest wektorem zmiennych decyzyjnych drugiego etapu optymalizacji,  $f(\mathbf{x}_{E2})$  jest funkcją celu, której wartość określona jest na podstawie przeprowadzonej symulacji,  $\mathbf{x}_{E2,lb}$  to wektor dolnych wartości granicznych dla zmiennych decyzyjnych,  $\mathbf{x}_{E2,ub}$  to wektor górnych wartości granicznych dla zmiennych decyzyjnych, a  $\mathbf{A}_{E2}$  oraz  $\mathbf{b}_{E2}$  są odpowiednio macierzą oraz wektorem reprezentującymi współczynniki ograniczeń nierównościowych.

Wartość funkcji celu  $f(\mathbf{x}_{E2})$  w drugim etapie optymalizacji jest określana wyłącznie na podstawie całkowego kryterium jakości sterowania  $J_{C_{E2}} = \{J_{ISE}, J_{IAE}, J_{LQR}\}$ , które jest zależne od wariantu optymalizacji. Tak jak w etapie pierwszym wartość całkowego kryterium jakości jest obliczana na podstawie sygnałów  $e(t)$  i  $v_{R,sat}(t)$ . Funkcję celu etapu drugiego można zdefiniować w następujący sposób

$$f(\mathbf{x}_{E2}) = J_{C_{E2}}. \quad (6.11)$$

Szczegółowy opis zmiennych decyzyjnych etapu drugiego optymalizacji wraz z odpowiadającymi im wartościami granicznymi został przedstawiony w tabeli 6.3. Zmienne decyzyjne przedstawione w poniższej tabeli odnoszą się bezpośrednio do parametrów kształtu wybranych funkcji przynależności wykorzystanych w rozmytej części regulatora. Charakterystyka wykorzystanych funkcji przynależności została zawarta w podrozdziale 3.2.1.

Tabela 6.3. Opis zmiennych decyzyjnych drugiego etapu optymalizacji oraz ich ograniczenia.

Zmienna decyzyjna	Klasa fun. przynależności	Opis parametru funkcji przynależności	Poziom mocy $P_{TH,N}$	Dolne war. graniczne $x_{E2,lb}$	Górne war. graniczne $x_{E2,ub}$
$x_{E2,1}$	$Z_{\bar{A}_{15,1}}$	Maksimum zbocza opadającego $a_{\bar{A}_{15,1}}$	40%	0,3	0,5
$x_{E2,2}$		Minimum zbocza opadającego $b_{\bar{A}_{15,1}}$	40%	0,3	1
$x_{E2,3}$	$\Pi_{\bar{A}_{15,2}}$	Minimum zbocza narastającego $a_{\bar{A}_{15,2}}$	60%	0,3	1
$x_{E2,4}$		Maksimum zbocza narastającego $b_{\bar{A}_{15,2}}$	60%	0,5	1
$x_{E2,5}$		Maksimum zbocza opadającego $c_{\bar{A}_{15,2}}$	60%	0,3	0,7
$x_{E2,6}$		Minimum zbocza opadającego $d_{\bar{A}_{15,2}}$	60%	0,3	1
$x_{E2,7}$	$\Pi_{\bar{A}_{15,3}}$	Minimum zbocza narastającego $a_{\bar{A}_{15,3}}$	80%	0,3	1
$x_{E2,8}$		Maksimum zbocza narastającego $b_{\bar{A}_{15,3}}$	80%	0,7	1
$x_{E2,9}$		Maksimum zbocza opadającego $c_{\bar{A}_{15,3}}$	80%	0,3	0,9
$x_{E2,10}$		Minimum zbocza opadającego $d_{\bar{A}_{15,3}}$	80%	0,3	1
$x_{E2,11}$	$S_{\bar{A}_{15,4}}$	Minimum zbocza narastającego $a_{\bar{A}_{15,4}}$	100%	0,3	1
$x_{E2,12}$		Maksimum zbocza narastającego $b_{\bar{A}_{15,4}}$	100%	0,9	1

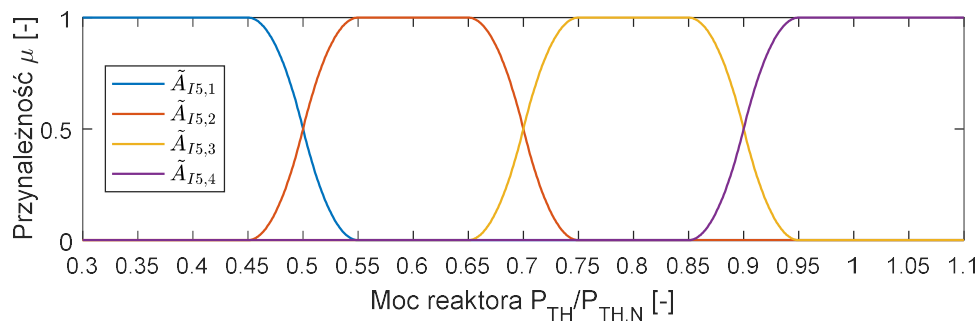
W tabeli 6.4 zostały przedstawione ograniczenia nierównościowe dla drugiego etapu optymalizacji. Ograniczenia te podzielone zostały na trzy kategorie, nazwane odpowiednio: kształt, jądro oraz krańce nośnika. Pierwsza kategoria ograniczeń (kształt) odpowiada za sytuacje, w której nieodpowiednio dobrane parametry kształtu funkcji przynależności mogłyby spowodować ich odwrócenie, np. funkcja przynależności klasy Z zamieniłaby się na funkcję przynależności klasy S i odwrotnie. Ograniczenia te wpływają również na prawidłowe ukształtowanie funkcji przynależności klasy II. Druga kategoria ograniczeń (jądro) zapewnia, aby w obszarach jąder funkcji przynależności nie występowały żadne inne funkcje. Ostatnia kategoria ograniczeń (krańce nośnika) wymusza, aby krańce wykorzystanych funkcji przynależności zachodziły na siebie, przy czym zachodzenie to nie powinno być mniejsze niż 0,02 jednostek względnych mocy cieplnej  $P_{TH}/P_{TH,N}$ . Ostatnia grupa ograniczeń ma na celu zapobiec sytuacji, w której w dziedzinie rozważań mogłyby wystąpić obszary o zerowej przynależności. Taki stan może powodować gene-

rowanie nienaturalnych wartości sygnału sterującego przez regulator, w skutek wystąpienia dzielenia przez zero lub bardzo małą liczbę w operacji średniej ważonej wyrażonej wzorem (3.9), który został przedstawiony w podrozdziale 3.2.1.

Tabela 6.4. Ograniczenia nierównościowe drugiego etapu optymalizacji.

Kształt	Jądro	Krańce nośnika
$x_{E2,1} \leq x_{E2,2}$	$x_{E2,2} \leq x_{E2,4}$	$x_{E2,3} - x_{E2,2} \leq -0,02$
$x_{E2,3} \leq x_{E2,4}$	$x_{E2,1} \leq x_{E2,3}$	$x_{E2,7} - x_{E2,6} \leq -0,02$
$x_{E2,4} \leq x_{E2,5}$	$x_{E2,5} \leq x_{E2,7}$	$x_{E2,11} - x_{E2,10} \leq -0,02$
$x_{E2,5} \leq x_{E2,6}$	$x_{E2,6} \leq x_{E2,8}$	
$x_{E2,7} \leq x_{E2,8}$	$x_{E2,9} \leq x_{E2,11}$	
$x_{E2,8} \leq x_{E2,9}$	$x_{E2,10} \leq x_{E2,12}$	
$x_{E2,9} \leq x_{E2,10}$		
$x_{E2,11} \leq x_{E2,12}$		

Przykładowy rozkład funkcji przynależności spełniający ograniczenia nierównościowe, które zostały zestawione w tabelach 6.3 oraz 6.4 został przedstawiony na rysunku 6.11. Rozkład ten jest zarazem jednym z punktów początkowych dla drugiego etapu optymalizacji.



Rysunek 6.11. Przykładowy rozkład funkcji przynależności dla drugiego etapu optymalizacji.

## 6.2 Wybór algorytmu optymalizacji

Algorytmy optymalizacji powinny dobierać się w zależności od postawionego zadania optymalizacji. Prawidłowe sklasyfikowanie problemu optymalizacji, a co za tym idzie dobranie odpowiedniego algorytmu lub strategii poszukiwania rozwiązania suboptymalnego lub optymalnego nie jest zadaniem łatwym. Klasyfikacja może zależeć od typu zmiennych decyzyjnych ich ilości, kształtu płaszczyzny rozwiązań dopuszczalnych, charakteru zmienności wyjść symulowanego modelu oraz od ilości czasu, który można poświęcić na poszukiwanie rozwiązania [131]. Algorytmy optymalizacji zorientowane typowo na poszukiwanie rozwiązania globalnego z reguły

wymagają długiego czasu obliczeń, z kolei algorytmy charakteryzujące się krótkimi czasami obliczeń, z większym prawdopodobieństwem znajdują rozwiązania lokalne [131]. Osiągnięcie kompromisu pomiędzy jakością rozwiązania (globalne/lokalne) a czasem obliczeń również stanowi istotny problem w kontekście wyboru odpowiedniej strategii poszukiwania rozwiązania optymalnego.

Jak już wspomniano wcześniej, istnieje wiele cech pod względem, których można dokonać klasyfikacji zadań optymalizacji. Podstawowe cechy tych zadań z podziałem na grupy można przedstawić w następujący sposób [132]:

- optymalizacja ciągła lub dyskretna,
- optymalizacja z ograniczeniami lub bez ograniczeń,
- optymalizacja jedno lub wielokryterialna,
- optymalizacja deterministyczna lub stochastyczna.

W znacznej większości zadań optymalizacji wyżej wymienione cechy występują wspólnie. Rozwiązywane w rozprawie zadanie optymalizacji, zgodnie z przedstawioną powyżej klasyfikacją cechuje się następującymi właściwościami:

- optymalizacja ciągła – zarówno w pierwszym jak i w drugim etapie optymalizacji występują zmienne decyzyjne o charakterze ciągłym; wśród zmiennych decyzyjnych nie występują zmienne binarne,
- optymalizacja z ograniczeniami – w pierwszym etapie optymalizacji występują ograniczenia związane wyłącznie z nieujemnością zmiennych decyzyjnych, natomiast w drugim etapie występują ograniczenia związane z zakresem wartości zmiennych decyzyjnych oraz ograniczenia nierównościowe,
- optymalizacja jednokryterialna – w obydwu etapach optymalizacji występuje pojedyncze kryterium, w którego skład wchodzi całkowity wskaźnik jakości sterowania (tabela 6.1); w etapie pierwszym dodatkowo wykorzystano funkcję kary,
- optymalizacja deterministyczna – przyjmuje się, że dane otrzymane w wyniku symulacji zaproponowanych układów sterowania mocą cieplną reaktora jądrowego są dokładnie znane, tj. wolne od zakłóceń pomiarowych lub niepewności parametrów modelu.

Do rozwiązania postawionego w rozprawie zadania optymalizacji, cechującego się wyżej wymienionymi właściwościami, można wykorzystać iteracyjne metody deterministyczne lub stochastyczne metody metaheurystyczne. W tych pierwszych pracuje się z kolejnymi propozycjami rozwiązania zadania optymalizacji, które znajdują się w oparciu o pewną metodę przemiesz-

czania się w przestrzeni decyzyjnej. W drugich pracuje się na populacjach rozwiązań, które generowane są w oparciu o pewne metaheurystyki, które w wielu przypadkach są inspirowane procesami i zjawiskami występującymi w przyrodzie.

Deterministyczne metody iteracyjne można podzielić ze względu na rząd pochodnej, która jest w nich wykorzystywana do poszukiwania rozwiązania optymalnego. Wyróżnia się metody zerowego rzędu, pierwszego rzędu oraz metody wyższych rzędów. Metody zerowego rzędu wykorzystują informację o wartościach funkcji celu i są one nazywane metodami bezpośrednimi. Metody pierwszego i wyższych rzędów nazywane są metodami gradientowymi.

Metody gradientowe mogą wykorzystywać informację o pochodnych funkcji celu, ograniczeń lub aproksymować funkcję kryterialną w celu zmniejszenia nakładu obliczeniowego potrzebnego do poszukiwania rozwiązania optymalnego. Metody gradientowe przeważnie są stosowane w zadaniach, w których informacje o gradientach są dostępne, ich uzyskanie nie wymaga istotnego nakładu obliczeniowego lub gdy rozwiązywany problem nie jest obarczony zakłóceniami wpływającymi na wartości funkcji celu [133]. Pomimo szerokiego pola zastosowań, algorytmy gradientowe nie sprawdzają się w problemach, w których funkcja celu nie jest: różniczkowalna, gładka lub ciągła.

Metody gradientowe są wydajne i skuteczne, jeżeli wykorzystuje się je do właściwej klasy problemów optymalizacyjnych. Jednakże ich cechy takie jak: zbyt szybka zbieżność do lokalnych ekstremów, znaczna wrażliwość rozwiązania na punkt startowy, brak mechanizmów pozwalających na wyjście algorytmu z lokalnych ekstremów oraz znaczna złożoność implementacyjna zwłaszcza w przypadku metod pracujących z modelami funkcji celu i ograniczeń, mogą być uznawane, za wady, które w wielu aplikacjach ograniczają ich zastosowanie.

Dzięki gwałtownemu rozwojowi technik komputerowych oraz środowisk obliczeniowych, możliwym staje się przeprowadzanie symulacji komputerowych coraz bardziej skomplikowanych obiektów. Symulacje te wykorzystują złożone modele matematyczne, opisane za pomocą nieliniowych układów równań. Zadania optymalizacji, oparte o takie modele, charakteryzują się znacznym stopniem skomplikowania oraz nie są zdefiniowane w sposób, który pozwalałby na otrzymanie precyzyjnej informacji o pochodnych funkcji celu lub proces ten byłby czasochłonny. W wielu przypadkach, algorytm optymalizacji opiera się wyłącznie na danych uzyskanych z wejść i wyjść obiektu, który podlega procesowi optymalizacji lub jego reprezentacji matematycznej w środowiskach komputerowych. W takim przypadku optymalizator traktuje obiekt zainteresowania jako czarną skrzynkę. Taki sposób optymalizacji wyklucza całkowicie wykorzystanie informacji danej a priori o gradientach funkcji celu lub ograniczeń.



W przypadkach, w których nie jest możliwe dostarczenie informacji o gradiencie a priori, zaawansowane algorytmy optymalizacyjne wykorzystują metody automatycznego wyznaczania gradientu lub jest on estymowany w oparciu o różnice skończone [133]. W celu uproszczenia opisu modeli występujących w złożonych zadaniach optymalizacyjnych stosuje się systemy aproksymujące, np. rozmyte. Jednakże modele w takiej postaci nie posiadają ścisłej formuły analitycznej, przez co wykorzystanie zautomatyzowanych metod wyznaczania gradientu jest nieodpowiednie lub w wielu przypadkach niemożliwe.

Biorąc pod uwagę powyższe rozważania, można scharakteryzować główne czynniki, które ograniczają stosowanie metod gradientowych. Są one następujące: względnie duża i skomplikowana topologicznie przestrzeń rozważań, która wpływa na złożoność zadania optymalizacji, optymalizacja typu czarna skrzynka, wykorzystanie skomplikowanych modeli matematycznych lub ich aproksymatorów oraz wiążące się z tym ograniczenia w stosowaniu wzorów analitycznych w celu wyznaczenia gradientów lub ograniczenia na stosowanie metod zautomatyzowanego wyznaczenia gradientu [133]. Czynniki te powodują, że wybór gradientowych metod optymalizacji jest nieodpowiedni. W takich przypadkach zasadnym jest wykorzystanie metod optymalizacji, które nie wykorzystują informacji o gradiencie w celu poszukiwania lepszych rozwiązań. Do takich zaliczane są stochastyczne metody metaheurystyczne oraz metody zerowego rzędu (poszukiwania bezpośredniego).

Aktualnie stochastyczne metody metaheurystyczne cieszą się znacząco popularnością. Najbardziej popularne algorytmy należące do tej grupy to m.in.: algorytmy ewolucyjne [134], [135], algorytmy rojowe [136], [137] oraz symulowane wyżarzanie [138], [139]. Inspiracją dla tych metod są zjawiska i procesy występujące w przyrodzie. Metody te charakteryzują się znaczącą skutecznością w poszukiwaniu rozwiązań suboptymalnych ze względu na ich globalny charakter, lecz w wielu przypadkach wymagają od użytkownika indywidualnego dostosowania algorytmu oraz doboru jego parametrów w zależności od klasy problemu optymalizacji [129]. Proces ten w wielu przypadkach jest zadaniem czasochłonnym i żmudnym, który ściśle zależy od klasy problemu optymalizacji. Stosowanie stochastycznych metod metaheurystycznych do złożonych problemów, w których występuje znaczna liczba zmiennych decyzyjnych objawia się zwiększonym zapotrzebowaniem na zasoby obliczeniowe oraz długimi czasami obliczeń. Czas obliczeń, jak już wcześniej wspomniano, wydłuża się dodatkowo o etap doboru parametrów algorytmu, co powoduje, że ich wybór, może okazać się niewłaściwy z punktu widzenia ograniczeń czasowych spowodowanych np. wymaganiami optymalizacji w czasie rzeczywistym. Z formalnego punktu widzenia, brak rygorystycznych dowodów zbieżności niektórych algorytmów metaheurystycznych również stanowi problem [129].

Metody poszukiwania bezpośredniego (*ang. Direct Search*) [140], [141], tak jak ww. stochastyczne metody metaheurystyczne charakteryzują się tym, że nie obliczają ani nie aproksymują pochodnych funkcji celu lub ograniczeń, które wykorzystywane są do określania kierunku przeszukiwań i znajdowania coraz to lepszych rozwiązań. Jednakże w tym przypadku ich heurystyki nie wzorują się na rozwiązaniach zaczerpniętych z przyrody. Popularne algorytmy należące do tej grupy to: metoda simpleksu Nedlera-Meada [142], metoda Hooka i Jeevesa [140], metoda Boxa i Wilsona [143] oraz metoda Dennisa i Torczona mająca zastosowanie w obliczeniach równoległych [144]. Do rozwiązania zadania optymalizacji przedstawionego w podrozdziale 6.1 wykorzystano algorytm poszukiwania bezpośredniego MADS (*ang. Mesh Adaptive Direct Search*) [145]. Jego charakterystyka została zawarta w podrozdziale 6.2.1.

### 6.2.1 Algorytm optymalizacji MADS

Algorytm MADS (*ang. Mesh Adaptive Direct Search*) [145] jest uogólnieniem metody przeszukiwania z wykorzystaniem wzorca (*ang. Generalized Pattern Search – GPS*) [146]–[148], która została stworzona m.in. do rozwiązywania problemów nieliniowych posiadających ograniczenia w postaci „tak-nie” [129]. Algorytm MADS zaliczany jest do grupy metod poszukiwania bezpośredniego (bez gradientowych), gdyż nie wymaga żadnych informacji o gradiencie rozpatrywanej funkcji celu  $f$  w trakcie wykonywania obliczeń [145]. Analiza zbieżności algorytmu MADS, określa warunki konieczne optymalności rzędu pierwszego [145] oraz drugiego [149]. Algorytm ten poszukuje rozwiązania optymalnego poprzez obliczanie wartości funkcji  $f_{\Omega}$  w wybranych punktach siatki rozpiętej na przestrzeni decyzyjnej  $\Omega$ . Punkty te nazywane są punktami próbnymi (*ang. trial points*). Siatka algorytmu jest modyfikowana w zależności od aktualnie wyliczonych wartości funkcji celu w punktach próbnych oraz wartości ograniczeń [129]. Algorytm MADS w przeciwieństwie do metod poszukiwania wyczerpującego (*ang. brute force*) nie przeszukuje wszystkich punktów wygenerowanej siatki, lecz tylko te, które zostały wyznaczone za pomocą kierunków przeszukiwań  $D$ . Głównym zadaniem algorytmu MADS jest unikanie kroków o dowolnej długości oraz niekontrolowanych przemieszczeń w przestrzeni decyzyjnej [129].

Do rozpoczęcia pracy algorytmu MADS niezbędne są dwie wielkości, tj. punkt początkowy  $x_0$  spełniający warunek  $f_{\Omega}(x_0) < \infty$  oraz parametr określający wielkość siatki (*ang. mesh size*)  $\Delta_0^m \in \mathbb{R}_+$ . Parametry te są dostarczane przez użytkownika. Następnie obliczane są parametry niezbędne w następnych iteracjach algorytmu takie jak [129], [145]:

- wielkość obszaru poszukiwań (*ang. poll size*)  $\Delta_k^p = \sqrt{\Delta_k^m}$ ,
- dodatnia baza (*ang. positive basis*) niezbędna do określenia kierunków poszukiwań  $D = \{\pm e_i, i = 1, 2, \dots, n\}$ , gdzie  $e_i$  jest  $i$ -tym kierunkiem poszukiwań, a  $n$  jest ilością zmiennych decyzyjnych,

- siatka  $M_k = \{x \in S_k\} \cup \{x_k + \Delta_k^m Dz \mid z \in \mathbb{N}^{2n}\}$ , gdzie  $S_k$  jest zbiorem punktów już odwiedzonych przez algorytm od rozpoczęcia  $k$ -tej iteracji, a  $\mathbb{N}$  jest zbiorem liczb naturalnych.

Po określeniu powyższych parametrów algorytm rozpoczyna iteracyjne poszukiwanie punktu optymalnego. Każda  $k$ -ta iteracja algorytmu MADS jest zapoczątkowana w punkcie  $x_k$  należącym do przestrzeni decyzyjnej  $\Omega$ , w którym aktualnie występuje najlepsza wartość funkcji celu. Punkt ten nazywany jest rozwiązaniem obowiązującym (*ang. incumbent solution*). Celem każdej iteracji jest znalezienie nowego punktu, w którym nowa wartość funkcji celu będzie mniejsza od wartości obowiązującej tj.  $f_\Omega(x_{k+1}) < f_\Omega(x_k)$ , przy czym nie jest wymagane, aby nowa wartość spełniała warunek wystarczającego spadku.

Przed obliczeniem wartości funkcji celu, w punktach próbnych określonych za pomocą kierunków przeszukiwań, sprawdzane jest czy punkty te należą do przestrzeni rozważań  $\Omega$ . Algorytm MADS uwzględnia ograniczenia przestrzeni decyzyjnej typu liniowego, nieliniowego, „tak-nie”, a nawet przypadki, w których wartość funkcji celu jest niedostępna. Jeżeli w efekcie przeszukiwania przestrzeni decyzyjnej  $\Omega$  algorytm MADS natrafi na przypadek, w którym punkt próbny narusza jakiegokolwiek zdefiniowane ograniczenie to w takiej sytuacji nie będzie dla tego punktu obliczana wartość funkcji celu, lecz zostanie ona przyjęta z góry, jako  $+\infty$  wedle następującej reguły [129]

$$f_\Omega = \begin{cases} f(x) & \text{jeżeli } x \in \Omega, \\ +\infty & \text{w przeciwnym wypadku.} \end{cases} \quad (6.12)$$

Następnie uwzględniając regułę (6.12) algorytm MADS wykona obliczenia dla problemu bez ograniczeń [129].

$$\min_x f_\Omega(x). \quad (6.13)$$

Przestrzeń decyzyjna  $\Omega$  może być nieliniowa, niewypukła, nieróżniczkowalna lub nieciągła. Idea algorytmu MADS nie przewiduje żadnych założeń, które musi ona spełnić. Jedynym wymaganiem jest, aby punkt początkowy algorytmu  $x_0 \in \Omega$  [129]. Zbieżność algorytmu MADS zależy od gładkości funkcji  $f(x)$  oraz od stożka kierunków stycznych, wyznaczonego przez algorytm na granicy obszaru przestrzeni decyzyjnej [129].

W każdej iteracji można wyróżnić dwa oddzielne kroki, w których dokonywane jest przeszukiwanie przestrzeni rozważań. Pierwszy krok (opcjonalny) noszący nazwę globalnego poszukiwania (*ang. global search*), jest związany z przeszukaniem punktów próbnych wyznaczonych przez siatkę za pomocą dowolnego algorytmu dostarczonego przez użytkownika [129]. W typowych

implementacjach algorytmu MADS, jeżeli w tym kroku zostanie znaleziony punkt, którego wartość jest mniejsza od rozwiązania obowiązującego, wtedy nastąpi zatrzymanie aktualnej iteracji, a nowa iteracja z indeksem  $k + 1$  zostanie zapoczątkowana z nowym rozwiązaniem obowiązującym  $x_{k+1} \in \Omega$ , dla którego  $f_{\Omega}(x_{k+1}) < f_{\Omega}(x_k)$  oraz z nowym parametrem określającym wielkość siatki  $\Delta_{k+1}^m$  równym lub większym od aktualnego  $\Delta_k^m$ .

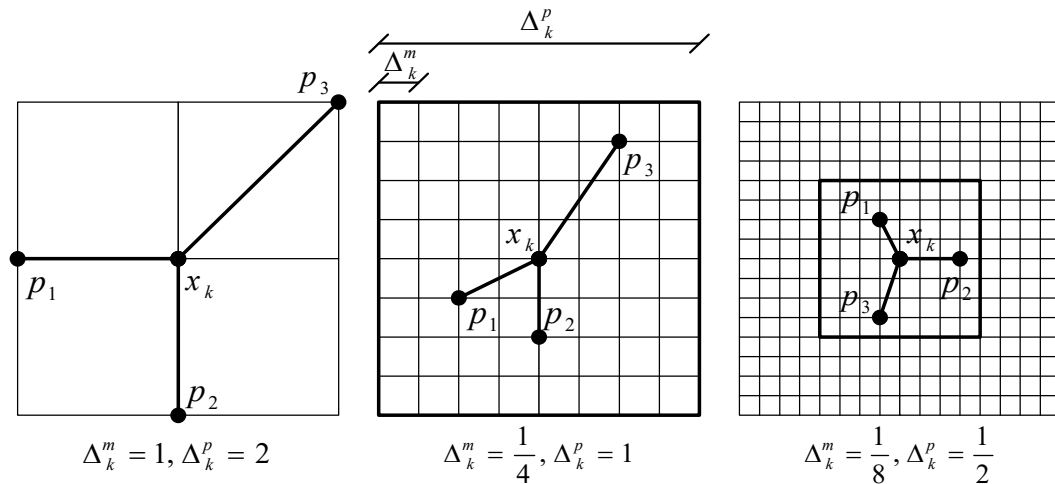
Jeżeli w kroku globalnego poszukiwania nie zostanie znalezione nowe rozwiązanie obowiązujące lub krok ten nie jest wykonywany to algorytm przechodzi do drugiego kroku, który nazywany jest poszukiwaniem lokalnym (*ang. local poll*). W kroku tym przeszukiwane są lokalne okolice rozwiązania obowiązującego  $x_k$ . Jeżeli w aktualnej iteracji nie zostanie znalezione nowe rozwiązanie obowiązujące wtedy poszukiwanie jest inicjowane z dowolnego punktu  $x_{k+1} \in S_{k+1}$ , dla którego  $f_{\Omega}(x_{k+1}) = f_{\Omega}(x_k)$  [145]. W większości przypadków występuje pojedyncze rozwiązanie spełniające powyższe zależności. W takim przypadku parametr odpowiadający za wielkość siatki  $\Delta_{k+1}^m$  jest zmniejszany, jednocześnie zwiększając jej rozdzielczość w celu przeszukania punktów znajdujących się bliżej rozwiązania obowiązującego [145]. Jeżeli w aktualnej iteracji zostanie znalezione nowe rozwiązanie obowiązujące to parametr  $\Delta_{k+1}^m$  jest zwiększany. Formalna definicja mówi, że jeżeli zdefiniowana zostanie liczba rzeczywista  $\tau > 1$  oraz dwie liczby całkowite  $w^- \leq -1$  oraz  $w^+ \geq 0$ , to parametr wielkości siatki jest modyfikowany według poniższej zależności [145]

$$\Delta_{k+1}^m = \tau^{w_k} \Delta_k^m, \text{ dla } w_k \in \begin{cases} \{0, 1, \dots, w^+\}, & \text{dla nowego rozwiązania obowiązującego,} \\ \{w^-, w^- + 1, \dots, -1\} & \text{w przeciwnym wypadku.} \end{cases} \quad (6.14)$$

W algorytmie MADS występuje parametr przypisany do każdej  $k$ -tej iteracji  $\Delta_k^p \in \mathbb{R}_+$ . Określa on obszar, w którym mogą znajdować się punkty próbne. Zmiana tego parametru podlega następującym regułom [145]:

- $\Delta_k^m \leq \Delta_k^p$ , dla każdego  $k$ ,
- $\lim_{k \in K} \Delta_k^m = 0$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\lim_{k \in K} \Delta_k^p = 0$  dla każdego nieskończonego podzbioru indeksów  $K$ .

Zbiór punktów próbnych branych pod uwagę podczas kroku poszukiwania lokalnego jest zwany konstrukcją (*ang. frame*). Konstrukcja w algorytmie MADS jest budowana w oparciu o rozwiązanie obowiązujące  $x_k$  (środek konstrukcji) oraz o parametry siatki  $\Delta_k^p$  i  $\Delta_k^m$ . Jest ona budowana w celu wyznaczenia kierunków przeszukiwania, które będą stanowiły dodatni zbiór rozpinający (*ang. positive spanning set*) [133], [145], [150]. Przykłady konstrukcji wraz z zaznaczonymi punktami próbnymi  $p$  oraz rozwiązaniem obowiązującym  $x_k$  dla różnych wartości parametrów  $\Delta_k^m$  i  $\Delta_k^p$  zostały zamieszczone na rysunku 6.12.



Rysunek 6.12. Przykładowe konstrukcje algorytmu MADS [145].

Wybór algorytmu MADS został podyktowany głównie przez zaproponowaną w rozprawie postać zadania optymalizacji (optymalizacja typu czarna skrzynka), gdzie funkcja celu, z punktu widzenia optymalizatora, jest przedstawiona w sposób niejawni, a jej obliczanie odbywa się na postawie symulacji układu regulacji w środowisku komputerowym (rysunek 6.6). W takiej sytuacji obliczenie a priori postaci gradientu funkcji celu jest niemożliwe, a z punktu widzenia optymalizatora informacja o pochodnych funkcji celu może być wyłącznie aproksymowana o ile pozwala na to algorytm optymalizacji.

We wcześniejszych pracach związanych z doбором parametrów regulatorów pracujących w układach regulacji elementów obiegu pierwotnego elektrowni jądrowej takich jak reaktor jądrowy czy wytwornica pary autor wykorzystywał metody gradientowe oraz metody metaheurystyczne. W pracach [97], [100] zastosowano metodę sekwencyjnego programowania kwadratowego (*ang. SQP*), natomiast w pracach [34], [98], [99] wykorzystano algorytm ewolucyjny. Obliczenia z wykorzystaniem wymienionych wyżej metod charakteryzowały się relatywnie długimi czasami obliczeń (zwłaszcza w przypadku algorytmu ewolucyjnego) oraz w niektórych przypadkach potrafiły zakończyć się fiaskiem ze względu na występowanie błędów spowodowanych ograniczeniami środowiska obliczeniowego, w którym zaimplementowany był model układu regulacji. Występujące błędy starano się eliminować, w celu otrzymania rozwiązania, poprzez zmianę parametrów zarówno samych algorytmów optymalizacyjnych jak i metod numerycznych wykorzystywanych podczas symulacji modeli układu sterowania. Niestety zabiegi te skutkowały znaczącym wydłużeniem czasu obliczeń.

Na podstawie doświadczeń z innymi algorytmami optymalizacyjnymi w rozprawie zdecydowano się na wykorzystanie metod, które są łatwe w implementacji, a ich mechanizm działania jest prosty w zrozumieniu, które nie wymagają jawnej lub aproksymowanej postaci gradientów

funkcji celu lub ograniczeń oraz których strojenie jest względnie łatwe przez niewielką ilość parametrów do doboru. Algorytm MADS, jak już wcześniej wspomniano pozwala na optymalizację problemów nieliniowych, w których funkcja celu nie jest ciągła oraz w których nie wymaga się informacji o gradiencie funkcji celu. Takich właściwości należy się spodziewać po przedstawionym w podrozdziale 6.1 dwuetapowym zadaniu optymalizacji głównie ze względu na występowanie:

- nieliniowego modelu obiektu (rozdział 4),
- nieliniowości w zastosowanych całkowitych kryteriach jakości sterowania (wzory (6.1)-(6.4)),
- ograniczeń sygnałów sterujących (saturacje), które występują w modelu urządzenia wykonawczego w symulowanych układach regulacji (rysunki 3.5, 6.7 oraz 6.10.),
- funkcji kary zawartej w funkcji celu (wzór (6.7), rysunek 6.7),
- technologii rozmytej w postaci bloku miękkiej agregacji sygnałów sterujących z lokalnych regulatorów  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  (rysunek 3.3),
- nieliniowych funkcji przynależności w bloku systemu rozmytego (podrozdział 3.2.1).

### 6.3 Komputerowe środowisko obliczeniowe – Matlab/Simulink

Implementacja zaproponowanego w rozprawie układu sterowania mocą cieplną reaktora jądrowego została zrealizowana z wykorzystaniem komputerowego środowiska obliczeniowego Matlab/Simulink w wersji 2016a [151]. Modele symulacyjne układów sterowania powstałe w tym środowisku zostały następnie poddane optymalizacji, wedle postawionego w rozprawie zadania, z wykorzystaniem pakietu optymalizacyjnego Global Optimization Toolbox [152] będącego składnikiem środowiska Matlab. W pakiecie tym m.in. zawarta jest implementacja wybranego i przedstawionego w rozprawie algorytmu poszukiwania bezpośredniego MADS. Ostatni etap prac, związany z weryfikacją i porównaniem zaproponowanej w rozprawie metody sterowania, również został zrealizowany w środowisku Matlab/Simulink. Etap ten obejmował weryfikację działania zaproponowanego w rozprawie układu sterowania z obiektem wirtualnym oraz porównanie jakości jego działania w stosunku do takich samych układów sterowania z:

- pojedynczym regulatorem PID, którego nastawy zostały dobrane do punktu pracy 100%  $P_{TH,N}$ ,
- pojedynczym regulatorem  $PI^{\lambda}D^{\mu}$ , którego nastawy zostały dobrane do punktu pracy 100%  $P_{TH,N}$ ,

- wieloobszarowym regulatorem z lokalnymi regulatorami PID, którego nastawy zostały dobrane w wyniku rozwiązania analogicznego zadania optymalizacji jak w przypadku wieloobszarowego regulatora z lokalnymi regulatorami  $PI^{\lambda}D^{\mu}$ .

### 6.3.1 Implementacja modeli układu sterowania

Przedstawione w rozdziale 6.1 układy sterowania mocą cieplną reaktora jądrowego zostały zaimplementowane jako modele symulacyjne w środowisku Matlab/Simulink. W tym celu wykorzystano głównie pakiet Simulink [153], dzięki któremu możliwe jest budowanie komputerowych modeli symulacyjnych z wykorzystaniem interfejsu graficznego opartego o schematy blokowe. Mniej złożone elementy układów sterowania zostały zaimplementowane bezpośrednio z wykorzystaniem podstawowych bloków biblioteki Simulinka, natomiast bardziej złożone elementy, do których należą modele reaktora jądrowego (model projektowy, obiekt wirtualny) zostały zaimplementowane z wykorzystaniem funkcji systemowych (*ang. S-Function*). Typowo S-Funkcje wykorzystywane są przy tworzeniu bloków, które rozszerzają możliwości środowiska Simulink [154]. Utworzone w ten sposób bloki realizujące kod zdefiniowany przez użytkownika spełniają wszelkie założenia interfejsu programistycznego Simulinka i Matlaba. Przy implementacji regulatorów wieloobszarowych z lokalnymi regulatorami  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  zostały wykorzystane elementy pakietu Fuzzy Logic Toolbox [33] oraz pakietu FOMCON [155]–[157].

Pakiet Fuzzy Logic Toolbox jest pakietem umożliwiającym analizowanie, projektowanie oraz symulację systemów opartych o logikę rozmytą [33]. Jest on pakietem oficjalnie wspieranym przez producenta oprogramowania Matlab/Simulink, firmę MathWorks. Elementy tego pakietu, które wykorzystano to bloki implementujące funkcję przynależności klasy  $Z$ ,  $\Pi$ , oraz  $S$ . Charakterystyka tych funkcji została przedstawiona w podrozdziale 3.2.1.

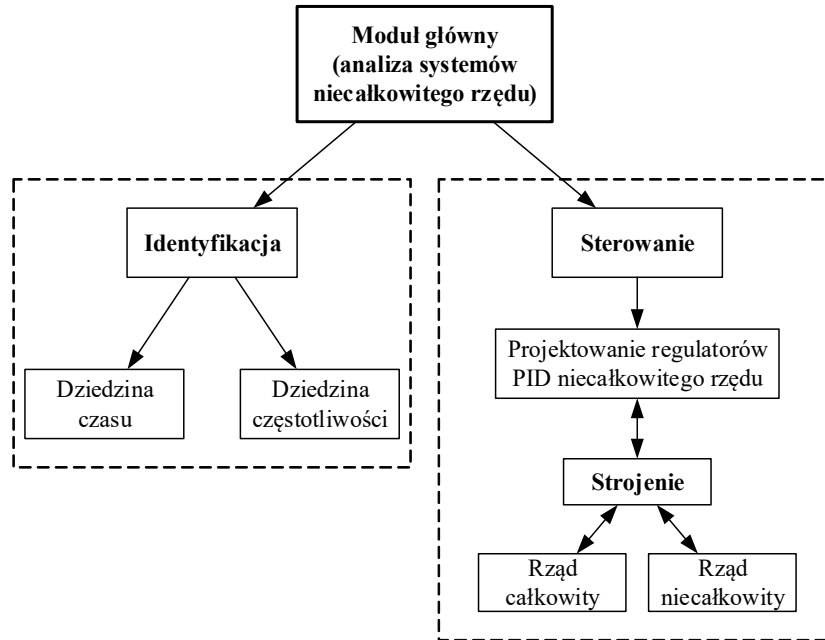
Pakiet FOMCON powstał w ramach interdyscyplinarnego projektu poświęconego badaniom i rozwojowi aplikacji, które umożliwiają modelowanie analizę i syntezę systemów dynamicznych wykorzystujących operatory rachunku różniczkowo całkowy niecałkowitego rzędu oraz ich aproksymacje [155]. Obecnie pakiet ten nie wchodzi w skład oficjalnych elementów środowiska Matlab/Simulink i ze względu na to w rozdziale 6.3.1.1 została przedstawiona jego krótka charakterystyka.

#### 6.3.1.1 Pakiet FOMCON

Pakiet FOMCON (*ang. Fractional Order Modeling and Control*) stanowi rozszerzenie środowiska Matlab/Simulink o elementy oraz narzędzia pozwalające na projektowanie i symulacje systemów dynamicznych, w szczególności układów sterowania, które wykorzystują operatory rachunku niecałkowitego rzędu. W pakiecie tym można wyróżnić trzy podstawowe moduły: moduł

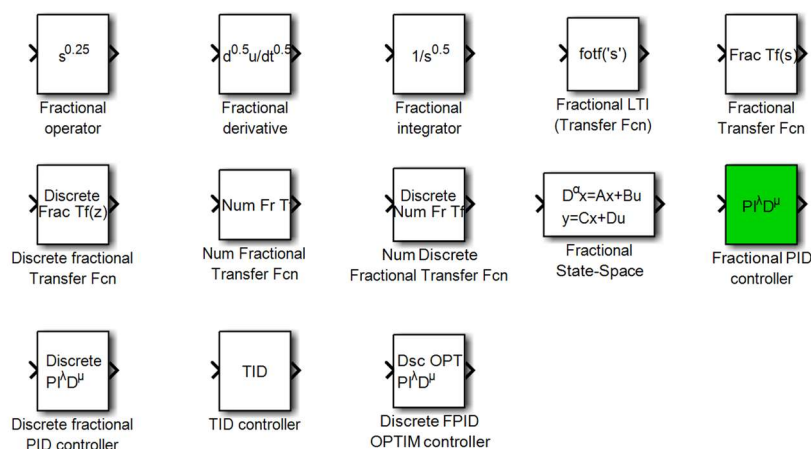


analizy systemów niecałkowitego rzędu, moduł identyfikacji wykorzystujący operatory niecałkowitego rzędu oraz moduł wspomagający projektowanie systemów sterowania, w skład, których wchodzi regulatory typu  $PI^{\lambda}D^{\mu}$ . Struktura pakietu FOMCON z wyszczególnionymi modułami została przedstawiona na rysunku 6.13.



Rysunek 6.13. Struktura pakietu FOMCON rozszerzającego funkcjonalność środowiska Matlab/Simulink o elementy wykorzystujące rachunek niecałkowitego rzędu [155], [156].

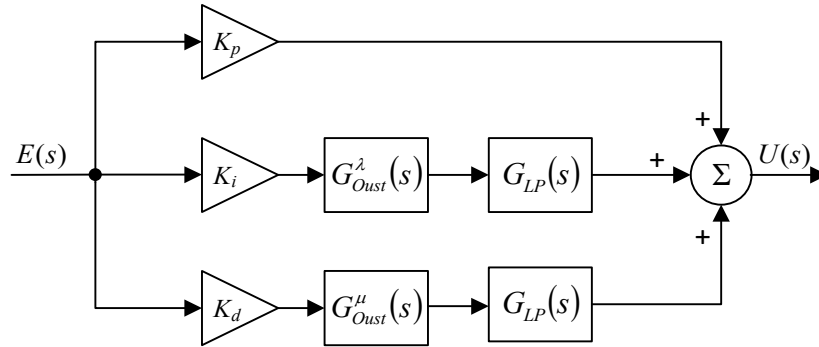
Pakiet FOMCON posiada bibliotekę elementów, które przystosowane są do współpracy ze środowiskiem Simulink. Jej zawartość stanowią komponenty wykorzystujące operatory rachunku niecałkowitego rzędu lub ich aproksymacje. Elementy tej biblioteki zostały przedstawione na rysunku 6.14.



Rysunek 6.14. Elementy biblioteki FOMCON przystosowane do pracy w środowisku Simulink. Kolorem zielonym zaznaczono wykorzystany w rozprawie blok regulatora  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  [155].



W skład biblioteki pakietu FOMCON wchodzi m.in. implementacja regulatora  $PI^\lambda D^\mu$ . Ma ona postać bloku, którego wejściem jest sygnał uchybu regulacji, a wyjściem sygnał sterujący. Blok ten nosi nazwę Fractional PID controller [155], [156]. Uproszczona struktura tego bloku, została obrazowo przedstawiona na rysunku 6.15.



Rysunek 6.15. Uproszczona struktura bloku Fractional PID controller biblioteki FOMCON.

Transmitancje  $G_{Oust}^\lambda(s)$  oraz  $G_{Oust}^\mu(s)$ , wchodzące w skład bloku regulatora  $PI^\lambda D^\mu$  reprezentują odpowiednio operacje całkowania  $\frac{1}{s^\lambda}$  oraz różniczkowania  $s^\mu$  niecałkowitego rzędu. Transmitancje te są automatycznie wyznaczone na podstawie aproksymacji filtrami Oustaloup'a [118] oraz na podstawie zadanych parametrów wejściowych. Każda z tych transmitancji z osobną charakteryzuje się rzędem zależnym od parametru  $N$ , który określany jest według reguły  $2N + 1$  oraz pasmem pracy zdefiniowanym przez zakres pulsacji  $\langle \omega_b; \omega_h \rangle$ . W strukturze przedstawionej na rysunku 6.15 wyróżnić można również filtry dolnoprzepustowe  $G_{LP}(s)$  opisane transmitancją

$$G_{LP}(s) = \frac{1}{T_S + 1}, \quad (6.15)$$

w której stała czasowa  $T = \frac{1}{\omega_h}$ . Parametry bloku Fractional PID controller zostały zawarte w tabeli 6.5.

Tabela 6.5. Parametry bloku Fractional PID controller pakietu FOMCON.

Symbol	Opis	Uwagi
$K_P$	wzmocnienie członu proporcjonalnego	parametr dobierany przez optymalizator
$K_I$	wzmocnienie członu całkującego	parametr dobierany przez optymalizator
$\lambda$	rzęd operatora całkowania	parametr dobierany przez optymalizator
$K_D$	wzmocnienie członu różniczkującego	parametr dobierany przez optymalizator
$\mu$	rzęd operatora różniczkowania	parametr dobierany przez optymalizator
$\langle \omega_b; \omega_h \rangle$	zakres pulsacji wyznaczający pasmo pracy filtra	wyznaczono na podstawie rozłożenia zer i biegunów modelu projektowego reaktora, patrz podrozdział 6.3.1.2, wartość domyślna ( $10^{-3}$ ; $10^3$ )
$N$	parametr określający rząd filtra	w rozprawie zastosowano $N = 7$ , wartość domyślna $N = 5$

W rozprawie blok Fractional PID controller został wykorzystany do realizacji modelu symulacyjnego regulatora wieloobszarowego, składającego się z lokalnych regulatorów  $PI^\lambda D^\mu$ . Nastawy poszczególnych lokalnych regulatorów  $PI^\lambda D^\mu$  dobrane zostały poprzez rozwiązanie zadania optymalizacji etapu pierwszego, natomiast pozostałe parametry takie jak pasmo pracy filtra  $\langle \omega_b; \omega_h \rangle$  oraz parametr  $N$  określający rząd filtra dobrane zostały na podstawie położenia zer i biegunów modeli liniowych otrzymanych z modelu projektowego reaktora jądrowego. Proces doboru pasma pracy oraz parametru  $N$  został opisany w podrozdziale 6.3.1.2.

### 6.3.1.2 Dobór pasma pulsacji oraz rzędu filtrów Oustaloup'a

W podrozdziale 5.1.3 wspomniano, że teoretyczna transmitancja, która mogłaby zastąpić operator niecałkowitego rzędu charakteryzowałaby się nieskończonym stopniem. Filtry Oustaloup'a aproksymują operatory niecałkowitego rzędu transmitancjami o rzędzie danym a priori oraz w skończonym pasmie pulsacji (podrozdział 5.1.4). W celu wyznaczenia odpowiedniego pasma pulsacji dla wykorzystanych w rozprawie filtrów Oustaloup'a posłużono się rozkładem zer i biegunów transmitancji, które wyznaczono w wyniku linearyzacji modelu projektowego reaktora jądrowego w czterech punktach pracy tj. 40%, 60%, 80% oraz 100%  $P_{TH,N}$ . Zlinearyzowany model projektowy został zamieszczony w załączniku 3.

Linearyzacji został poddany model projektowy reaktora jądrowego opisany równaniami zamieszczonymi w rozdziale 4 według następujących zależności

$$\Delta \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \Delta \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \Delta \mathbf{u}(t) + \mathbf{B}_z \Delta \mathbf{z}(t), \quad (6.16)$$

$$\Delta \mathbf{y} = \mathbf{C} \Delta \mathbf{x}(t), \quad (6.17)$$

gdzie

$$\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{10}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_{10}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_{10}}{\partial x_{10}} \end{bmatrix}_0, \quad (6.18)$$

$$\mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_{10}}{\partial u_1} \end{bmatrix}_0, \quad \mathbf{B}_z = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z_1} & \frac{\partial f_1}{\partial z_2} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_{10}}{\partial z_1} & \frac{\partial f_{10}}{\partial z_2} \end{bmatrix}_0, \quad (6.19)$$

$$\mathbf{C} = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]. \quad (6.20)$$

W celu wyznaczenia rozkładu zer i biegunów z modeli liniowych opisanych za pomocą przestrzeni stanu przekształcono je do postaci transmitancji według następującej zależności,

$$\frac{\Delta Y_1(s)}{\Delta U_1(s)} = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} \quad (6.21)$$

przyjmując zmienną  $u_1(t) = \rho_{EXT,R}(t)$  jako wejście, a zmienną  $y_1(t) = \left[\frac{\bar{n}(t)}{n_N}\right]$  jako wyjście oraz  $\Delta \mathbf{z}(t) = 0$ .

W podrozdziale 5.1.4 zaznaczono, że pasmo pracy filtrów Oustaloup'a, zdefiniowane przez przedział pulsacji  $\langle \omega_b; \omega_h \rangle$  powinno zawierać w sobie właściwy przedział ograniczony pulsacjami granicznymi  $\langle \omega_A; \omega_B \rangle$ , w którym zakłada się poprawną aproksymację charakterystyk częstotliwościowych Bodego operatorów różniczkowania i całkowania niecałkowitego rzędu. Aproksymacja charakterystyk Bodego dla operatorów niecałkowitego rzędu przez filtry Oustaloup'a nie jest zadowalająca w pobliżu pulsacji granicznych pasma pracy  $\langle \omega_b; \omega_h \rangle$ , zwłaszcza w przypadku charakterystyki fazowej.

Przedziały pulsacji granicznych  $\langle \omega_A; \omega_B \rangle$  zostały wyznaczone dla każdej transmitancji wynikającej z linearyzacji modelu projektowego reaktora jądrowego w czterech punktach pracy. Pulsacja  $\omega_A$  (minimalna pulsacja graniczna) została wyznaczona na podstawie najmniejszej wartości bezwzględnej części rzeczywistej zera lub bieguna, natomiast pulsacja  $\omega_B$  (maksymalna pulsacja graniczna) została wyznaczona na podstawie największej wartości bezwzględnej części rzeczywistej zera lub bieguna. Następnie na podstawie obliczonych, dla każdego zlinearyzowanego modelu, przedziałów pulsacji granicznych  $\langle \omega_A; \omega_B \rangle$  wyznaczono pasmo pracy filtrów Oustaloup'a, które określone jest pasmem pracy  $\langle \omega_b; \omega_h \rangle$ . Poniższe zależności opisują, w jaki sposób obliczono pasmo pracy  $\langle \omega_b; \omega_h \rangle$

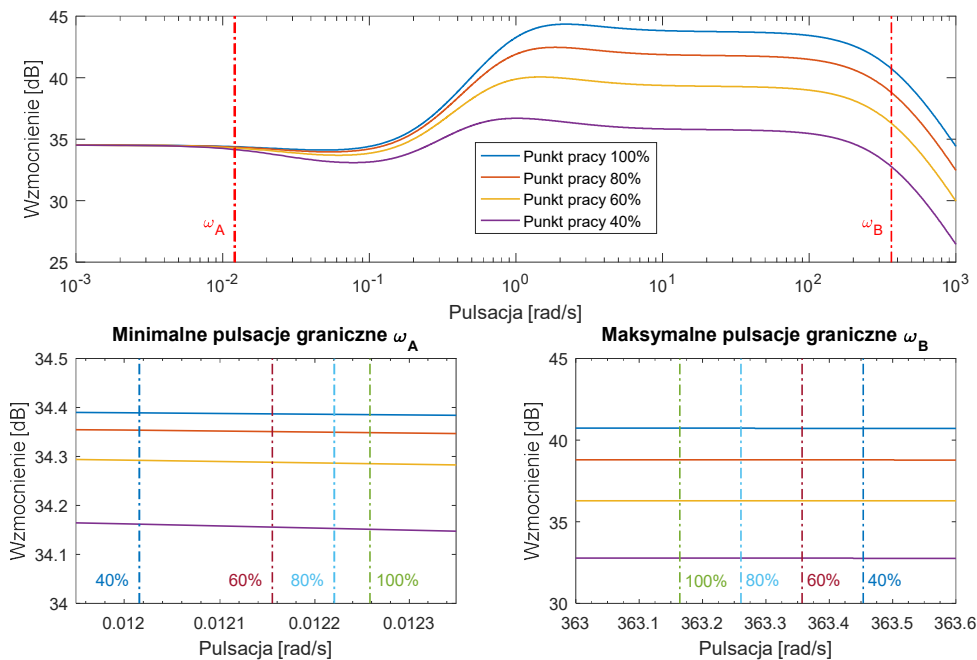
$$\omega_b = \varepsilon_b \omega_A = 10^{-2} \cdot \omega_A, \quad (6.22)$$

$$\omega_h = \varepsilon_h \omega_B = 10^2 \cdot \omega_B. \quad (6.23)$$

Wyniki obliczeń zestawiono w tabeli 6.6, natomiast na rysunku 6.16 zostały przedstawione amplitudowe charakterystyki Bodego transmitancji modeli projektowych, na których zaznaczono pulsacje graniczne  $\omega_A$  oraz  $\omega_B$ .

Tabela 6.6. Minimalne i maksymalne pulsacje graniczne dla regulatorów  $PI^2D^u$

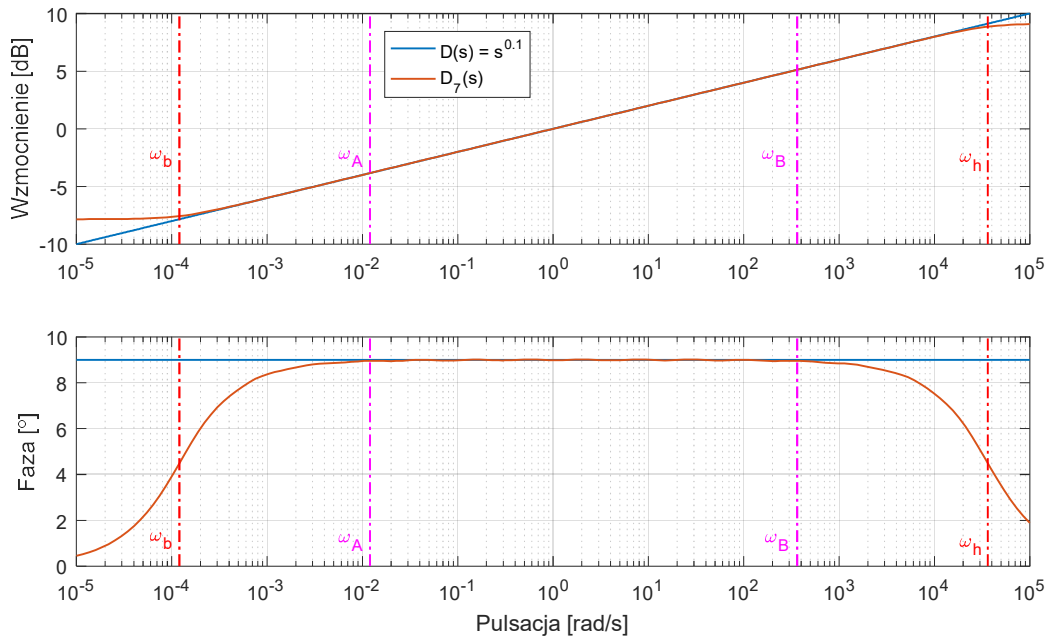
Punkt pracy	40% $P_{TH}$	60% $P_{TH}$	80% $P_{TH}$	100% $P_{TH}$
Minimalna pulsacja graniczna $\omega_A$ [rad/s]	0,012016	0,012155	0,01222	0,012258
Minimalna pulsacja pracy filtra $\omega_b$ [rad/s]	0,00012016	0,00012155	0,0001222	0,00012258
Maksymalna pulsacja graniczna $\omega_B$ [rad/s]	363,45	363,36	363,26	363,16
Maksymalna pulsacja pracy $\omega_h$ [rad/s]	36345	36336	36326	36316



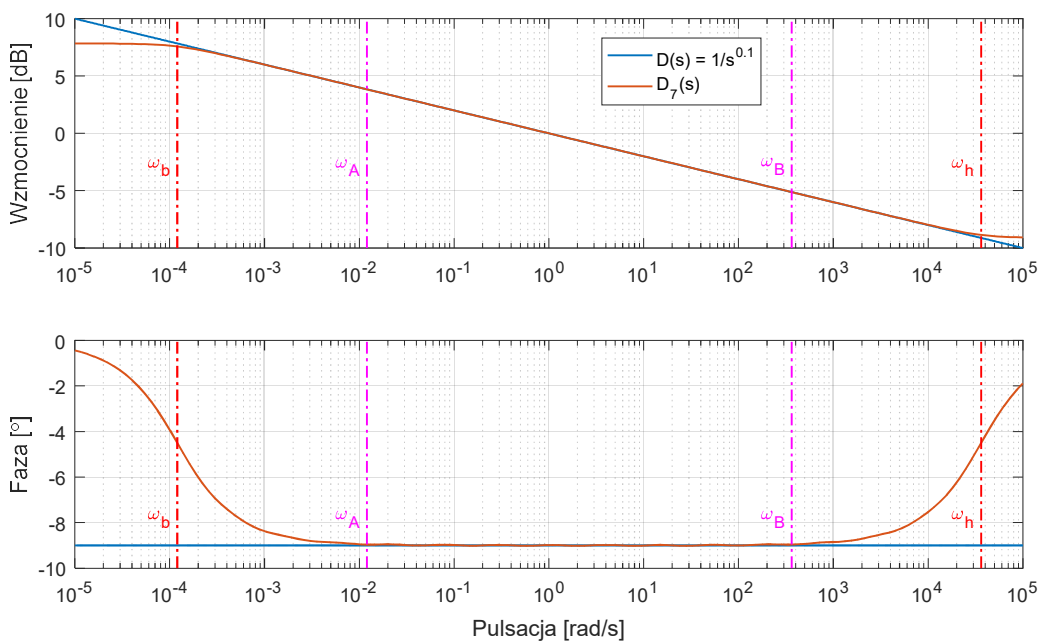
Rysunek 6.16. Amplitudowa charakterystyka Bodego dla liniowych modeli projektowych reaktora jądrowego w różnych punktach pracy.

Dobór współczynników  $\varepsilon_b$  i  $\varepsilon_h$  we wzorach (6.22)-(6.23) jak i parametru  $N$  za pomocą, którego wyznaczany jest rząd filtrów Oustaloup'a, został dokonany na podstawie porównania charakterystyk Bodego. W porównaniu brały udział operatory całkowania i różniczkowania o rzędzie  $\alpha = 0,1$  oraz filtry Oustaloup'a, w których wykorzystano pasmo pulsacji granicznych transmitancji modelu projektowego reaktora jądrowego zlinearyzowanego w punkcie pracy 40%  $P_{TH}$ .

W przypadku tego modelu pasmo graniczne jest najszersze. Ostatecznie na podstawie porównania charakterystyk Bodego zamieszczonych na rysunkach 6.17 oraz 6.18, wybrano  $\varepsilon_b = 10^{-2}$ ,  $\varepsilon_h = 10^2$  oraz  $N = 7$ . Jak pokazano poniżej taki wybór ww. współczynników pozwala na uzyskanie zadowalającej aproksymacji zarówno dla częstotliwościowej charakterystyki amplitudowej jak i fazowej w pasmie pulsacji wyznaczonym przez  $\omega_A$  oraz  $\omega_B$ .



Rysunek 6.17. Charakterystyki Bodego operatora różniczkowania o rzędzie  $\alpha = 0,1$  oraz filtru Oustaloup'a dla  $N = 7$ .



Rysunek 6.18. Charakterystyki Bodego operatora całkowania o rzędzie  $\alpha = 0,1$  oraz filtru Oustaloup'a dla  $N = 7$ .

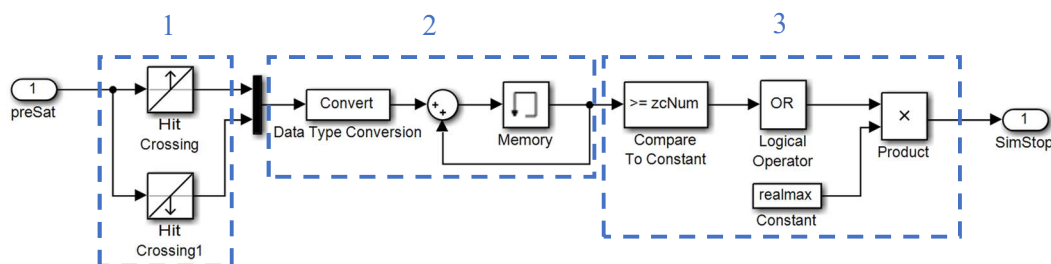
### 6.3.1.3 Mechanizm badania stabilności oraz warunkowego zatrzymania modelu symulacyjnego

Mechanizm badania stabilności zlinearyzowanego modelu układu sterowania mocy cieplnej reaktora jądrowego, występujący w pierwszym etapie optymalizacji (rysunek 6.7, podrozdział 6.1.3), pracuje w oparciu o następujące funkcje środowiska Matlab: `linearize()`, `isstable()` oraz `isfinite()`.

Funkcja `linearize()` dokonuje liniowej aproksymacji modelu zaimplementowanego w środowisku Simulink [158]. Model, który ma zostać zlinearyzowany musi posiadać jawnie zdefiniowaną „ścieżkę linearyzacji”. Definicja takiej ścieżki ma na celu określenie, które elementy wybranego modelu mają wchodzić w skład modelu zlinearyzowanego, dla którego zostanie sprawdzona stabilność. W przypadku modelu układu sterowania zamieszczonego na rysunku 6.7 „ścieżka linearyzacji” obejmuje wyłącznie regulator, urządzenie wykonawcze oraz model obiektu sterowania wraz z pętlą sprzężenia zwrotnego. Funkcja `isstable()` sprawdza czy uprzednio zlinearyzowany model symulacyjny jest stabilny. Dla modeli stabilnych funkcja ta zwraca wartość 1, natomiast dla modeli niestabilnych zwraca wartość 0. Ostatnia z wykorzystanych funkcji, tj. `isfinite()` sprawdza czy wszystkie współczynniki modelu liniowego mają skończoną wartość. Funkcja ta podobnie jak funkcja `isstable()` zwraca wartość 1 jeżeli wszystkie współczynniki badanego modelu liniowego mają skończoną wartość. W przeciwnym przypadku funkcja zwraca wartość 0.

Po wyborze przez optymalizator zmiennych decyzyjnych etapu pierwszego (nastawy lokalnego regulatora  $PI^{\lambda}D^{\mu}$ ) następuje proces badania stabilności zlinearyzowanego układu regulacji z wykorzystaniem ww. funkcji środowiska Matlab/Simulink. Jeżeli funkcje `isstable()` oraz `isfinite()` zwrócą wartość 1 następuje symulacja modelu układu regulacji w celu wyznaczenia wartości funkcji celu. Jeżeli któraś z funkcji (lub obie) zwróci wartość zero, do funkcji celu przypisywana jest wartość `realmax`, tj. największa możliwa do uzyskania w środowisku Matlab wartość rzeczywista. W ten sposób optymalizator eliminuje nastaw lokalnego regulatora  $PI^{\lambda}D^{\mu}$ , które powodują niestabilność modelu układu regulacji mocy cieplnej reaktora jądrowego.

Na rysunku 6.19 został przedstawiony mechanizm zatrzymujący symulację, modelu układu sterowania mocy cieplnej, wskutek wystąpienia bardzo dużej ilości fluktuacji w okolicach punktów, w których symulowany system jest nieciągły.



Rysunek 6.19. Mechanizm zatrzymania symulacji wskutek wystąpienia bardzo dużej ilości fluktuacji w okolicach punktów nieciągłości modelu symulacyjnego środowiska Simulink.

Na rysunku 6.19 zaznaczono trzy charakterystyczne podukłady mechanizmu warunkowego zatrzymania symulacji. Zadaniem podukładu 1 jest wykrycie fluktuacji. Podukład 2 zamienia wartości logiczne z podukładu 1 na wartości rzeczywiste oraz zlicza liczbę fluktuacji, tj. ilość przejść sygnału w górę oraz w dół przez wartość określaną w blokach Hit crossing. Wartość ta została ustawiona na  $\pm 0,019$  co odpowiada maksymalnej oraz minimalnej prędkości prętów sterujących, która występuje w postaci nasycenia na wejściu modelu urządzenia wykonawczego (rysunek 3.5). Podukład 3 sprawdza czy zliczona przez podukład 2 liczba fluktuacji przekroczyła wartość graniczną ustawioną na 300. Jeżeli wartość ta została przekroczona podukład 3 wystawia największą możliwą wartość rzeczywistą (realmax) na wyjście SimStop. Jeżeli na wyjściu SimStop pojawi się wartość różna od zera, aktualnie wykonywana symulacja w środowisku Simulink ulega zatrzymaniu. Po zatrzymaniu symulacji funkcja celu przyjmuje wartość realmax.

### 6.3.2 Algorytmu MADS w środowisku obliczeniowym

Zadanie optymalizacji sformułowane w podrozdziale 6.1 zostało rozwiązane z wykorzystaniem algorytmu MADS, którego charakterystyka została zamieszczona w podrozdziale 6.2. Implementacja algorytmu MADS m.in. jest zawarta w pakiecie Global Optimization Toolbox [152], który z kolei jest składnikiem środowiska Matlab/Simulink [151]. Podział algorytmów optymalizacji dostępnych w pakiecie Global Optimization Toolbox jest następujący [152]

- metody poszukiwania bezpośredniego (Direct Search),
- algorytmy genetyczne (Genetic Algorithm),
- roje cząstek (Particle Swarm),
- symulowane wyżarzanie (Particle Swarm),
- optymalizacja wielokryterialna (Multiobjective Optimization).

W wyżej wymienionej klasyfikacji, wykorzystany w rozprawie algorytm optymalizacji MADS występuje w części dedykowanej metodom poszukiwania bezpośredniego. Oprócz algorytmu MADS w tej części można wyróżnić również algorytmy poszukiwania bezpośredniego

takie jak GPS (*ang. Generalized Pattern Search*) [159], [160] oraz GSS (*ang. Generating Set Search*) [161]. Algorytmy poszukiwania bezpośredniego zaimplementowane w środowisku Matlab/Simulink głównie różnią się metodą generowania wzorca poszukiwań oraz mechanizmami jego modyfikacji wraz z kolejnymi iteracjami algorytmu. Wywołanie optymalizacji z wykorzystaniem ww. algorytmów poszukiwania bezpośredniego w środowisku Matlab następuje poprzez instrukcję/funkcję `patternsearch`.

Algorytmy poszukiwania bezpośredniego zawarte w pakiecie Global Optimization Toolbox charakteryzują się dwoma wariantami, które definiują ilość wektorów, wchodzących w skład wzorca poszukiwań, który wyznacza punkty próbne (*ang. poll method*). Liczba wektorów wzorca jest ściśle zależna od ilości zmiennych decyzyjnych  $N$ . Pierwszy wariant określany jest jako baza maksymalna i posiada on  $2N$  wektorów, które określają kierunki poszukiwań (punkty próbne). Drugi wariant określany jest jako baza minimalna i posiada  $N + 1$  (oznaczenie  $Np1$ ) wektorów, które określają kierunki poszukiwań. O ile w przypadku algorytmów GPS oraz GSS wzorzec poszukiwań jest ściśle określony z góry, to w przypadku algorytmu MADS jest on generowany losowo. W przypadku wariantu  $2N$  najpierw losowo generowanych jest  $N$  wektorów wzorca, które muszą być liniowo niezależne. Brakujące wektory tworzone są za pośrednictwem tych pierwszych poprzez odwrócenie ich zwrotów. W wariantcie  $Np1$  generowanych jest  $N$  losowych wektorów, które tworzą dodatnią bazę, następnie do tej bazy dodawany jest jeszcze jeden losowo wygenerowany wektor. W obydwu przypadkach wzorzec wektorowy jest generowany na nowo z każdą iteracją. W rozprawie został wykorzystany algorytm MADS z wariantem  $2N$ .

W zależności od powodzenia algorytmu MADS w każdej iteracji następuje zmiana parametru określającego wielkość siatki  $\Delta_k^m$ . Jeżeli w danej iteracji zostanie znaleziony punkt w przestrzeni rozważań, którego wartość funkcji celu jest mniejsza od aktualnej (*ang. successful poll*) parametr  $\Delta_k^m$  zostaje pomnożony przez czynnik 4. Jeżeli natomiast w danej iteracji nie zostanie znaleziony punkt, którego wartość jest mniejsza od aktualnej (*ang. unsuccessful poll*) parametr  $\Delta_k^m$  zostaje pomnożony przez czynnik 0,25. Przy czym maksymalna wielkość parametru  $\Delta_k^m$  dla algorytmu MADS wynosi 1. Jeżeli maksymalna wartość tego parametru zostanie osiągnięta, wielkość siatki nie zmienia się, gdy nastąpi znalezienie korzystniejszej wartości funkcji celu.

Implementacja algorytmu MADS w środowisku Matlab/Simulink daje możliwość uruchomienia kroku globalnego poszukiwania (*ang. global search* jest określany w nomenklaturze środowiska Matlab jako *search*). Jest on związany z przeszukaniem punktów próbnych wyznaczonych przez siatkę za pomocą algorytmu różniącego się od algorytmu wybranego w kroku poszukiwania lokalnego. Krok ten został już szczegółowo opisany w podrozdziale 6.2.1. Dostępne algorytmy optymalizacji, które można wykorzystać w kroku globalnego poszukiwania są następujące [152]:



- algorytm GPS, GSS, MADS o ile różni się on od algorytmu wykorzystanego w kroku poszukiwania lokalnego [39],[145], [161],
- algorytm Nelder-Mead [142],
- algorytm ewolucyjny [134], [135],
- algorytm Latin Hypercube Search [162],
- algorytm zdefiniowany przez użytkownika.

W rozprawie krok poszukiwania lokalnego został pominięty.

Środowisko obliczeniowe Matlab/Simulink pozwala na uruchomienie algorytmów poszukiwania bezpośredniego zaimplementowanych w pakiecie Global Optimization Toolbox w trybie obliczeń równoległych. Wykorzystanie tego trybu znacznie przyspiesza obliczenia poprzez automatyczne rozłożenie zadań obliczeniowych algorytmu optymalizacji na tzw. jednostki obliczeniowe (*ang. parallel pool workers*). Ilość jednostek obliczeniowych zależy od zasobów komputera, na którym uruchamiana jest optymalizacja, a w szczególności od ilości fizycznych procesorów lub rdzeni CPU. Podział zadań obliczeniowych wykonywany jest w sposób automatyczny za pośrednictwem pakietu Parallel Computing Toolbox [163], który również jest częścią środowiska Matlab/Simulink. W rozprawie wykorzystano tryb obliczeń równoległych w celu przyspieszenia obliczeń.

Optymalizacja algorytmami poszukiwania bezpośredniego z wykorzystaniem trybu obliczeń równoległych jest możliwa wyłącznie, gdy algorytm przeszukuje wszystkie punkty wyznaczone przy pomocy wzorca poszukiwań [152]. W ogólności algorytmy poszukiwania bezpośredniego cechują się dwiema odmiennymi strategiami związanymi z obliczeniami funkcji celu w punktach próbnych. Pierwsza strategia (oportunistyczna) polega na zatrzymaniu  $k$ -tej, iteracji algorytmu zawsze wtedy, gdy wartość funkcji celu jest mniejsza od aktualnej. Druga strategia – wyczerpująca – polega na obliczeniu wartości funkcji celu we wszystkich punktach próbnych wyznaczonych przez wzorzec poszukiwań w danej  $k$ -tej iteracji, a następnie wybraniu takiego punktu, w którym występuje największy spadek w wartości funkcji celu. Jak już wcześniej wspomniano w rozprawie została wybrana strategia wyczerpująca z uwagi na wykorzystanie trybu obliczeń równoległych. W nomenklaturze pakietu Global Optimization Toolbox opcja związana z wyborem strategii przeszukiwania punktów próbnych w algorytmach poszukiwania bezpośredniego nazywa się CompletePoll [152].

Implementacja algorytmu MADS w pakiecie Global Optimization Toolbox dopuszcza kilka kryteriów zatrzymania. Typowo optymalizator w każdej iteracji sprawdza każde z wybranych

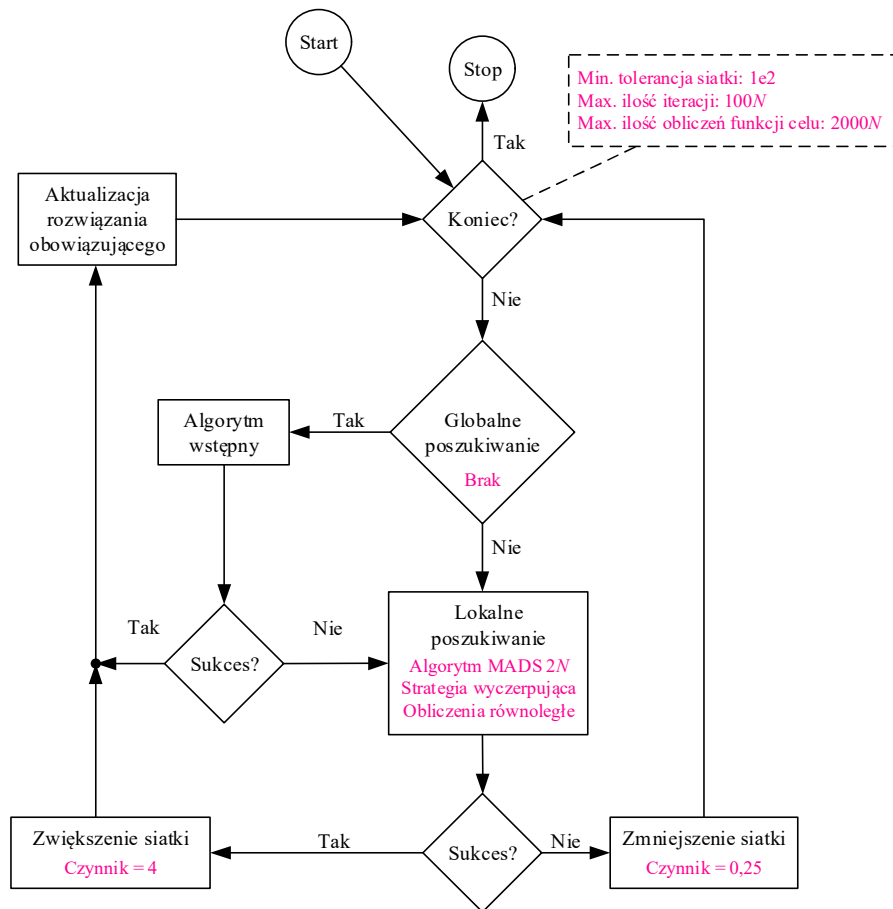


kryteriów zatrzymania. Zatrzymanie optymalizatora następuje, gdy wystąpi jedno z wielu kryteriów zatrzymania. W tabeli 6.7 zostały zestawione kryteria zatrzymania, które występują tylko wtedy, gdy wykorzystywany jest algorytm MADS i które zostały wykorzystane w rozprawie.

Tabela 6.7. Opis kryteriów zatrzymania, które wystąpiły podczas przeprowadzania zadań optymalizacji.

Kryterium zatrzymania algorytmu	Opis
Minimalna tolerancja siatki (ang. <i>Mesh Tolerance</i> )	Jeżeli w $k$ -tym kroku wielkość siatki będzie mniejsza od wartości $(\text{Mesh Tolerance})^2$ algorytm optymalizacji MADS zatrzyma się.
Maksymalna ilość iteracji (ang. <i>Max Iterations</i> )	Kryterium to określa maksymalną ilość iteracji, która może wystąpić podczas rozwiązywania zadania optymalizacji. Domyślna wartość to $100N$ .
Maksymalna ilość obliczeń funkcji celu (ang. <i>Max Function Evaluation</i> )	Kryterium to określa maksymalną ilość obliczeń funkcji celu. Domyślna wartość tego parametru to $2000N$ .

Na rysunku 6.20 został zamieszczony diagram przedstawiający działanie algorytmów poszukiwania bezpośredniego zaimplementowanych w pakiecie Global Optimization Toolbox środowiska Matlab/Simulink. Na diagramie zamieszczono szczegółowe uwagi objaśniające zastosowane w rozprawie parametry algorytmu MADS.



Rysunek 6.20. Diagram przedstawiający implementację algorytmów poszukiwania bezpośredniego w środowisku Matlab/Simulink w pakiecie Global Optimization Toolbox [152].

## 6.4 Wyniki przeprowadzonych obliczeń – optymalizacji

### 6.4.1 Uwarunkowania środowiska obliczeniowego

Środowisko obliczeniowe Matlab/Simulink charakteryzuje się bardzo dużą elastycznością m.in. w projektowaniu, modelowaniu i symulowaniu systemów dynamicznych, a zwłaszcza układów regulacji. Elastyczność tego środowiska przekłada się bezpośrednio na jego uniwersalność, a ta z kolei związana jest z dostępnością wielu różnych metod numerycznych przystosowanych do rozwiązywania szerokiej klasy problemów, które implementowane są przez użytkowników w postaci modeli symulacyjnych, funkcji czy skryptów.

W rozprawie wykorzystano głównie środowisko Simulink pozwalające na implementację zaproponowanego układu sterowania mocą cieplną reaktora jądrowego w formie graficznej w postaci schematów blokowych. Środowisko to za pomocą dostępnych w nim metod numerycznych dokonuje rozwiązania zaimplementowanego modelu symulacyjnego, tj. wyznaczenia przebiegów czasowych, które związane są ze zmiennymi, które w nim występują. Rozwiązania otrzymane w wyniku symulacji zaimplementowanych modeli symulacyjnych mogą różnić się od siebie w zależności od wyboru metody numerycznej oraz jej parametrów. Wybór nieodpowiedniej metody numerycznej jak i jej parametrów może objawić się błędnymi rozwiązaniami lub w skrajnych przypadkach nieukończeniem symulacji lub jej zawieszeniem.

W rozprawie dokonano wyboru metody numerycznej oraz jej parametrów w oparciu o dwie główne przesłanki, tj. szybkość wykonywania symulacji oraz względna dokładność uzyskanych wyników. Podstawowe parametry środowiska Simulink wybrane dla przeprowadzenia pierwszego i drugiego etapu optymalizacji zostały zestawione w tabeli 6.8. Z uwagi na bardzo wysoką popularność oprogramowania Matlab opis parametrów zamieszczonych w tabeli 6.8. został pominięty. Dokładna charakterystyka tych parametrów jest dostępna w dokumentacji pakietu Simulink [153] oraz w przystępnej formie na stronie internetowej producenta firmy Mathworks [158].

Tabela 6.8. Parametry środowiska Simulink wybrane dla pierwszego i drugiego etapu optymalizacji. Nazwy parametrów zostały podane zgodnie z językiem wykorzystywanym w oprogramowaniu Matlab.

Nazwa parametru	Etap I oraz Etap II
Solver options	
Type	Variable-step
Solver	ode23tb(stiff/TR-BDF2)
Additional options	
Max step size	0,1
Min step size	auto
Initial step size	auto
Solver reset method	Fast
Relative tolerance	1e-4
Absolute tolerance	auto
Shape preservation	Disable All
Number of consecutive min steps	1
Solver Jacobian method	auto
Zero crossing options	
Zero-crossing control	Use local settings
Time tolerance	10*128*eps
Algorithm	Nonadaptive
Number of consecutive zero crossings	1000

W tabeli 6.9 zostały zestawione parametry optymalizatora MADS, który został wykorzystany podczas rozwiązywania pierwszego oraz drugiego etapu optymalizacji. Parametry te zostały opisane w podrozdziale 6.3.1.3 i dotyczą one kolejno: wyświetlenia wyniku każdej z iteracji algorytmu (Display), wariantu definiującego ilość wektorów wzorca (Poll Method), wyboru wyczerpującej strategii przeszukiwania punktów próbných (Use Complete Poll), ustawienia optymalizatora w tryb obliczeń równoległych (Use Parallel, Use Vectorized), wyboru rzędu tolerancji dla wielkości siatki – parametr ten związany jest z kryterium zatrzymania optymalizacji (Mesh Tolerance) oraz wyborem funkcji, które przedstawiają przebieg optymalizacji w formie graficznej.

Tabela 6.9. Parametry optymalizatora MADS wybrane dla pierwszego i drugiego etapu optymalizacji. Nazwy parametrów zostały podane zgodnie z językiem wykorzystywanym w oprogramowaniu Matlab.

Parametry optymalizatora	Etap I oraz Etap II
Display	final
Poll Method	MADSPositiveBasis2N
Use Complete Poll	true
Use Parallel	true
Use Vectorized	false
Mesh Tolerance	1e-2 (przekłada się na wartość 1e-4)
PlotFcn	@psplotbestf, @psplotmeshsize, @psplotbestx, @psplotfuncount

## 6.4.2 Regulatory lokalne – etap I

W tym podrozdziale zostały przedstawione wyniki pierwszego etapu przeprowadzonego zadania optymalizacji dla trzech wariantów – rysunek 6.3. Ze względu na stochastyczny charakter algorytmu MADS zdecydowano się przeprowadzić w każdym podzadaniu optymalizacji po 5 prób dla 4 różnych punktów startowych. Łącznie stanowiło to 20 prób optymalizacyjnych na jedno podzadanie, co przełożyło się bezpośrednio na 80 prób symulacyjnych na jeden wariant optymalizacji (cztery regulatory lokalne). Z uwagi na występowanie 3 wariantów optymalizacji (trzy wskaźniki jakości) całkowita suma prób symulacyjnych wyniosła 240. Dodatkowo dla celów porównawczych przeprowadzono również analogiczną optymalizację z wykorzystaniem regulatorów PID, co ostatecznie dało 480 prób optymalizacyjnych.

Punkty startowe wykorzystane w pierwszym zadaniu optymalizacji, dla regulatorów PID oraz  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  zostały zestawione w tabeli 6.10. Punkt startowy o numerze 4 został wygenerowany losowo. W przypadku regulatorów PID punkt startowy stanowiły wyłącznie nastawy  $K_P$ ,  $K_I$  oraz  $K_D$ .

Tabela 6.10. Punkty startowe wykorzystane w pierwszym etapie optymalizacji.

Punkt startowy	1	2	3	4
$K_P$	0,01	0,1	1	0,8304
$K_I$	0,01	0,1	1	0,6736
$K_D$	0,01	0,1	1	0,1395
$\lambda$	0,01	0,1	1	0,7431
$\mu$	0,01	0,1	1	0,3922

Ostatecznym wynikiem każdego podzadania optymalizacji, które składało się z 20 prób (cztery punkty pracy po 5 prób), było rozwiązanie, które charakteryzowało się najmniejszą wartością funkcji celu. W kolejno przedstawionych tabelach zostały zestawione odpowiednio:

- wyniki pierwszego wariantu optymalizacji (kryterium jakości ISE) dla regulatorów PID i  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  – tabele 6.11, 6.12,
- wyniki drugiego wariantu optymalizacji (kryterium jakości ITAE) dla regulatorów PID i  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  – tabele 6.13, 6.14,
- wyniki trzeciego wariantu optymalizacji (kryterium jakości LQ) dla regulatorów PID i  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  – tabele 6.15, 6.16,
- zbiorcze wyniki optymalizacji, w których zostały bezpośrednio porównane wartości wskaźników jakości dla regulatorów PID oraz  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  – tabela 6.17.

W załączniku 4 zestawiono transmitancje lokalnych regulatorów  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  wraz ze współczynnikami, których nastawy zostały dobrane w wyniku rozwiązania pierwszego etapu optymalizacji.

Tabela 6.11. Wyniki optymalizacji lokalnych regulatorów PID – Wariant 1, kryterium ISE.

Wariant, kryterium jakości	Wariant 1, kryterium ISE			
	40% $P_{TH,N}$	60% $P_{TH,N}$	80% $P_{TH,N}$	100% $P_{TH,N}$
Punkt pracy				
Punkt startowy	2	1	4	1
$K_P$	0,0000	0,1833	0,1858	0,1925
$K_I$	0,0156	0,0480	0,0561	0,0423
$K_D$	0,0000	0,0018	0,0002	0,0065
Wartość funkcji celu	0,1902	0,0216	0,0189	0,0266

Tabela 6.12. Wyniki optymalizacji lokalnych regulatorów  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  – Wariant 1, kryterium ISE.

Wariant, kryterium jakości	Wariant 1, kryterium ISE			
	40% $P_{TH,N}$	60% $P_{TH,N}$	80% $P_{TH,N}$	100% $P_{TH,N}$
Punkt pracy				
Punkt startowy	2	2	4	4
$K_P$	0,0000	0,0961	0,0764	0,0804
$K_I$	0,1797	0,1033	0,1020	0,1111
$K_D$	0,0000	0,0228	0,0561	0,0272
$\lambda$	0,2031	0,4931	0,6273	0,4931
$\mu$	0,9141	0,3922	0,2016	0,2516
Wartość funkcji celu	0,0273	0,0180	0,0163	0,0212

Tabela 6.13. Wyniki optymalizacji lokalnych regulatorów PID – Wariant 2, kryterium ITAE.

Wariant, kryterium jakości	Wariant 2, kryterium ITAE			
	40% $P_{TH,N}$	60% $P_{TH,N}$	80% $P_{TH,N}$	100% $P_{TH,N}$
Punkt pracy				
Punkt startowy	3	3	3	3
$K_P$	0,0000	5,4219	5,9219	5,5000
$K_I$	0,3750	0,0000	0,0000	0,0000
$K_D$	0,0000	0,0137	0,0000	0,0000
Wartość funkcji celu	111,8179	14,7288	13,9962	19,7145

Tabela 6.14. Wyniki optymalizacji lokalnych regulatorów  $PI^2D^\mu$  – Wariant 2, kryterium ITAE.

Wariant, kryterium jakości	Wariant 2, kryterium ITAE			
	40% $P_{TH,N}$	60% $P_{TH,N}$	80% $P_{TH,N}$	100% $P_{TH,N}$
Punkt pracy				
Punkt startowy	1	1	1	3
$K_P$	0,0000	0,1094	0,1436	0,1176
$K_I$	2,9375	3,3594	2,9053	0,7777
$K_D$	1,5000	2,0063	3,0156	4,6313
$\lambda$	0,0000	0,0000	0,0000	0,0023
$\mu$	0,0156	0,0042	0,0000	0,0006
Wartość funkcji celu	19,9975	14,7171	13,9764	19,7023

Tabela 6.15. Wyniki optymalizacji lokalnych regulatorów PID – Wariant 3, kryterium LQ.

Wariant, kryterium jakości	Wariant 3, kryterium LQ			
	40% $P_{TH,N}$	60% $P_{TH,N}$	80% $P_{TH,N}$	100% $P_{TH,N}$
Punkt pracy				
Punkt startowy	3	3	3	3
$K_P$	0,0000	0,1880	0,1875	0,1875
$K_I$	0,0156	0,0014	0,0000	0,0000
$K_D$	0,0000	0,0002	0,0000	0,0000
Wartość funkcji celu	0,0173	0,0031	0,0030	0,0041

Tabela 6.16. Wyniki optymalizacji lokalnych regulatorów  $PI^2D^\mu$  – Wariant 3, kryterium LQ.

Wariant, kryterium jakości	Wariant 3, kryterium LQ			
	40% $P_{TH,N}$	60% $P_{TH,N}$	80% $P_{TH,N}$	100% $P_{TH,N}$
Punkt pracy				
Punkt startowy	1	1	1	1
$K_P$	0,0000	0,0256	0,0134	0,0083
$K_I$	0,0479	0,1663	0,2031	0,1789
$K_D$	0,1563	0,0207	0,0000	0,0287
$\lambda$	0,4072	0,1428	0,1096	0,1168
$\mu$	0,0220	0,0139	1,0000	0,0122
Wartość funkcji celu	0,0036	0,0028	0,0028	0,0038

Tabela 6.17. Zbiorcze porównanie wartości funkcji celu dla optymalizacji lokalnych regulatorów PID oraz PI<sup>λ</sup>D<sup>μ</sup>.

Kryterium jakości	Punkt pracy	Wartości funkcji celu			
		40% $P_{TH,N}$	60% $P_{TH,N}$	80% $P_{TH,N}$	100% $P_{TH,N}$
ISE	PID	0,1902	0,0216	0,0189	0,0266
	PI <sup>λ</sup> D <sup>μ</sup>	0,0273	0,0180	0,0163	0,0212
	Poprawa	85,65%	16,67%	13,64%	20,12%
	Średnia poprawa	34,02%			
ITAE	PID	111,8179	14,7288	13,9962	19,7145
	PI <sup>λ</sup> D <sup>μ</sup>	19,9975	14,7171	13,9764	19,7023
	Poprawa	82,12%	0,08%	0,14%	0,06%
	Średnia poprawa	20,60%			
LQ	PID	0,0173	0,0031	0,0030	0,0041
	PI <sup>λ</sup> D <sup>μ</sup>	0,0036	0,0028	0,0028	0,0038
	Poprawa	79,30%	10,69%	8,64%	7,54%
	Średnia poprawa	26,54%			

Rysunki 6.21, 6.22 oraz 6.23 przedstawiają wyniki optymalizacji w formie odpowiedzi dynamicznych układu regulacji mocy cieplnej reaktora jądrowego na wymuszenia skokowe w otoczeniu czterech wybranych punktów pracy, tj. 40%  $P_{TH,N}$ , 60%  $P_{TH,N}$ , 80%  $P_{TH,N}$  oraz 100%  $P_{TH,N}$ . Rysunki te mają na celu pokazanie różnic w dynamice oraz w jakości sterowania układów regulacji z lokalnymi regulatorami PID oraz PI<sup>λ</sup>D<sup>μ</sup>. Na bazie rysunków zostały wyznaczone wskaźniki jakości odpowiedzi skokowej, tj. uchyb w stanie ustalonym, czas regulacji 2% oraz przeregulowanie. Wskaźniki te zostały zamieszczone w tabelach 6.18, 6.19 oraz 6.20. Jako punkt odniesienia, dla wskaźników opartych o odpowiedź skokową, przyjęto czas symulacji  $t = 70$  s. Z uwagi na to, że horyzont optymalizacji wyniósł 140 s, uchyb w stanie ustalonym oraz przeregulowanie zostały wyznaczone na podstawie następujących zależności

- uchyb w stanie ustalonym

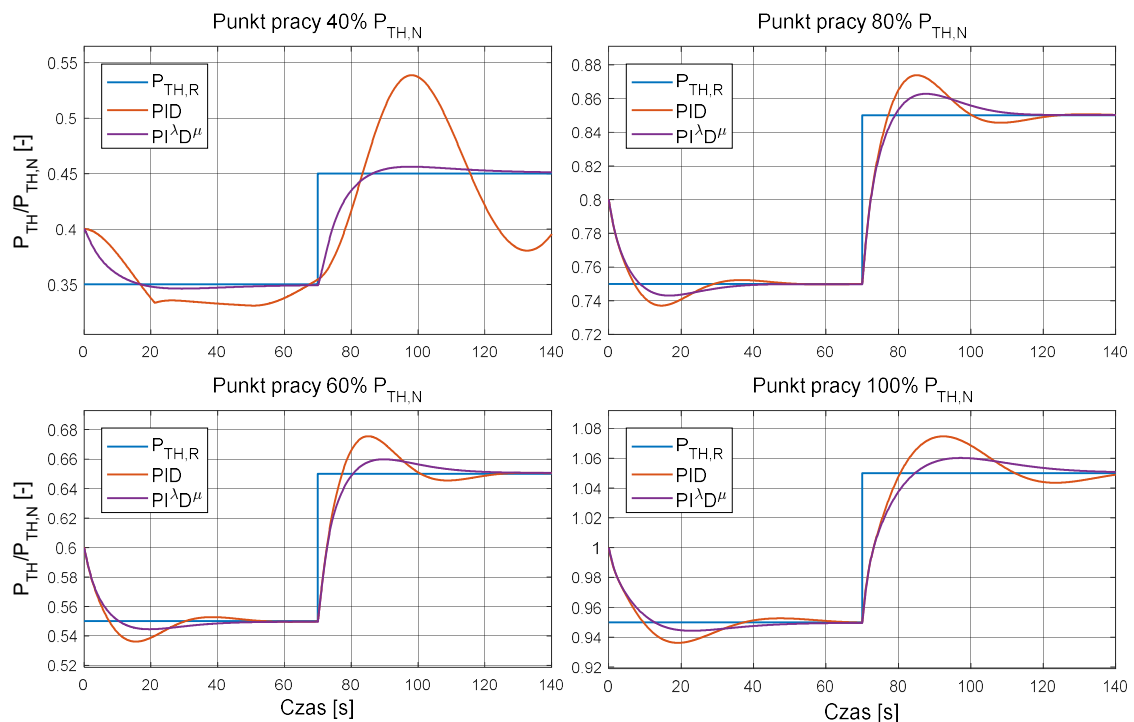
$$e_{ust} = P_{TH,zad}(140) - P_{TH}(140), \quad (6.24)$$

- przeregulowanie

$$\chi = \frac{P_{TH}(t_p) - P_{TH}(140)}{P_{TH}(140)} \cdot 100\%, \quad (6.25)$$

gdzie  $t_p$  oznacza czas, w którym występuje maksymalna wartość przebiegu  $P_{TH}$ .

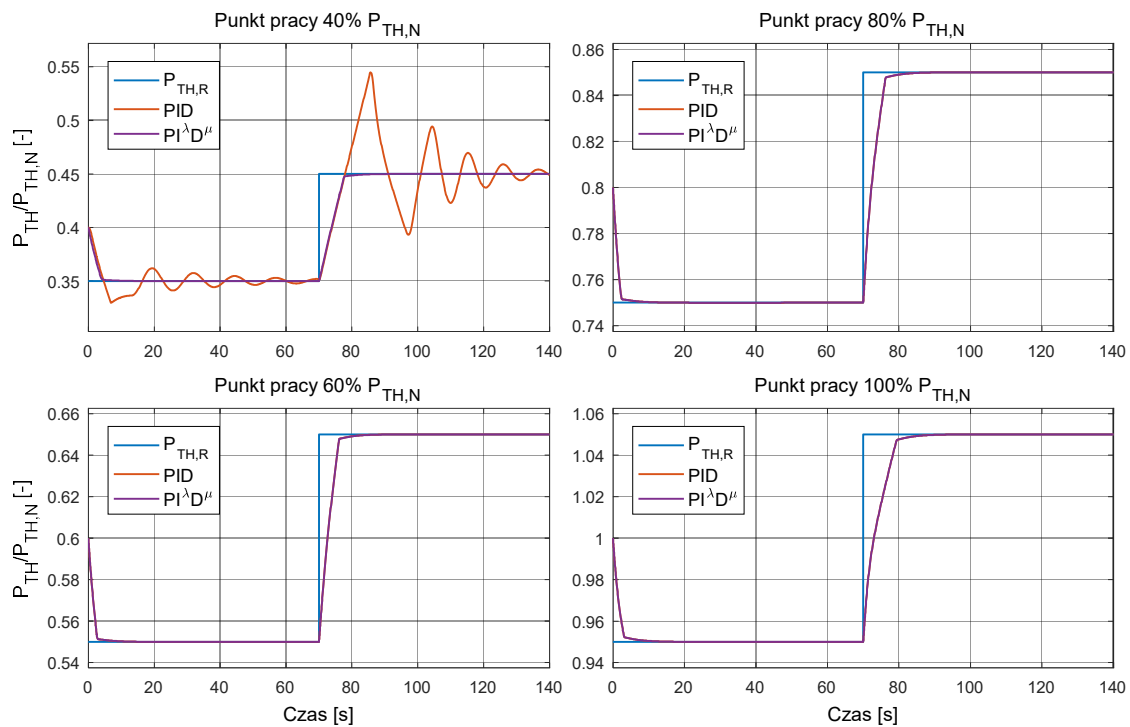




Rysunek 6.21. Odpowiedzi układu regulacji z regulatorami PID oraz  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  na wymuszenia skokowe w otoczeniu czterech wybranych punktów pracy. Nastawy regulatorów dobrane w wyniku rozwiązania pierwszego wariantu optymalizacji.

Tabela 6.18. Wskaźniki jakości odpowiedzi skokowej. Nastawy regulatorów dobrane w wyniku rozwiązania pierwszego wariantu optymalizacji.

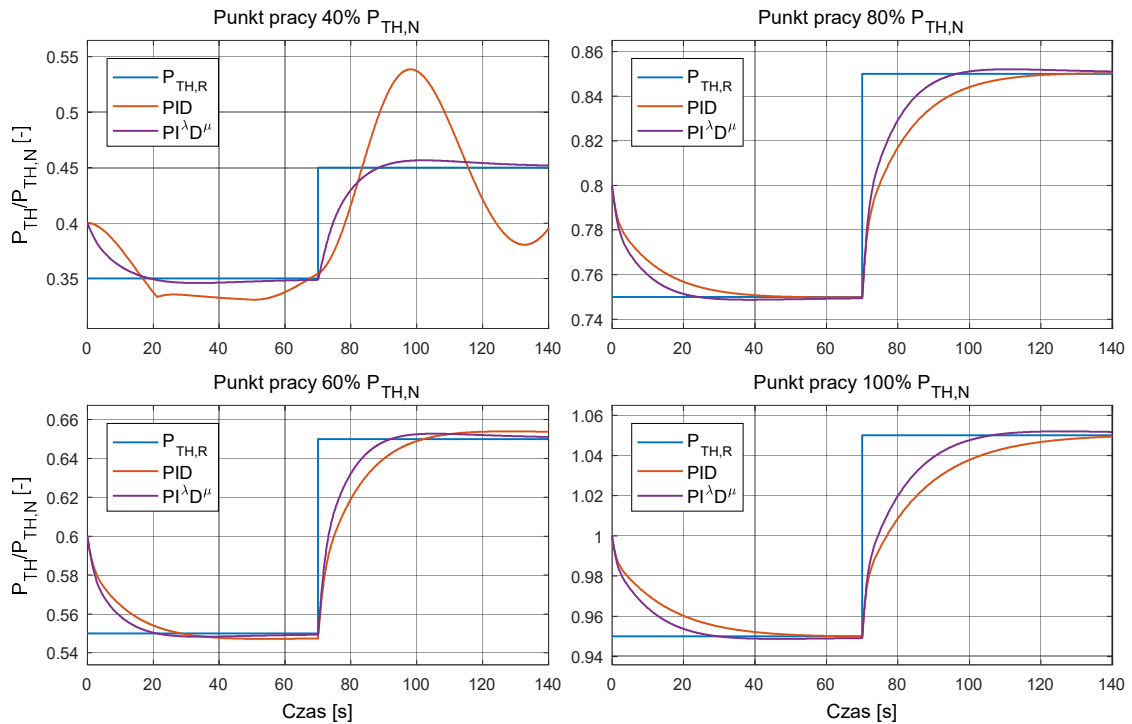
Wariant, kryterium jakości Regulator	Wariant 1, kryterium ISE					
	PID			$PI^{\lambda}D^{\mu}$		
Punkt pracy	Uchyb w 140s	Czas regulacji 2%	Przeregulowanie	Uchyb w 140s	Czas regulacji 2%	Przeregulowanie
40% $P_{TH}$	0,0547	-	36,30%	-0,0012	11,99	1,11%
60% $P_{TH}$	-0,0004	23,52	3,86%	-0,0006	7,02	1,41%
80% $P_{TH}$	-0,0003	20,90	2,78%	-0,0003	5,71	1,47%
100% $P_{TH}$	0,0010	28,21	2,48%	-0,0010	7,96	0,86%



Rysunek 6.22. Odpowiedzi układu regulacji z regulatorami PID oraz  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  na wymuszenia skokowe w otoczeniu czterech wybranych punktów pracy. Nastawy regulatorów dobrane w wyniku rozwiązania drugiego wariantu optymalizacji.

Tabela 6.19. Wskaźniki jakości odpowiedzi skokowej. Nastawy regulatorów dobrane w wyniku rozwiązania drugiego wariantu optymalizacji.

Wariant, kryterium jakości	Wariant 2, kryterium ITAE					
	PID			$PI^{\lambda}D^{\mu}$		
Regulator	Uchyb w 140s	Czas regulacji 5%	Przeregulowanie	Uchyb w 140s	Czas regulacji 5%	Przeregulowanie
Punkt pracy						
40% $P_{TH}$	0,001	52,00	~0%	0	7,07	~0%
60% $P_{TH}$	0	5,25	~0%	0	5,25	~0%
80% $P_{TH}$	0	4,95	~0%	0	4,95	~0%
100% $P_{TH}$	0	6,77	~0%	0	6,77	~0%



Rysunek 6.23. Odpowiedzi układu regulacji z regulatorami PID oraz  $PI^\lambda D^\mu$  na wymuszenia skokowe w okolicach czterech wybranych punktów pracy. Nastawy regulatorów dobrane w wyniku rozwiązania trzeciego wariantu optymalizacji.

Tabela 6.20. Wskaźniki jakości odpowiedzi skokowej. Nastawy regulatorów dobrane w wyniku rozwiązania trzeciego wariantu optymalizacji.

Wariant, kryterium jakości Regulator	Wariant 3, kryterium LQ					
	PID			$PI^\lambda D^\mu$		
Punkt pracy	Uchyb w 140s	Czas regulacji 5%	Przeregulowanie	Uchyb w 140s	Czas regulacji 5%	Przeregulowanie
40% $P_{TH}$	0,0547	-	36,30%	-0,0019	13,54	1,04%
60% $P_{TH}$	-0,0037	18,18	0,03%	-0,001	11,91	0,26%
80% $P_{TH}$	-0,0003	18,18	~0%	-0,0011	11,40	0,12%
100% $P_{TH}$	0,001	21,18	~0%	-0,002	13,71	~0%

Wyniki zaprezentowane powyżej pokazują przewagę układu regulacji mocy reaktora jądrowego, który wykorzystuje regulator  $PI^\lambda D^\mu$ , zarówno, gdy podczas optymalizacji wykorzystano kryterium jakości ISE oraz LQ. W przypadku, w którym podczas optymalizacji wykorzystano kryterium jakości ITAE otrzymane wyniki są niemalże identyczne. W warunkach lokalnych, przy niewielkim odchyleniu od punktu pracy, układ regulacji mocy cieplnej reaktora jądrowego, w którym wykorzystano regulator  $PI^\lambda D^\mu$  osiągnął lepsze wyniki dla każdego wariantu optymalizacji (dla każdego całkowitego wskaźnika jakości sterowania) – tabela 6.17. Porównanie odpowiedzi układu regulacji mocy cieplnej, które zostały zamieszczone na rysunkach 6.21, 6.22 oraz 6.23

jak i wskaźników jakości regulacji opartych o odpowiedź skokową (tabele 6.18-6.20), również pokazuje przewagę układu regulacji, w którym pracował regulator  $PI^{\lambda}D^{\mu}$ .

### 6.4.3 Regulator wieloobszarowy – etap II

W podrozdziale tym zostały zamieszczone wyniki drugiego etapu przeprowadzonego zadania optymalizacji dla trzech wariantów (rysunek 6.3). Drugi etap miał na celu optymalizację parametrów funkcji przynależności rozmytej części regulatora wieloobszarowego, w którego skład wchodziły lokalne regulatory  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  z nastawami dobranymi w pierwszym etapie optymalizacji. Tak jak w przypadku pierwszego etapu optymalizacji tak i w tym etapie, ze względu na stochastyczny charakter algorytmu MADS, przeprowadzono po 5 prób optymalizacji dla 4 różnych punktów startowych. Łącznie stanowiło to 20 prób optymalizacyjnych na jeden wariant optymalizacji. Całkowita ilość prób symulacyjnych w drugim etapie optymalizacji wyniosła, więc 60. Tak samo jak w etapie pierwszym tak i w etapie drugim, dla celów porównawczych, przeprowadzono analogiczną optymalizację z wykorzystaniem regulatora wieloobszarowego w skład, którego wchodziły regulatory PID z nastawami otrzymanymi w wyniku optymalizacji etapu pierwszego. Ostatecznie w etapie drugim przeprowadzono 120 prób optymalizacyjnych na podstawie, których, tak jak w etapie pierwszym, wynik końcowy stanowiły rozwiązania charakteryzujące się najmniejszą wartością funkcji celu.

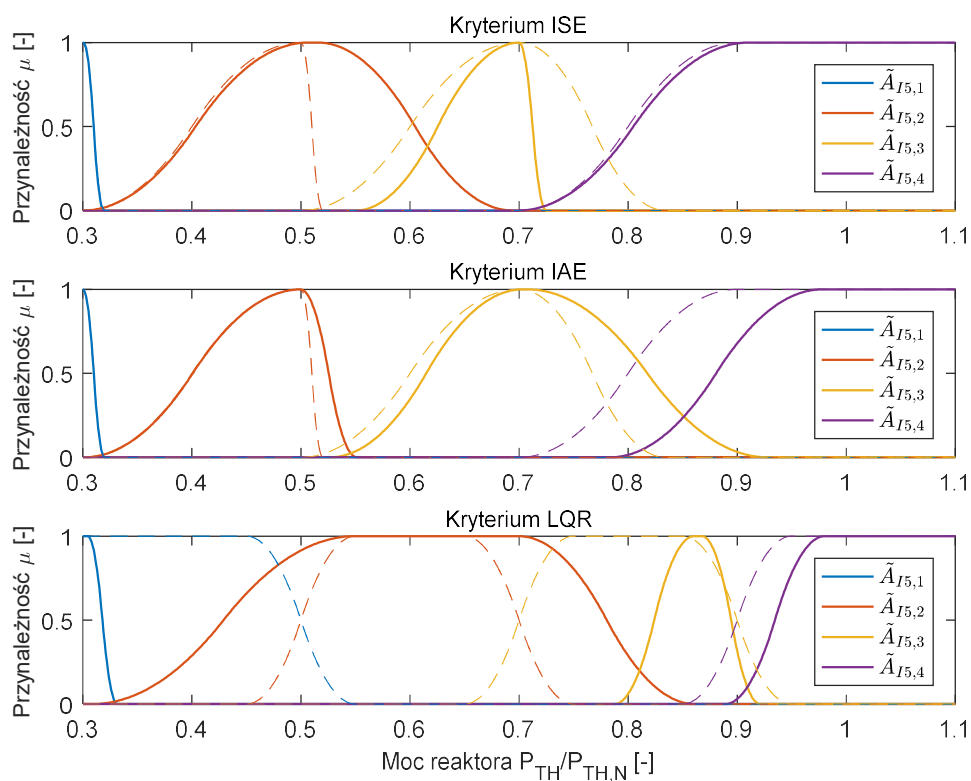
W tabeli 6.21 zamieszczono punkty startowe wykorzystane w drugim etapie optymalizacji. Punkt startowy nr 1 został wybrany ręcznie, natomiast punkty startowe 2,3 oraz 4 zostały wybrane losowo zgodnie z ograniczeniami opisanymi przez zależności (6.9) oraz (6.10). Na rysunkach 6.24 i 6.25 oraz tabelach 6.22 i 6.23 zostały zamieszczone wyniki optymalizacji regulatora wieloobszarowego z lokalnymi regulatorami PID oraz  $PI^{\lambda}D^{\mu}$ . W tabeli 6.24 zamieszczono zbiorcze wyniki uzyskane w drugim etapie optymalizacji z obliczeniem poprawy funkcji celu. Rysunek 6.26 przedstawia wyniki optymalizacji w formie odpowiedzi dynamicznych układu regulacji na zadaną trajektorię mocy cieplnej. Rysunki te mają na celu pokazanie różnic w dynamice oraz w jakości sterowania układów regulacji z regulatorami wieloobszarowymi, w skład, których wchodziły lokalne regulatory PID oraz  $PI^{\lambda}D^{\mu}$ .

Tabela 6.21. Punkty startowe dla drugiego etapu optymalizacji.

Zmienna decyzyjna $x_{E2}$	Klasa funkcji przynależności	Punkt startowy			
		1	2	3	4
$x_{E2,1}$	$Z_{\tilde{A}_{I5,1}}$	0,4500	0,3172	0,3000	0,3000
$x_{E2,2}$		0,5500	0,4759	0,4729	0,3200
$x_{E2,3}$	$\Pi_{\tilde{A}_{I5,2}}$	0,4500	0,3923	0,3893	0,3000
$x_{E2,4}$		0,5500	0,5000	0,5000	0,5000
$x_{E2,5}$		0,6500	0,5000	0,5526	0,5000
$x_{E2,6}$		0,7500	0,6689	0,6661	0,5200
$x_{E2,7}$	$\Pi_{\tilde{A}_{I5,3}}$	0,6500	0,5000	0,5970	0,5000
$x_{E2,8}$		0,7500	0,7176	0,7000	0,7000
$x_{E2,9}$		0,8500	0,7419	0,7000	0,7000
$x_{E2,10}$		0,4500	0,3172	0,3000	0,3000
$x_{E2,11}$	$S_{\tilde{A}_{I5,4}}$	0,5500	0,4759	0,4729	0,3200
$x_{E2,12}$		0,4500	0,3923	0,3893	0,3000

Tabela 6.22. Wyniki drugiego etapu optymalizacji dla regulatora wieloobszarowego z lokalnymi regulatorami PID.

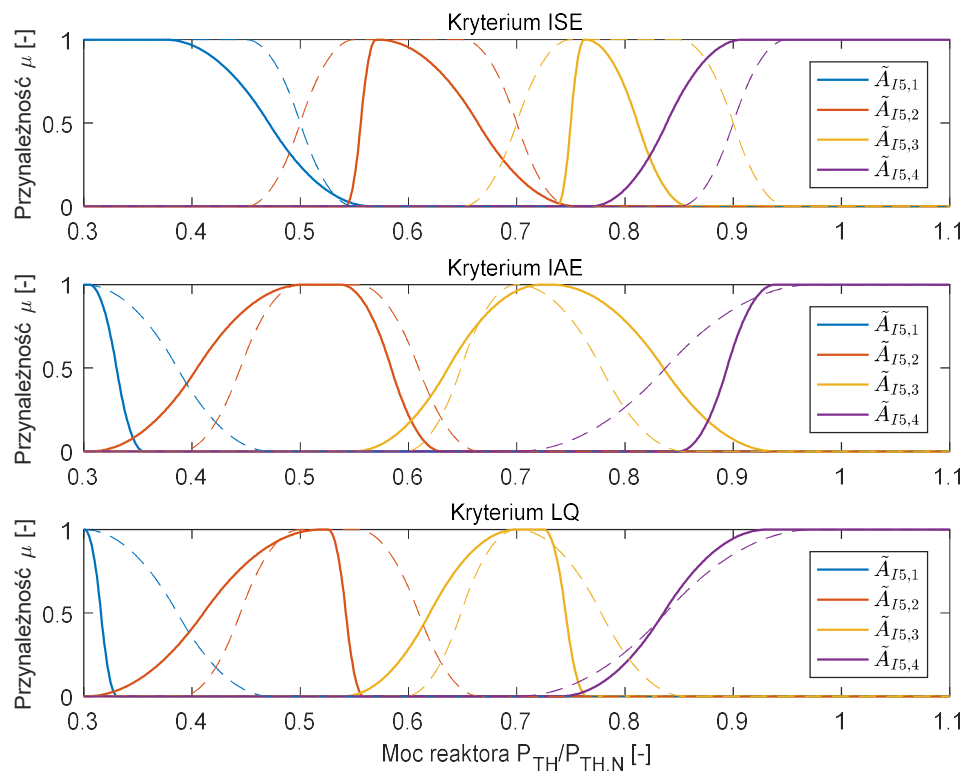
Zmienna decyzyjna $x_{E2}$	Klasa funkcji przynależności	Kryterium jakości		
		ISE	IAE	LQ
$x_{E2,1}$	$Z_{\tilde{A}_{I5,1}}$	0,3005	0,3000	0,3044
$x_{E2,2}$		0,3193	0,3200	0,3316
$x_{E2,3}$	$\Pi_{\tilde{A}_{I5,2}}$	0,3000	0,3010	0,3082
$x_{E2,4}$		0,5069	0,5005	0,5498
$x_{E2,5}$		0,5152	0,4995	0,6993
$x_{E2,6}$		0,6941	0,5513	0,8616
$x_{E2,7}$	$\Pi_{\tilde{A}_{I5,3}}$	0,5500	0,5264	0,7872
$x_{E2,8}$		0,7009	0,7033	0,8606
$x_{E2,9}$		0,6999	0,7072	0,8676
$x_{E2,10}$		0,7249	0,9280	0,9214
$x_{E2,11}$	$S_{\tilde{A}_{I5,4}}$	0,6992	0,7833	0,8886
$x_{E2,12}$		0,9105	0,9781	0,9805
Wartość funkcji celu		2,5523	10,6803	0,1269
Punkt Startowy		4	4	1



Rysunek 6.24. Kształty funkcji przynależności otrzymane w wyniku przeprowadzenia drugiego etapu optymalizacji dla regulatora wieloobszarowego z lokalnymi regulatorami PID. Przerwanymi liniami zaznaczono kształty funkcji przynależności dla punktu startowego optymalizacji.

Tabela 6.23. Wyniki drugiego etapu optymalizacji dla regulatora wieloobszarowego z lokalnymi regulatorami  $PID^u$ .

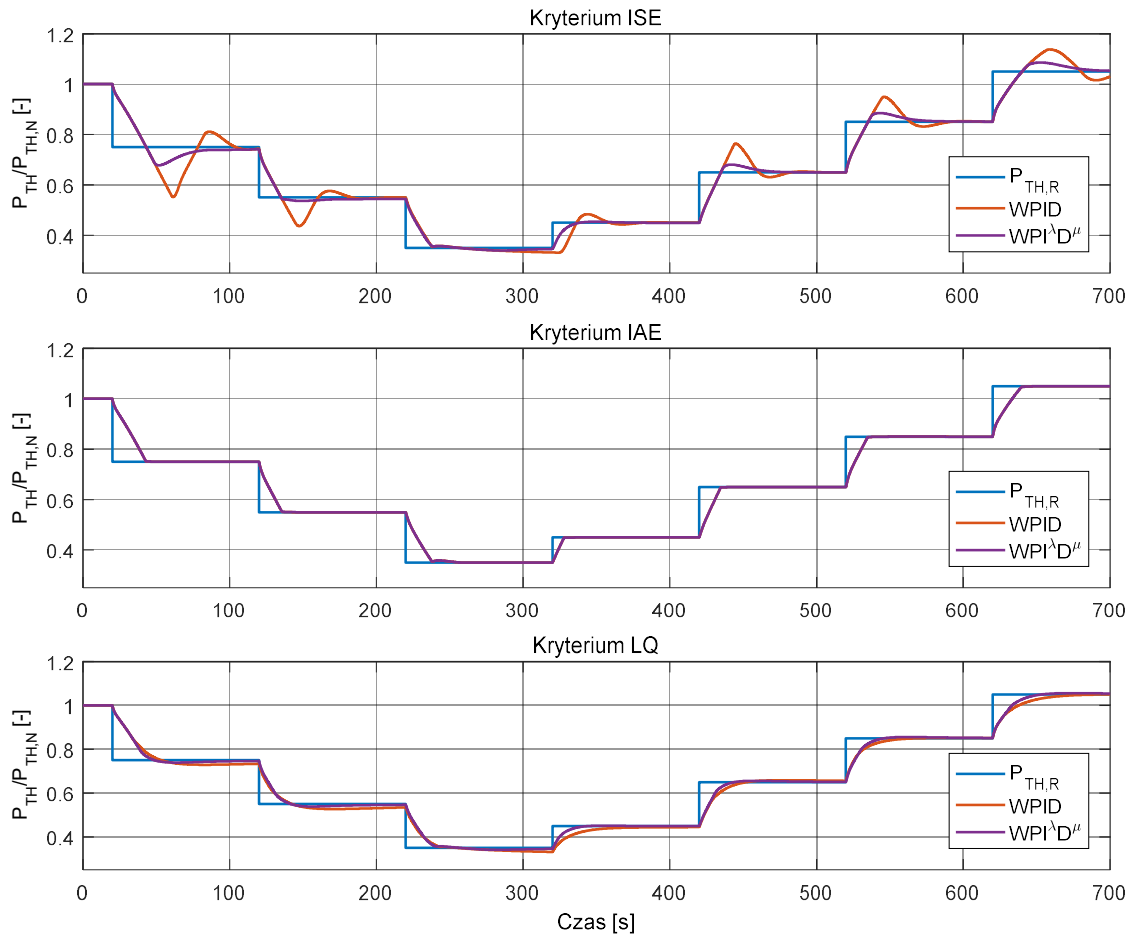
Zmienna decyzyjna	Klasa funkcji przynależności	Kryterium jakości		
		ISE	IAE	LQ
$x_{E2,1}$	$Z_{\tilde{A}_{I5,1}}$	0,3753	0,3050	0,3007
$x_{E2,2}$	$\Pi_{\tilde{A}_{I5,2}}$	0,5666	0,3556	0,3311
$x_{E2,3}$		0,5417	0,3063	0,3019
$x_{E2,4}$		0,5701	0,5033	0,5195
$x_{E2,5}$		0,5719	0,5371	0,5258
$x_{E2,6}$		0,7563	0,6309	0,5585
$x_{E2,7}$	$\Pi_{\tilde{A}_{I5,3}}$	0,7373	0,5496	0,5395
$x_{E2,8}$		0,7625	0,7238	0,7000
$x_{E2,9}$		0,7636	0,7316	0,7253
$x_{E2,10}$	$S_{\tilde{A}_{I5,4}}$	0,8597	0,9393	0,7650
$x_{E2,11}$		0,7681	0,8497	0,7399
$x_{E2,12}$		0,9090	0,9388	0,9314
Wartość funkcji celu		1,4846	10,6763	0,1247
Punkt startowy		1	3	3



Rysunek 6.25. Kształty funkcji przynależności otrzymane w wyniku przeprowadzenia drugiego etapu optymalizacji dla regulatora wieloobszarowego z lokalnymi regulatorami  $PI^2D^{\mu}$ . Przerwanymi liniami zaznaczono kształty funkcji przynależności dla punktu startowego optymalizacji.

Tabela 6.24. Zbiorcze wyniki dla drugiego etapu optymalizacji.

Kryterium jakości	Wartości funkcji celu		
	ISE	IAE	LQ
WPID	2,5523	10,6803	0,1269
WPI <sup>2</sup> D <sup>μ</sup>	1,4846	10,6763	0,1247
Poprawa	41,83%	0,04%	1,71%



Rysunek 6.26. Odpowiedzi układu regulacji mocy cieplnej reaktora jądrowego z regulatorem wieloobszarowym, w którego skład wchodziły lokalne regulatory PID (WPID) oraz  $PI^\lambda D^\mu$  ( $WPI^\lambda D^\mu$ ).

Wyniki zaprezentowane powyżej pokazują przewagę układu regulacji mocy reaktora jądrowego, który wykorzystuje regulator wieloobszarowy z lokalnymi regulatorami  $PI^\lambda D^\mu$ . Tak jak w pierwszym etapie optymalizacji tak i w drugim we wszystkich wariantach optymalizacji uzyskano poprawę całkowitych wskaźników jakości sterowania (rysunek 6.26, tabela 6.24). Podobnie jak w pierwszym etapie tak i tutaj w przypadku wariantu drugiego uzyskano najmniejszą poprawę w zastosowanym wskaźniku jakości – kryterium IAE (tabela 6.17 i 6.24).

Wyniki drugiego etapu optymalizacji pokazują, że regulator oparty o operatory całkowania i różniczkowania niecałkowitego rzędu wykazuje lepszą jakość sterowania w stosunku do swojego klasycznego odpowiednika w warunkach szerokich zmian punktu pracy. Podrozdziały 6.4.2 oraz 6.4.3 mają na celu wyłącznie pokazanie wyników optymalizacji. Szersza analiza wyników została podjęta w rozdziale 8, w którym przeprowadzono weryfikację otrzymanych regulatorów wieloobszarowych wraz z obiektem wirtualnym.



## 7. Analiza stabilności układu sterowania

---

Stabilność jest cechą systemu określającą jego zdolność do powracania do warunków równowagi statycznej, gdy został z nich wytracony niezależnie od wymuszenia jakiemu został poddany. Układ jest uważany za niestabilny, jeżeli po wywołaniu przemieszczenia z punktu równowagi ciągle oddala się od tego punktu. Charakter ruchu swobodnego (stan/wyjście) dla układów nieliniowych w bardzo dużym stopniu zależy od amplitudy wychyleń [164]. Cecha ta stanowi istotne utrudnienie w procesie określania stabilności dla tego typu układów. W kontekście układów rzeczywistych, które w ogólności można traktować jako układy nieliniowe, można wyróżnić następujące pojęcia stabilności [164]:

- stabilność lokalna – małe ściśle określone odchylenia od stanu równowagi statycznej nie powodują dalszego wzrostu amplitudy jego ruchu,
- stabilność asymptotyczna – układ po wychyleniu ze stanu równowagi z czasem do niego powraca,
- stabilność globalna – dowolnie wielkie wychylenia z punktu równowagi nie powodują wzrostu amplitudy jego ruchu.

Analiza stabilności układów liniowych jest znacznie bardziej uproszczona w stosunku do analizy stabilności układów nieliniowych, gdyż charakter ich ruchu nie zależy od amplitudy wychyleń (wejścia). W rozprawie do analizy stabilności układu regulacji mocy cieplnej reaktora jądrowego z zaproponowanym wieloobszarowym rozmytym regulatorem z lokalnymi regulatorami  $PI^{\lambda}D^{\mu}$ , podparto się twierdzeniem, które pozwala określić lokalną stabilność nieliniowego układu regulacji na podstawie odpowiadającego mu układu liniowego. Twierdzenie to brzmi następująco [32]:

**Twierdzenie 1.** *Zakłada się, że do regulacji wybranego obiektu nieliniowego wykorzystany jest rozmyty regulator PID typu Takagi-Sugeno lub Mamdaniego oraz obydwa te elementy są różniczkowalne w punkcie równowagi. Taki rozmyty system sterowania wybranym obiektem jest lokalnie stabilny (lub niestabilny) wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiadający mu liniowy system sterowania PID jest ściśle stabilny<sup>2</sup> (lub niestabilny).*

Z twierdzenia **I** wynikają następujące wnioski [32]

1. warunek stabilności określony w twierdzeniu **I** jest jednocześnie warunkiem koniecznym i wystarczającym, przy czym w porównaniu do warunków globalnej stabilności, które

---

<sup>2</sup> System jest ściśle stabilny, jeżeli wszystkie wartości własne macierzy  $A$  tego systemu mają ujemne części rzeczywiste.

w większości przypadków są konserwatywne, warunek ten jest możliwie najściślejszy z możliwych,

2. w celu przeprowadzenia analizy stabilności potrzebna jest jedynie analityczna reprezentacja regulatora rozmytego w danym punkcie pracy, pełna struktura analityczna nie jest wymagana,
3. twierdzenie może być wykorzystane do określenia stabilności, nawet jeśli nieliniowy model układu regulacji nie jest bezpośrednio dostępny, do przeprowadzenia analizy stabilności wymagana jest jedynie zlinearyzowana w punkcie pracy postać modelu,
4. twierdzenie jest prawdziwe w ogólności dla wszystkich systemów sterowania, w których występują regulatory oparte o technologie rozmyte, o ile możliwe jest przeprowadzenie linearyzacji modeli matematycznych elementów wchodzących w skład systemu sterowania.

Twierdzenie *I* zostało wykorzystane dla zaproponowanego w rozprawie układu sterowania mocą cieplną reaktora jądrowego w celu weryfikacji jego stabilności w sensie lokalnym. W tym celu przeprowadzono linearyzację modeli elementów składowych układu sterowania w wielu punktach pracy. Następnie na ich podstawie przeprowadzono analizę stabilności szeregu zlinearyzowanych modeli układu sterowania wykorzystując, przedstawioną poniżej, klasyczną definicję stabilności systemów liniowych. Należy tutaj zaznaczyć, że pojęcie lokalnej stabilności nie określa stabilności systemu wyłącznie w punkcie równowagi, lecz również w niewielkim jego otoczeniu [32].

System liniowy opisany następującym równaniem stanu [165]

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \quad (7.1)$$

posiada rozwiązanie (odpowiedź) w następującej postaci [165]

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{Bu}(\tau) d\tau. \quad (7.2)$$

W rozwiązaniu przedstawionym zależnością (7.2) można wyróżnić dwie składowe odpowiedzi, tj. składową swobodną odpowiedzi [165]

$$\mathbf{x}_s(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0, \quad (7.3)$$

określającą wpływ warunku początkowego  $\mathbf{x}_0$  (przy  $\mathbf{u}(t) = 0$ ) na rozwiązanie oraz składową wymuszoną odpowiedzi [165]

$$\mathbf{x}_u(t) = \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (7.4)$$

określającą odpowiedź stanu układu na wymuszenie  $\mathbf{u}(t)$  (przy  $x_0 = 0$ ). Na podstawie zasady superpozycji można stwierdzić, że rozwiązanie (7.2) jest wynikiem złożenia dwóch składowych  $\mathbf{x}_s$  oraz  $\mathbf{x}_u$ . Dla układów liniowych przedstawionych w powyższy sposób definicja stabilności jest następująca [165]:

*Układ liniowy opisany równaniem (7.1) jest asymptotycznie stabilny, jeżeli dla każdego warunku początkowego  $x_0 \in \mathbb{R}$ , składowa swobodna odpowiedzi dąży do zera przy czasie  $t$  dążącym do nieskończoności*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0 = 0. \quad (7.5)$$

Warunek ten oznacza, że rozwiązanie (7.2) będzie ograniczone, jeśli wymuszenie  $\mathbf{u}(t)$  również będzie ograniczone. Biorąc po uwagę następujące zależności [165]

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}, \quad (7.6)$$

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{P}e^{\mathbf{\Lambda}t}\mathbf{P}^{-1}, \quad (7.7)$$

można zauważyć, że warunek (7.5) może być spełniony tylko wtedy, gdy [165]

$$\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0, \quad \text{dla } i = 1, \dots, n, \quad (7.8)$$

gdzie  $\lambda_i$  są wartościami własnymi macierzy  $\mathbf{A}$  spełniającymi równanie

$$\det[\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}] = 0, \quad (7.9)$$

w którym  $\mathbf{I}$  oznacza macierz jednostkową o wymiarach  $n \times n$ .

Równanie (7.9) nazywane jest równaniem charakterystycznym systemu liniowego, a warunek (7.8) jest warunkiem koniecznym i wystarczającym występowania stabilności asymptotycznej tego systemu. Dla systemów liniowych opisanych transmitancją operatorową [165]

$$G(s) = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n}, \quad (7.10)$$

warunek (7.8) wyrażony jest w następującej postaci [165]

$$\operatorname{Re} s_i < 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (7.11)$$

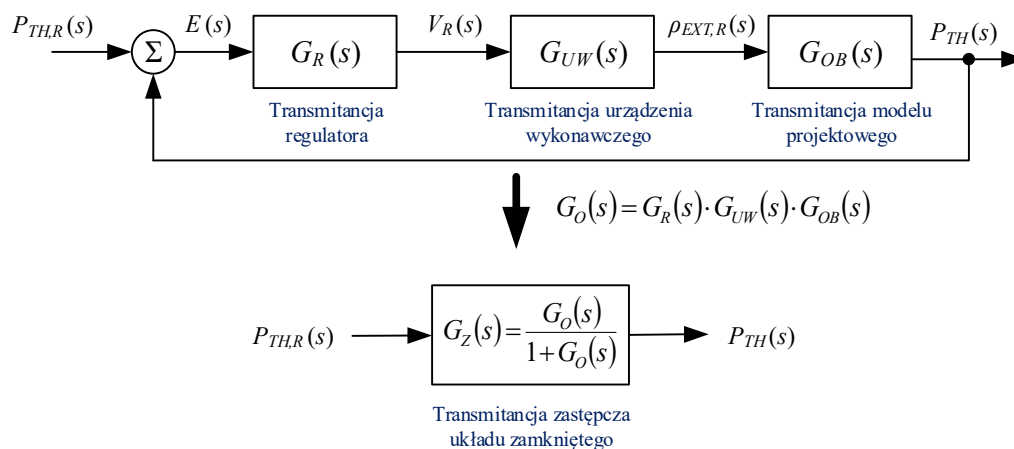
gdzie  $s_i$  są pierwiastkami równania charakterystycznego (biegunami) transmitancji operatorowej  $G(s)$ , które powstaje z przyrównania mianownika transmitancji  $G(s)$  do zera i wyrażone jest w następujący sposób [165]

$$s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n = 0. \quad (7.12)$$

Stąd wynika, że najbardziej jednoznaczną metodą badania stabilności systemu liniowego jest określenie położenia pierwiastków równania charakterystycznego (wartości własnych, biegunów) tego systemu. Właściwość tę wykorzystano w zaproponowanej metodzie optymalnego doboru parametrów wieloobszarowego regulatora rozmytego (rozdział 6) w pierwszym etapie optymalizacji (podrozdział 6.1.3) w postaci funkcji `isstable()` i `isfinite()` (numeryczny odpowiednik w środowisku Matlab/Simulink).

## 7.1 Linearyzacja modeli matematycznych elementów układu sterowania

Każdy z elementów układu sterowania mocy cieplnej reaktora jądrowego (rysunek 6.1), tj. regulator wieloobszarowy, urządzenie wykonawcze, model projektowy, jest reprezentowany poprzez nieliniowy model matematyczny. Każdy z tych elementów z osobna został zlinearyzowany w 66 punktach pracy (punktach równowagi) z zakresu od 35% do 100%  $P_{TH,N}$  z krokiem wynoszącym 1%  $P_{TH}$ . Punkty powyżej 100%  $P_{TH,N}$  nie są brane pod uwagę w badaniu stabilności, gdyż w tym zakresie mocy zawsze będzie aktywny wyłącznie lokalny regulator  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  dobrany do punktu pracy 100%  $P_{TH,N}$  (tabela 6.3). Dla każdego punktu pracy, została wyznaczona transmitancja zastępcza (rysunek 7.1), dla której wyznaczono rozkład zer i biegunów układu zamkniętego.



Rysunek 7.1. Zlinearyzowany model układu sterowania mocy cieplnej reaktora jądrowego wykorzystany do badania stabilności.

Ze względu na dużą ilość zastępczych układów liniowych do analizy, jak i z uwagi na wysokie rzędy ich transmitancji  $G_Z(s)$ , nie jest możliwe pokazanie w przystępnej formie ich transmitancji oraz numerycznych wartości pierwiastków równania charakterystycznego. Z uwagi na ten fakt zdecydowano się na wykreślenie rodzin charakterystyk Bodego oraz Nyquista dla poszczególnych liniowych elementów układu regulacji w różnych punktach pracy – podrozdziały 7.1.1, 7.1.2, 7.1.3.

W ramach analizy stabilności wykreślone zostały charakterystyki Bodego oraz Nyquista dla transmitancji otwartego układu regulacji  $G_O(s)$  – podrozdział 7.1.4. Dzięki tym charakterystykom w łatwy sposób można stwierdzić czy zamknięty układ regulacji będzie stabilny. Można dokonać tego na podstawie poniższych warunków przy założeniu regularności charakterystyk częstotliwościowych, tj. dla których  $-\pi < \angle G(0) \leq 0$  [165]:

$$\angle G(j\omega) = -\pi, \quad |G(j\omega)| < 1, \quad (7.13)$$

$$|G(j\omega)| = 1, \quad \angle G(j\omega) > -\pi. \quad (7.14)$$

Dodatkowo na każdym zestawie wykresów, który znajduje się w podrozdziałach 7.1.1-7.1.4 zamieszczono przebiegi wartości liczbowych zapasów modułu oraz fazy w funkcji punktu pracy  $P_{TH}/P_{TH,N}$ . Zapasy te zostały określone według następujących zależności:

- zapas modułu

$$Z_M = \frac{1}{|G(j\omega_F)|}, \quad (7.15)$$

- zapas fazy

$$Z_F = 180^\circ + \angle G(j\omega_M), \quad (7.16)$$

gdzie  $\omega_F$  to pulsacja, dla której przesunięcie fazowe badanego układu wynosi  $-180^\circ$ , a  $\omega_M$  to pulsacja, dla której wzmocnienie badanego układu wynosi 1 (0 [dB]). Wskaźniki te określają odległość badanego układu od punktu, w którym stanie się on niestabilny (punkt krytyczny  $(-1, j0)$  na wykresie Nyquista). W rozprawie zapas modułu wyrażany jest w decybelach, tj.

$$Z_M \text{ dB} = 20 \log_{10} \left( \frac{1}{|G(j\omega_F)|} \right) = -20 \log_{10} |G(j\omega_F)|. \quad (7.17)$$

Ostateczne potwierdzenie stabilności układu zamkniętego zostało zamieszczone w podrozdziale 7.1.5, w którym na wykresach przedstawiono wartość części rzeczywistej  $\sigma$  pierwiastka dominującego równania charakterystycznego zastępczej transmitancji układu zamkniętego  $G_Z(s)$  (znajdującego się najbliżej osi  $j\omega$  na płaszczyźnie zmiennej zespolonej) w funkcji punktu pracy

$P_{TH}$ . Dodatkowo w ramach potwierdzenia stabilności zastępczego układu zamkniętego  $G_Z(s)$  w wyznaczonych punktach pracy została wykreślona wartość normy  $\mathcal{H}_2$  dla jego transmitancji w tych punktach.

Norma  $\mathcal{H}_2$  dla transmitancji systemu liniowego określa jego wypadkowe wzmocnienie lub tłumienie dla wszystkich możliwych częstotliwości [91]. Norma  $\mathcal{H}_2$  systemu liniowego może być również traktowana jako energia sygnału wyjściowego z systemu, który został poddany impulsowemu wymuszeniu [91]. W sensie matematycznym dla ogólnego systemu liniowego wyrażonego w postaci macierzy transmitancji  $\mathbf{G}(s)$  norma  $\mathcal{H}_2$  definiowana jest w następujący sposób [166]

$$\|\mathbf{G}(s)\|_{\mathcal{H}_2}^2 = \frac{1}{2\pi} \text{Trace} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{G}(j\omega)\mathbf{G}^H(j\omega) d\omega. \quad (7.18)$$

Wykorzystując twierdzenie Parsevala, może ona być zapisana w następującej uproszczonej postaci

$$\|\mathbf{G}(s)\|_{\mathcal{H}_2}^2 = \text{Trace} \int_0^{\infty} \mathbf{G}(t)\mathbf{G}^T(t) dt, \quad (7.19)$$

w której  $\mathbf{G}(t)$  jest odwrotną transformatą Laplace'a macierzy transmitancji  $\mathbf{G}(s)$ ,  $\text{Trace}(\cdot)$  jest śladem macierzy, a  $\mathbf{G}^H$  jest sprzężeniem hermitowskim macierzy  $\mathbf{G}$ . Norma  $\mathcal{H}_2$  jest różna od  $\pm\infty$  dla systemu opisanego transmitancjami  $\mathbf{G}(s)$ , jeżeli wartości własne tego systemu mają ujemne części rzeczywiste. Oznacza to, że sygnał wyjściowy z systemu, który został poddany impulsowemu wymuszeniu ma skończoną energię.

### 7.1.1 Modele liniowe wieloobszarowego regulatora rozmytego z lokalnymi regulatorami $\text{PI}^\lambda\text{D}^\mu$

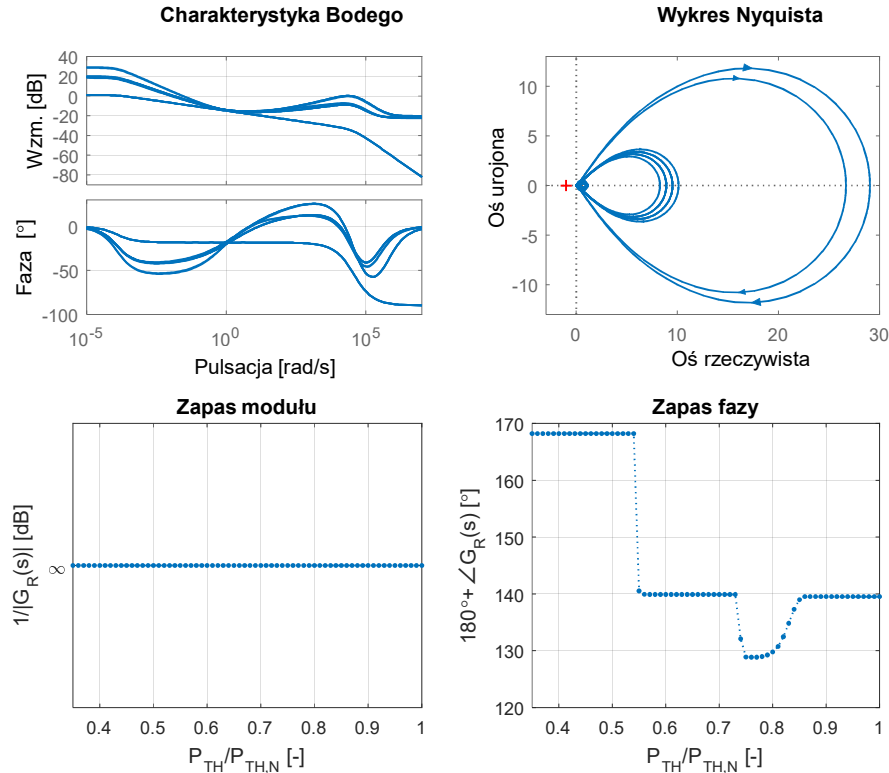
Wykorzystany w rozprawie wieloobszarowy rozmyty regulator  $\text{PI}^\lambda\text{D}^\mu$  składa się z czterech lokalnych regulatorów  $\text{PI}^\lambda\text{D}^\mu$  oraz systemu rozmytego Takagi-Sugeno (rysunek 3.3). Operacje całkowania i różniczkowania niecałkowitego rzędu występujące w regulatorach lokalnych zostały aproksymowane filtrami Oustaloupa (podrozdział 5.1.4). Ich uproszczona struktura została zaprezentowana na rysunku 6.15. Dodatkowym elementem występującym w strukturze lokalnych regulatorów  $\text{PI}^\lambda\text{D}^\mu$  jest filtr dolnoprzepustowy ograniczający wpływ wysokich częstotliwości na jego odpowiedź. W strukturze regulatora  $\text{PI}^\lambda\text{D}^\mu$  występują filtry dolnoprzepustowe, które zostały również uwzględnione w wyznaczaniu zastępczej transmitancji regulatora wieloobszarowego (implementacja operatorów ułamkowych z wykorzystaniem pakietu FOMCON – rozdział

6.3.1.1). Wszystkie ww. elementy lokalnych regulatorów  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  są liniowe, a co za tym idzie wypadkowy model, w danym punkcie pracy, również jest liniowy i może on być wyznaczony na podstawie zależności (3.5)-(3.9) jako wypadkowa transmitancja w następującej postaci

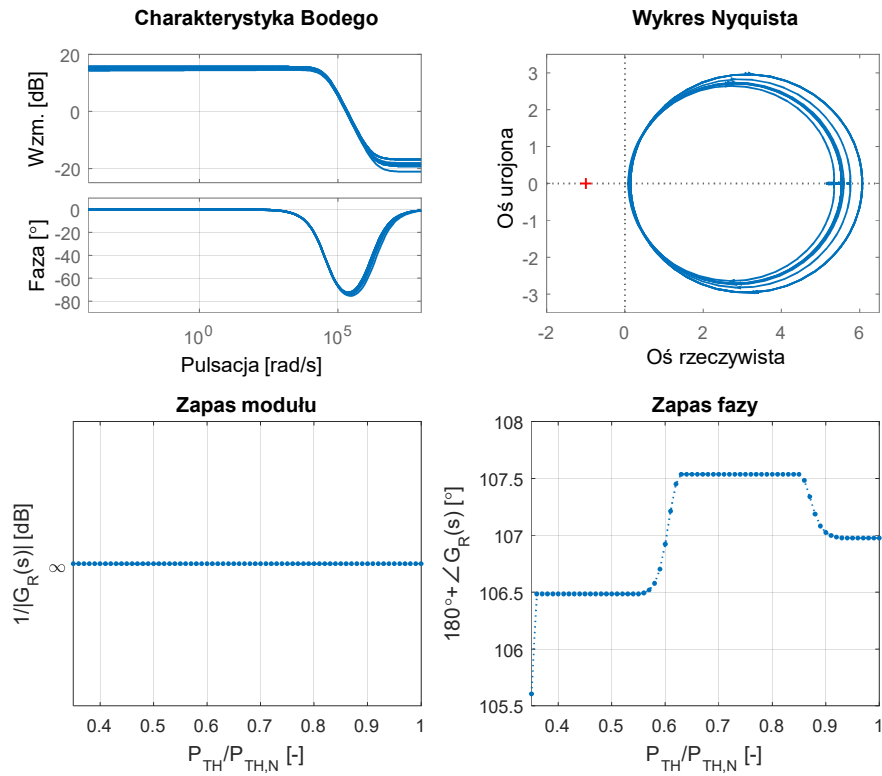
$$\frac{V_R(s)}{E(s)} = G_R(s). \quad (7.20)$$

Struktura zastępczej transmitancji wieloobszarowego regulatora rozmytego opisana wzorem (7.20) zależy od nastaw  $K_P, K_I, K_D, \lambda, \mu$  lokalnych regulatorów  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  oraz od wartości wag funkcji przynależności, które opisane są przez parametry kształtu (tabela 6.3). Z kolei wagi funkcji przynależności zależą bezpośrednio od aktualnie wytwarzanej mocy reaktora jądrowego (aktualnego punktu pracy).

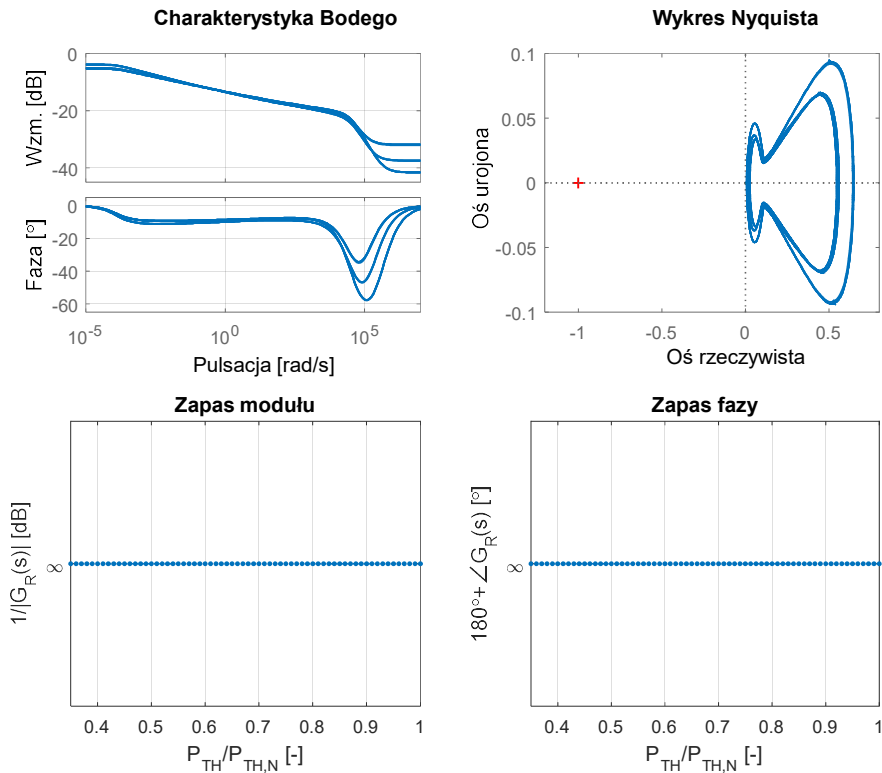
Na rysunkach 7.2, 7.3 oraz 7.4 zostały zobrazowane charakterystyki Bodego i Nyquista oraz wynikające z nich zapasy modułu, a także fazy dla regulatorów wieloobszarowych, których nastawy zostały dobrane w sposób suboptymalny w trzech wariantach (tabela 6.1, rysunek 6.3) zadania optymalizacji przedstawionego w rozdziale 6. W celu poprawy czytelności rysunków, charakterystyki Bodego oraz Nyquista zostały wykreślone dla punktów pracy  $\frac{P_{TH}}{P_{TH,N}} \in (0,35; 1)$  z krokiem 0,05, natomiast zapasy modułu oraz fazy z krokiem 0,01.



Rysunek 7.2. Zestaw wykresów dla zastępczej transmitancji regulatora wieloobszarowego  $PI^{\lambda}D^{\mu}$ , którego nastawy i parametry zostały dobrane w pierwszym wariantcie zadania optymalizacji (wskaźniki jakości etap 1: ISE, etap 2: ISE).



Rysunek 7.3. Zestaw wykresów dla zastępczej transmitancji regulatora wieloobszarowego  $PI^\lambda D^\mu$ , którego nastawy i parametry zostały dobrane w drugim wariantcie zadania optymalizacji (wskaźniki jakości etap 1: ITAE, etap 2: IAE).



Rysunek 7.4. Zestaw wykresów dla zastępczej transmitancji regulatora wieloobszarowego  $PI^\lambda D^\mu$ , którego nastawy i parametry zostały dobrane w trzecim wariantcie zadania optymalizacji (wskaźniki jakości etap 1: typu LQ, etap 2: typu LQ).



### 7.1.2 Modele liniowe urządzenia wykonawczego

Na bazie charakterystyki urządzenia wykonawczego przedstawionej w podrozdziale 3.2.2 nieliniowy model urządzenia wykonawczego można zapisać w następującej postaci

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = v_R(t), \\ \frac{d\rho_{EXT,R}(t)}{dt} = \frac{\rho_b}{\tilde{H}} \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi x(t)}{\tilde{H}}\right)\right) \cdot v_R(t). \end{cases} \quad (7.21)$$

Przyjmując za wektory stanu, wejścia oraz wyjścia odpowiednio  $\mathbf{x} = [x(t) \quad \rho_{EXT,R}(t)]$ ,  $u = v_r(t)$  oraz  $y = \rho_{EXT,R}(t)$  po linearyzacji równań (7.21) w punkcie pracy  $\mathbf{x}_0$ , otrzyma się następujący model liniowy

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\rho_b}{\tilde{H}} \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi x_0}{\tilde{H}}\right)\right) \end{bmatrix} u, \\ y = [0 \quad 1] \mathbf{x}. \end{cases} \quad (7.22)$$

Linearyzację urządzenia wykonawczego wykonano przy założeniu, że saturacje występujące w modelu równoważne są elementom statycznym o wzmacnieniu równym jedności. Takie założenie jest zasadne, gdyż w danym punkcie pracy model nieliniowy jest aproksymowany liniowym odpowiednikiem. W związku z tym właściwości modelu liniowego badane są w otoczeniu punktu pracy, dla którego nie będą występowały znaczne odchylenia w prędkości przemieszczania się zespołu prętów sterujących  $v_r(t)$ . W takim wypadku saturacje występujące w modelu rządzenia wykonawczego (rysunek 3.5) będą nieaktywne.

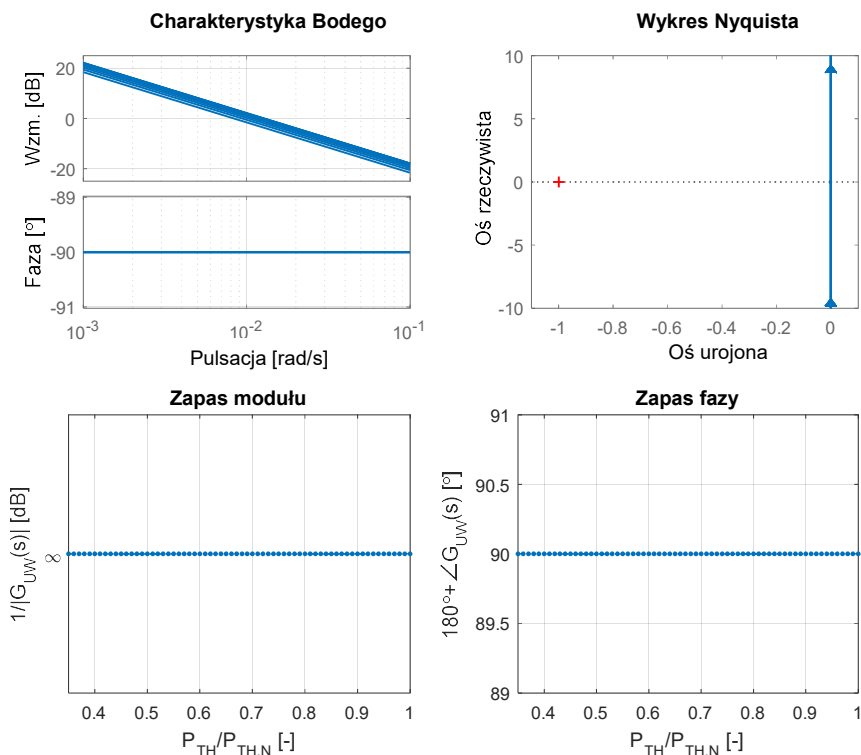
Transmitancja systemu liniowego opisanego równaniem (7.22) jest następująca

$$G_{UW}(s) = \frac{k}{s}, \quad (7.23)$$

gdzie  $k = \frac{\rho_b}{\tilde{H}} \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi x_0}{\tilde{H}}\right)\right)$ , przy czym wielkości występujące w wektorze stanu, tj.  $x(t)$  oraz  $\rho_{EXT,R}(t)$  są ze sobą ściśle powiązane charakterystyką przedstawioną na rysunku 3.7. Należy tutaj również przypomnieć, że nominalne zagłębienie prętów sterujących (dla poziomej mocy cieplnej wynoszącej 100%  $P_{TH,N}$ ) wynosi 30%  $\tilde{H}$ .

Transmitancja urządzenia wykonawczego jest idealnym członem całkującym o wzmacnieniu  $k$ . Rodziny charakterystyk Bodego oraz Nyquista, w wybranych punktach pracy dla transmitancji urządzenia wykonawczego, zostały przedstawione na rysunku 7.5 wraz z odpowiadającymi im

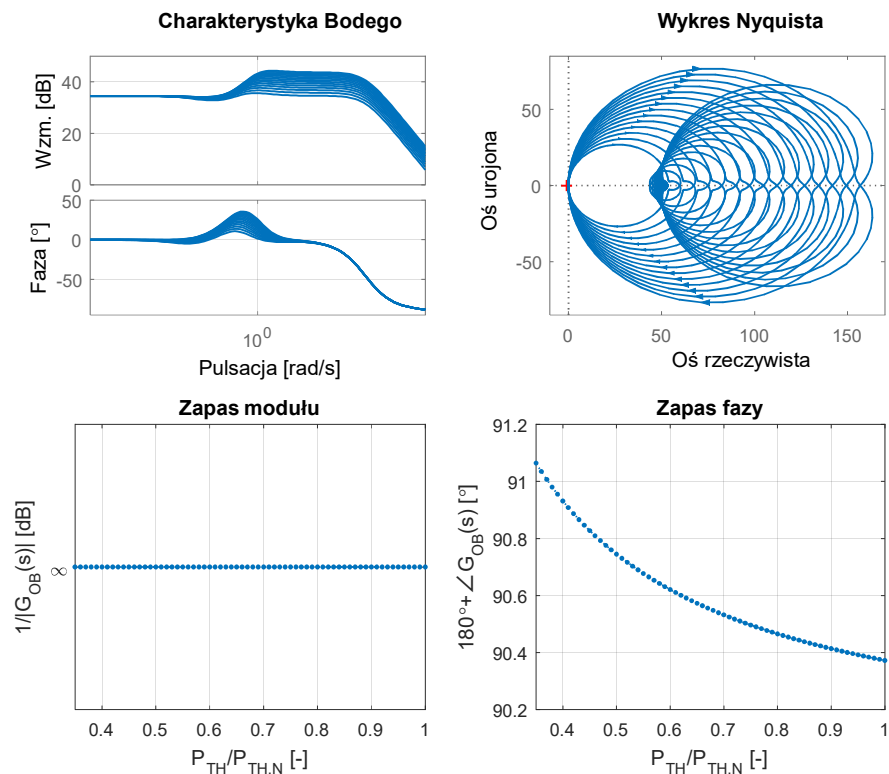
zapasami modułu oraz fazy. Tak jak w przypadku regulatora wieloobszarowego tak i tutaj charakterystyki Bodego oraz Nyquista zostały wykreślone dla punktów pracy  $\frac{P_{TH}}{P_{TH,N}} \in (0,35; 1)$  z krokiem 0,05, natomiast zapasy modułu oraz fazy zostały wykreślone z krokiem 0,01.



Rysunek 7.5. Zestaw wykresów dla transmitancji urządzenia wykonawczego.

### 7.1.3 Modele liniowe reaktora jądrowego (modelu projektowego)

Linearyzacja modelu projektowego (załącznik 3) została przeprowadzona dla potrzeb wyznaczenia pasma pulsacji oraz rzędów filtrów Oustaloupa (podrozdział 6.3.1.2). W przypadku doboru filtrów Oustaloupa model projektowy został zlinearyzowany w czterech punktach pracy. Na potrzeby analizy stabilności model ten został zlinearyzowany w 66 punktach pracy. Rodzina charakterystyk Bodego oraz Nyquista wraz z odpowiadającymi im zapasami modułu oraz fazy została przedstawiona na rysunku 7.6. Jak można zauważyć rodzina charakterystyk pokrywa się z otrzymaną w podrozdziale 6.3.1.2 wersją dla czterech punktów pracy. Tak jak poprzednio charakterystyki Bodego oraz Nyquista zostały wykreślone z krokiem 0,05  $P_{TH}/P_{TH,N}$ , natomiast zapasy modułu oraz fazy zostały wykreślone z krokiem 0,01  $P_{TH}/P_{TH,N}$ .



Rysunek 7.6. Zestaw wykresów dla transmitancji modelu projektowego reaktora jądrowego w wybranych punktach pracy.

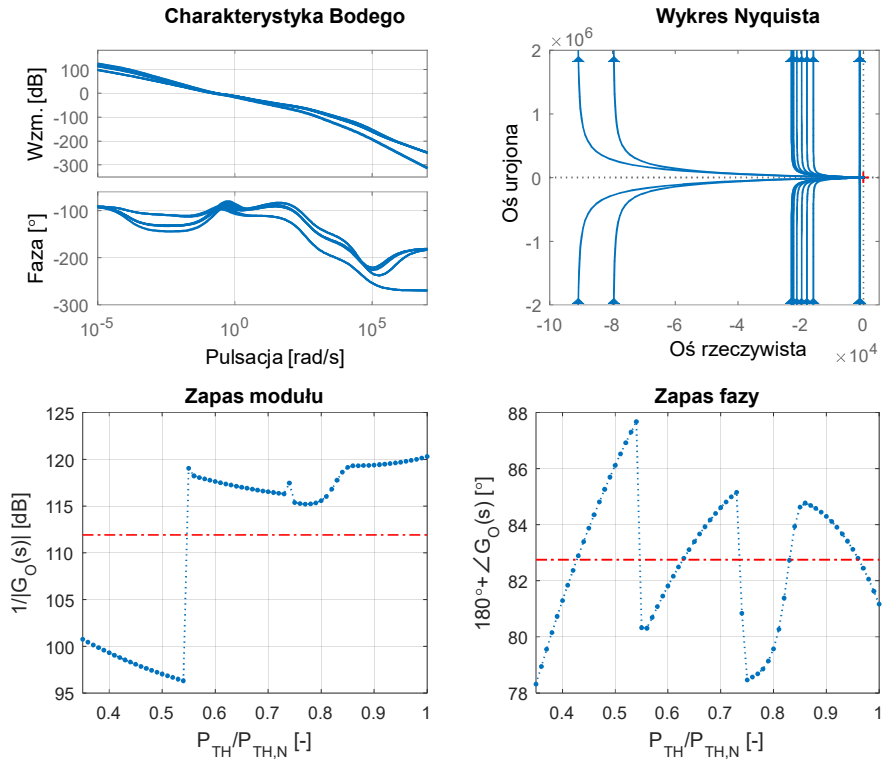
### 7.1.4 Układ otwarty

W podrozdziale tym zostały zawarte zestawy rysunków, które przedstawiają rodziny charakterystyk Bodego oraz Nyquista dla otwartego układu regulacji (rysunek 7.1) o następującej transmitancji

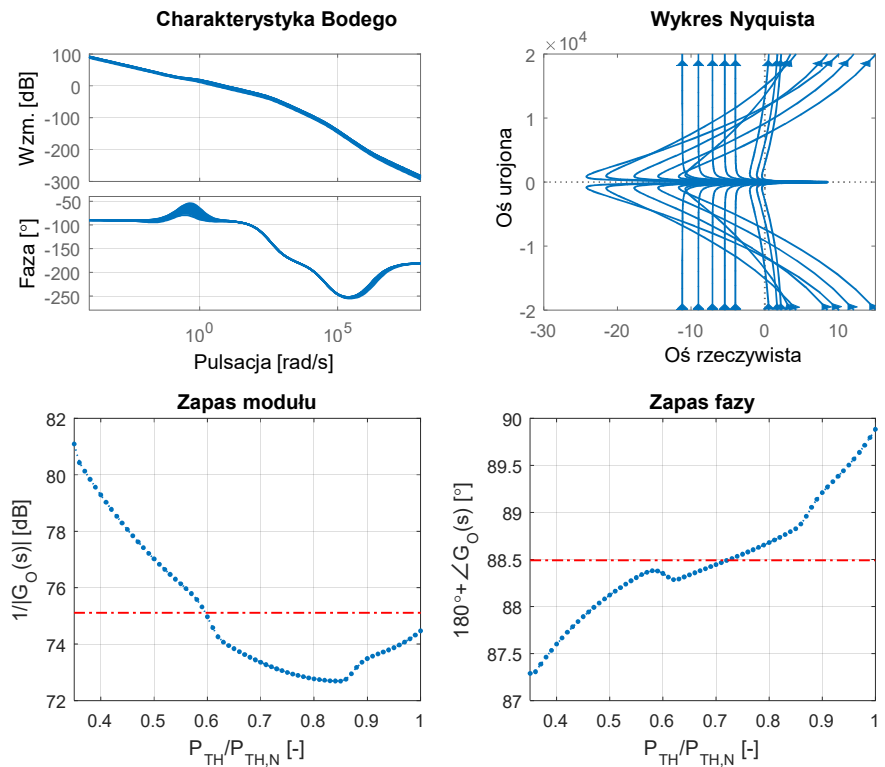
$$G_O(s) = G_R(s) \cdot G_{UW}(s) \cdot G_{OB}(s). \quad (7.24)$$

Zestawy wykresów przedstawiają odpowiednio:

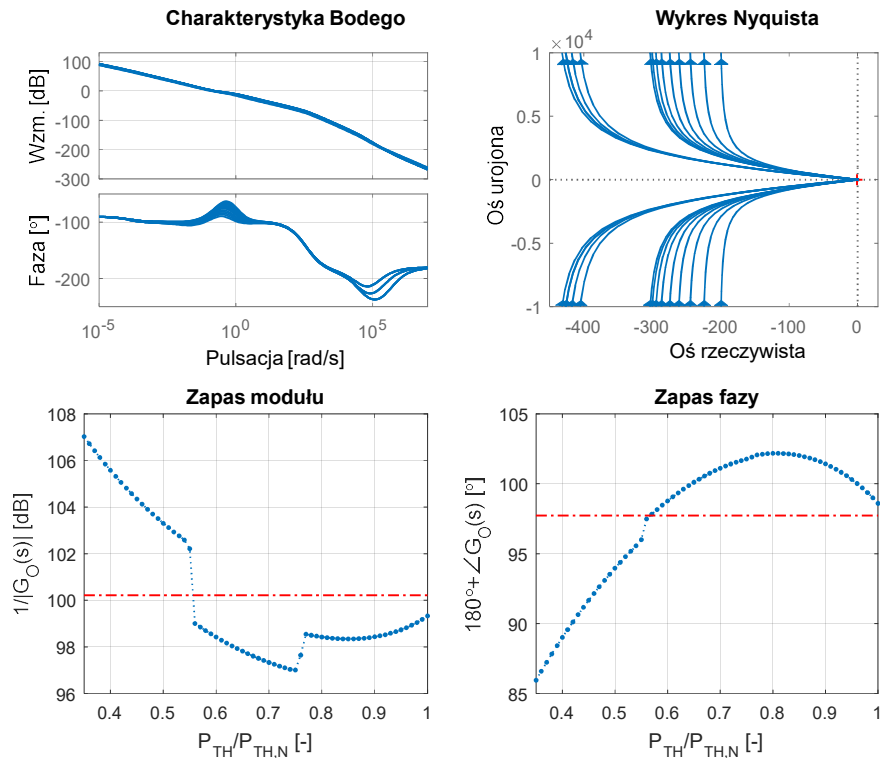
- otwarty układ regulacji z regulatorem wieloobszarowym  $PI^2D^m$ , którego nastawy i parametry zostały dobrane w pierwszym wariancie optymalizacji (wskaźniki jakości etap 1: ISE, etap 2: ISE) – rysunek 7.7,
- otwarty układ regulacji z regulatorem wieloobszarowym  $PI^2D^m$ , którego nastawy i parametry zostały dobrane w drugim wariancie optymalizacji (wskaźniki jakości etap 1: ITAE, etap 2: IAE) – rysunek 7.8,
- otwarty układ regulacji z regulatorem wieloobszarowym  $PI^2D^m$ , którego nastawy i parametry zostały dobrane w trzecim wariancie optymalizacji (wskaźniki jakości etap 1: typu LQ, etap 2: typu LQ) – rysunek 7.9.



Rysunek 7.7. Zestaw wykresów dla transmitancji otwartego układu regulacji z regulatorem wieloobszarowym  $PI^2D^a$ , którego nastawy i parametry zostały dobrane w pierwszym wariantcie zadania optymalizacji (wskaźniki jakości etap 1: ISE, etap 2: ISE).



Rysunek 7.8. Zestaw wykresów dla transmitancji otwartego układu regulacji z regulatorem wieloobszarowym  $PI^2D^a$ , którego nastawy i parametry zostały dobrane w drugim wariantcie zadania optymalizacji (wskaźniki jakości etap 1: ITAE, etap 2: IAE).



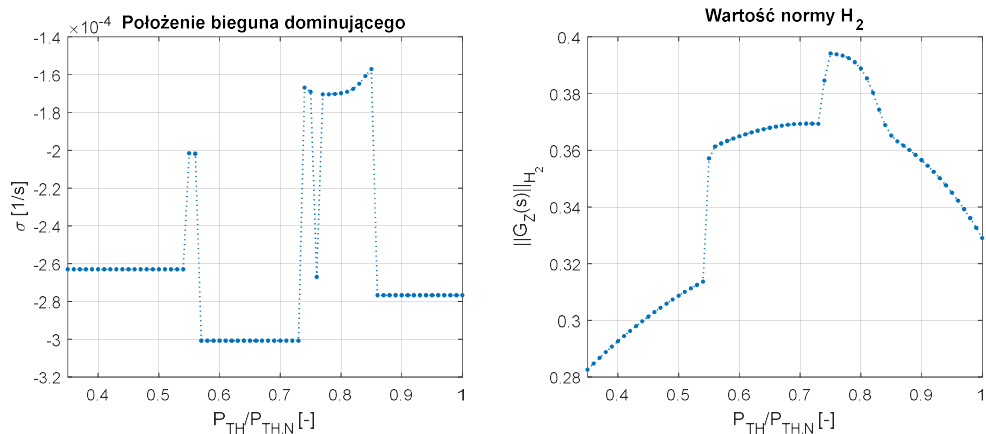
Rysunek 7.9. Zestaw wykresów dla transmitancji otwartego układu regulacji z regulatorem wieloobszarowym  $PI^2D^2$ , którego nastawy i parametry zostały dobrane w trzecim wariancie zadania optymalizacji (wskaźniki jakości etap 1: typu  $LQ$ , etap 2: typu  $LQ$ ).

Na podstawie każdego zestawu wykresów oraz warunków (7.13)-(7.14) można stwierdzić, że zamknięte układy regulacji będą stabilne. Na każdym wykresie czerwoną linią zaznaczono średnie zapasy modułu oraz fazy. Największy średni zapas modułu wystąpił w układzie regulacji, w którym nastawy oraz parametry regulatora wieloobszarowego były dobrane w pierwszym wariancie optymalizacji, natomiast największy średni zapas fazy posiada układ regulacji, w którym nastawy oraz parametry regulatora wieloobszarowego zostały dobrane w trzecim wariancie optymalizacji. Wszystkie z przanalizowanych zapasów modułu oraz fazy spełniają warunki „dobrych” układów regulacji, tj. zapasu modułu nie mniejszego niż 6 dB oraz zapasu fazy nie mniejszego niż 30° [127].

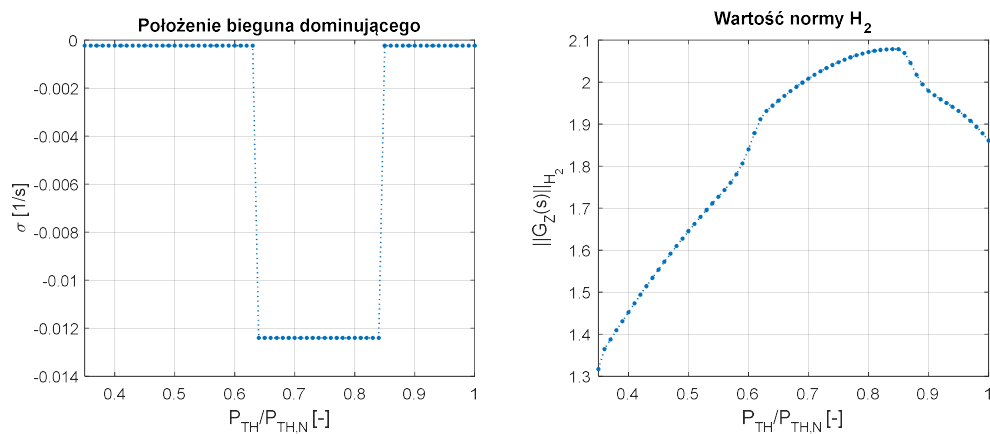
### 7.1.5 Układ zamknięty

Analiza stabilności układu zamkniętego, przedstawiona w tym podrozdziale, oparta o warunek (7.8) ostatecznie potwierdza rozważania zawarte w podrozdziale 7.1.4. Jej wyniki zostały przedstawione w formie zestawów wykresów, na których zaprezentowano część rzeczywistą bieguny dominującego zamkniętego układu regulacji (położonego najbliżej osi  $j\omega$  płaszczyzny zespolonej) oraz wartości normy  $\mathcal{H}_2$  dla transmitancji zamkniętego układu regulacji w funkcji wybranych punktów pracy. Poniższe zestawy wykresów przedstawiają ww. elementy dla:

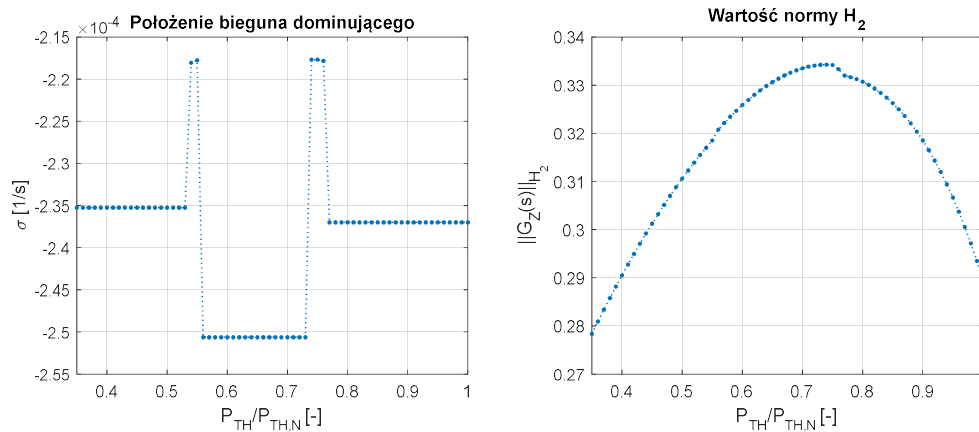
- zamkniętego układu regulacji z wieloobszarowym regulatorem rozmytym z lokalnymi regulatorami  $PI^{\lambda}D^{\mu}$ , którego nastawy i parametry zostały dobrane w pierwszym wariancie optymalizacji (wskaźniki jakości etap 1: ISE, etap 2: ISE) – rysunek 7.10,
- zamkniętego układu regulacji z wieloobszarowym regulatorem rozmytym z lokalnymi regulatorami  $PI^{\lambda}D^{\mu}$ , którego nastawy i parametry zostały dobrane w drugim wariancie optymalizacji (wskaźniki jakości etap 1: ITAE, etap 2: IAE) – rysunek 7.11,
- zamkniętego układu regulacji z wieloobszarowym regulatorem rozmytym z lokalnymi regulatorami  $PI^{\lambda}D^{\mu}$ , którego nastawy i parametry zostały dobrane w trzecim wariancie optymalizacji (wskaźniki jakości etap 1: typu LQ, etap 2: typu LQ) – rysunek 7.12.



Rysunek 7.10. Zestaw wykresów dla transmitancji zamkniętego układu regulacji z regulatorem wieloobszarowym  $PI^{\lambda}D^{\mu}$ , którego nastawy i parametry zostały dobrane w pierwszym wariancie zadania optymalizacji (wskaźniki jakości etap 1: ISE, etap 2: ISE).



Rysunek 7.11. Zestaw wykresów dla transmitancji zamkniętego układu regulacji z regulatorem wieloobszarowym  $PI^{\lambda}D^{\mu}$ , którego nastawy i parametry zostały dobrane w drugim wariancie zadania optymalizacji (wskaźniki jakości etap 1: ITAE, etap 2: IAE).



Rysunek 7.12. Zestaw wykresów dla transmitancji zamkniętego układu regulacji z regulatorem wieloobszarowym  $PI^{\lambda}D^{\mu}$ , którego nastawy i parametry zostały dobrane w trzecim wariantcie zadania optymalizacji (wskaźniki jakości etap 1: typu  $LQ$ , etap 2: typu  $LQ$ ).

Każdy z przeanalizowanych zamkniętych liniowych układów sterowania charakteryzuje się asymptotyczną stabilnością, gdyż wszystkie pierwiastki równań charakterystycznych tych układów mają ujemne części rzeczywiste. Potwierdzają to również przedstawione wykresy wartości normy  $\mathcal{H}_2$ , gdyż w każdym przypadku wartości tej normy są różne od  $\pm\infty$ . Z właściwości tych wynika, że analizowane zamknięte układy sterowania charakteryzują się asymptotyczną stabilnością. Przyjmując, że otoczenie punktu równowagi (punktu pracy) dla każdego przeanalizowanego zamkniętego układu sterowania wynosi  $\pm 1\% P_{TH,N}$  można z wykorzystaniem twierdzenia *I* stwierdzić, że zaproponowany w rozprawie układ sterowania mocy cieplnej reaktora jądrowego, w którego skład wchodzi wieloobszarowy regulator rozmyty z lokalnymi regulatorami  $PI^{\lambda}D^{\mu}$ , będzie stabilny w przedziale mocy  $P_{TH}/P_{TH,N} \in (0,35; 1)$ . Dodatkowym elementem mogącym potwierdzić to twierdzenie jest analiza zamkniętych układów regulacji zawarta w podrozdziale 7.1.4, która została przeprowadzona w oparciu o charakterystyki Bodego oraz Nyquista. Na podstawie tej analizy można stwierdzić, że układy zamknięte charakteryzują się również dużymi zapasami modułu jak i fazy, co pozwala stwierdzić, że rozważane punkty równowagi są stabilne we względnie dużym otoczeniu.

## 8. Symulacyjna weryfikacja układu sterowania

---

Wyniki przeprowadzonej optymalizacji, które zostały zaprezentowane w podrozdziale 6.4 wskazują, że zaproponowany w rozprawie wieloobszarowy rozmyty regulator  $PI^{\wedge}D^{\mu}$  (oznaczenie  $WPI^{\wedge}D^{\mu}$ ), wykorzystany w układzie sterowania mocy cieplnej reaktora jądrowego, charakteryzuje się lepszą jakością sterowania w porównaniu do jego klasycznego odpowiednika, tj. wieloobszarowego rozmytego regulatora PID, w warunkach szerokich zmian punktu pracy. Lepsza jakość sterowania, charakteryzowana wartością funkcji celu, została osiągnięta dla każdego wariantu przeprowadzonej optymalizacji (rysunek 6.3).

W niniejszym rozdziale zaprezentowano wyniki szerszej analizy działania regulatora  $WPI^{\wedge}D^{\mu}$ . Analiza ta obejmowała dwa aspekty, tj. aspekt weryfikacyjny oraz aspekt porównawczy. Celem pierwszego była weryfikacja efektywności działania regulatora  $WPI^{\wedge}D^{\mu}$  w układzie sterowania, w którym model projektowy został zastąpiony obiektem wirtualnym. Celem drugiego było porównanie jakości regulacji, którą uzyskano w wyniku działania układu sterowania z zaproponowanym regulatorem  $WPI^{\wedge}D^{\mu}$ , do jakości regulacji uzyskanej w wyniku działania zamiennie:

- pojedynczego regulatora PID (oznaczenie PID), którego nastawy zostały dobrane w wyniku rozwiązania podzadania optymalizacji nr 4 występującego w pierwszym etapie optymalizacji (rysunek 6.3); nastawy regulatora dobrane do punktu pracy  $100\% P_{TH,N}$ ,
- pojedynczego regulatora  $PI^{\wedge}D^{\mu}$  (oznaczenie  $PI^{\wedge}D^{\mu}$ ), którego nastawy zostały dobrane w wyniku rozwiązania podzadania optymalizacji nr 4 występującego w pierwszym etapie optymalizacji (rysunek 6.3); nastawy regulatora dobrane do punktu pracy  $100\% P_{TH,N}$ ,
- wieloobszarowego regulatora PID (oznaczenie WPID) wykorzystanego w testach porównawczych w rozdziale 6.4.

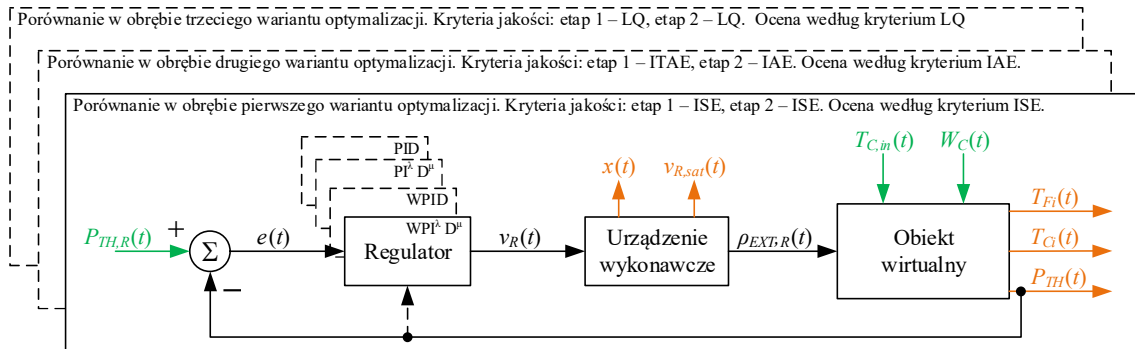
Ocena jakości regulacji, dla każdego przedstawionego w niniejszym rozdziale przypadku, dotyczyła regulatorów, których parametry<sup>3</sup> zostały dobrane w wyniku rozwiązania jednakowego wariantu optymalizacji (rysunek 6.3). To znaczy, że w ramach porównania działania ww. regulatorów zestawiono ze sobą wyniki, które uzyskano dla nastaw dobranych w następstwie rozwiązania odpowiednio pierwszego, drugiego oraz trzeciego wariantu optymalizacji z osobna (rysunek 6.3). Wyniki przedstawione w rozdziale nie obejmują porównania działania regulatorów, których nastawy dobrano w wyniku rozwiązania różnych wariantów optymalizacji np. wariant 1 z wariantem 2, wariant 2 z wariantem 3 itp. Na rysunku 8.1 został przedstawiony układ regulacji mocy cieplnej reaktora jądrowego wykorzystany do celów weryfikacyjnych oraz porównawczych

---

<sup>3</sup> Termin parametry rozumiany jest tutaj jako nastawy lokalnych regulatorów PID/ $PI^{\wedge}D^{\mu}$  oraz parametry kształtu funkcji przynależności rozmytej części regulatora wieloobszarowego.



dla wyżej proponowanego zestawienia regulatorów. Na rysunku 8.1 zostały przedstawione zestawione regulatory oraz warianty zadania optymalizacji, w obrębie których dokonano ich porównania. Kolorem zielonym zostały zaznaczone wielkości podlegające zmianom, natomiast kolorem pomarańczowym zaznaczono wielkości podlegające obserwacji.



Rysunek 8.1. Układ regulacji wykorzystany w analizie działania regulatora  $WPI^\lambda D^\mu$ . Na rysunku zaznaczono regulatory wykorzystane w celach porównawczych oraz warianty zadania optymalizacji, w obrębie których dokonano ich porównania.

Model matematyczny obiektu wirtualnego wykorzystany w analizie został przedstawiony w rozdziale 4. Obiekt wirtualny stanowi rozszerzoną wersję modelu projektowego na bazie, którego zostało rozwiązane zadanie optymalizacji opisane w rozdziale 6. Obiekt wirtualny składa się ze znacznie większej ilości węzłów obliczeniowych oraz wykorzystuje on w obliczeniach informację o osiowym rozkładzie generowanej mocy cieplnej w rdzeniu reaktora. Rozkład ten jest zależny od poziomu zagłębienia prętów sterujących i wpływa on bezpośrednio na rozkłady temperatur paliwa oraz chłodziwa [107], [167]. Dzięki tym właściwościom obiekt wirtualny w dokładniejszy sposób odwzorowuje procesy wymiany ciepła zachodzące w rzeczywistym rdzeniu reaktora jądrowego [107], [167].

Analiza działania regulatora  $WPI^\lambda D^\mu$  obejmowała weryfikację jego efektywności w zadaniu regulacji nadążnej (podrozdział 8.1) oraz stałowartościowej (podrozdział 8.2). Zadanie regulacji stałowartościowej występuje w analizie jako element posiłkowy, gdyż nie jest ono w żaden sposób brane pod uwagę przy rozwiązywaniu zadania optymalizacji przedstawionego w rozdziale 6.

Zadanie regulacji nadążnej, występujące w analizie, rozpatrywane jest według następujących scenariuszy:

- zmiana mocy cieplnej zadanej  $P_{TH,R}$  według trajektorii złożonej z funkcji schodkowej, która została wykorzystana w drugim etapie optymalizacji (rysunek 6.5) – podrozdział 8.1.1,

- zmiana mocy cieplnej zadanej  $P_{TH,R}$  według trajektorii sinusoidalnej stanowiącej wygładzoną wersję trajektorii złożonej z funkcji schodkowej z poprzedniego punktu – podrozdział 8.1.2,
- zmiana mocy cieplnej zadanej  $P_{TH,R}$  według trajektorii sinusoidalnej o zwiększonej częstotliwości; w tym przypadku częstotliwość trajektorii zadanej została dobrana w taki sposób, aby wymusić na urządzeniu wykonawczym pracę z maksymalną prędkością prętów sterujących – podrozdział 8.1.3.

Natomiast w zadaniu regulacji stałowartościowej zdefiniowane zostały następujące scenariusze:

- skokowe zmiany wielkości zakłócającej, którą jest temperatura chłodziwa  $T_{C,in}$  na wejściu do reaktora, wynoszące  $\pm 3\%$  wartości nominalnej (wartość nominalna: 281,94 °C) – podrozdział 8.2.1,
- skokowe zmiany wielkości zakłócającej, którą jest masowy przepływ chłodziwa  $W_C$  przez reaktor, wynoszące  $\pm 10\%$  wartości nominalnej (wartość nominalna: 19851,92 kg/s) – podrozdział 8.2.2.

W każdym z przypadków ocena jakości sterowania realizowana była w oparciu o całkowite wskaźniki jakości przedstawione w podrozdziale 6.1, tj. ISE, IAE oraz typu LQ. Wymienione wskaźniki jakości zostały wykorzystane w przeprowadzonej analizie w następujący sposób:

- wskaźnik jakości ISE wykorzystano do oceny układu regulacji, w którym zamiennie wystąpiły regulatory o parametrach dobranych w wyniku rozwiązania zadania optymalizacji w wariancie pierwszym (rysunek 6.3); w pierwszym wariancie optymalizacji wykorzystano następujące wskaźniki jakości: etap pierwszy – ISE, etap drugi – ISE,
- wskaźnik jakości IAE wykorzystano do oceny układu regulacji, w którym zamiennie wystąpiły regulatory o parametrach dobranych w wyniku rozwiązania zadania optymalizacji w wariancie drugim (rysunek 6.3); w drugim wariancie optymalizacji wykorzystano następujące wskaźniki jakości: etap pierwszy – ITAE, etap drugi – IAE,
- wskaźnik jakości typu LQ wykorzystano do oceny układu regulacji, w którym zamiennie wystąpiły regulatory o parametrach dobranych w wyniku rozwiązania zadania optymalizacji w wariancie trzecim (rysunek 6.3); w trzecim wariancie optymalizacji wykorzystano następujące wskaźniki jakości: etap pierwszy – LQ, etap drugi – LQ.

Na potrzeby graficznej prezentacji uzyskanych wyników w dalszej części rozdziału przyjęto następującą kolorystykę:

- przerywana linia koloru niebieskiego – trajektorie mocy zadanej, wartości nominalne wielkości zakłócających,
- przerywana linia koloru czerwonego – wartości graniczne lub maksymalne wielkości prezentowanych na wykresach,
- linia koloru miniowego – wykresy wielkości występujących w układzie regulacji z pojedynczym regulatorem PID, zmiany wielkości zakłócających  $T_{C,in}$  i  $W_C$ ,
- linia koloru żółtego – wykresy wielkości występujących w układzie regulacji z pojedynczym regulatorem  $PI^{\lambda}D^{\mu}$ ,
- linia koloru purpurowego – wykresy wielkości występujących w układzie regulacji z wieloobszarowym rozmytym regulatorem WPID,
- linia koloru zielonego – wykresy wielkości występujących w układzie regulacji z wieloobszarowym rozmytym regulatorem  $WPI^{\lambda}D^{\mu}$ .

## 8.1 Regulacja nadążna

W tym podrozdziale, zostały zamieszczone wyniki analizy działania układu sterowania (rysunek 8.1) dla scenariuszy zadań regulacji nadążnej. Zostały one zaprezentowane w postaci zestawów wykresów czasowych, wykresów słupkowych oraz tabel. Zestawy wykresów czasowych zawierają odpowiednio:

- przebiegi trajektorii mocy cieplnej zadanej  $P_{TH,R}$  oraz mocy cieplnej  $P_{TH}$  realizowanej przez układ regulacji (obydwie wartości zostały odniesione do nominalnej mocy cieplnej reaktora  $P_{TH,N}$ ),
- przebiegi prędkości prętów sterujących  $v_{R,sat}$ , która realizowana jest przez urządzenie wykonawcze, tj. napęd prętów sterujących,
- przebieg położenia prętów sterujących  $x(t)$  w rdzeniu reaktora.

Na wyżej wymienionych zestawach wykresów zamieszczono przebiegi uzyskane w trakcie symulacyjnych badań testowych z każdym rozpatrywanym typem regulatora (rysunek 8.1). Dla każdej trajektorii mocy cieplnej zadanej wykorzystanej w analizie zostały naszkicowane trzy zestawy wykresów zawarte odpowiednio w podrozdziałach 8.1.1, 8.1.2 oraz 8.1.3. Zestawy wykresów w każdym wymienionym podrozdziale zostały sporządzone dla każdego wariantu optymalizacji.

Wykresy słupkowe odzwierciedlają procentowe wartości całkowitych kryteriów jakości wykorzystanych w porównaniu. Na jednym wykresie słupkowym zostały zestawione wyniki dla regulatorów, których parametry dobrano w trzech wariantach optymalizacji. Wartości procentowe zawsze odnoszą się do wartości wskaźnika jakości uzyskanego w układzie regulacji z regulatorem

WPI<sup>λ</sup>D<sup>μ</sup> (zielony słupek) dla danego wariantu optymalizacji. Z uwagi na ten fakt procentowa wartość wskaźnika jakości dla tego regulatora zawsze wynosi 100%. Wartości poniżej 100% oznaczają lepszą wartość całkowego wskaźnika jakości, natomiast wartości powyżej 100% oznaczają jego gorszą wartość (względnie lepiej, względnie gorzej). Całkowe wskaźniki jakości zostały wyznaczone na podstawie przebiegów zadanej mocy cieplnej  $P_{TH,R}$  oraz mocy cieplnej realizowanej przez układ sterowania  $P_{TH}$ . W przypadku kryterium typu LQ do wyznaczenia całkowego wskaźnika jakości wykorzystano również przebieg prędkości prętów sterujących  $v_{R,sat}$ , która jest realizowana przez urządzenie wykonawcze. Bezwzględne wartości całkowych wskaźników jakości zostały zamieszczone w odpowiednich tabelach, które znajdują się pod wykresami słupkowymi.

### 8.1.1 Trajektoria schodkowa mocy cieplnej zadanej

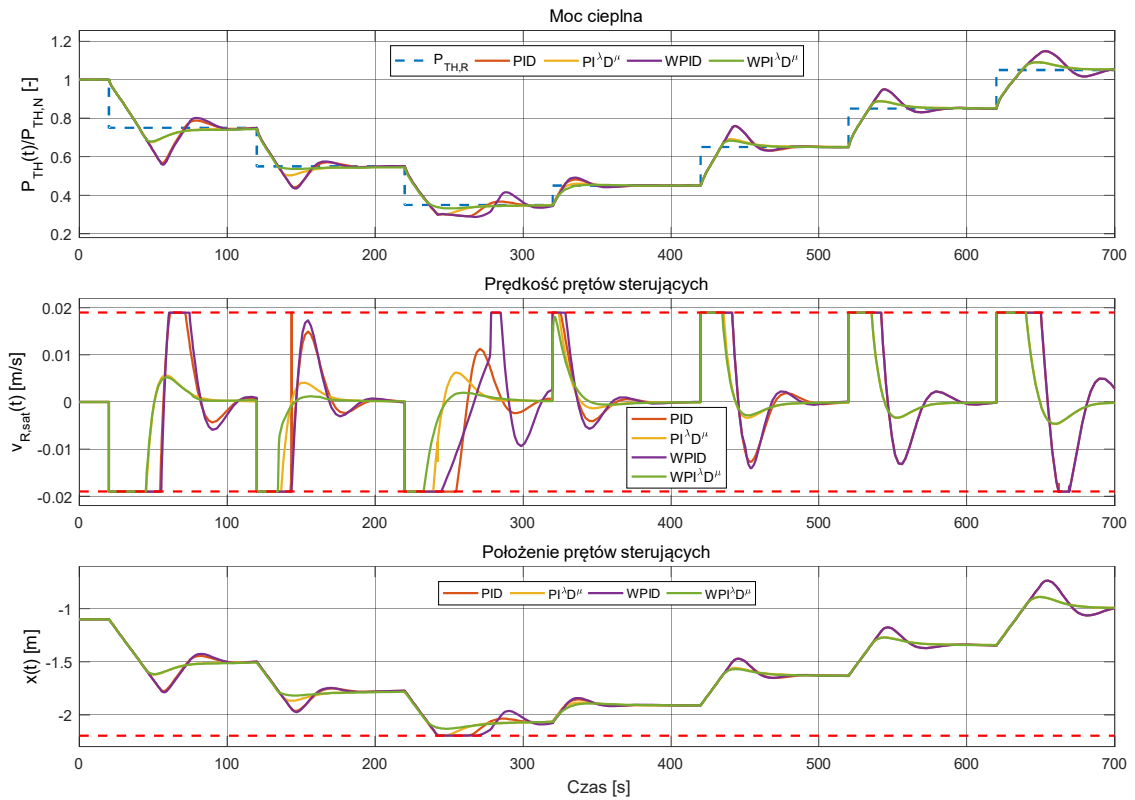
Na rysunku 8.2 zaprezentowano zestaw wykresów dla układu regulacji, w którym wystąpiły regulatory z parametrami dobranymi w pierwszym wariantcie optymalizacji. Na rysunku 8.3 przedstawiono zestaw wykresów dla układu regulacji, w którym wystąpiły regulatory z parametrami dobranymi w drugim wariantcie optymalizacji. Ostatni zestaw wykresów zamieszczony na rysunku 8.4 został przedstawiony dla układu regulacji, w którym wystąpiły regulatory z parametrami dobranymi w trzecim wariantcie optymalizacji. Na rysunku 8.5 został umieszczony wykres słupkowy prezentujący procentowe wartości całkowych wskaźników jakości wykorzystanych w ocenie jakości regulacji, natomiast wartości bezwzględne tych wskaźników zostały zamieszczone w tabeli 8.1.

Na rysunku 8.2 można zauważyć, że odpowiedź układu regulacji, w którym zastosowano regulator WPI<sup>λ</sup>D<sup>μ</sup> charakteryzuje się najmniejszymi przeregulowaniami oraz czasami regulacji. Odpowiedź tego układu nie ma charakteru oscylacyjnego w przeciwieństwie do odpowiedzi uzyskanych przez układ regulacji z innymi porównywanymi regulatorami. Na przebiegach prędkości prętów sterujących można zauważyć, że układ regulacji pracujący z regulatorem WPI<sup>λ</sup>D<sup>μ</sup> najszybciej wychodzi z obszarów saturacji urządzenia wykonawczego. Przekłada się to bezpośrednio na najmniejszą rozpiętość położenia prętów sterujących w rdzeniu reaktora. W wynikach przedstawionych na rysunku 8.2 można również zauważyć, że układ sterowania pracujący z regulatorem WPI<sup>λ</sup>D<sup>μ</sup> jako jedyny nie osiąga minimalnej pozycji prętów sterujących w rdzeniu reaktora.

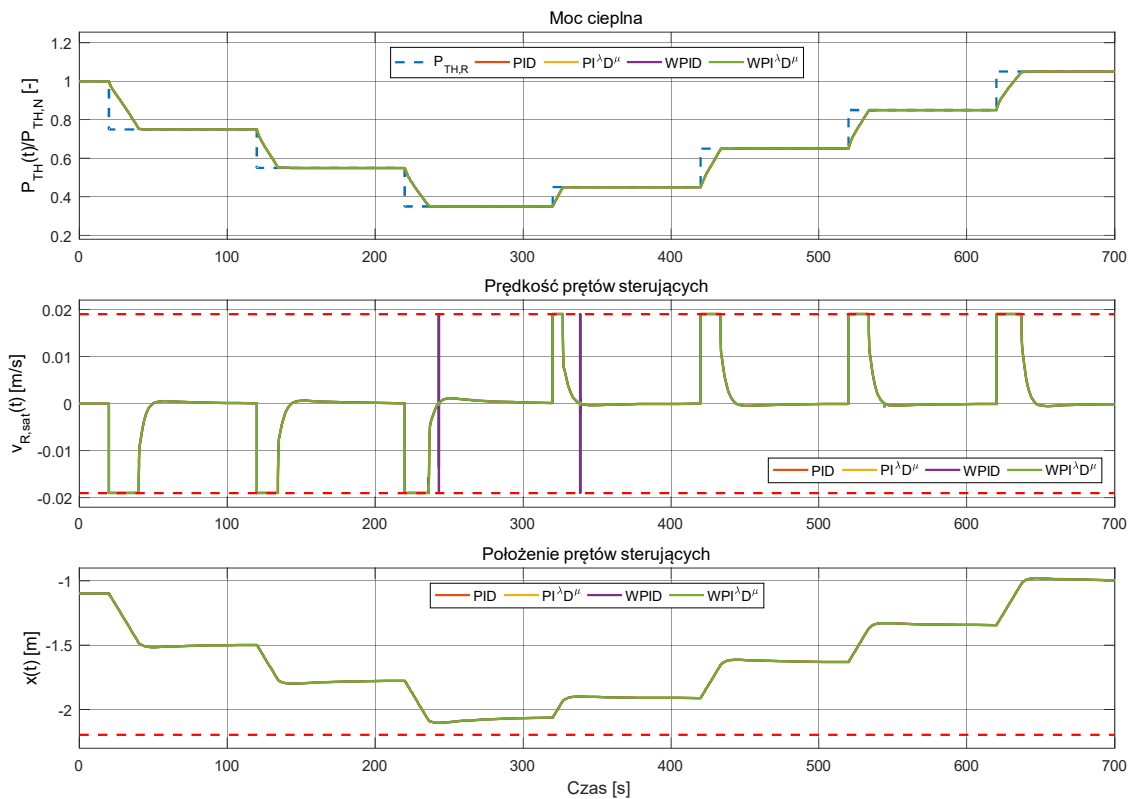
Na podstawie rysunku 8.3, można stwierdzić, że układ sterowania z porównywanymi regulatorami, których parametry dobrano w drugim wariantcie optymalizacji, charakteryzuje się porównywalną jakością sterowania. Jedynym odstępstwem od tej sytuacji jest regulator WPID, który

generuje „szpilki” w sygnale prędkości prętów sterujących. Nie wpływają one jednak na odpowiedź układu regulacji, tj. moc cieplną. Można również zauważyć, że każdy porównywany regulator osiąga okolice punktu pracy w krótkim czasie. Natomiast na wykresach położenia i prędkości prętów sterujących można zauważyć, że osiągnięcie dokładnej wartości mocy cieplnej wyznaczonej przez trajektorię zadaną następuje po stosunkowo długim czasie, gdyż prędkość prętów nie maleje od razu do zera po pozornym zrównaniu się aktualnej mocy cieplnej wytwarzanej przez obiekt sterowania z mocą zadaną. Z kolei na wykresie położenia prętów widoczne jest delikatne nachylenie zamieszczonych tam przebiegów po każdorazowym zaniknięciu wyraźnego stanu przejściowego, co również potwierdza powolne osiągnięcie zadanej wartości mocy.

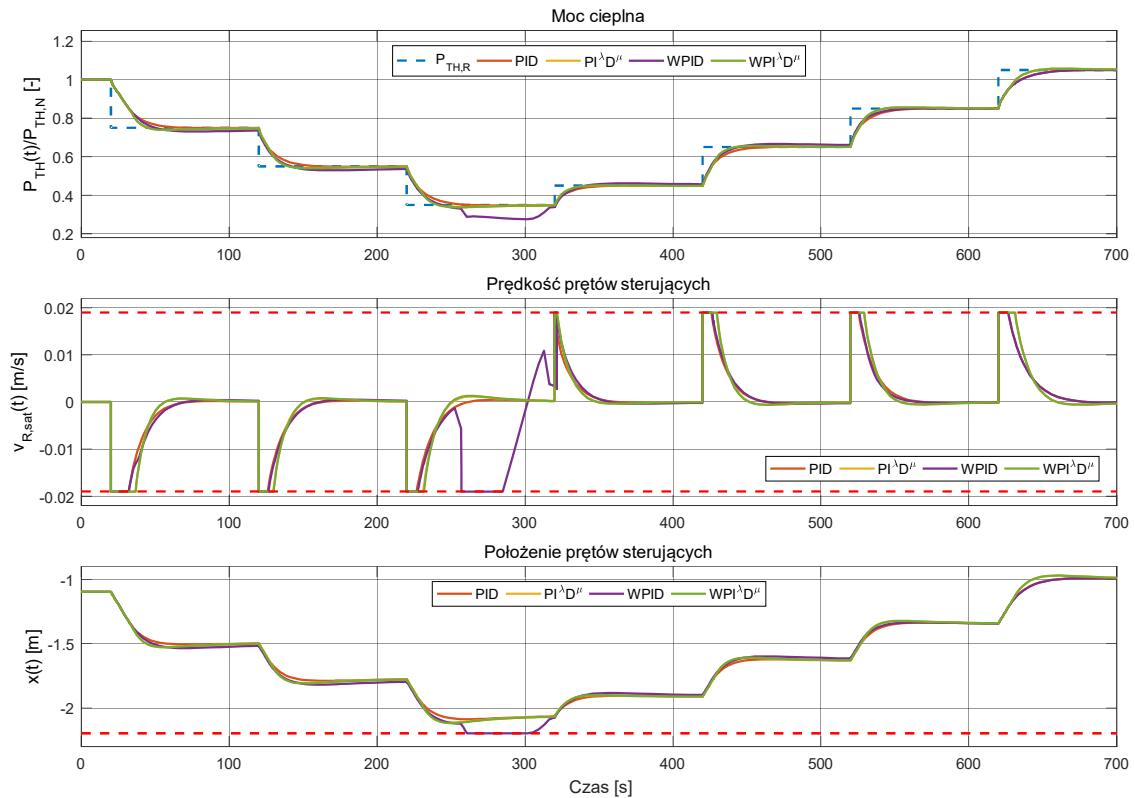
Na rysunku 8.4 można zauważyć, że porównywane regulatory, charakteryzują się zbliżoną jakością sterowania, a układ regulacji z regulatorem  $WPI^{\lambda}D^{\mu}$  uzyskuje najmniejsze czasy regulacji podczas przechodzenia między kolejnymi punktami pracy. Skutkuje to zwiększonym obciążeniem urządzenia wykonawczego, gdyż przez dłuższe okresy czasu pracuje ono z maksymalnymi dopuszczalnymi prędkościami. Pomimo tej niedogodności w układzie regulacji z regulatorem  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  oraz  $WPI^{\lambda}D^{\mu}$  nie występuje efekt związany z interakcją członu całkującego i nasycenia (ang. integral windup). Na tym porównaniu, można również zauważyć, że układ regulacji z regulatorem WPID, jako jedyny nie jest w stanie osiągnąć minimalnego zadanego poziomu mocy cieplnej. dodatkowo odpowiedź uzyskiwana z układu regulacji, dla każdego zastosowanego regulatora, ma charakter inercyjny.



Rysunek 8.2. Zestaw wykresów dla układu regulacji, w którym zastosowano regulatory z parametrami dobranymi w pierwszym wariantcie optymalizacji – schodkowa trajektoria  $P_{TH,R}$ .

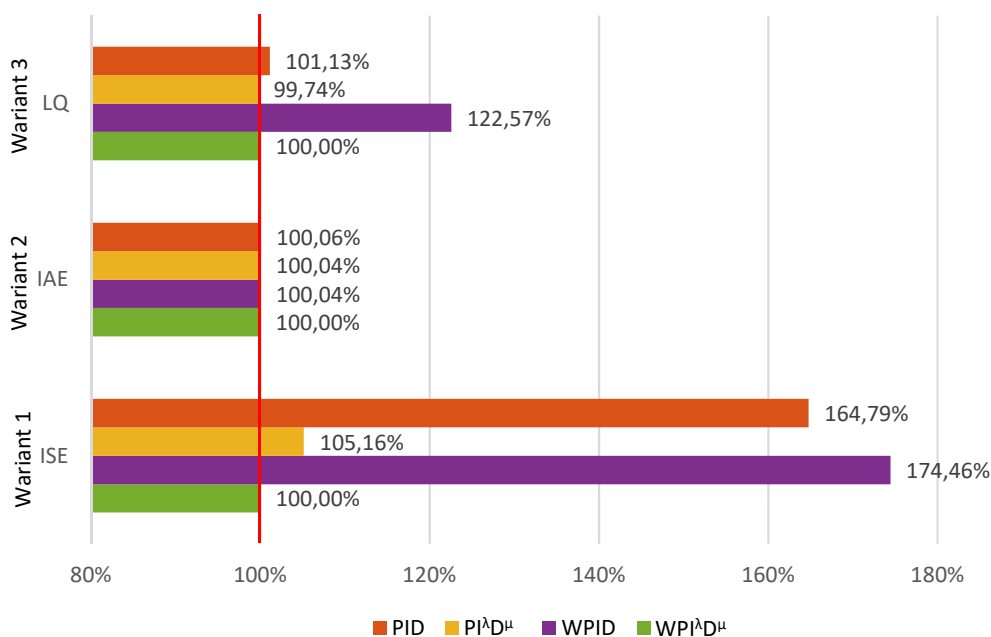


Rysunek 8.3. Zestaw wykresów dla układu regulacji, w którym zastosowano regulatory z parametrami dobranymi w drugim wariantcie optymalizacji – schodkowa trajektoria  $P_{TH,R}$ .



Rysunek 8.4. Zestaw wykresów dla układu regulacji, w którym zastosowano regulatory z parametrami dobranymi w trzecim wariantcie optymalizacji – schodkowa trajektoria  $P_{TH,R}$ .

Wartości całkowitych kryteriów jakości zestawione za pomocą wykresu słupkowego przedstawionego na rysunku 8.5 oraz w tabeli 8.1 pozwalają stwierdzić, że układ regulacji, w którym zastosowano regulatory bazujące na operatorach niecałkowitego rzędu charakteryzują się najlepszą jakością sterowania. Stwierdzenie to dotyczy wszystkich rozważanych wariantów optymalizacji, a w szczególności pierwszego. Dla pierwszego oraz drugiego wariantu optymalizacji układ regulacji z regulatorem  $WPI^{\lambda}D^{\mu}$  charakteryzuje się najmniejszą wartością wskaźnika jakości. Z kolei dla trzeciego wariantu optymalizacji to układ regulacji z regulatorem  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  uzyskał najmniejszą wartość wskaźnika jakości. Wyniki uzyskane dla układu regulacji z regulatorami, których parametry zostały dobrane w wyniku rozwiązania pierwszego wariantu optymalizacji wykazują największe zróżnicowanie. Natomiast wyniki uzyskane dla drugiego i trzeciego wariantu optymalizacji są zbliżone. Regulatory, których parametry zostały dobrane w wyniku trzeciego wariantu optymalizacji powodują, że odpowiedzi układu regulacji, w którym pracują mają charakter inercyjny. W innych przypadkach odpowiedzi układu mają charakter oscylacyjny (wariant 1, rysunek 8.2) z wyjątkiem regulatora  $WPI^{\lambda}D^{\mu}$  lub agresywny (wariant 2, rysunek 8.3), tj. uchyb regulacji jest szybko sprowadzany do okolicy aktualnego punktu pracy.



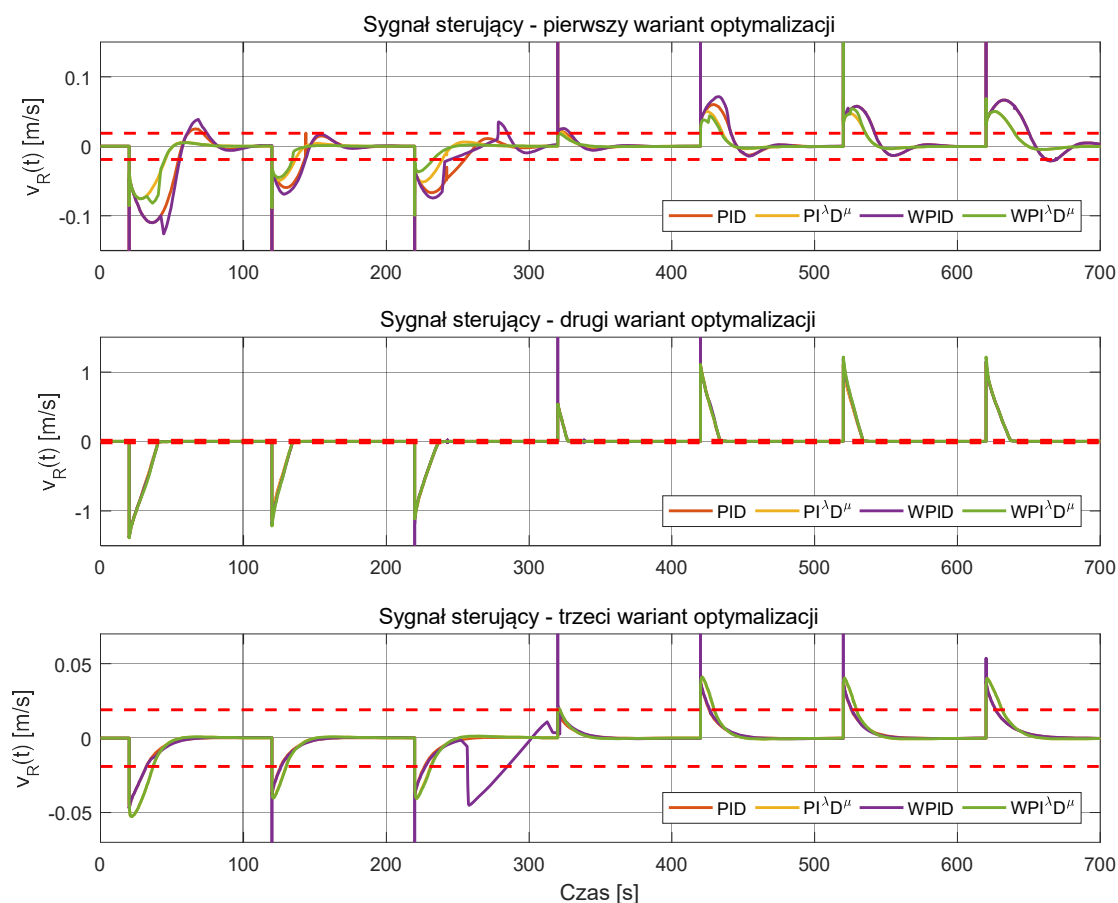
Rysunek 8.5. Wartości procentowe całkowitych kryteriów jakości sterowania dla układu regulacji, w którym zastosowano regulatory z parametrami dobranymi w trzech wariantach optymalizacji – schodkowa trajektoria  $P_{TH,R}$ . Wartości procentowe zostały odniesione do układu regulacji z reg.  $WPI^{\lambda}D^{\mu}$ .

Tabela 8.1. Wartości bezwzględne całkowitych kryteriów jakości sterowania dla układu regulacji, w którym zastosowano regulatory z parametrami dobranymi w trzech wariantach optymalizacji – schodkowa trajektoria  $P_{TH,R}$ .

Wariant optymalizacji	Kryterium jakości	Regulator			
		PID	PI <sup>λ</sup> D <sup>μ</sup>	WPID	WPI <sup>λ</sup> D <sup>μ</sup>
1	ISE	2,2735	1,4508	2,4069	1,3796
2	IAE	9,6601	9,6574	9,6578	9,6540
3	LQ	0,11512	0,11354	0,13953	0,11384

Na zestawach wykresów zamieszczonych na rysunkach 8.2, 8.3 i 8.4 została przedstawiona prędkość prętów sterujących realizowana przez urządzenie wykonawcze. W celach poglądowych na rysunku 8.6 zostały zamieszczone wykresy prezentujące sygnały sterujące na wyjściu każdego z regulatorów, dla wszystkich rozważanych wariantów optymalizacji. Na wykresach tych można zaobserwować jak często i o jaką wartość przekraczane są ograniczenia związane z sygnałem sterującym wypracowywanym przez każdy z regulatorów. Regulatory, których nastawy dobrano optymalnie zgodnie z drugim wariantem optymalizacji charakteryzują się największymi amplitudami sygnałów  $v_R$ , natomiast najmniejsze amplitudy tych sygnałów generowane były przez regulatory, których nastawy dobrano według trzeciego wariantu optymalizacji. W przypadku trzeciego wariantu optymalizacji jest to uzasadnione, gdyż kryterium jakości LQ oprócz uchybu regulacji bierze pod uwagę również sygnał prędkości prętów sterujących  $v_{R,sat}$ .





Rysunek 8.6. Sygnały sterujące na wyjściu z regulatorów dla różnych wariantów optymalizacji – schodkowa trajektoria  $P_{TH,R}$ .

### 8.1.2 Trajektoria sinusoidalna mocy cieplnej zadanej

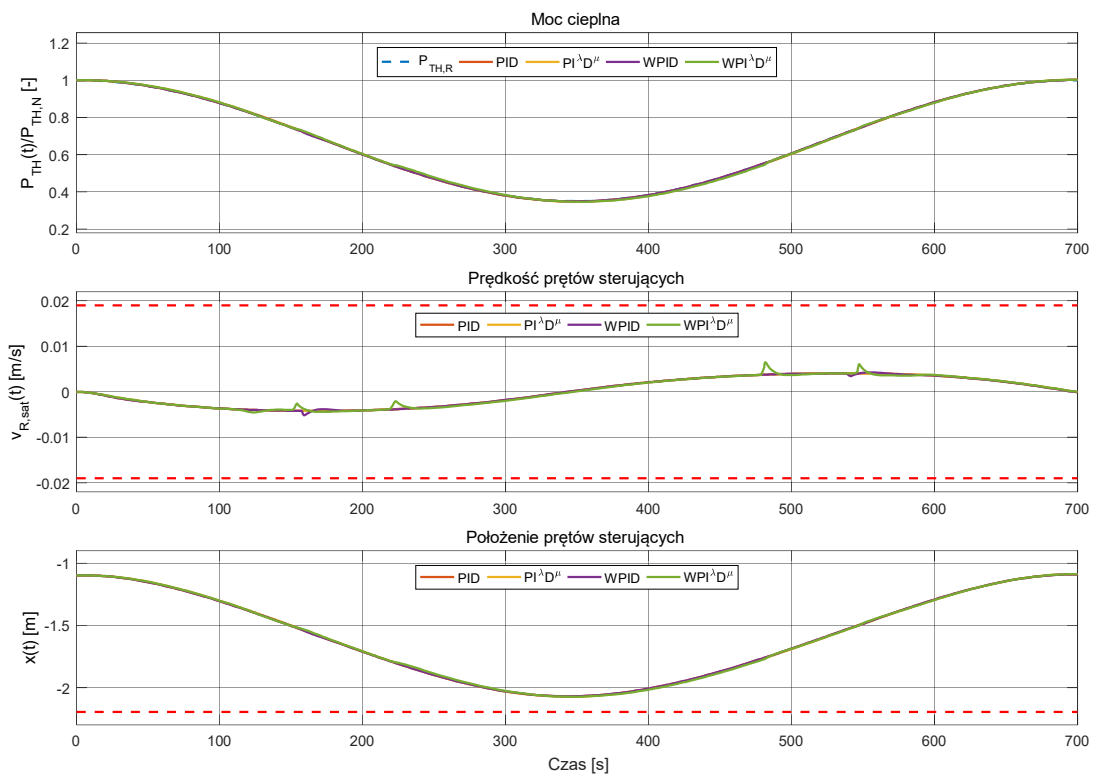
Na rysunkach 8.7, 8.8 i 8.9 przedstawiono zestawy wykresów związane z wynikami uzyskanymi przez każdy z weryfikowanych regulatorów dla sinusoidalnej trajektorii mocy cieplnej zadanej. Parametry każdego z regulatorów dobrano z uwzględnieniem różnych kryteriów jakości, tj. odpowiednio w pierwszym, drugim oraz trzecim wariantcie optymalizacji. Na ostatnim rysunku w tym podrozdziale został umieszczony wykres słupkowy prezentujący wartości procentowe całkowych wskaźników jakości wykorzystanych do oceny jakości sterowania uzyskanej w wyniku działania regulatorów biorących udział w analizie. Wartości bezwzględne tych wskaźników zostały zamieszczone w tabeli 8.2.

Z analizy zestawu wykresów z rysunku 8.7 wynika, że odpowiedź układu sterowania jest niemalże taka sama dla każdego z porównywanych regulatorów. Niewielkie różnice w działaniu regulatorów widoczne są na wykresie prędkości prętów sterujących. Można na nim zauważyć niewielkie „zębki” dla układu regulacji, w którym występowały regulatory WPID oraz  $WPI^{\lambda}D^{\mu}$ . Zębki te powstają w wyniku miękkiego przełączania się lokalnych regulatorów PID i  $PI^{\lambda}D^{\mu}$ , które

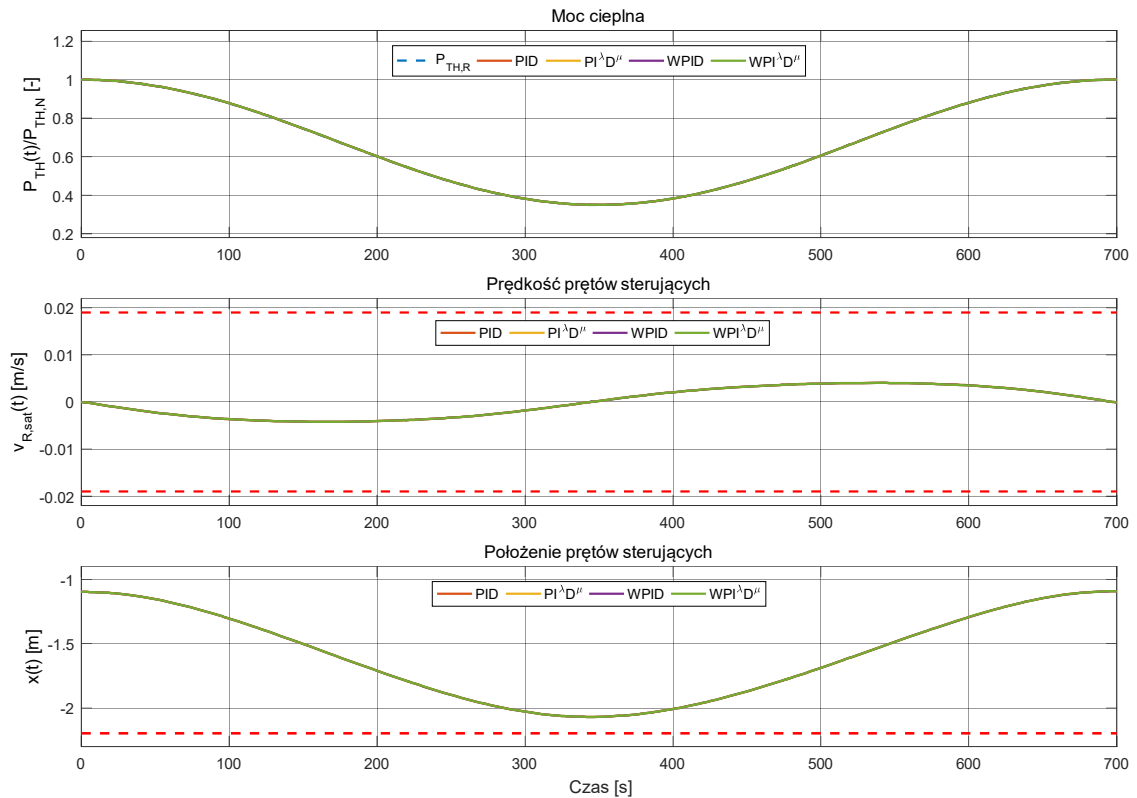
wchodzą w skład zastosowanych regulatorów wieloobszarowych. Trajektoria sinusoidalna stanowiąca „wygładzoną” wersję trajektorii złożonej z funkcji schodkowej nie zawiera gwałtownych zmian punktu pracy. W związku z tym, dla takiego przypadku niemalże identyczne działanie regulatorów jest uzasadnione. Trajektoria ta nie powoduje również znaczącego obciążenia urządzenia wykonawczego, gdyż prędkość prętów sterujących jest stosunkowo mała i nie zbliża się do dopuszczalnych wartości maksymalnych.

Podobnie jak w poprzednim przypadku odpowiedzi układu regulacji, zaprezentowane na zestawie wykresów z rysunku 8.8, dla wszystkich porównywanych regulatorów, których parametry dobrano w drugim wariantcie optymalizacji, są niemalże identyczne. W przeciwieństwie do regulatorów, których parametry zostały dobrane w pierwszym wariantcie optymalizacji, w tym przypadku na wykresach prędkości prętów sterujących nie widać żadnych różnic w przebiegach.

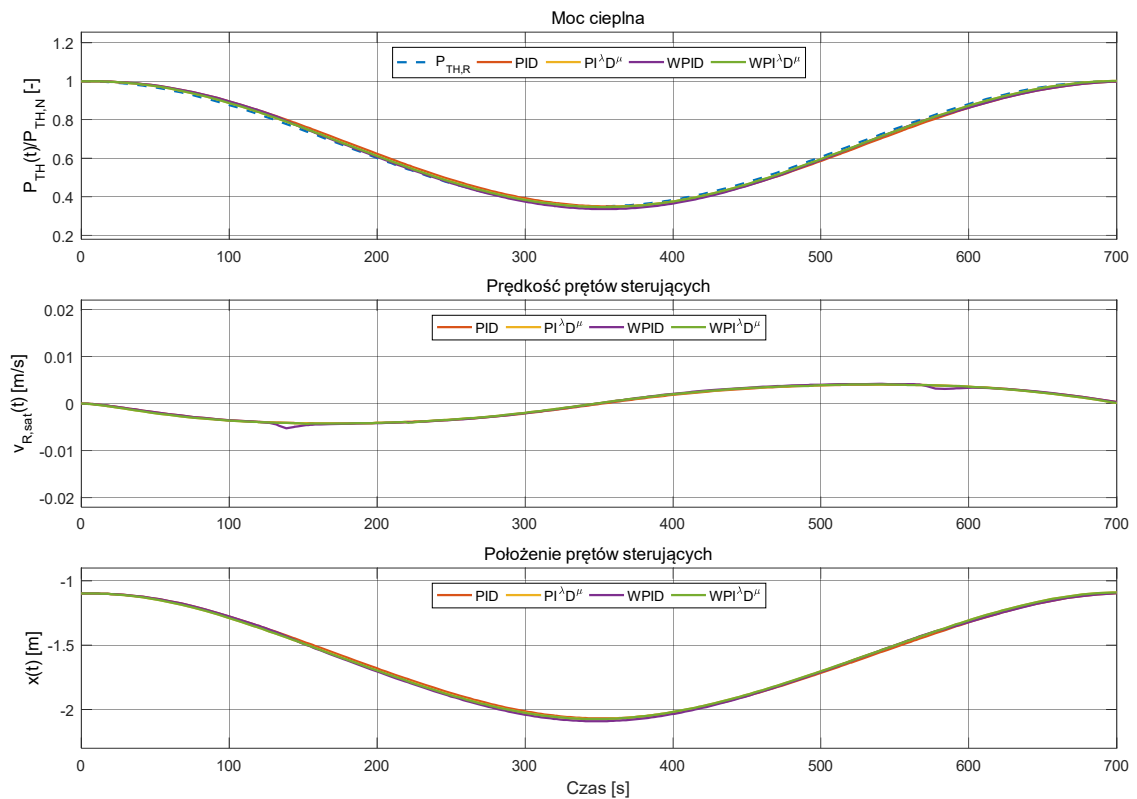
Na zestawie wykresów z rysunku 8.9 można zauważyć, że tak jak w poprzednich przypadkach (rysunki 8.7 i 8.8), realizacja trajektorii zadanej przez układ regulacji, w którym występowały porównywane regulatory jest niemalże identyczna. Jedyną zauważalną różnicą, która występuje na wykresach mocy cieplnej, jest minimalne przesunięcie fazowe między trajektorią zadaną a odpowiedzią układu regulacji dla każdego porównywanego regulatora. Na wykresie prędkości prętów sterujących, tak jak w pierwszym przypadku, dostrzegalne są niewielkie „zębki”, jednakże występują one wyłącznie dla regulatora WPID.



Rysunek 8.7. Zestaw wykresów dla układu regulacji, w którym zastosowano regulatory z parametrami dobranymi w pierwszym wariantcie optymalizacji – sinusoidalna trajektoria  $P_{TH,R}$ .



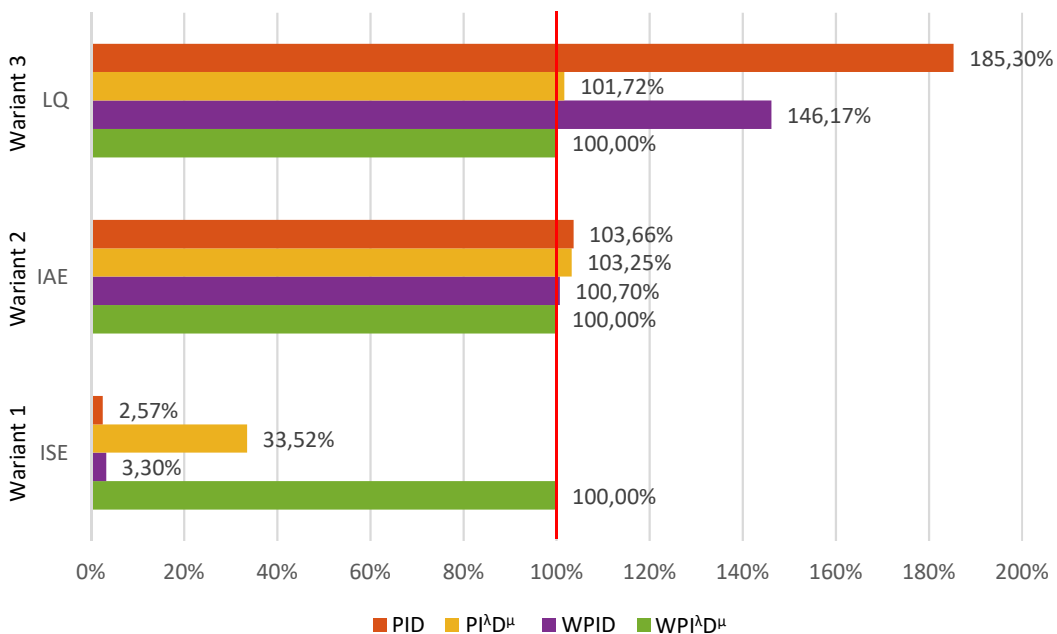
Rysunek 8.8. Zestaw wykresów dla układu regulacji, w którym zastosowano regulatory z parametrami dobranymi w drugim wariantcie optymalizacji – sinusoidalna trajektoria  $P_{THR}$ .



Rysunek 8.9. Zestaw wykresów dla układu regulacji, w którym zastosowano regulatory z parametrami dobranymi w trzecim wariantcie optymalizacji – sinusoidalna trajektoria  $P_{THR}$ .

Wartości całkowitych kryteriów jakości sterowania zestawione na rysunku 8.10 oraz w tabeli 8.2 pozwalają stwierdzić, że dla drugiego oraz trzeciego wariantu optymalizacji najlepszy wynik osiągnął regulator  $WPI^{\lambda}D^{\mu}$ . W przypadku pierwszego wariantu optymalizacji najlepszy wynik osiągnął regulator PID. Należy zwrócić uwagę, że trajektoria wolnozmienna, taka jak wykorzystana w tym scenariuszu, jest najbardziej prawdopodobna w kontekście zmian punktu pracy elektrowni jądrowej, gdy nie występują stany awaryjne. Dla takiej trajektorii wolnozmiennnej wszystkie badane regulatory sprawdzają się bardzo dobrze, a różnice w jej odtwarzaniu są praktycznie niewidoczne. Na wykresach słupkowych przedstawionych na rysunku 8.10 można zaobserwować pozornie duże różnice między porównywanymi regulatorami w szczególności dla pierwszego oraz trzeciego wariantu optymalizacji. Jednakże bardzo mały rząd wielkości wartości bezwzględnych wskaźników jakości, które zestawione zostały w tabeli 8.2, pozwala stwierdzić, że wszystkie porównywane regulatory charakteryzują się bardzo dobrą jakością sterowania w przypadku wolno zmiennych trajektorii zadanej mocy cieplnej.

Z wykresów słupkowych przedstawionych na rysunku 8.10 można również wywnioskować, że zastosowanie regulatora PID, którego parametry zostały dobrane w czwartym podzadaniu optymalizacji etapu pierwszego, w układzie regulacji mocy cieplnej, pozwala osiągnąć najlepszą jakość regulacji przy ocenie według wskaźnika jakości ISE. Jednakże zastosowanie tego samego regulatora z nastawami dobranymi według trzeciego wariantu optymalizacji skutkuje w tym przypadku najgorszą jakością regulacji przy ocenie według wskaźnika jakości LQ.



Rysunek 8.10. Wartości procentowe całkowitych kryteriów jakości sterowania dla układu regulacji, w którym zastosowano regulatory z parametrami dobranymi w trzech wariantach optymalizacji – sinusoidalna trajektoria  $P_{TH,R}$ . Wartości procentowe zostały odniesione do układu regulacji z reg.  $WPI^{\lambda}D^{\mu}$ .

Tabela 8.2. Wartości bezwzględne całkowych kryteriów jakości sterowania dla układu regulacji, w którym zastosowano regulatory z parametrami dobranymi w trzech wariantach optymalizacji – sinusoidalna trajektoria  $P_{TH,R}$ .

Wariant optymalizacji	Kryterium jakości	Regulator			
		PID	PI <sup>λ</sup> D <sup>μ</sup>	WPID	WPI <sup>λ</sup> D <sup>μ</sup>
1	ISE	0,0003	0,0040	0,0004	0,0119
2	IAE	0,3540	0,3526	0,3439	0,3415
3	LQ	0,01803	0,00990	0,01422	0,00973

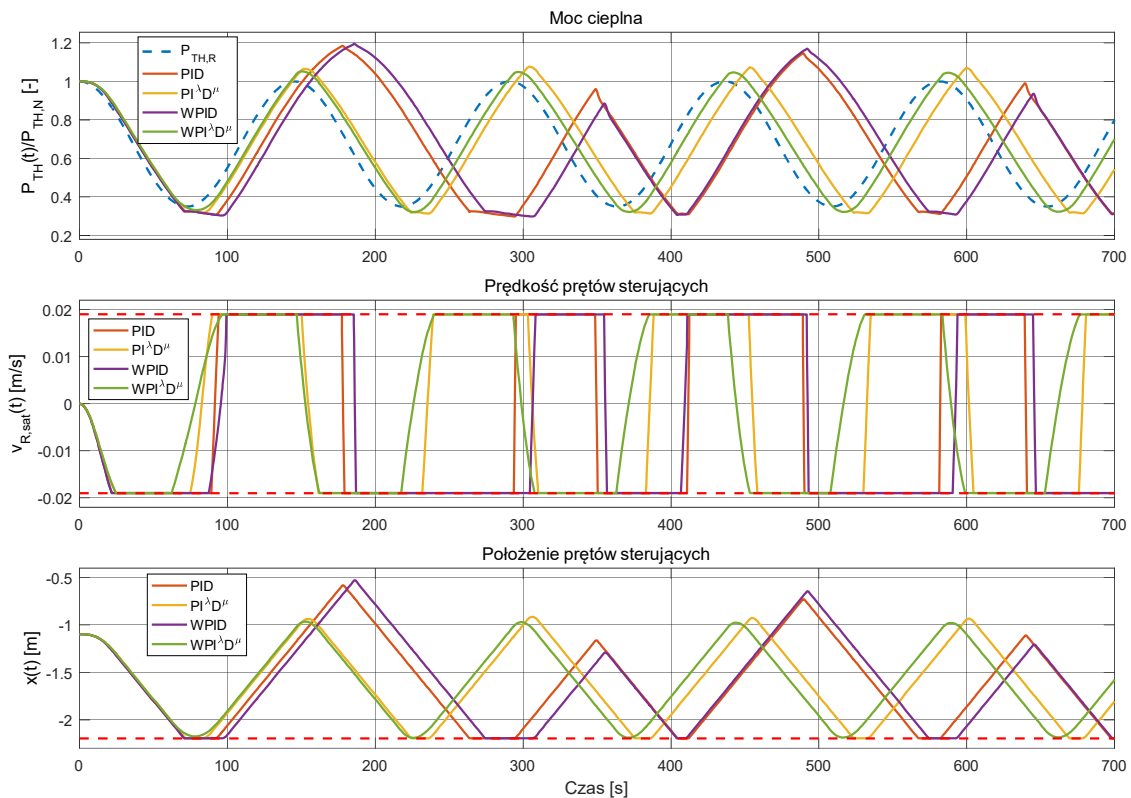
### 8.1.3 Trajektoria sinusoidalna mocy cieplnej zadanej o zwiększonej częstotliwości

W tym podrozdziale zaprezentowano zestawy wykresów dla układu regulacji, w którym wystąpiły regulatory z parametrami dobranymi w pierwszym, drugim oraz trzecim wariantcie optymalizacji, przy założeniu zmian wartości zadanej mocy cieplnej zgodnie z trajektorią sinusoidalną o częstotliwości zasadniczo większej niż w poprzednim podrozdziale 8.1.2. Na rysunkach 8.11, 8.12 oraz 8.13 zostały przedstawione zestawy wykresów dla układu regulacji, w którym wystąpiły regulatory z parametrami dobranymi odpowiednio w pierwszym, drugim oraz trzecim wariantcie optymalizacji. Na ostatnim rysunku w tym podrozdziale został umieszczony wykres słupkowy prezentujący procentowe wartości całkowych wskaźników jakości wykorzystanych w ocenie jakości regulacji zastosowanych w analizie regulatorów, natomiast wartości bezwzględne tych wskaźników zostały zamieszczone odpowiednio w tabeli 8.3.

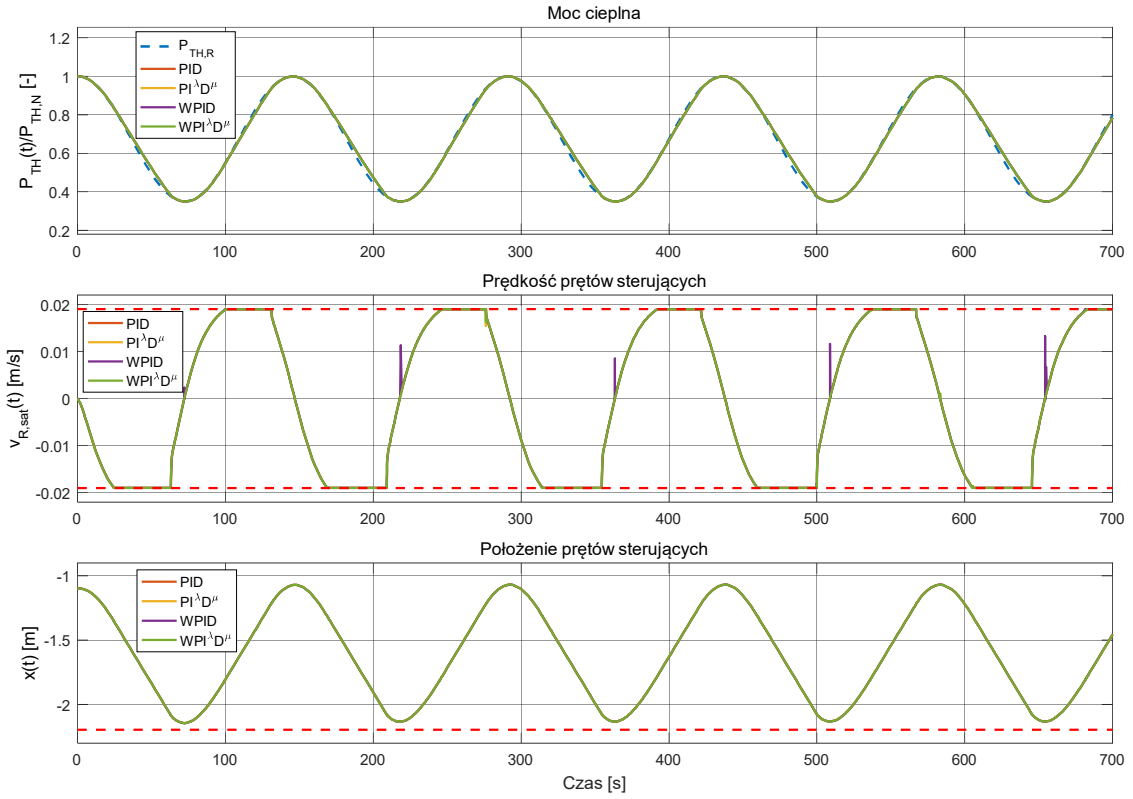
Zastosowanie sinusoidalnej trajektorii mocy cieplnej zadanej o zwiększonej częstotliwości pokazuje, że układ regulacji, w którym zastosowano regulatory PID oraz WPID, nie jest w stanie w poprawny sposób jej odtworzyć (rysunek 8.11). Zastosowanie tych regulatorów powoduje duże przesunięcie fazowe pomiędzy mocą cieplną odtwarzaną przez układ regulacji oraz mocą cieplną zadaną. Dodatkowo amplituda odpowiedzi układu regulacji z tymi regulatorami jest zmienna, natomiast układ regulacji z regulatorami PI<sup>λ</sup>D<sup>μ</sup> oraz WPI<sup>λ</sup>D<sup>μ</sup> odtwarza moc zadaną z niewielkim przesunięciem fazowym. Przesunięcie to powiększa się w czasie dla regulatora PI<sup>λ</sup>D<sup>μ</sup>. Z wykresów prędkości oraz położenia prętów sterujących można odczytać, że urządzenie wykonawcze pracuje z bardzo dużym obciążeniem. Piłokształtne przebiegi położenia prętów sterujących świadczą o tym, że urządzenie wykonawcze nie jest w stanie przemieszczać prętów z jeszcze większą prędkością. Widoczna przewaga regulatorów PI<sup>λ</sup>D<sup>μ</sup> oraz WPI<sup>λ</sup>D<sup>μ</sup>, tak jak w poprzednich przypadkach, wynika głównie z szybszej ich reakcji na zmianę trajektorii zadanej, która spowodowana jest prawie natychmiastowym wychodzeniem układu regulacji z obszarów nasycenia urządzenia wykonawczego bez tzw. efektu windup części całkującej.

Dobór nastaw w drugim wariantcie optymalizacji tak jak w poprzednich przypadkach pokazuje, że układ regulacji z różnymi regulatorami może pracować w ten sam sposób (rysunek 8.12). Odtwarzanie trajektorii zadanej mocy cieplnej przez układ regulacji jest identyczny dla każdego zastosowanego regulatora. Na wykresach prędkości prętów sterujących widoczne są „szpilki” dla układu regulacji, w którym występował regulator WPID.

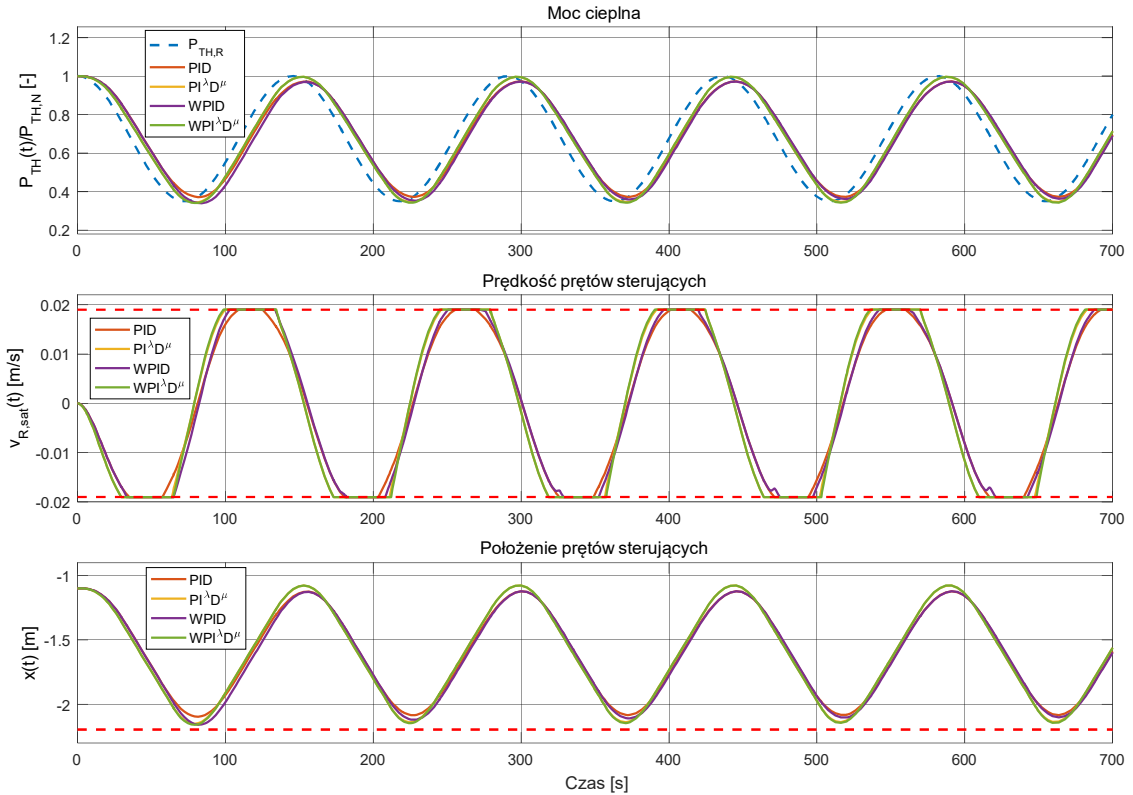
Na rysunku 8.13 można zauważyć występowanie niewielkiego przesunięcia fazowego względem mocy cieplnej zadanej, dla każdego zastosowanego regulatora, którego parametry zostały dobrane w trzecim wariantcie optymalizacji. Podobne wyniki uzyskano w przypadku wykorzystania sinusoidalnej trajektorii mocy cieplnej zadanej (rysunek 8.9). Również w rozpatrywanym przypadku (rysunek 8.13) sygnały sterujące z regulatorów są bardzo zbliżone. Układ regulacji z regulatorem  $WPI^{\lambda}D^{\mu}$  charakteryzuje się najmniejszym przesunięciem fazowym.



Rysunek 8.11. Zestaw wykresów dla układu regulacji, w którym zastosowano regulatory z parametrami dobranymi w pierwszym wariantcie optymalizacji – sinusoidalna trajektoria  $P_{TH,R}$  o zwiększonej częstotliwości.

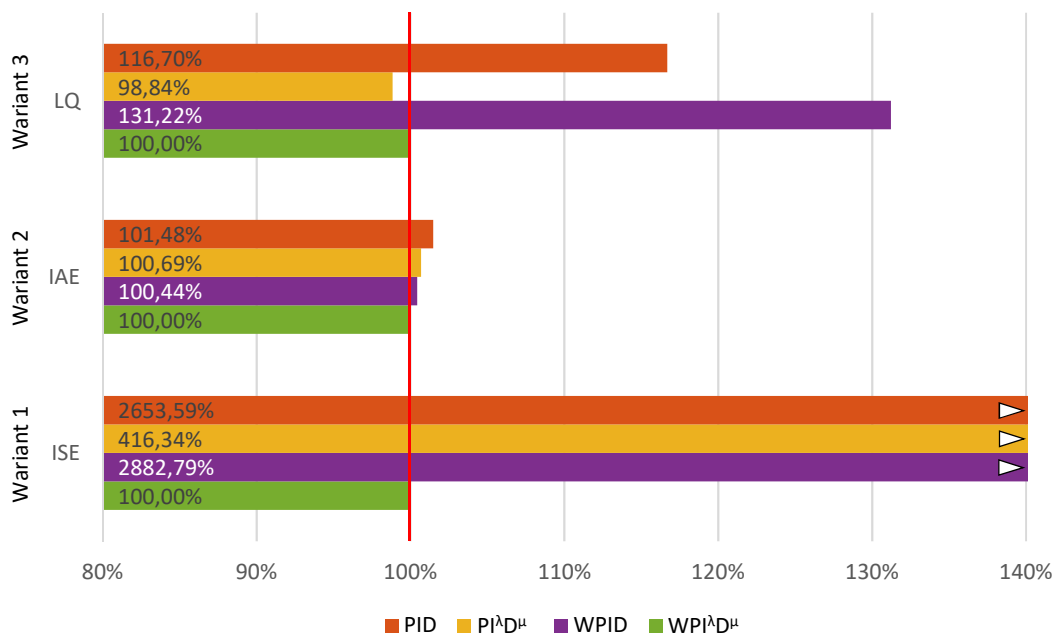


Rysunek 8.12. Zestaw wykresów dla układu regulacji, w którym zastosowano regulatory z parametrami dobranymi w drugim wariantcie optymalizacji – sinusoidalna trajektoria  $P_{TH,R}$  o zwiększonej częstotliwości.



Rysunek 8.13. Zestaw wykresów dla układu regulacji, w którym zastosowano regulatory z parametrami dobranymi w trzecim wariantcie optymalizacji – sinusoidalna trajektoria  $P_{TH,R}$  o zwiększonej częstotliwości.

Z zestawienia całkowitych wskaźników jakości, które przedstawiono na rysunku 8.14 oraz w tabeli 8.3, można wywnioskować, że układ regulacji, w którym zastosowano regulatory  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  oraz  $WPI^{\lambda}D^{\mu}$  charakteryzuje się najlepszą jakością sterowania dla szybkozmiennnej trajektorii sinusoidalnej mocy cieplnej zadanej. Dla trzeciego wariantu optymalizacji układ regulacji z regulatorem  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  okazał się najlepszy z różnicą w stosunku do regulatora  $WPI^{\lambda}D^{\mu}$ , która wynosi 1,16%. Dla pierwszego wariantu optymalizacji regulator  $WPI^{\lambda}D^{\mu}$  cechuje się zdecydowanie najlepszą jakością sterowania w porównaniu do układu regulacji z innymi regulatorami. Bardzo duże zróżnicowanie wyników dla pierwszego wariantu optymalizacji wynika głównie z dużego przesunięcia fazowego pomiędzy odtwarzaną a zadaną mocą cieplną.



Rysunek 8.14. Wartości procentowe całkowitych kryteriów jakości sterowania dla układu regulacji, w którym zastosowano regulatory z parametrami dobranymi w trzech wariantach optymalizacji – sinusoidalna trajektoria  $P_{TH,R}$  o zwiększonej częstotliwości. Wartości procentowe zostały odniesione do układu regulacji z reg.  $WPI^{\lambda}D^{\mu}$ .

Tabela 8.3. Wartości bezwzględne całkowitych kryteriów jakości sterowania dla układu regulacji, w którym zastosowano regulatory z parametrami dobranymi w trzech wariantach optymalizacji – sinusoidalna trajektoria  $P_{TH,R}$  o zwiększonej częstotliwości.

Wariant optymalizacji	Kryterium jakości	Regulator			
		PID	$PI^{\lambda}D^{\mu}$	WPID	$WPI^{\lambda}D^{\mu}$
1	ISE	103,5991	16,2544	112,5475	3,9041
2	IAE	6,3585	6,3090	6,2933	6,2658
3	LQ	0,42493	0,35991	0,47782	0,36413



### 8.1.4 Podsumowanie

Zamieszczone w tym podrozdziale wyniki analizy regulatora  $WPI^{\lambda}D^{\mu}$  dla zadań regulacji nadržnej z wykorzystaniem różnych scenariuszy zmian mocy cieplnej zadanej pokazują, że w większości przypadków najlepszą jakością sterowania, w kontekście wykorzystanych w porównaniu całkowitych wskaźników jakości, uzyskał układ regulacji, w którym zastosowano regulatory  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  oraz  $WPI^{\lambda}D^{\mu}$ . Przewaga układu regulacji z tymi regulatorami jest widoczna głównie dla trajektorii, w których występują szybkie zmiany mocy zadanej (trajektoria złożona z funkcji schodkowej oraz trajektoria sinusoidalna o zwiększonej częstotliwości, podrozdziały 8.1.1 i 8.1.3). Dla takich trajektorii działanie układu regulacji z każdym porównywanym regulatorem powoduje, że urządzenie wykonawcze jest intensywniej eksploatowane, gdyż pracuje ono z maksymalnymi prędkościami przez długie okresy czasu. Pomimo tego regulatory, w których wykorzystano operatory całkowania oraz różniczkowania niecałkowitych rzędów, charakteryzują się lepszą jakością sterowania, gdyż potrafią one w szybszy sposób wychodzić z obszarów nasycenia urządzenia wykonawczego. W układzie sterowania z regulatorami klasycznymi, tj. PID, WPID, w większym stopniu dostrzegalna jest interakcja części całkującej regulatorów oraz saturacji urządzenia wykonawczego, która negatywnie wpływa na czasy regulacji oraz jakość sterowania. Jedynym wyjątkiem są tutaj regulatory, których nastawy dobrano w wyniku rozwiązania drugiego wariantu optymalizacji. W tym wypadku ww. efekt interakcji nie występuje, gdyż regulatory lokalne praktycznie nie posiadają członu całkującego (tabela 6.13).

Wykorzystanie scenariusza, w którym wystąpiła sinusoidalna trajektoria mocy cieplnej zadanej (podrozdział 8.1.2), pozwoliło stwierdzić, że układ regulacji z każdym porównywanym regulatorem, wykazuje się bardzo zbliżoną jakością sterowania. Wyjątkiem był przypadek, w którym parametry porównywanych regulatorów zostały dobrane w pierwszym wariantcie optymalizacji. Dla tego przypadku najlepszą jakością sterowania w kontekście wykorzystania całkowitego wskaźnika jakości ISE osiągnął regulator PID. Jednakże na podstawie rysunku 8.7, na którym zostały zamieszczone zestawy wykresów dla tego przypadku, można stwierdzić, że układ regulacji z każdym zastosowanym regulatorem charakteryzuje się niemalże identycznym odtwarzaniem zadanej trajektorii mocy cieplnej. Różnice w wartościach wskaźników jakości w tym przypadku wynikają głównie z niedoskonałości miękkich przełączeń regulatorów lokalnych (kształtu wykorzystanych funkcji przynależności) zawartych w regulatorach wieloobszarowych, które widoczne są w postaci „ząbków” na wykresie prędkości przemieszczenia prętów sterujących. Występujący w tym przypadku problem niedoskonałego przełączania się regulatorów lokalnych może być rozwiązany w dwojaki sposób. Po pierwsze można zwiększyć ilość regulatorów lokalnych, przez co zwiększy

się dokładność pokrycia zakresu zmian zmiennej wiodącej regulatora wieloobszarowego. Po drugie w zadaniu optymalizacji można by zwiększyć minimalne pokrywanie się sąsiednich funkcji przynależności występujące tam w postaci ograniczenia.

## 8.2 Regulacja stałwartościowa

W tym podrozdziale zostały zamieszczone wyniki analizy realizacji zadań regulacji stałwartościowej przez rozpatrywane w porównaniu regulatory (rysunek 8.1). Poszczególne wyniki zostały zaprezentowane w identycznej formie jak w podrozdziale 8.1 dlatego opis informujący o ich strukturze zostanie pominięty w tej części rozprawy. Jediną różnicą w stosunku do formy prezentacji wyników zawartej w podrozdziale 8.1 jest wystąpienie dodatkowego przebiegu czasowego umieszczonego w zestawach wykresów. Na przebiegu tym została przedstawiona zmiana wielkości zakłócającej wraz z wykreśleniem jej wartości nominalnej. Przebieg ten występuje jako pierwszy na każdym zestawie wykresów zawartym w tym podrozdziale. Rozpatrywanymi wielkościami zakłócającymi w układzie sterowania były odpowiednio temperatura chłodziwa na wejściu reaktora  $T_{C,in}$  oraz masowy przepływ chłodziwa przez reaktor  $W_C$  (rysunek 8.1). W rozpatrywanych zadaniach regulacji stałwartościowej temperatura chłodziwa była zmieniana w zakresie  $\pm 3\%$  wartości nominalnej, natomiast masowy przepływ chłodziwa przez reaktor był zmieniany w zakresie  $\pm 10\%$  wartości nominalnej.

### 8.2.1 Zmiana temperatury chłodziwa w sposób skokowy

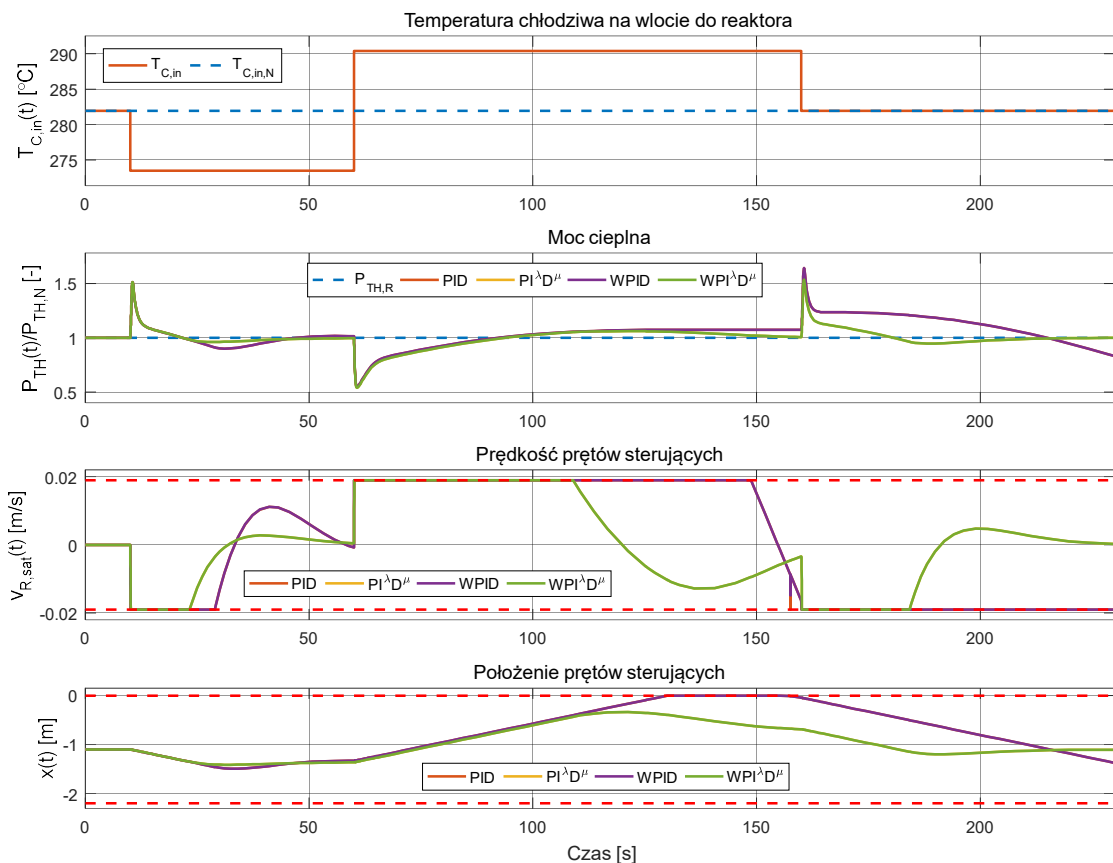
Na rysunkach 8.15, 8.16 i 8.17 zaprezentowane zostały zestawy wykresów dla układu regulacji z regulatorami, których parametry zostały dobrane w wyniku rozwiązania odpowiednio pierwszego, drugiego i trzeciego wariantu optymalizacji (rysunek 8.1). Na ostatnim rysunku w tym podrozdziale został umieszczony wykres słupkowy prezentujący procentowe wartości całkowych wskaźników jakości wykorzystanych w ocenie jakości sterowania dla każdego analizowanego przypadku. Wartości bezwzględne tych wskaźników zostały zamieszczone odpowiednio w tabeli 8.4.

Na zestawie wykresów przedstawionym na rysunku 8.15 można zauważyć, że przebiegi poszczególnych wielkości dla układu regulacji z regulatorami PID oraz WPID pokrywają się. To samo tyczy się przebiegów dla układu regulacji z regulatorami  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  oraz  $WPI^{\lambda}D^{\mu}$ . Na podstawie tego zestawu można również stwierdzić, że układ regulacji, w którym wykorzystano regulatory  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  lub  $WPI^{\lambda}D^{\mu}$ , lepiej odrzuca zakłócenia spowodowane skokowymi zmianami temperatury chłodziwa  $T_{C,in}$  na wejściu reaktora. Układ regulacji z regulatorami PID oraz WPID nie jest w stanie odpowiednio szybko skompensować zmian temperatury  $T_{C,in}$  po jej powrocie do wartości nominalnej. Wykres przedstawiający zmiany prędkości prętów sterujących pokazuje, że układ

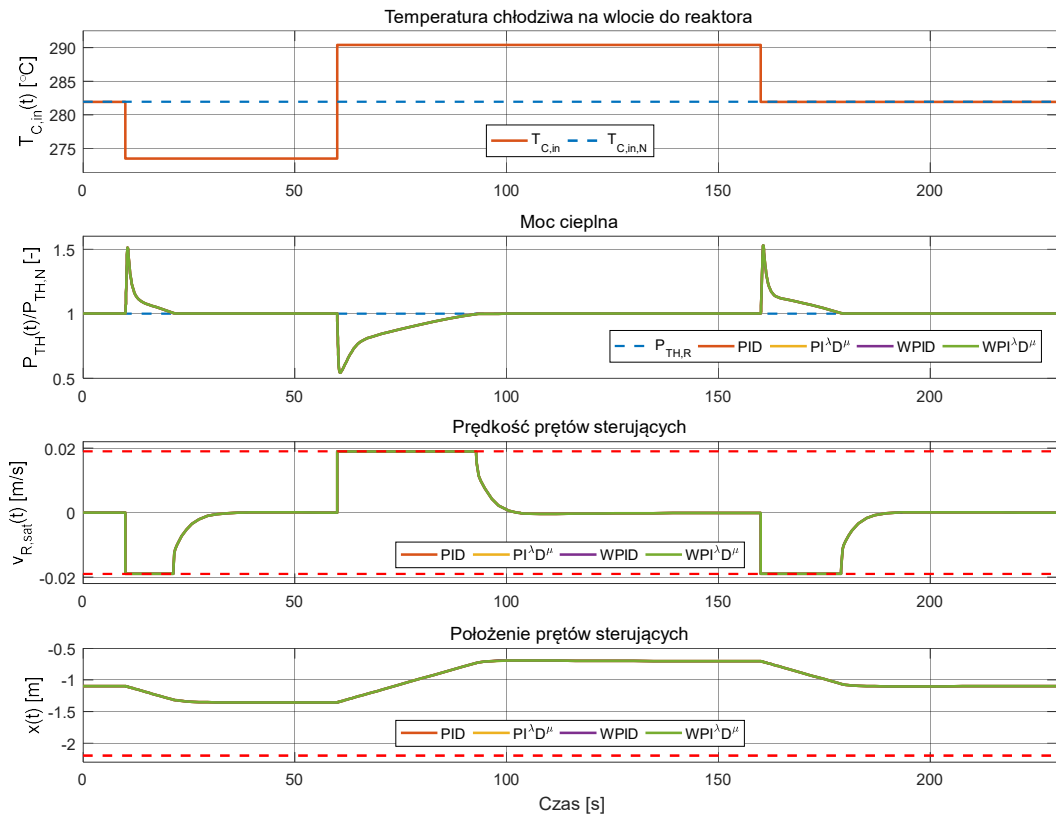
regulacji z regulatorami PID oraz WPID w większym stopniu eksploatuje urządzenie wykonawcze.

Dla przypadku, w którym nastawy regulatorów zostały dobrane w drugim wariantcie optymalizacji (rysunek 8.16) można zaobserwować identyczne działanie układu regulacji dla każdego z porównywanych regulatorów. Ta sama sytuacja występowała w przypadku, w którym zmianom podlegała zadana moc cieplna. W rozważanym przypadku układ regulacji z każdym porównywanym regulatorem dobrze odrzuca zakłócenia w postaci zmian temperatury  $T_{C,in}$ .

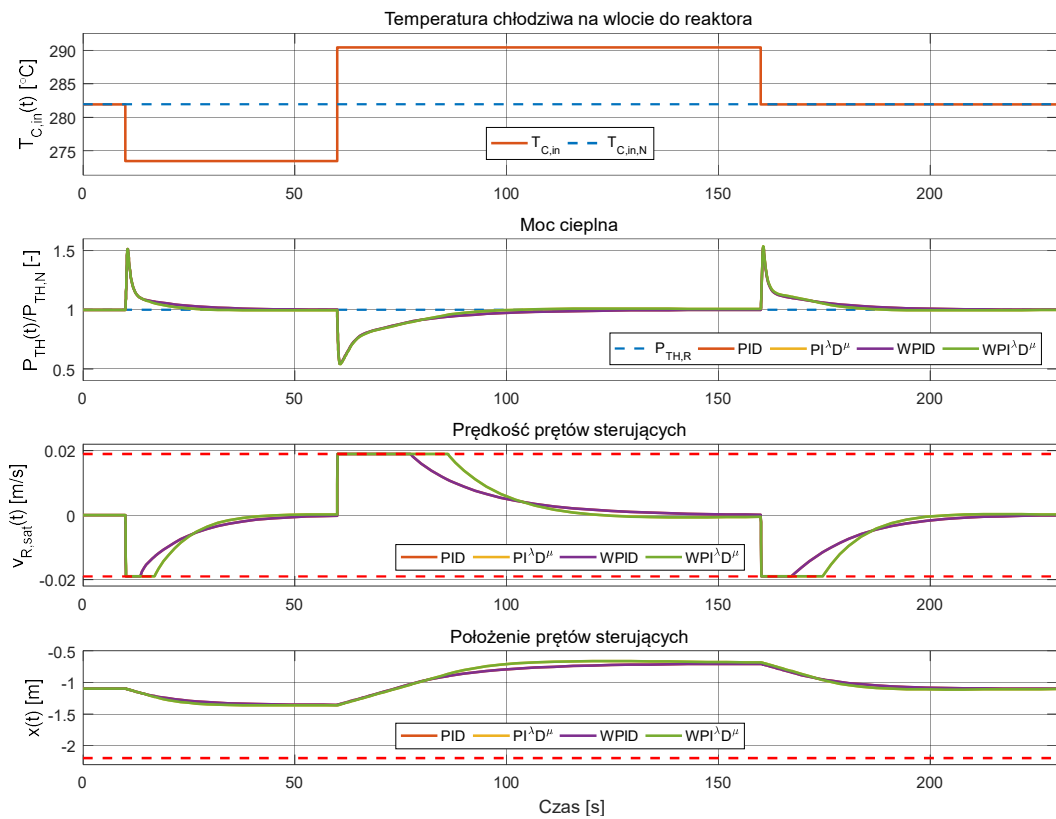
Natomiast na podstawie zestawu wykresów zamieszczonego na rysunku 8.17 można wywnioskować, że układ regulacji w bardzo podobny sposób kompensuje zmiany wielkości zakłócającej dla każdego z porównywanych regulatorów. Czasy regulacji dla układu sterowania z regulatorami  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  i  $WPI^{\lambda}D^{\mu}$  są minimalnie mniejsze w porównaniu do regulatorów PID oraz WPID. Regulatory  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  i  $WPI^{\lambda}D^{\mu}$  w większym stopniu eksploatują urządzenie wykonawcze, jednakże nie występuje tutaj efekt windup części całkującej regulatora.



Rysunek 8.15. Zestaw wykresów dla układu regulacji, w którym zastosowano regulatory z parametrami dobranymi w pierwszym wariantcie optymalizacji – zmiany temperatury chłodziwa  $T_{C,in}$ .

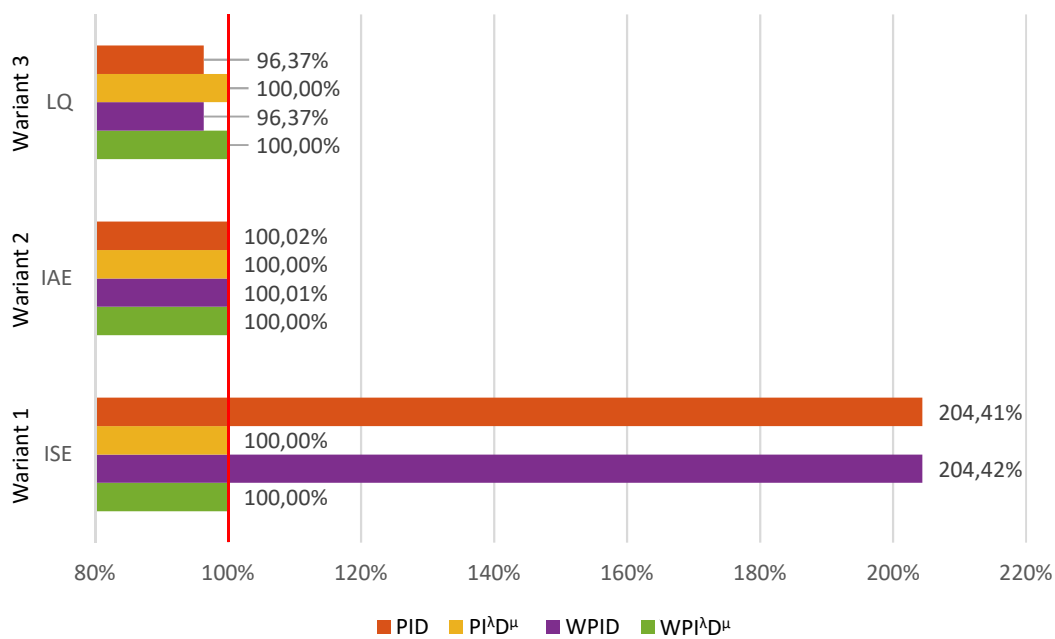


Rysunek 8.16. Zestaw wykresów dla układu regulacji, w którym zastosowano regulatory z parametrami dobranymi w drugim wariantie optymalizacji – zmiany temperatury chłodziwa  $T_{C,in}$ .



Rysunek 8.17. Zestaw wykresów dla układu regulacji, w którym zastosowano regulatory z parametrami dobranymi w trzecim wariantie optymalizacji – zmiany temperatury chłodziwa  $T_{C,in}$ .

Wykres słupkowy przedstawiony na rysunku 8.18 oraz tabela 8.4 potwierdzają rozważania zawarte w tym podrozdziale. Niewielka przewaga układu regulacji z regulatorami PID oraz WPID, których parametry zostały dobrane w trzecim wariantcie optymalizacji, pomimo minimalnie dłuższego czasu regulacji (rysunek 8.17), jest spowodowana głównie przez mniejsze obciążenie urządzenia wykonawczego, które jest brane pod uwagę w kryterium typu LQ.



Rysunek 8.18. Wartości procentowe całkowych kryteriów jakości sterowania dla układu regulacji, w którym zastosowano regulatory z parametrami dobranymi w trzech wariantach optymalizacji – zmiany temperatury chłodziwa  $T_{C,in}$ . Wartości procentowe zostały odniesione do układu regulacji z reg.  $WPI^{\lambda}D^{\mu}$ .

Tabela 8.4. Wartości bezwzględne całkowych kryteriów jakości sterowania dla układu regulacji, w którym zastosowano regulatory z parametrami dobranymi w trzech wariantach optymalizacji – zmiany temperatury chłodziwa  $T_{C,in}$ .

Wariant optymalizacji	Kryterium jakości	Regulator			
		PID	$PI^{\lambda}D^{\mu}$	WPID	$WPI^{\lambda}D^{\mu}$
1	ISE	3,7986	1,8583	3,7987	1,8583
2	IAE	7,5100	7,5088	7,5095	7,5088
3	LQ	0,12256	0,12717	0,12256	0,12718

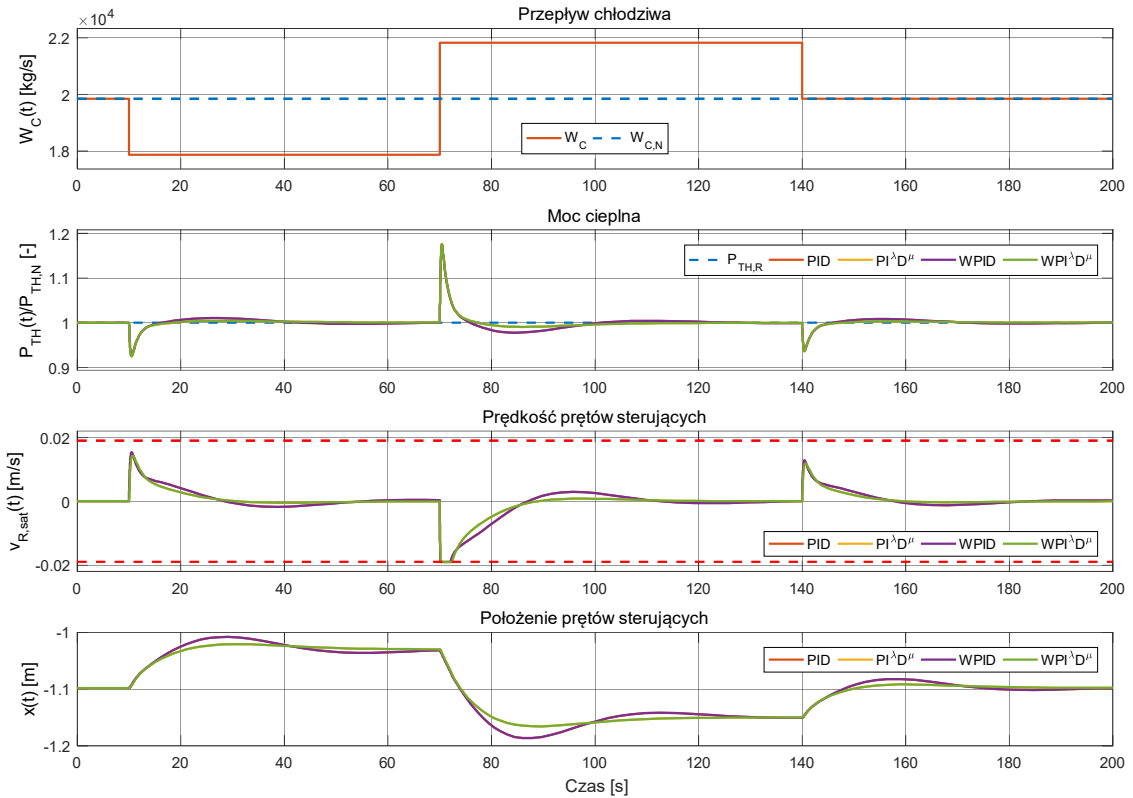
## 8.2.2 Zmiana masowego przepływu chłodziwa w sposób skokowy

Na rysunkach 8.19, 8.20 i 8.21 zaprezentowane zostały zestawy wykresów dla układu regulacji z regulatorami, których parametry zostały dobrane w wyniku rozwiązania odpowiednio pierwszego, drugiego i trzeciego wariantu optymalizacji (rysunek 8.1). Na ostatnim rysunku w tym podrozdziale został umieszczony wykres słupkowy prezentujący procentowe wartości całkowitych wskaźników jakości wykorzystanych w ocenie jakości sterowania dla każdego analizowanego przypadku. Wartości bezwzględne tych wskaźników zostały zamieszczone odpowiednio w tabeli 8.5.

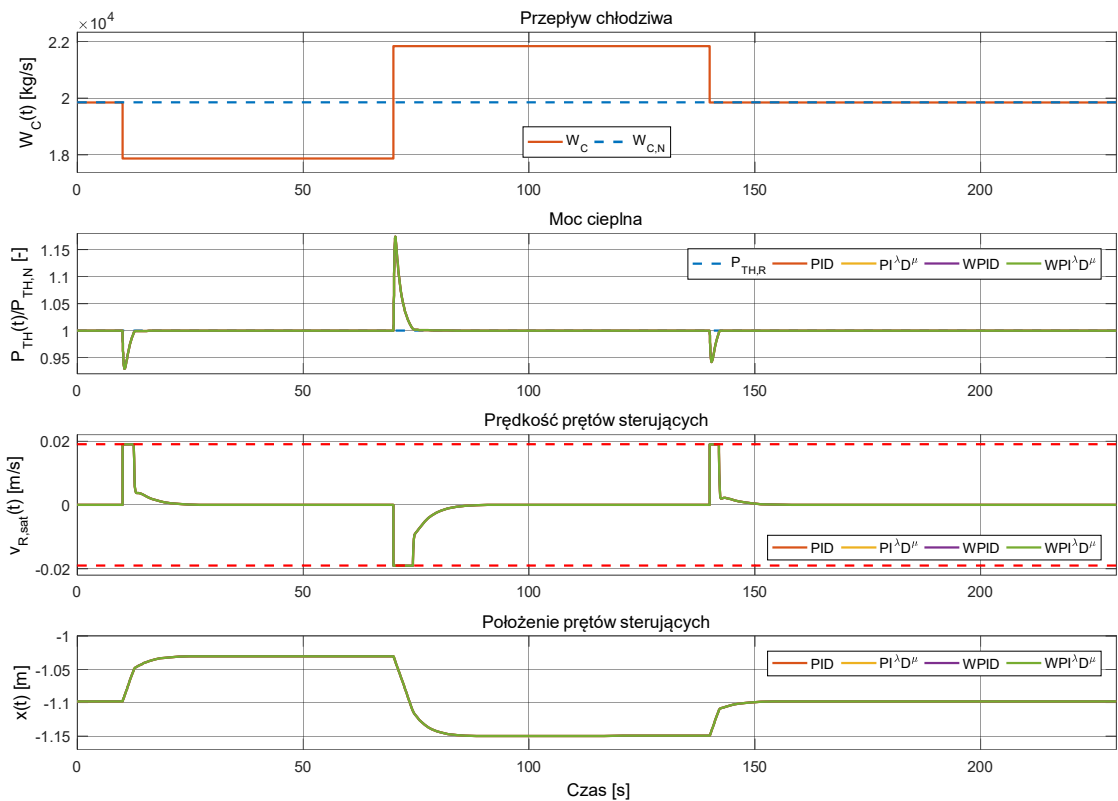
Podobnie jak w przypadku zmian temperatury chłodziwa  $T_{C,in}$  tak i w przypadku zmian masowego przepływu chłodziwa  $W_C$ , rozważanych w tym podrozdziale, wykresy wielkości dla regulatorów PID oraz WPID jak i PI<sup>λ</sup>D<sup>μ</sup> oraz WPI<sup>λ</sup>D<sup>μ</sup> pokrywają się odpowiednio parami. Na zestawie wykresów zamieszczonym na rysunku 8.19 można zauważyć, że układ regulacji z regulatorem PI<sup>λ</sup>D<sup>μ</sup> i WPI<sup>λ</sup>D<sup>μ</sup> osiąga krótsze czasy regulacji w stosunku do układu regulacji z regulatorami PID i WPID. Odrzucanie zakłóceń przez układ regulacji w przypadku każdego porównywanego regulatora przebiega z minimalnymi oscylacjami. Ich amplituda jest nieco większa dla regulatorów PID oraz WPID. Dodatkowo wszystkie porównywane regulatory eksploatują urządzenie wykonawcze w zbliżony sposób.

Podobnie jak w przypadku odrzucania zakłóceń spowodowanych zmianą temperatury chłodziwa  $T_{C,in}$  tak i w tym przypadku, na podstawie zestawu wykresów, który został zamieszczony na rysunku 8.20, można stwierdzić, że parametry regulatorów dobrane w drugim wariantcie optymalizacji powodują identyczne działanie układu regulacji w kontekście kompensacji zakłóceń spowodowanych zmianą masowego przepływu chłodziwa.

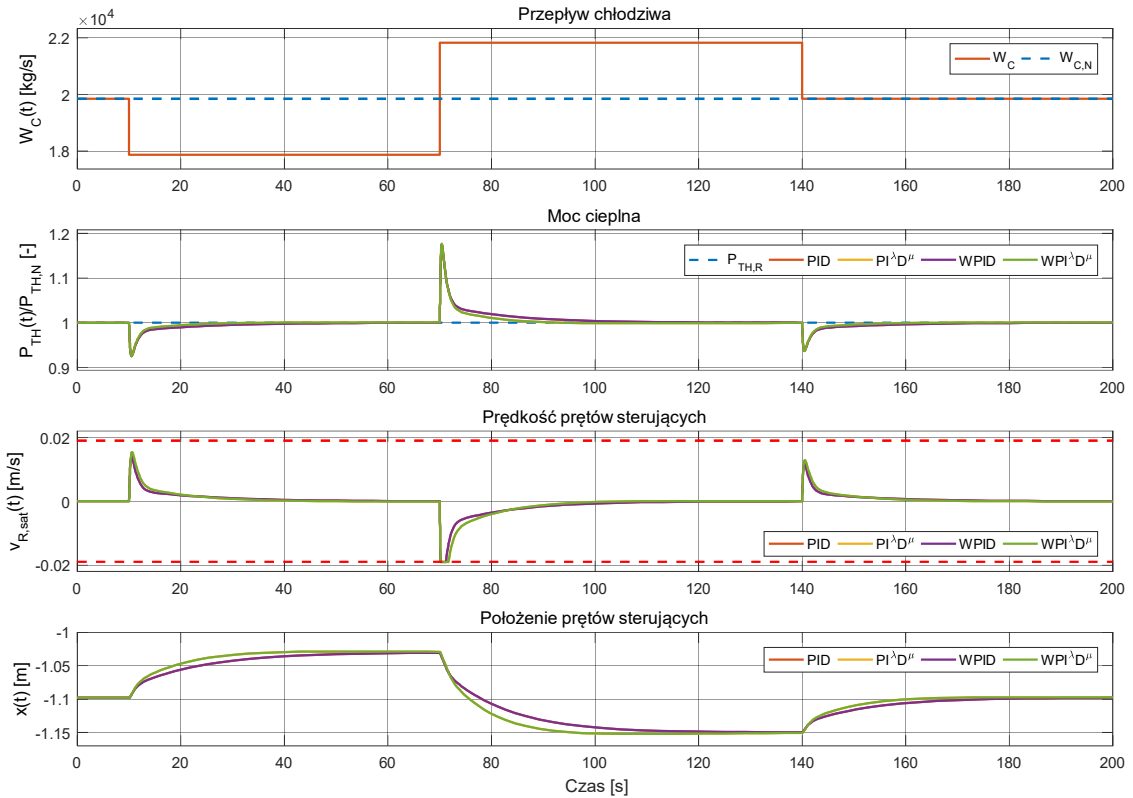
Na zestawach wykresów przedstawionych na rysunku 8.21 można zaobserwować, że układ regulacji z regulatorami PI<sup>λ</sup>D<sup>μ</sup> oraz WPI<sup>λ</sup>D<sup>μ</sup> charakteryzuje się minimalnie mniejszymi czasami regulacji w porównaniu do układu regulacji z regulatorami PID i WPID. Podobna sytuacja wystąpiła w przypadku odrzucania zakłóceń spowodowanych zmianą temperatury chłodziwa  $T_{C,in}$ , która została opisana w poprzedzającym podrozdziale (rysunek 8.17). Tak jak to miało miejsce poprzednio tutaj również, różnice w kompensacji zakłóceń między porównywanymi regulatorami można zauważyć głównie na wykresach prędkości oraz położenia prętów sterujących.



Rysunek 8.19. Zestaw wykresów dla układu regulacji, w którym zastosowano regulatory z parametrami dobranymi w pierwszym wariantcie optymalizacji – zmiany masowego przepływu chłodziwa  $W_C$ .



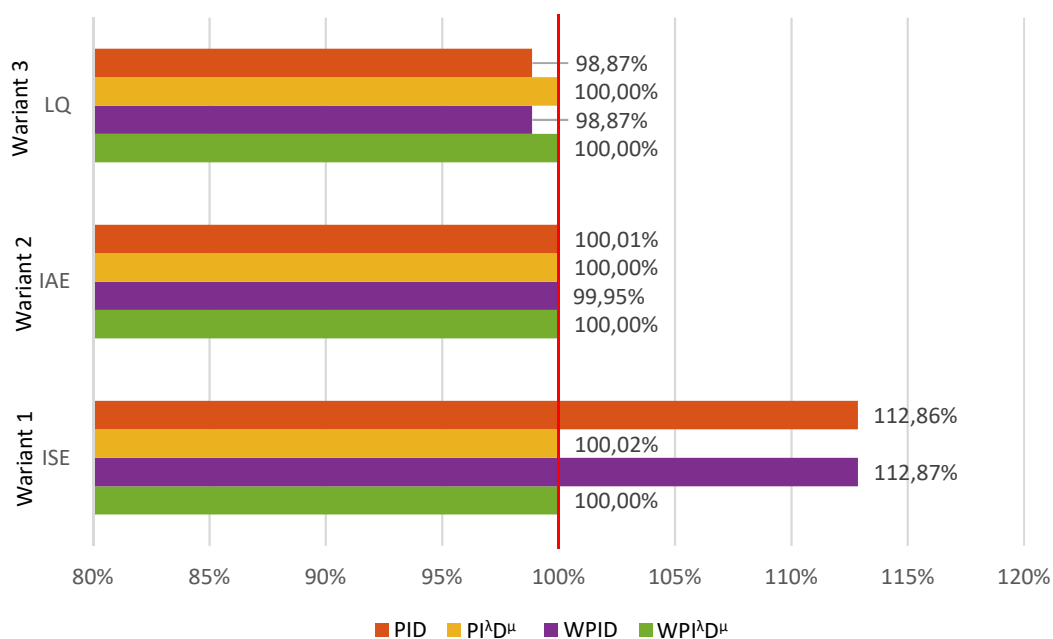
Rysunek 8.20. Zestaw wykresów dla układu regulacji, w którym zastosowano regulatory z parametrami dobranymi w drugim wariantcie optymalizacji – zmiany masowego przepływu chłodziwa  $W_C$ .



Rysunek 8.21. Zestaw wykresów dla układu regulacji, w którym zastosowano regulatory z parametrami dobranymi w trzecim wariantcie optymalizacji – zmiany masowego przepływu chłodziwa  $W_C$ .

Wyniki zestawione na wykresie słupkowym przedstawionym na rysunku 8.22 oraz w tabeli 8.5 swoim charakterem niewiele różnią się od tych przedstawionych w podrozdziale 8.2.1. Rozbieżność w bezwzględnych wartościach całkowitych kryteriów jakości między tym a poprzednio rozważanym przypadkiem wynika głównie z większej wrażliwości obiektu wirtualnego (reaktora jądrowego) na zmiany temperatury chłodziwa  $T_{C,in}$ . W rozważanym przypadku również można zauważyć niewielką przewagę regulatorów PID oraz WPID w zestawieniu, które dotyczy trzeciego wariantu optymalizacji. Tak jak poprzednio spowodowane jest to głównie przez mniejszą eksploatację urządzenia wykonawczego w wyniku działania układu regulacji z regulatorami PID oraz WPID. Również tak jak poprzednio wyniki dla drugiego wariantu optymalizacji są prawie identyczne. Przewagę regulatora  $PI^\lambda D^\mu$  i  $WPI^\lambda D^\mu$  nad ich klasycznymi odpowiednikami można zaobserwować w zestawieniu, które dotyczy pierwszego wariantu optymalizacji (rysunek 8.19).





Rysunek 8.22. Wartości procentowe całkowych kryteriów jakości sterowania dla układu regulacji, w którym zastosowano regulatory z parametrami dobranymi w trzech wariantach optymalizacji – zmiany masowego przepływu chłodziwa  $W_C$ . Wartości procentowe zostały odniesione do układu regulacji z reg.  $WPI^{\lambda}D^{\mu}$ .

Tabela 8.5. Wartości bezwzględne całkowych kryteriów jakości sterowania dla układu regulacji, w którym zastosowano regulatory z parametrami dobranymi w trzech wariantach optymalizacji – zmiany masowego przepływu chłodziwa  $W_C$ .

Wariant optymalizacji	Kryterium jakości	Regulator			
		PID	PI <sup>λ</sup> D <sup>μ</sup>	WPID	WPI <sup>λ</sup> D <sup>μ</sup>
1	ISE	0,0485	0,0430	0,0485	0,0430
2	IAE	0,4469	0,4468	0,4466	0,4468
3	LQ	0,00465	0,00471	0,00465	0,00471

### 8.2.3 Podsumowanie

Zamieszczone w tym podrozdziale wyniki analizy regulatora  $WPI^{\lambda}D^{\mu}$  dla regulacji stałowartościowej z wykorzystaniem dwóch scenariuszy zmian wielkości zakłócającej  $W_C$  pozwalają stwierdzić, że działanie układu regulacji z porównywanymi regulatorami jest bardzo podobne zarówno dla zmian temperatury chłodziwa  $T_{C,in}$  jak i dla zmian masowego przepływu chłodziwa  $W_C$ . Jedyne istotne różnice, w obu przypadkach, widać w działaniu układu regulacji z regulatorami dobranymi w pierwszym wariantie optymalizacji. W tym przypadku widać przewagę regulatorów, w których występowały operatory całkowania i różniczkowania niecałkowitego rzędu. Pomimo tego, że optymalizacja parametrów regulatorów wykorzystanych w porównaniu nie

obejmowała zadań regulacji stałwartościowej, to każdy z regulatorów zastosowanych w układzie sterowania mocy cieplnej reaktora jądrowego charakteryzował się zadowalającą kompensacją zakłóceń spowodowanych zmianami temperatury oraz masowego przepływu chłodziwa.

### 8.3 Rozkład temperatur paliwa

W tym podrozdziale zostały zamieszczone przebiegi czasowe w formie zestawów wykresów, na których przedstawiono rozkłady temperatur paliwa w rdzeniu reaktora jądrowego wyznaczone na podstawie obiektu wirtualnego z pięcioma węzłami paliwowymi. W podrozdziale 8.3.1, zamieszczono rozkłady temperatur paliwa wynikające z działania układu regulacji dla trajektorii zadanej mocy cieplnej złożonej z funkcji schodkowej. W podrozdziale 8.3.2 zamieszczono rozkłady temperatur wynikające z działania układu regulacji dla sinusoidalnej trajektorii zadanej mocy cieplnej. Natomiast w podrozdziale 8.3.3 zostały zamieszczone rozkłady temperatur wynikające z działania układu regulacji dla sinusoidalnej trajektorii zadanej mocy cieplnej o zwiększonej częstotliwości.

Rozkłady temperatur paliwa zamieszczone w tym rozdziale mają głównie na celu zademonstrowanie, w jaki sposób są kształtowane ich przebiegi czasowe w zależności od struktury oraz od parametrów regulatorów uwzględnionych w analizie porównawczej. Dodatkowym aspektem prezentacji rozkładu temperatur paliwa jest pokazanie rozszerzonych możliwości zaprezentowanego w rozprawie autorskiego modelu węzłowego – obiektu wirtualnego.

W ramach prezentacji rozkładu temperatur paliwa została wykorzystana następująca kolorystyka:

- linia koloru niebieskiego – przebieg średniej temperatury w węźle paliwowym nr 1,
- linia koloru miniowego – przebieg średniej temperatury w węźle paliwowym nr 2,
- linia koloru żółtego – przebieg średniej temperatury w węźle paliwowym nr 3,
- linia koloru purpurowego – przebieg średniej temperatury w węźle paliwowym nr 4,
- linia koloru zielonego – przebieg średniej temperatury w węźle paliwowym nr 5.

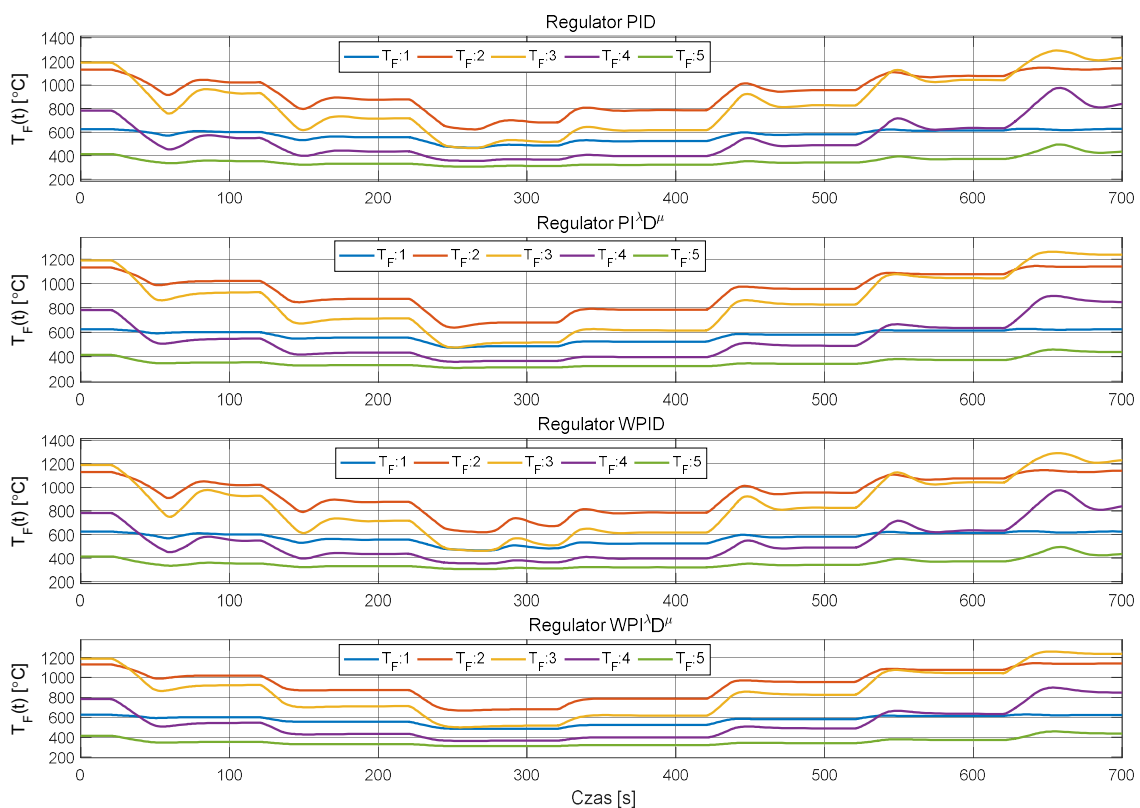
#### 8.3.1 Trajektoria schodkowa mocy cieplnej zadanej

Na rysunku 8.23, zamieszczono zestaw wykresów przedstawiający zmiany temperatur paliwa wynikające z działania układu sterowania, w którym zastosowano regulatory z parametrami dobranymi w pierwszym wariantcie optymalizacji. Na rysunku 8.24 zamieszczono zestaw wykresów przedstawiający zmiany temperatury wynikające z działania układu regulacji, w którym zastosowano regulatory z parametrami dobranymi w drugim wariantcie optymalizacji. Ostatni zestaw

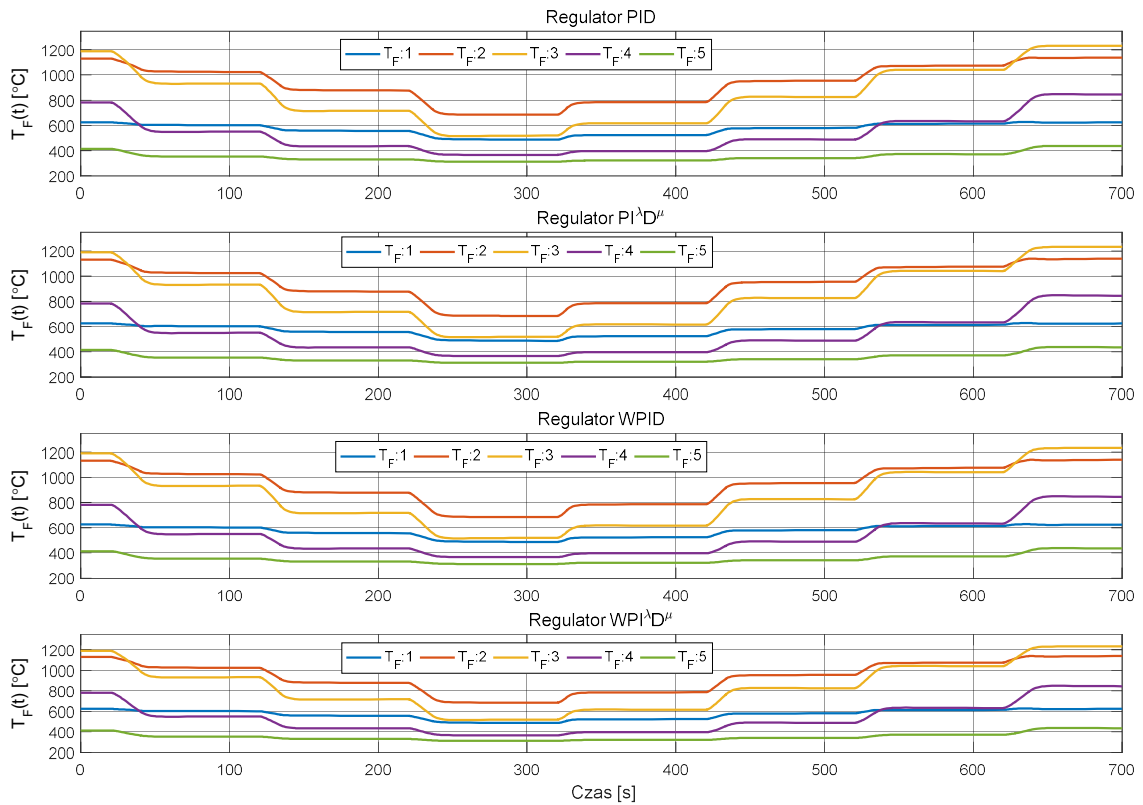
wykresów zmian temperatur paliwa, zamieszczony na rysunku 8.25, dotyczy układu regulacji, w którym wystąpiły regulatory z parametrami dobranymi w trzecim wariantcie optymalizacji.

Na rysunkach zamieszczonych poniżej można zauważyć, że charakter zmian temperatur paliwa w rdzeniu reaktora, wyznaczonych na podstawie obiektu wirtualnego, w bardzo dużym stopniu zależy od aktualnej mocy cieplnej wytwarzanej przez reaktor. Porównanie przebiegów mocy cieplnej z rysunków 8.2, 8.3 i 8.4 z przebiegami temperatury przedstawionymi na rysunkach 8.23, 8.24 i 8.25 pozwala stwierdzić, że temperatura w rdzeniu reaktora odzwierciedla zmiany mocy cieplnej w nim wytwarzanej. Charakter tego związku, tak jak charakter zmian mocy, w bardzo dużym stopniu zależy od struktury oraz od parametrów regulatora zastosowanego w układzie regulacji.

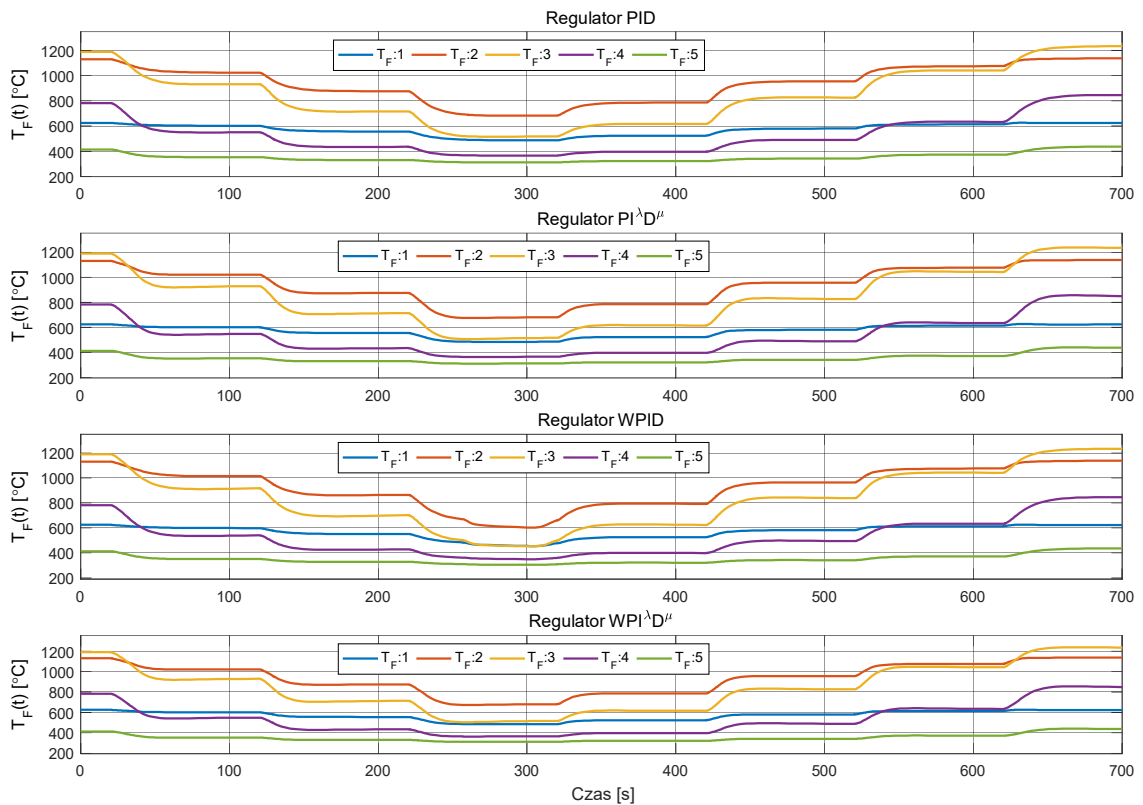
Na rysunku 8.23 można zaobserwować gwałtowne zmiany temperatur paliwa, które mają charakter oscylacyjny, natomiast rysunku 8.24 można zauważyć, że w ramach przechodzenia pomiędzy kolejnymi punktami pracy, działanie układu regulacji powoduje szybkie osiągnięcie stanów ustalonych bez występowania przeregulowań. Z kolei na rysunku 8.25 widoczny jest inercyjny charakter zmian temperatur paliwa. Te same spostrzeżenia występowały przy analizowaniu przebiegów mocy cieplnej w podrozdziale 8.1.1.



Rysunek 8.23. Rozkłady temp. paliwa dla układu regulacji, w którym zastosowano regulatory z parametrami dobranymi w pierwszym wariantcie optymalizacji – schodkowa trajektoria  $P_{TH,R}$ .



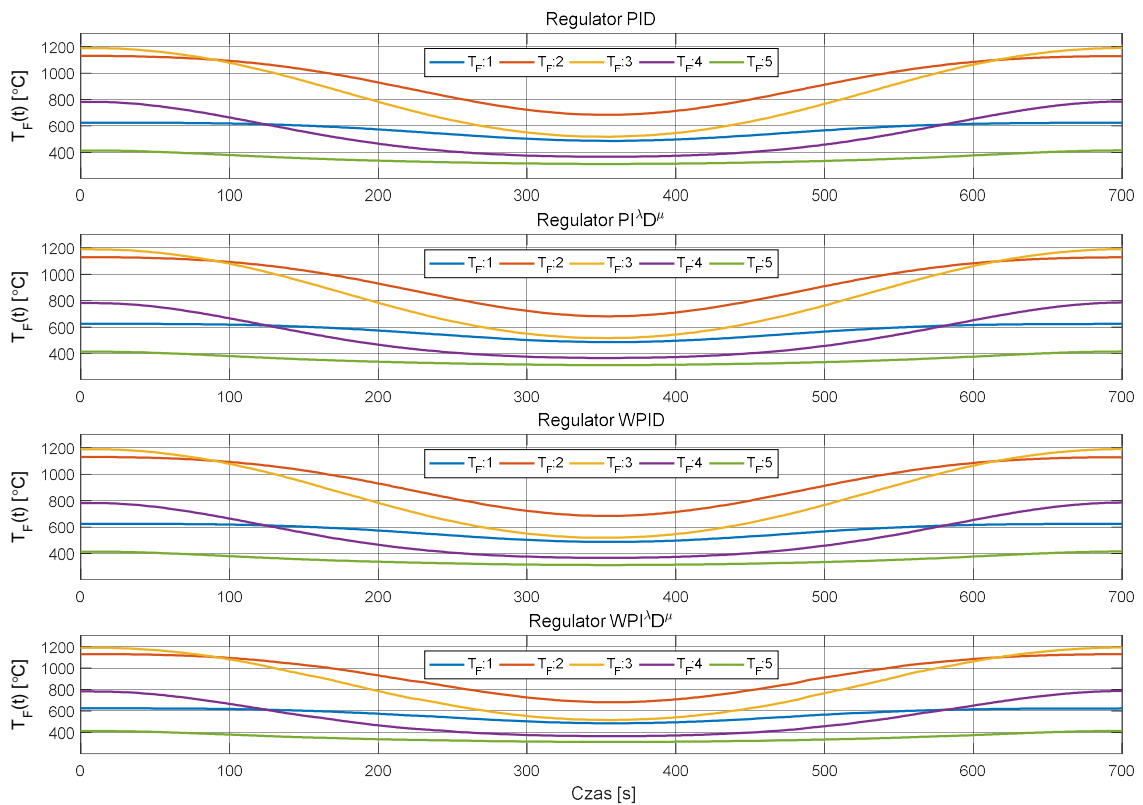
Rysunek 8.24. Rozkłady temp. paliwa dla układu regulacji, w którym zastosowano regulatory z parametrami dobranymi w drugim wariantcie optymalizacji – schodkowa trajektoria  $P_{TH,R}$ .



Rysunek 8.25. Rozkłady temp. paliwa dla układu regulacji, w którym zastosowano regulatory z parametrami dobranymi w trzecim wariantcie optymalizacji – schodkowa trajektoria  $P_{TH,R}$ .

### 8.3.2 Trajektoria sinusoidalna mocy cieplnej zadanej

W tym podrozdziale został przedstawiony wyłącznie pojedynczy zestaw wykresów. Zamieszczono na nim przebiegi temperatur paliwa wynikające z działania układu regulacji mocy cieplnej z regulatorami, których parametry zostały dobrane w pierwszym wariantcie optymalizacji. Zestawy wykresów dla innych wariantów optymalizacji zostały pominięte, gdyż różnice między nimi były marginalne. Bardzo małe różnice w przebiegach temperatury są spowodowane tym, że niezależnie od struktury oraz parametrów wykorzystanego regulatora układ regulacji mocy cieplnej działa niemalże identycznie dla wolnozmiennych trajektorii mocy cieplnej zadanej. Potwierdzenie tego faktu zostało przedstawione w podrozdziale 8.1.2. Na zestawie wykresów przedstawionym na rysunku 8.26 również nie widać istotnych różnic w zimmach temperatur wynikających z działania porównywanych regulatorów.

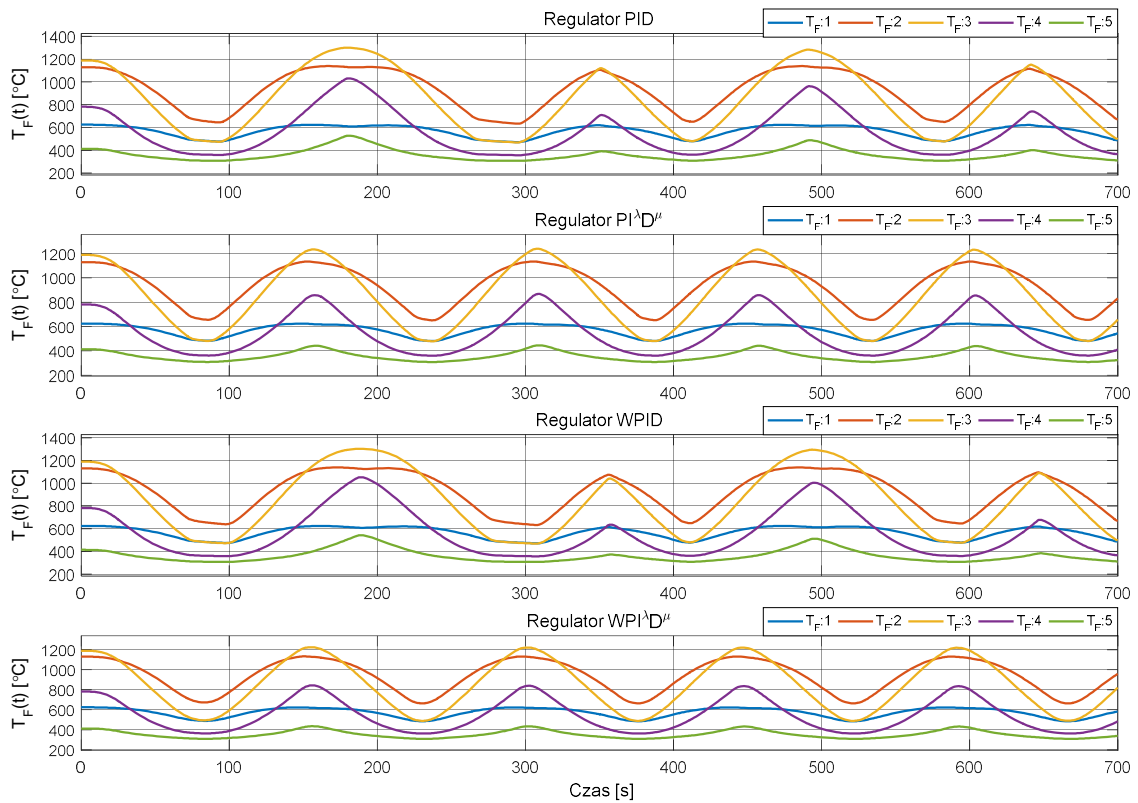


Rysunek 8.26. Rozkłady temp. paliwa w rdzeniu reaktora dla układu regulacji, w którym zastosowano regulatory z parametrami dobranymi w pierwszym wariantcie optymalizacji – sinusoidalna trajektoria  $P_{TH,R}$ .

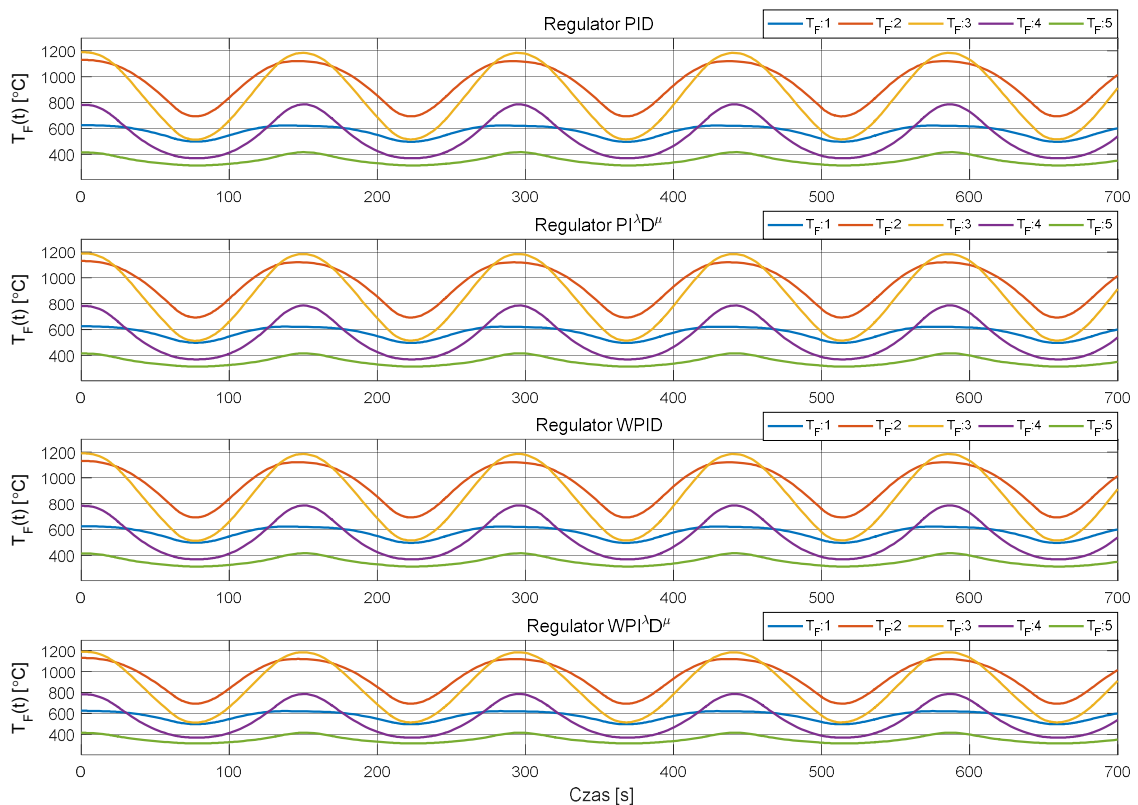
### 8.3.3 Trajektoria sinusoidalna mocy cieplnej zadanej o zwiększonej częstotliwości

Na rysunku 8.27, zamieszczono zestaw wykresów przedstawiający zmiany temperatury paliwa wynikające z działania układu sterowania, w którym zastosowano regulatory z parametrami dobranymi w pierwszym wariantcie optymalizacji. Natomiast na rysunku 8.28 zamieszczono zestaw wykresów przedstawiający zmiany temperatury wynikające z działania układu regulacji, w którym zastosowano regulatory z parametrami dobranymi w drugim wariantcie optymalizacji. Ostatni zestaw wykresów, zamieszczony na rysunku 8.29, dotyczy układu regulacji, w którym wystąpiły regulatory z parametrami dobranymi w trzecim wariantcie optymalizacji.

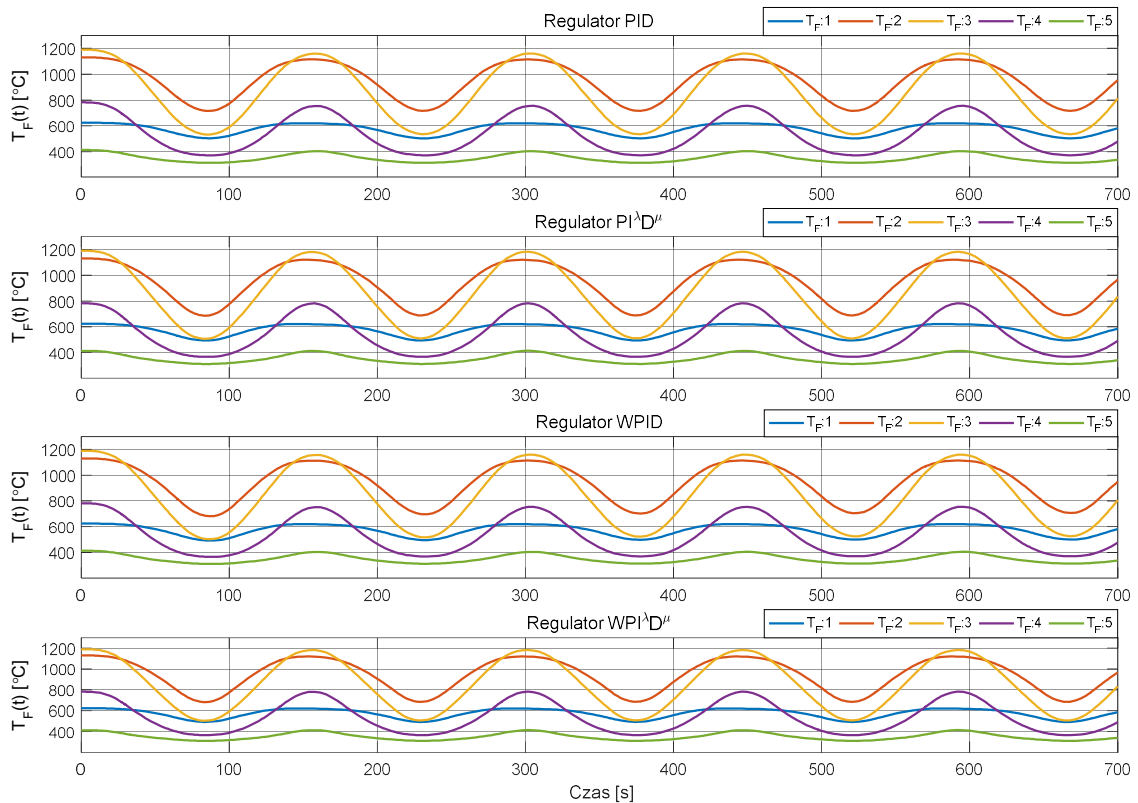
Podobnie jak w przypadku wykresów temperatur paliwa przedstawionych w podrozdziale 8.3.1 oraz 8.3.2 tak i na podstawie zestawów wykresów przedstawionych w tym podrozdziale można stwierdzić, że charakter przebiegów temperatur jest bardzo zbliżony do przebiegów mocy cieplnej omówionych w podrozdziale 8.1.3 dla wszystkich porównywanych regulatorów. Tak jak w rozdziale 8.1.3, tak i na powyższych zestawach wykresów można zauważyć, że wyniki dla regulatorów dobranych w pierwszym wariantcie optymalizacji są najbardziej zróżnicowane, wyniki dla regulatorów dobranych w drugim wariantcie optymalizacji mają prawie identyczny przebieg i charakter, a w wynikach dla trzeciego wariantu optymalizacji widoczne jest delikatne opóźnienie względem wyników uzyskanych w drugim wariantcie optymalizacji (rysunki 8.28 i 8.29).



Rysunek 8.27. Rozkłady temp. paliwa dla układu regulacji, w którym zastosowano regulatory z parametrami dobranymi w pierwszym wariantcie optymalizacji – sinusoidalna trajektoria  $P_{TH,R}$  o zwiększonej częstotliwości.



Rysunek 8.28. Rozkłady temp. paliwa dla układu regulacji, w którym zastosowano regulatory z parametrami dobranymi w drugim wariantcie optymalizacji – sinusoidalna trajektoria  $P_{TH,R}$  o zwiększonej częstotliwości.



Rysunek 8.29. Rozkłady temp. paliwa dla układu regulacji, w którym zastosowano regulatory z parametrami dobranymi w trzecim wariantcie optymalizacji – sinusoidalna trajektoria  $P_{TH,R}$  o zwiększonej częstotliwości.

### 8.3.4 Podsumowanie

Przedstawione w podrozdziale zestawy wykresów temperatur paliwa w rdzeniu reaktora pokazują ich dużą korelację z przebiegami mocy cieplnej. Charakter zmian temperatur paliwa w rdzeniu reaktora w bardzo dużym stopniu zależy od struktury zastosowanego regulatora jak i od jego parametrów. W rozprawie parametry porównywanych regulatorów dobierane są w wyniku rozwiązania zadania optymalizacji przedstawionego w rozdziale 6. Zatem głównym czynnikiem wpływającym na charakter zmian temperatur paliwa, w kontekście rozwiązywanego w rozprawie zadania optymalizacji, jest wybór kryterium pozwalającego określić jakość regulacji (funkcję celu).

Zestawione w podrozdziale wyniki pokazują, że dla wybranych wariantów optymalizacji (wybranych wskaźników jakości sterowania) uzyskuje się odmienny charakter zmian mocy cieplnej, a co za tym idzie temperatur paliwa. Z punktu widzenia urządzeń technologicznych pracujących w obrębie reaktora, jak również całej elektrowni jądrowej, najbardziej korzystnym wariantem optymalizacji jest wariant nr 3, w którym wykorzystano kryterium jakości LQ. Przebiegi temperatur paliwa uzyskane w układzie sterowania z regulatorami, których parametry dobrano w trzecim wariantcie optymalizacji przyjmują łagodny inercyjny charakter. Zmiany temperatury o takim charakterze są korzystne z punktu widzenia urządzeń technicznych, gdyż nie narażają one tych



urządzeń na pracę w warunkach dużego obciążenia mogącego spowodować ich uszkodzenie lub mniejszą żywotność. Należy tutaj zauważyć, że każdy przestój elektrowni jądrowej spowodowany awariami, wymianą sprzętu lub nieprawidłową pracą urządzeń technologicznych obarczony jest bardzo dużymi kosztami. Od elektrowni jądrowej wymaga się bezawaryjnej pracy nie tylko ze względów ekonomicznych, lecz również społecznych. Zatem wybór odpowiednich kryteriów jakości sterowania pozwalających na maksymalizację bezawaryjnej pracy elektrowni jądrowej, na którą składa się wiele czynników, jest tutaj kluczowy.

## 8.4 Rozkład temperatur chłodziwa

W tym podrozdziale zostały zamieszczone przebiegi czasowe w formie zestawów wykresów przedstawiające rozkłady temperatur chłodziwa w rdzeniu reaktora jądrowego wyznaczone na podstawie obiektu wirtualnego składającego się z 10 węzłów chłodziwa. W podrozdziale 8.4.1, zamieszczono rozkłady temperatur chłodziwa wynikające z działania układu regulacji dla trajektorii zadanej mocy cieplnej złożonej z funkcji schodkowej. W podrozdziale 8.4.2 zamieszczono rozkłady temperatur wynikające z działania układu regulacji dla sinusoidalnej trajektorii mocy cieplnej zadanej. Natomiast w podrozdziale 8.4.3 zostały zamieszczone rozkłady temperatur wynikające z działania układu regulacji dla sinusoidalnej trajektorii mocy cieplnej zadanej o zwiększonej częstotliwości.

Rozkłady temperatur chłodziwa zamieszczone w tym podrozdziale, podobnie jak rozkłady temperatur paliwa zamieszczone w podrozdziale 8.3, mają na celu pokazanie, w jaki sposób zmienia się charakter ich przebiegów czasowych w zależności od struktury oraz parametrów regulatorów występujących w analizie porównawczej. Również w tym przypadku przebiegi czasowe temperatur chłodziwa mają na celu pokazanie rozszerzonych możliwości obiektu wirtualnego względem modelu projektowego.

W ramach prezentacji rozkładu temperatur chłodziwa została wykorzystana następująca kolorystyka:

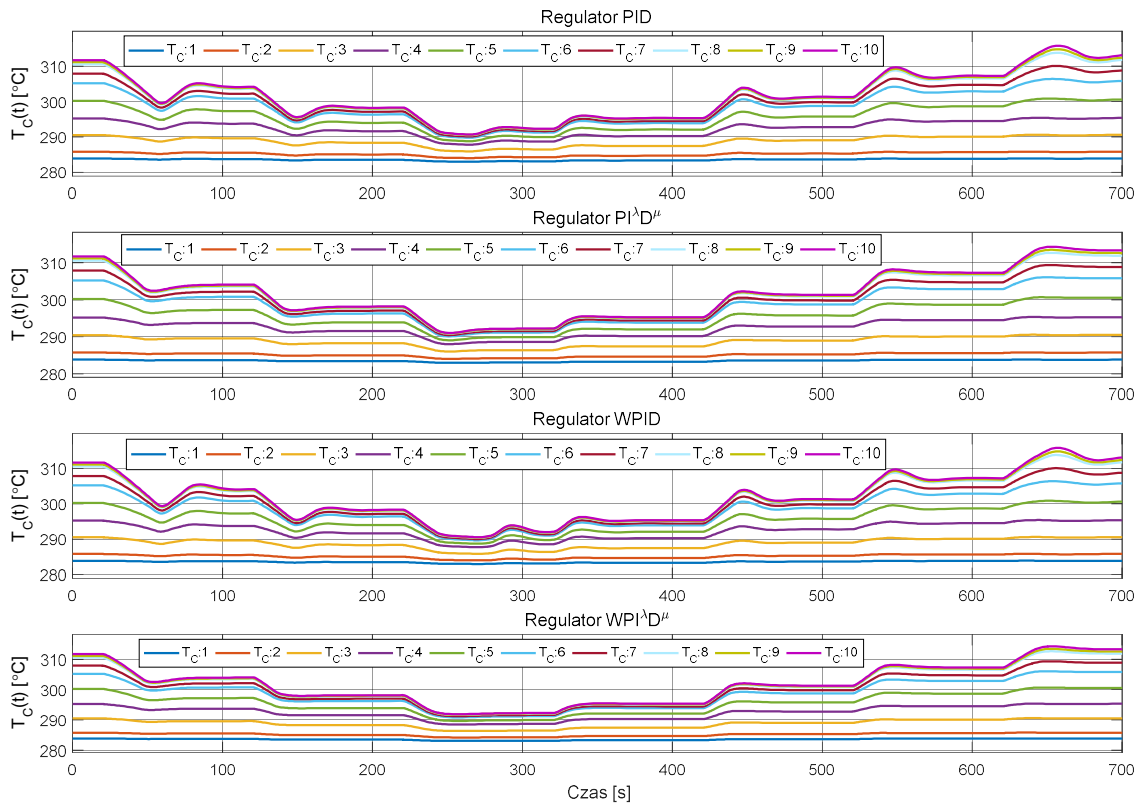
- linia koloru niebieskiego – przebieg średniej temperatury w węźle chłodziwa nr 1,
- linia koloru miniowy – przebieg średniej temperatury w węźle chłodziwa nr 2,
- linia koloru żółtego – przebieg średniej temperatury w węźle chłodziwa nr 3,
- linia koloru purpurowego – przebieg średniej temperatury w węźle chłodziwa nr 4,
- linia koloru zielonego – przebieg średniej temperatury w węźle chłodziwa nr 5,
- linia koloru błękitnego – przebieg średniej temperatury w węźle chłodziwa nr 6,
- linia koloru bordowego – przebieg średniej temperatury w węźle chłodziwa nr 7,
- linia koloru cyjanowego – przebieg średniej temperatury w węźle chłodziwa nr 8,

- linia koloru beżowego – przebieg średniej temperatury w węźle chłodziwa nr 9,
- linia koloru fioletowego – przebieg średniej temperatury w węźle chłodziwa nr 10.

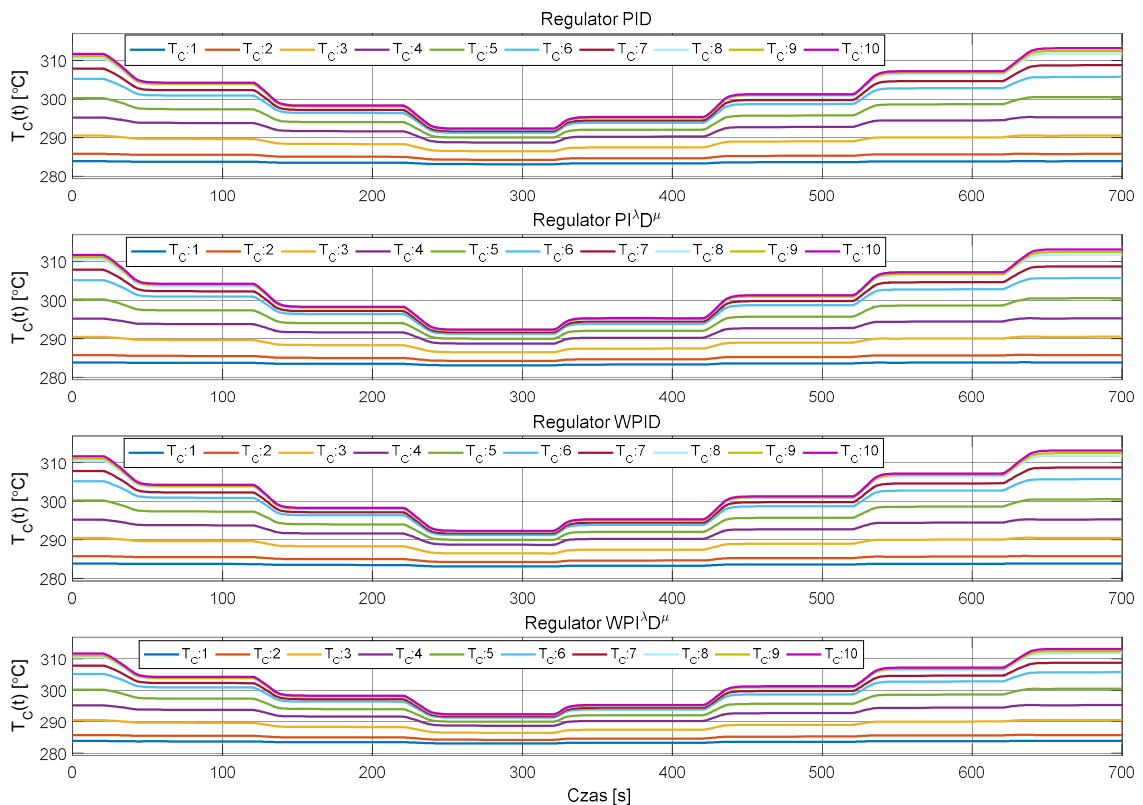
### 8.4.1 Trajektoria schodkowa mocy cieplnej zadanej

Na rysunku 8.30, zamieszczono zestaw wykresów przedstawiający zmiany temperatur chłodziwa wynikające z działania układu sterowania, w którym zastosowano regulatory z parametrami dobranymi w pierwszym wariantcie optymalizacji. Natomiast na rysunku 8.31 zamieszczono zestaw wykresów przedstawiający zmiany temperatury wynikające z działania układu regulacji, w którym zastosowano regulatory z parametrami dobranymi w drugim wariantcie optymalizacji. Ostatni zestaw wykresów zmian temperatur chłodziwa, zamieszczony na rysunku 8.32, dotyczy układu regulacji, w którym wystąpiły regulatory z parametrami dobranymi w trzecim wariantcie optymalizacji.

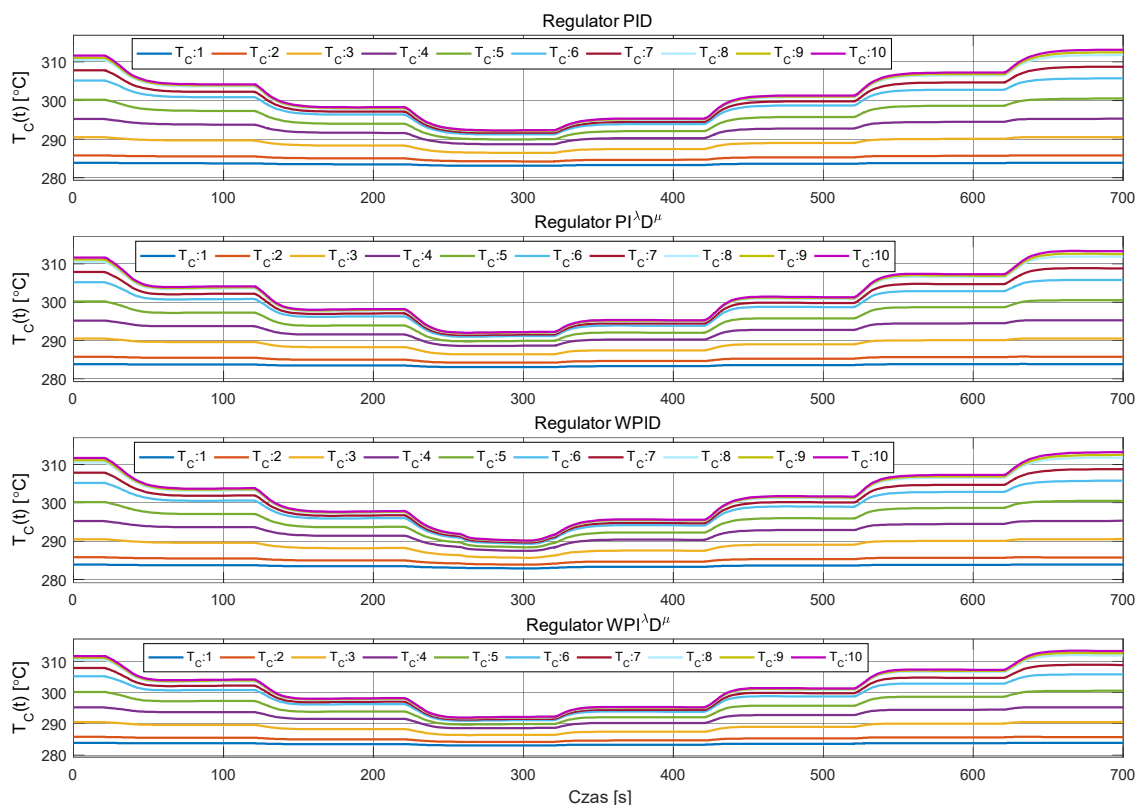
Na zestawach wykresów przedstawionych na rysunkach 8.30, 8.31 i 8.32 można zauważyć, że charakter zmian temperatur chłodziwa w rdzeniu reaktora jest bardzo podobny do zmian mocy cieplnej oraz temperatur paliwa. Porównując rozkłady temperatur paliwa z podrozdziału 8.3.1 oraz chłodziwa można zauważyć, że dla przypadku rozkładów temperatur chłodziwa nie występuje zjawisko polegające na mocniejszym nagrzewaniu się środkowych i dolnych partii paliwa a ochładzaniu się górnych. Temperatury chłodziwa w rdzeniu reaktora stopniowo rosną wraz ze zwiększaniem się wysokości rdzenia. Natomiast temperatury paliwa zależą głównie od profilu generacji mocy, który zmienia się w wyniku zagłębienia prętów sterujących w rdzeniu reaktora jądrowego (podrozdział 4.3.2). Na przebiegach temperatur chłodziwa można zauważyć, że górne partie chłodziwa znajdującego się w rdzeniu są bardziej wrażliwe na zmiany mocy (wysokie temperatury). Natomiast w dolnych partiach reaktora temperatura chłodziwa zmienia się nieznacznie (niskie temperatury).



Rysunek 8.30. Rozkłady temp. chłodziwa dla układu regulacji, w którym zastosowano regulatory z parametrami dobranymi w pierwszym wariantcie optymalizacji – schodkowa trajektoria  $P_{TH,R}$ .



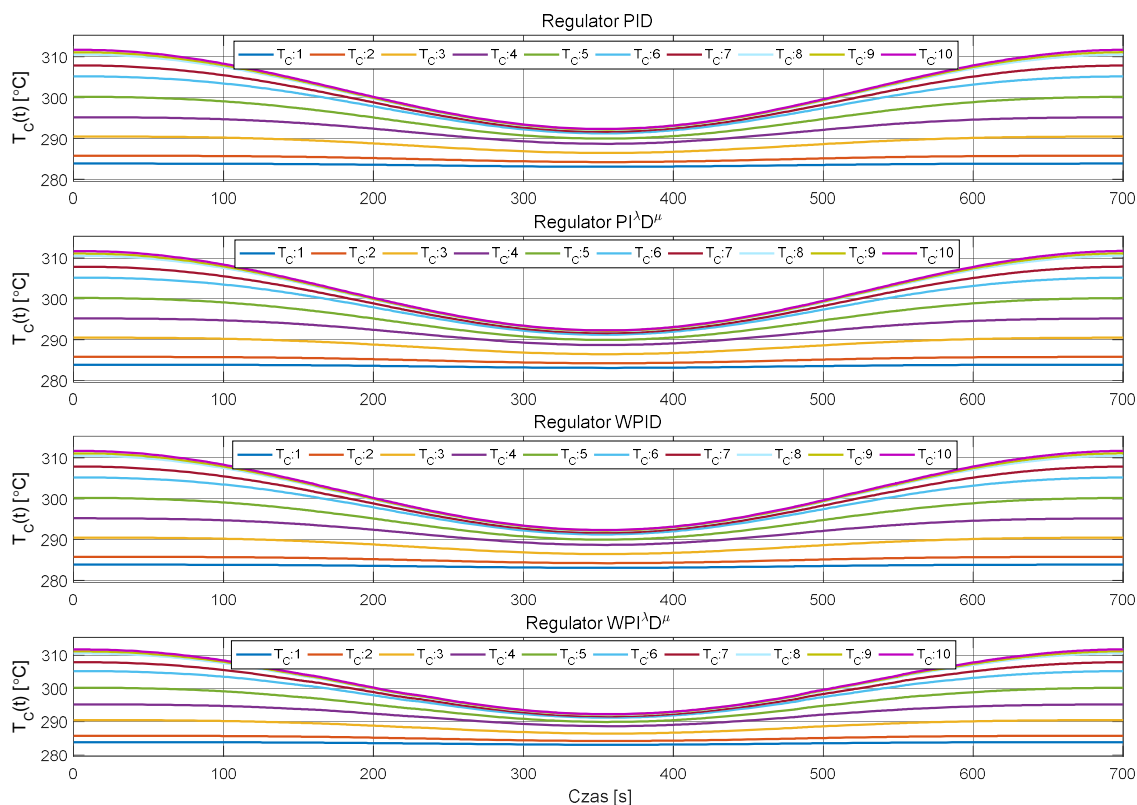
Rysunek 8.31. Rozkłady temp. chłodziwa dla układu regulacji, w którym zastosowano regulatory z parametrami dobranymi w drugim wariantcie optymalizacji – schodkowa trajektoria  $P_{TH,R}$ .



Rysunek 8.32. Rozkłady temp. chłodziwa dla układu regulacji, w którym zastosowano regulatory z parametrami dobranymi w trzecim wariancie optymalizacji – schodkowa trajektoria  $P_{TH,R}$ .

## 8.4.2 Trajektoria sinusoidalna mocy cieplnej zadanej

Tak samo jak w rozdziale 8.3.2 tak i w tym został przedstawiony wyłącznie pojedynczy zestaw wykresów temperatur chłodziwa w rdzeniu reaktora. Został on sporządzony dla przypadku, w którym parametry porównywanych regulatorów zostały dobrane w pierwszym wariancie optymalizacji. Tak samo jak w poprzednim przypadku zestawy dla innych wariantów zostały pominięte z powodu marginalnych różnic między nimi. Dla wolnozmienniej sinusoidalnej trajektorii mocy cieplnej zadanej działanie układu regulacji dla wszystkich porównywanych regulatorów było zbliżone, co znajduje odzwierciedlenie w przebiegach temperatur chłodziwa zamieszczonych na rysunku 8.33. Również w tym przypadku chłodziwo zawarte w górnych partiach reaktora jest najbardziej wrażliwe na zmiany mocy.



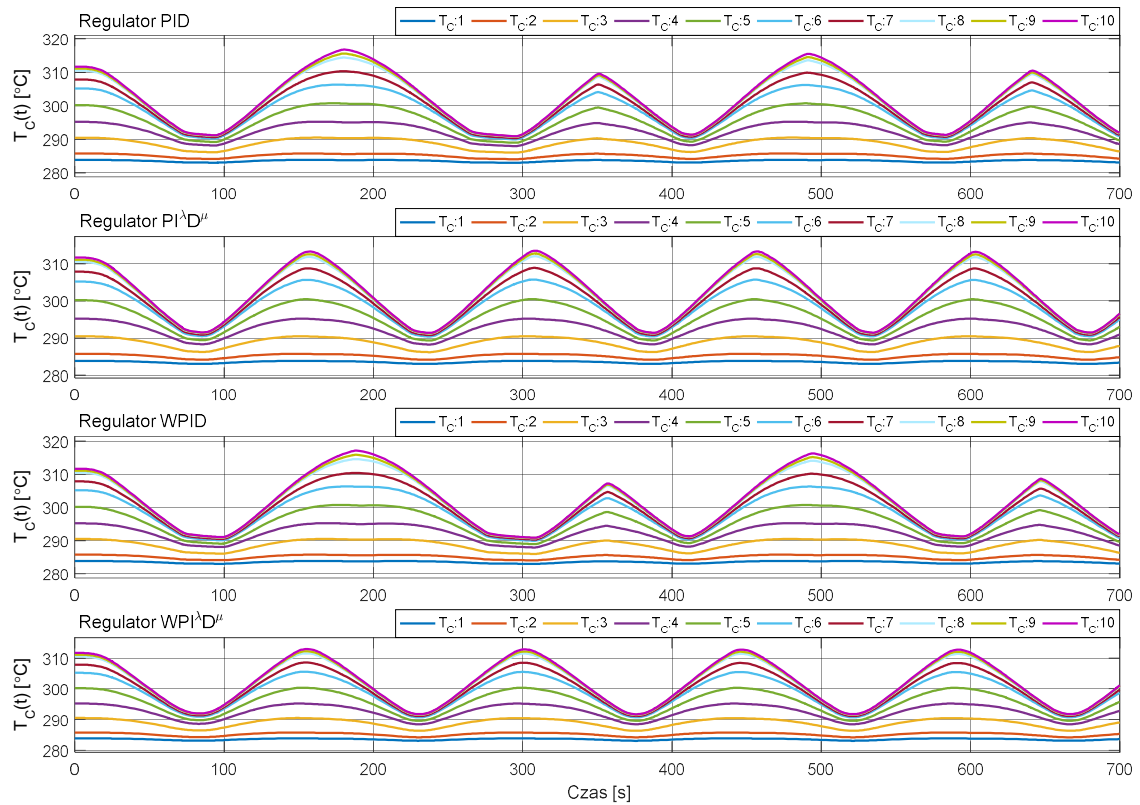
Rysunek 8.33. Rozkłady temp. chłodziwa w rdzeniu reaktora dla układu regulacji, w którym zastosowano regulatory z parametrami dobranymi w pierwszym wariantcie optymalizacji – sinusoidalna trajektoria  $P_{TH,R}$ .

### 8.4.3 Trajektorja sinusoidalna mocy cieplnej zadanej o zwiększonej częstotliwości

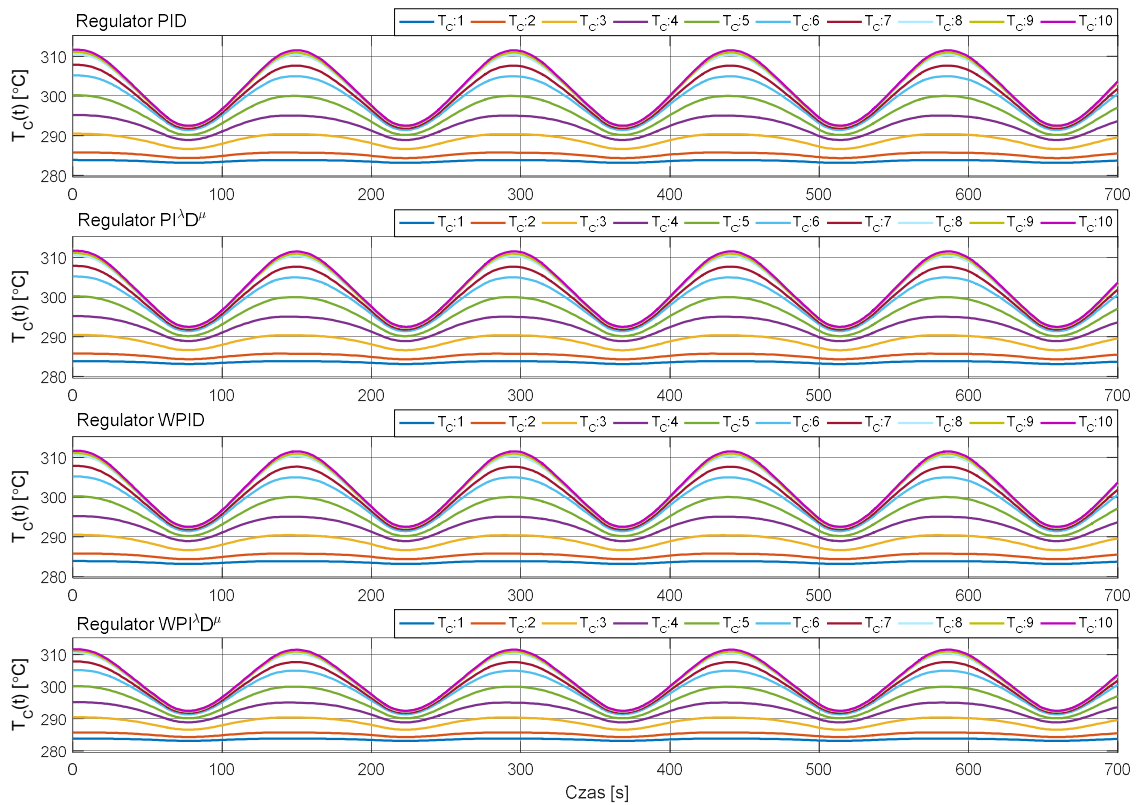
Na rysunku 8.34 zamieszczono zestaw wykresów przedstawiający zmiany temperatury chłodziwa wynikające z działania układu sterowania, w którym zastosowano regulatory z parametrami dobranymi w pierwszym wariantcie optymalizacji. Natomiast rysunku 8.35 zamieszczono zestaw wykresów przedstawiający zmiany temperatury wynikające z działania układu regulacji, w którym zastosowano regulatory z parametrami dobranymi w drugim wariantcie optymalizacji. Ostatni zestaw wykresów, zamieszczony na rysunku 8.36, dotyczy układu regulacji, w którym wystąpiły regulatory z parametrami dobranymi w trzecim wariantcie optymalizacji.

Dynamika przedstawionych na rysunkach 8.34, 8.35 i 8.36 przebiegów temperatur chłodziwa, tak jak przedstawionych w podrozdziale 8.3.3 przebiegów temperatur paliwa, również jest bardzo zbliżona do zmian mocy cieplnej omówionych w podrozdziale 8.1.3 dla wszystkich porównywanych regulatorów. Przebiegi temperatur wynikające z działania układu regulacji z regulatorami, których nastawy dobrane zostały w pierwszym wariantcie optymalizacji są najbardziej zróżnicowane. Różnice między przebiegami temperatury dla drugiego wariantu optymalizacji dla każdego regulatora są marginalne, tak jak to miało miejsce w przypadku temperatur paliwa. Natomiast

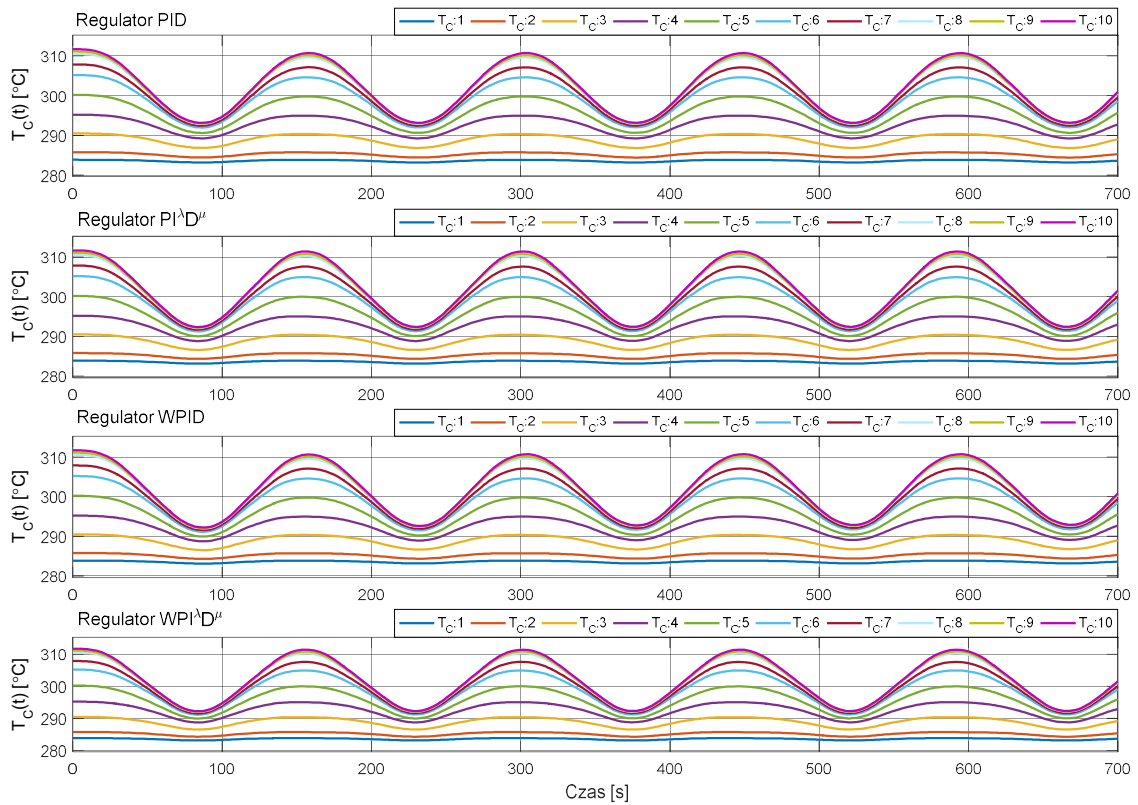
w przebiegach temperatur dla trzeciego wariantu optymalizacji widoczne jest delikatne opóźnienie względem wyników uzyskanych w drugim wariantie optymalizacji.



Rysunek 8.34. Rozkłady temp. chłodziwa dla układu regulacji, w którym zastosowano regulatory z parametrami dobranymi w pierwszym wariantie optymalizacji – sinusoidalna trajektoria  $P_{TH,R}$  o zwiększonej częstotliwości.



Rysunek 8.35. Rozkłady temp. chłodziwa dla układu regulacji, w którym zastosowano regulatory z parametrami dobranymi w drugim wariantcie optymalizacji – sinusoidalna trajektoria  $P_{TH,R}$  o zwiększonej częstotliwości.



Rysunek 8.36. Rozkłady temp. chłodziwa dla układu regulacji, w którym zastosowano regulatory z parametrami dobranymi w trzecim wariantcie optymalizacji – sinusoidalna trajektoria  $P_{TH,R}$  o zwiększonej częstotliwości.



### 8.4.4 Podsumowanie

Przedstawione w niniejszym podrozdziale zestawy wykresów temperatur chłodziwa w rdzeniu reaktora pozwalają stwierdzić, iż istnieje bardzo duża korelacja między nimi a przebiegami temperatury paliwa oraz mocy cieplnej. Również w przypadku temperatur chłodziwa można zauważyć, że charakter ich zmian zależy od struktury oraz parametrów regulatorów. Na podstawie zamieszczonych temperatur chłodziwa również można stwierdzić, że najbardziej korzystnym, z punktu widzenia urządzeń technologicznych pracujących w obrębie elektrowni jądrowej, wariantem optymalizacji parametrów regulatorów jest wariant nr 3, w którym wykorzystano kryterium jakości LQ. Podobnie jak w przypadku temperatur paliwa, tak i tu przebiegi temperatur chłodziwa uzyskane w wyniku działania układu sterowania z regulatorami, których nastawy dobrane zostały w trzecim wariantcie optymalizacji, mają łagodny inercyjny charakter. Tak jak wspomniano w podrozdziale 8.3.4 łagodne inercyjne przebiegi temperatur wpływają korzystnie na prace urządzeń technologicznych, nie narażając ich na uszkodzenie czy awarię. Z tego powodu wybór kryterium LQ w zadaniu optymalizacji parametrów regulatorów pracujących w układzie regulacji mocy cieplnej reaktora jądrowego wydaje się być najbardziej zasadne.

## 8.5 Współczynniki nierównomierności rozkładu temperatury

W tym podrozdziale zostały zaprezentowane wykresy osiowego współczynnika nierównomierności rozkładu temperatury paliwa w rdzeniu reaktora. Wykresy te zostały sporządzone w oparciu o rozkłady temperatur zamieszczone w podrozdziale 8.3.

Osiowy współczynnik nierównomierności temperatury paliwa wyznaczany jest na podstawie następującej zależności [9]

$$K_Z = \frac{T_{F,max}}{T_{F,av}}, \quad (8.1)$$

gdzie  $T_{F,max}$  jest maksymalną, a  $T_{F,av}$  średnią temperaturą paliwa jądrowego dla rozkładu osiowego. Współczynnik  $K_Z$  dla obiektu wirtualnego określany jest na podstawie średnich temperatur obliczanych w węzłach paliwowych obiektu wirtualnego.

Współczynnik ten dla teoretycznego osiowego rozkładu sinusoidalnego (bez reflektora) wynosi 1,5708 [9]. Im większa jego wartość tym bardziej nierównomierny jest rozkład temperatur paliwa w rdzeniu reaktora. Ponieważ temperatura paliwa jest ściśle skorelowana z gęstością mocy w paliwie, zatem na podstawie rozkładu temperatur paliwa można stwierdzić, w której części rdzenia wytwarzana jest największa moc. Współczynnik nierównomierności jest istotnym parametrem decydującym o przebiegu kampanii paliwowej reaktora jądrowego. Im mniejsza jego



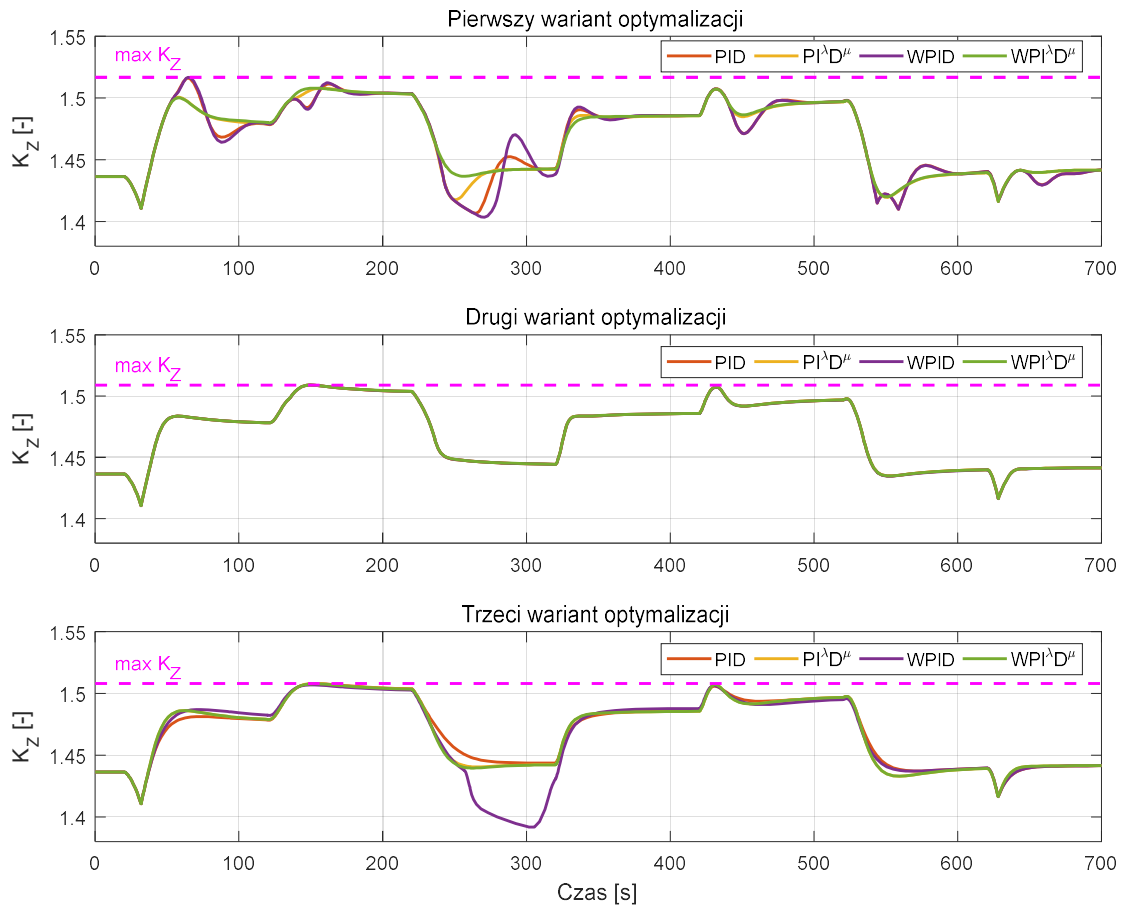
wartość, tym paliwo jądrowe wypalane jest w korzystniejszy sposób pod względem maksymalizacji okresu pracy w ramach jednej kampanii paliwowej. Dodatkowo utrzymywanie małego współczynnika nierównomierności przy takiej samej objętości rdzenia reaktora powoduje, że możliwe jest osiągnięcie większych jego mocy [9].

Na rysunkach 8.37, 8.38 oraz 8.39 zostały przedstawione wykresy współczynników nierównomierności rozkładu temperatury dla układów sterowania z regulatorami, których parametry dobrano w trzech wariantach optymalizacji odpowiednio dla trajektorii schodkowej, sinusoidalnej oraz sinusoidalnej o zwiększonej częstotliwości. Dodatkowo w tabelach 8.6, 8.7 oraz 8.8 zamieszczono największe uzyskane wartości współczynnika nierównomierności w zależności od wariantu optymalizacji oraz od zastosowanego w układzie sterowania regulatora. Tabelę 8.6 sporządzono dla schodkowej trajektorii mocy cieplnej zadanej. Natomiast tabele 8.7 i 8.8 zostały sporządzone odpowiednio dla wolnozmiennnej oraz szybkozmiennnej trajektorii sinusoidalnej.

Na podstawie rysunków 8.37, 8.38 i 8.39 można zauważyć, że największe różnice w wykresach zmienności współczynników (pomiędzy regulatorami) występują w porównaniu obejmującym trajektorię schodkową oraz sinusoidalną o podwyższonej częstotliwości dla pierwszego wariantu optymalizacji. Wynika to z faktu, że w tych przypadkach występowały również największe różnice w odtwarzaniu trajektorii zadanej przez układ regulacji.

Największe wartości współczynnika nierównomierności osiągnęte są dla mocy cieplnej będącej w okolicach  $60\% P_{TH,N}$ . Bardzo dobrze jest to widoczne przy porównaniu rysunków 8.7, 8.26 i 8.38 dla sinusoidalnej trajektorii mocy cieplnej zadanej. Widać na nich, że maksimum współczynnika nierównomierności jest osiągnięte dla mocy będącej w okolicach  $60\% P_{TH,N}$  oraz położenia prętów w okolicach  $-1,75$  m (ok. 200 s symulacji). Dla takiego stanu wartość maksymalna oraz średnia temperatury paliwa przyjmują najbardziej niekorzystne wartości, tj. wartość maksymalna temperatury paliwa jest najbardziej oddalona od wartości średniej, powodując przez to dużą wartość współczynnika  $K_Z$ .

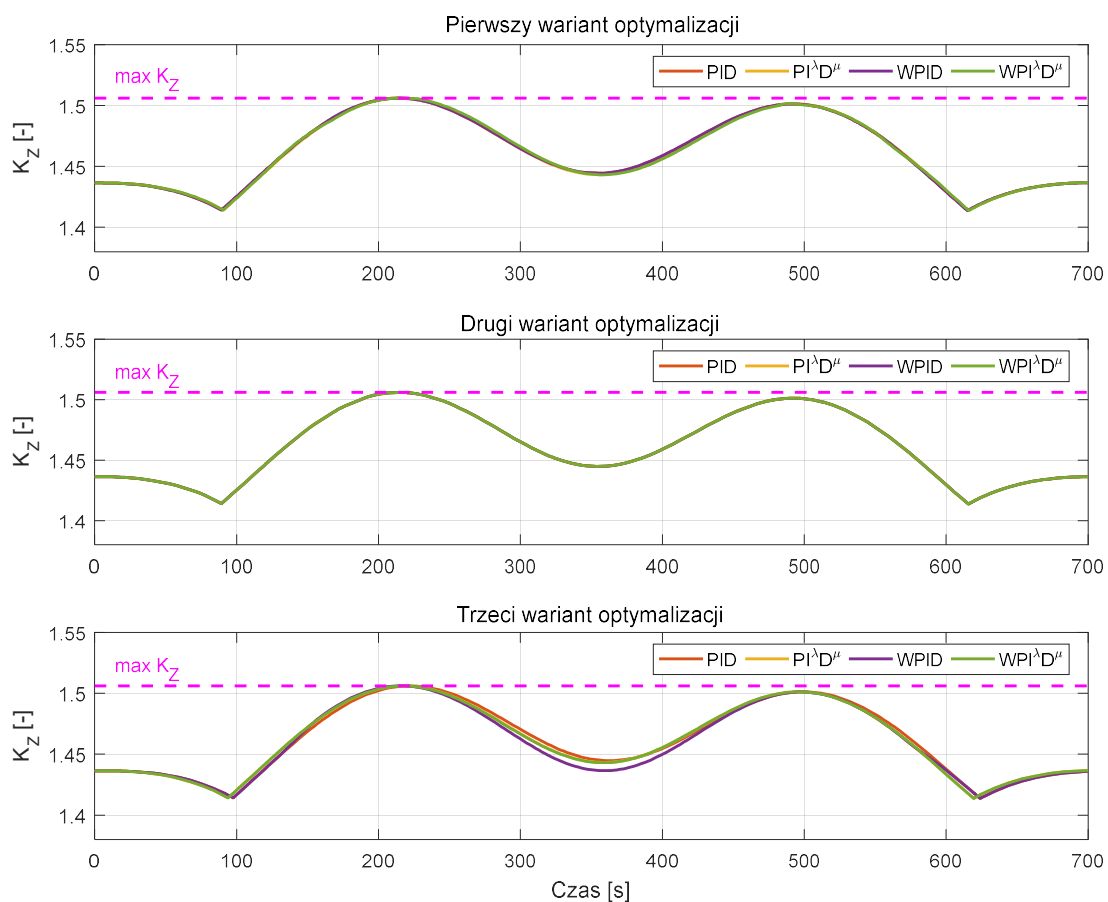
Na podstawie wykresów oraz tabel, przedstawionych w tym podrozdziale, można zaobserwować, że największe wartości współczynników nierównomierności temperatury uzyskał układ regulacji z regulatorami PID oraz WPID podczas odtwarzania schodkowej trajektorii zadanej. W pozostałych przypadkach różnice w maksymalnych wartościach współczynników nierównomierności temperatury były marginalne.



Rysunek 8.37. Wykresy zmian osiowego współczynnika nierównomierności rozkładu temperatury paliwa dla układu regulacji, w którym zastosowano regulatory z parametrami dobranymi w trzech wariantach optymalizacji – schodkowa trajektoria  $P_{TH,R}$ .

Tabela 8.6. Maksymalne wartości osiowego współczynnika nierównomierności rozkładu temperatury paliwa dla układu regulacji, w którym zastosowano regulatory z parametrami dobranymi w trzech wariantach optymalizacji – schodkowa trajektoria  $P_{TH,R}$ .

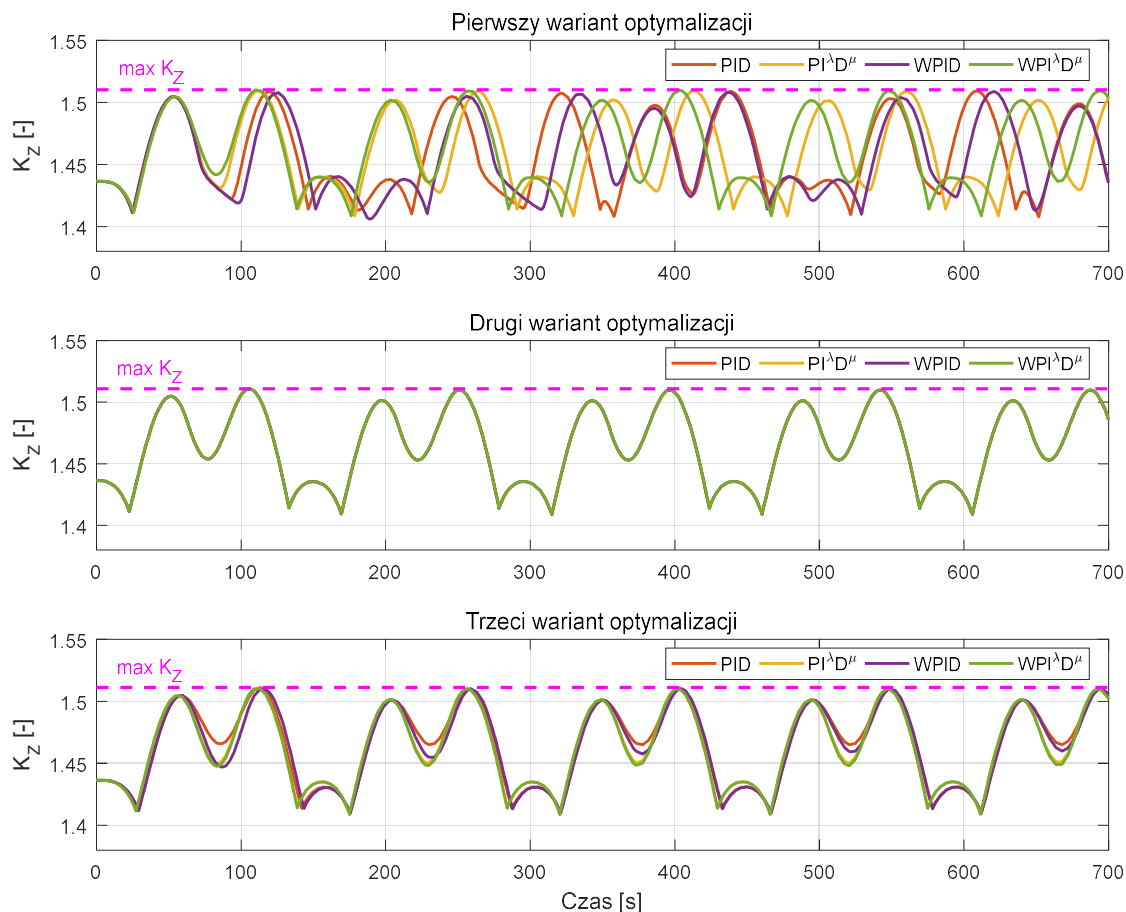
Wariant optymalizacji	Regulator			
	PID	$PI^\lambda D^\mu$	WPID	$WPI^\lambda D^\mu$
1	1,516	1,508	1,517	1,508
2	1,509	1,509	1,509	1,509
3	1,508	1,508	1,507	1,508



Rysunek 8.38. Wykresy zmian osiowego współczynnika nierównomierności rozkładu temperatury paliwa dla układu regulacji, w którym zastosowano regulatory z parametrami dobranymi w trzech wariantach optymalizacji – sinusoidalna trajektoria  $P_{TH,R}$ .

Tabela 8.7. Maksymalne wartości osiowego współczynnika nierównomierności rozkładu temperatury paliwa dla układu regulacji, w którym zastosowano regulatory z parametrami dobranymi w trzech wariantach optymalizacji – sinusoidalna trajektoria  $P_{TH,R}$ .

Wariant optymalizacji	Regulator			
	PID	$PI^\lambda D^\mu$	WPID	$WPI^\lambda D^\mu$
1	1,506	1,506	1,506	1,506
2	1,506	1,506	1,506	1,506
3	1,506	1,506	1,506	1,506



Rysunek 8.39. Wykresy zmian osiowego współczynnika nierównomierności rozkładu temperatury paliwa dla układu regulacji, w którym zastosowano regulatory z parametrami dobranymi w trzech wariantach optymalizacji – sinusoidalna trajektoria  $P_{TH,R}$  o zwiększonej częstotliwości.

Tabela 8.8. Maksymalne wartości osiowego współczynnika nierównomierności rozkładu temperatury paliwa dla układu regulacji, w którym zastosowano regulatory z parametrami dobranymi w trzech wariantach optymalizacji – sinusoidalna trajektoria  $P_{TH,R}$  o zwiększonej częstotliwości.

Wariant optymalizacji	Regulator			
	PID	$PI^\lambda D^\mu$	WPID	$WPI^\lambda D^\mu$
1	1,509	1,509	1,509	1,510
2	1,511	1,511	1,511	1,511
3	1,511	1,510	1,510	1,510

## 8.6 Podsumowanie

Na podstawie wyników przedstawionych w rozdziale 8 można stwierdzić, że zastosowanie regulatorów wykorzystujących operacje całkowania i różniczkowania niecałkowitego rzędu w układzie sterowania mocy cieplnej reaktora jądrowego jest uzasadnione. W większości analizowanych przypadków, zarówno dla regulacji nadążnej jak i stałowartościowej, wykazują one przewagę w stosunku do klasycznych odpowiedników, zwłaszcza przy rozważaniu pierwszego wariantu optymalizacji.

Wykorzystanie trzeciego wariantu optymalizacji w doborze parametrów regulatorów jest najbardziej korzystne z punktu widzenia niezawodnej pracy urządzeń technologicznych elektrowni jądrowej. Za jego pośrednictwem uzyskano nastawy regulatorów, które powodują, że dynamika układu regulacji mocy cieplnej ma charakter inercyjny. Charakter ten nie będzie powodował nagłych i gwałtownych zmian wielkości interesujących z punktu widzenia pracy reaktora jądrowego, takich jak generowana moc, temperatury paliwa czy chłodziwa. Taki charakter pracy również korzystanie wpłynie na żywotność oraz bezawaryjną pracę elementów technologicznych reaktora, obiegu pierwotnego oraz wtórnego, które w mniejszym stopniu narażone będą na stres czy udary spowodowane tymi wielkościami.

Zastosowanie w układzie regulacji zaproponowanego w rozprawie wieloobszarowego rozmytego regulatora  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  otwiera szerokie możliwości z punktu widzenia bardzo dokładnego dostosowania go do szerokich zmian punktu pracy. Wyniki zaprezentowane w rozdziale pokazują, że zaproponowana w rozprawie forma sterowania w większości przypadków jest lepsza od klasycznych rozwiązań, a w niektórych przypadkach znacznie je przewyższa, tak jak miało to miejsce dla parametrów regulatorów dobranych w pierwszym zadaniu optymalizacji. Jedynym scenariuszem, w którym regulatory  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  oraz  $WPI^{\lambda}D^{\mu}$  cechowały się gorszą jakością sterowania w porównaniu do klasycznych odpowiedników, była trajektoria wolnozmienna. Lecz w tym szczególnym przypadku działanie wszystkich regulatorów było bardzo zbliżone do siebie.

Na podstawie wyników zamieszczonych w tym rozdziale można również zauważyć, że regulatory, w których występowały operacje całkowania i różniczkowania niecałkowitego rzędu charakteryzowały się marginalnym efektem związanym z interakcją członu całkującego i nasycenia występującego w urządzeniu wykonawczym (ang. integral windup). Pomimo tego, że w wielu przypadkach regulatory te generowały sygnał sterujący, który powodował dłuższe działanie urządzenia wykonawczego z maksymalnymi prędkościami, w stosunku do innych porównywanych regulatorów, reakcja układu sterowania z tymi regulatorami była szybsza, w kontekście uzyskanych czasów regulacji. Regulatory wykorzystujące operacje całkowania niecałkowitego rzędu

w przeciwieństwie do swoich klasycznych odpowiedników posiadają dwa stopnie swobody powiązane z operacją całkowania, tj. wzmocnienie części proporcjonalnej  $K_I$  oraz rząd operatora całkowania  $\lambda$ . Z tego powodu w korzystniejszy sposób są one w stanie reagować na wystąpienie interakcji pomiędzy operacją całkowania uchybu oraz nasyceniem urządzenia wykonawczego. Również poprzez dodatkowy stopień swobody nie jest wymagane stosowanie filtrów przeciwnasyceniowych (anti-windup) w strukturze regulatora.

## 9. Podsumowanie i wnioski

---

Celem rozprawy doktorskiej było rozwiązanie problemu naukowego zdefiniowanego jako sterowanie szybkimi procesami reaktora wodnego ciśnieniowego (PWR) elektrowni jądrowej. Wielkością sterowaną była średnia moc cieplna reaktora przy szerokim zakresie zmian punktu pracy. Podstawowe nowe podejście do sterowania rozważane przy rozwiązywaniu problemu sterowania to połączenie nowoczesnych technologii związanych z rachunkiem różniczkowo-całkowym niecałkowitego rzędu oraz modelowaniem rozmytym.

W ramach rozprawy doktorskiej przedstawiono charakterystykę procesów reaktora jądrowego PWR ze szczególnym uwzględnieniem procesów szybkich takich jak, generacja ciepła (kinetyka neutronów) i jego odbiór (wymiana ciepła pomiędzy paliwem jądrowym a chłodziwem). W rozprawie zaprezentowano i zaimplementowano dwie grupy modeli wymienionych procesów. Pierwsza grupa została wykorzystana do opracowania metod syntezy układów automatycznego sterowania wykorzystujących postulowane zaawansowane metody związane z rachunkiem różniczkowo-całkowym niecałkowitego rzędu oraz modelowaniem rozmytym. Natomiast druga grupa została wykorzystana przy testowaniu symulacyjnym zaproponowanego w rozprawie układu sterowania mocą cieplną reaktora jądrowego. Opracowana metoda syntezy bazuje na optymalizacji funkcji kryterialnej, w której skład wchodzi wybrane całkowite kryteria jakości sterowania. W rozprawie podjęto również analizę jakościową opracowanego układu sterowania mocą cieplną elektrowni jądrowej.

W rozdziale pierwszym została przedstawiona motywacja do podjęcia tematyki zawartej w rozprawie, która związana jest z opracowaniem algorytmu sterowania pracującego w układzie regulacji mocą cieplną reaktora jądrowego, który oparto o operatory rachunku niecałkowitego rzędu. Wielkością sterowaną w ww. układzie sterowania jest moc cieplna reaktora jądrowego z uwzględnieniem szerokich zmian punktu pracy (mocy cieplnej). Z uwagi na pracę układu sterowania w warunkach zmian punktu pracy, która może być spowodowana np. działaniem mechanizmów deregulacji rynku energii elektrycznej oraz stanami zakłóceniovymi występującymi w obrębie elektrowni jądrowej i jej otoczeniu, w rozprawie została również wykorzystana technologia systemów rozmytych bazującą na modelu wnioskowania Takagi-Sugeno. W rozdziale pierwszym została również postawiona teza oraz przedstawiono w nim strukturę oraz zawartość rozprawy.

W rozdziale drugim przedstawiono obiekt sterowania, którym jest reaktor jądrowy typu PWR wraz z charakterystyką technologiczną elektrowni jądrowej, której jest kluczowym elementem. W ramach prezentacji obiektu sterowania wyszczególnione zostały procesy i oddziaływania szybkie, które wykorzystywane są podczas sterowania jego mocą. Najważniejsze z tych procesów to: występowanie neutronów opóźnionych, ujemne sprzężenia reaktywnościowe powstające w wyniku zmian temperatury paliwa i chłodziwa oraz przemieszczanie prętów sterujących. W ostatniej części tego rozdziału scharakteryzowano technikę sterowania reaktorem jądrowym typu PWR, która sprowadza się do umiejętnego prowadzenia bilansu reaktywności.

W rozdziale trzecim sformułowano problem sterowania mocą cieplną reaktora jądrowego, który postawiono w rozprawie doktorskiej. W ramach tego sformułowania scharakteryzowano wykorzystany w pracy wieloobszarowy regulator rozmyty z lokalnymi regulatorami  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  oraz urządzenie wykonawcze, tj. napęd zespołu prętów sterujących. W rozdziale tym określono również założenia stawiane wykorzystanym w rozprawie modelom matematycznym reaktora jądrowego i algorytmom sterowania. Na końcu rozdziału został zamieszczony przegląd literatury, w którym przedstawiono aktualne zastosowania rachunku różniczkowo-całkowego niecałkowitego rzędu oraz systemów rozmytych. W przeglądzie przedstawiono również zastosowanie ww. technologii w systemach sterowania elementów elektrowni jądrowej. W przeglądzie literatury zestawiono również aktualne prace, w których skupiono się na nowoczesnych metodach syntezy układów sterowania, które wykorzystują technologie rachunku niecałkowitego rzędu oraz systemów rozmytych. Ostatnią częścią przeglądu literatury jest charakterystyka prac opublikowanych przez autora rozprawy doktorskiej, które związane są z zagadnieniami sterowania elementami obiegu pierwotnego elektrowni jądrowej oraz metodami syntezy układów sterowania, w których występuje wieloobszarowy regulator rozmyty z lokalnymi regulatorami PID oraz  $PI^{\lambda}D^{\mu}$ .

Rozdział czwarty został poświęcony zagadnieniu modelowania matematycznego procesów szybkich zachodzących w rdzeniu reaktora jądrowego. W rozdziale tym szczegółowo opisano opracowane modele matematyczne reaktora jądrowego, które wykorzystano w etapach syntezy (model projektowy) oraz symulacyjnej weryfikacji (obiekt wirtualny) zaproponowanego w rozprawie układu sterowania mocą cieplną. Model projektowy składa się z punktowego modelu kinetyki neutronów oraz modelu wymiany ciepła i efektów reaktywnościowych z pojedynczym węzłem paliwowymi i dwoma węzłami chłodziwa. W skład obiektu wirtualnego również wchodzi punktowy model kinetyki neutronów. Natomiast w części termo-hydraulicznej wykorzystano model wymiany ciepła i efektów reaktywnościowych z pięcioma węzłami paliwowymi oraz dziesięcioma węzłami chłodziwa, który w większym stopniu oddaje przestrzenny charakter procesu wymiany ciepła między paliwem a chłodziwem w rdzeniu reaktora. W obiekcie wirtualnym, w odróżnieniu od modelu projektowego, został zaimplementowany autorski mechanizm rozbudowujący część termo-hydrauliczną o dodatkowe zmienne, które uwzględniają zmiany w rozkładzie



generowanej mocy cieplnej reaktora jądrowego wynikające z przemieszczania zespołu prętów sterujących w rdzeniu reaktora. Mechanizm ten został opracowany w oparciu o przestrzenny model dyfuzji neutronów.

W rozdziale piątym zostały opisane technologie matematyczne wykorzystane w syntezie zaproponowanego i zaimplementowanego w rozprawie układu sterowania mocą cieplną. Pierwsza z wykorzystanych technologii to rachunek różniczkowo-całkowy niecałkowitego rzędu, natomiast druga to systemy rozmyte. W rozdziale tym przedstawiono podstawowe definicje związane z rachunkiem niecałkowitego rzędu, opisano rozszerzenie transformaty Laplace'a, które uwzględnia operatory rachunku niecałkowitego rzędu oraz nakreślono podstawowe typy aproksymacji wykorzystywanych do realizacji operatorów tego rachunku. W rozdziale szczegółowo opisano aproksymacje operatorów całkowania i różniczkowania niecałkowitego rzędu filtrami Oustaloup'a, która została wykorzystana w rozprawie do celów implementacji operatorów tego rachunku w lokalnych regulatorach  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  wchodzących w skład regulatora wieloobszarowego. Ostatnim elementem opisu zagadnień związanych z rachunkiem niecałkowitego rzędu, w tym podrozdziale, jest regulator  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  o niecałkowitym rzędzie całkowania  $\lambda$  i różniczkowania  $\mu$ . W drugiej części rozdziału piątego została zamieszczona charakterystyka systemów rozmytych ze szczególnym uwzględnieniem systemu opartego o wnioskowanie rozmyte typu Takagi-Sugeno oraz opis połączenia wymienionych w rozdziale technologii.

W rozdziale szóstym została opisana metodologia syntezy zaproponowanego w rozprawie układu sterowania mocą cieplnej reaktora jądrowego pracującego w warunkach szerokiego zakresu zmian punktu pracy. W rozdziale tym szczegółowo opisano postawione w rozprawie zadanie optymalizacji, które jest częścią składową zaproponowanej metodologii. Celem tego zadania optymalizacji był dobór nastaw i parametrów wieloobszarowego regulatora rozmytego z lokalnymi regulatorami  $PI^{\lambda}D^{\mu}$ . Zadanie to zostało podzielone na dwa etapy. W pierwszym etapie dobrano nastawy lokalnych regulatorów  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  pracujących w otoczeniu wybranych a priori punktów pracy. W drugim etapie dobrane zostały parametry kształtu funkcji przynależności, które występują w rozmytej części regulatora wieloobszarowego z wykorzystaniem trajektorii mocy cieplnej, której przebieg charakteryzuje się szerokim zakresem zmian punktu pracy. Zadanie optymalizacji rozwiązane zostało dla trzech wariantów, które różnią się zastosowanym całkowym kryterium jakości sterowania występującym w funkcji celu zadania optymalizacji. W rozdziale został również przeprowadzony ramowy przegląd metod optymalizacji, w którym zwrócono szczególną uwagę na cechy postawione w rozprawie zadania optymalizacji, tj. nieliniowości występującej w modelu obiektu sterowania, nieliniowości w wykorzystanych całkowych kryteriach jakości sterowania, ograniczeń na wartości sygnału sterującego z regulatora, występowania funkcji kary, wykorzystania systemu rozmytego, wykorzystania nieliniowych funkcji przynależ-

ności oraz mechanizmów, które odrzucają rozwiązania ze względu na niestabilność układu regulacji w wybranych punktach pracy (część symulacyjna optymalizatora). Ostatecznie do rozwiązania określonego w rozdziale zadania optymalizacji wybrano algorytm poszukiwania bezpośredniego MADS. W dalszej części rozdziału zostało scharakteryzowane środowisko obliczeniowe Matlab/Simulink, w którym zaimplementowano modele zaproponowanego w rozprawie układu regulacji oraz dokonano optymalizacji parametrów wykorzystanego w nim regulatora wieloobszarowego. W tej części również przedstawiono proces doboru pasma pracy filtrów Oustaloupa wykorzystanych w aproksymacji operatorów różniczkowania i całkowania regulatora  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  oraz zagadnienia implementacyjne mechanizmu badania stabilności oraz warunkowego zatrzymania części symulacyjnej optymalizatora. Na końcu rozdziału przedstawiono wyniki, które uzyskano w rezultacie rozwiązania dwuetapowego zadania optymalizacji oraz omówiono je. Dla porównania jakości regulacji uzyskanej w wyniku działania wieloobszarowego regulatora rozmytego z lokalnymi regulatorami  $PI^{\lambda}D^{\mu}$ , który pracował w układzie sterowania mocy cieplnej reaktora jądrowego, dokonano również optymalizacji parametrów oraz nastaw wieloobszarowego regulatora rozmytego z lokalnymi regulatorami PID. Wyniki porównania ww. regulatorów, które przedstawiono w tym rozdziale, jednoznacznie pokazują przewagę regulatora wieloobszarowego z lokalnymi regulatorami  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  w kontekście uzyskania korzystniejszych wartości wskaźników wynikających z odpowiedzi skokowej oraz korzystniejszych wartości funkcji celu wykorzystanej w zadaniu optymalizacji.

Rozdział siódmy został poświęcony analizie stabilności zaproponowanego w rozprawie układu sterowania, w którym występował wieloobszarowy regulator rozmyty z lokalnymi regulatorami  $PI^{\lambda}D^{\mu}$ . Analiza stabilności została przeprowadzona w oparciu o zaproponowaną metodę z wykorzystaniem zlinearyzowanych modeli elementów, które wchodzi w skład zaproponowanego w rozprawie układu sterowania mocy cieplnej, tj. regulatora wieloobszarowego, urządzenia wykonawczego oraz modelu projektowego reaktora jądrowego. Modele ww. elementów układu sterowania zostały zlinearyzowane w zakresie punktów pracy od 35% do 100%  $P_{TH,N}$  z krokiem wynoszącym 1%  $P_{TH,N}$ . W zaproponowanej metodyce analizy stabilności wykorzystano położenie biegunów zastępczej transmitancji zamkniętego układu regulacji, w którym wystąpił regulator wieloobszarowy z parametrami dobranymi w wyniku rozwiązania zadania optymalizacji dla trzech wariantów zastosowanych całkowych wskaźników jakości sterowania. Niezależnie od ww. metody badania stabilności dla zamkniętego układu regulacji, w rozdziale tym również zaprezentowano wyniki analizy, która została przeprowadzona w oparciu o kryterium Nyquista dla charakterystyk Bodego. Położenie biegunów dla badanych 66 punktów pracy oraz dla zestawów parametrów regulatora wieloobszarowego dobranych w wyniku rozwiązania 3 wariantów zadania optymalizacji pokazało, że zaproponowany układ sterowania jest stabilny dla każdego ww. przypadku. W oparciu o otrzymane wyniki analizy oraz twierdzenie pomocnicze

zawarte w rozdziale siódmym stwierdza się, że zaproponowany w rozprawie układ sterowania z wieloobszarowym regulatorem rozmytym z lokalnymi regulatorami  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  jest stabilny w rozważanym zakresie zmian punktu pracy.

W rozdziale ósmym przedstawiono wyniki przygotowanej symulacyjnej weryfikacji zaproponowanego w rozprawie układu sterowania mocą cieplną reaktora jądrowego. Weryfikacja ta została przeprowadzona z wykorzystaniem obiektu wirtualnego, tj. modelu reaktora jądrowego, w którym występuje punktowy model kinetyki neutronów wraz z modelem wymiany ciepła i efektów reaktywnościowych z pięcioma węzłami paliwowymi oraz dziesięcioma węzłami chłodziwa. Jak już wcześniej wspomniano w obiekcie wirtualnym zaimplementowano autorski mechanizm pozwalający na określenie osiowego rozkładu generowanej mocy cieplnej w zależności od położenia zespołu prętów sterujących w rdzeniu reaktora. Opracowana symulacyjna weryfikacja została przeprowadzona dla scenariuszy regulacji nadążnej oraz stałowartościowej, które różniły się charakterem trajektorii mocy cieplnej zadanej oraz wielkości zakłócających. W weryfikacji, dla celów porównawczych, zestawiono ze sobą jakość regulacji, określoną za pośrednictwem całkowitych wskaźników jakości sterowania, otrzymaną w wyniku działania: regulatora PID, regulatora  $PI^{\lambda}D^{\mu}$ , wieloobszarowego regulatora PID oraz wieloobszarowego regulatora  $PI^{\lambda}D^{\mu}$ . Z otrzymanych wyników można wywnioskować, że regulatory charakteryzujące się niecałkowitymi rzędami operacji różniczkowania oraz całkowania uzyskały lepsze lub porównywalne wartości całkowitych wskaźników jakości wykorzystanych w porównaniu dla każdego scenariusza zastosowanego w symulacyjnej weryfikacji. W ramach weryfikacji zostały również zaprezentowane rozszerzone właściwości obiektu wirtualnego związane z mechanizmem modelującym osiowy rozkład generowanej mocy cieplnej. Właściwości te pozwoliły na przeprowadzenie analizy zmian temperatury paliwa jądrowego oraz chłodziwa w zależności od regulatora wykorzystanego w zaproponowanym w rozprawie układzie sterowania mocy cieplnej. Dodatkowo na końcu rozdziału zostały przedstawione wyniki analizy współczynników nierównomierności rozkładu temperatury paliwa w rdzeniu reaktora, która w sposób proporcjonalny przekłada się na gęstość mocy, która wydzielana jest w elementach paliwowych reaktora jądrowego. Przeprowadzona analiza współczynników nierównomierności również miała na celu pokazanie zaawansowanych właściwości obiektu wirtualnego wynikających z zastosowania znacznie większej ilości węzłów paliwowych oraz chłodziwa w stosunku do modelu projektowego oraz z zaimplementowania w tym modelu współczynników określających osiowy rozkład mocy cieplnej w rdzeniu reaktora.

Podsumowując w rozprawie doktorskiej:

- przedstawiono i umotywowano określony w rozprawie problem naukowy zdefiniowany jako sterowanie mocą cieplną reaktora jądrowego przy szerokim zakresie zmian punktu

pracy z wykorzystaniem technologii rachunku różniczkowo-całkowego niecałkowitego rzędu oraz systemów rozmytych,

- opisano i scharakteryzowano obiekt sterowania, którym jest reaktor jądrowy typu PWR,
- sformułowano problem sterowania wraz z założeniami, które odnoszą się do modeli matematycznych reaktora jądrowego oraz wykorzystanych algorytmów sterowania,
- opracowano modele matematyczne obiektu sterowania, które charakteryzują się uproszczonym oraz rozszerzonym węzłowym podejściem do modelowania procesów wymiany ciepła z wykorzystaniem autorskiego mechanizmu określającego osiowy rozkład mocy cieplnej w rdzeniu reaktora, który zależny jest od położenia zespołu prętów sterujących,
- przedstawiono i scharakteryzowano technologie matematyczne syntezy układu sterowania tj. rachunek różniczkowo-całkowy niecałkowitego rzędu oraz systemy rozmyte,
- przeprowadzono syntezę zaproponowanego w rozprawie układu regulacji mocy cieplnej opartą o opracowane dwuetapowe zadanie optymalizacji, którego celem był dobór nastaw i parametrów wieloobszarowego regulatora rozmytego z lokalnymi regulatorami  $PI^{\lambda}D^{\mu}$
- przeprowadzono analizę stabilności zaproponowanego układu regulacji mocy cieplnej reaktora jądrowego,
- przeprowadzono symulacyjną weryfikację zaproponowanego w rozprawie układu regulacji z wykorzystaniem modelu reaktora jądrowego (obiektu wirtualnego), który charakteryzował się rozszerzonym podejściem do modelowania procesów wymiany ciepła pomiędzy paliwem jądrowym a chłodziwem,
- przeprowadzono porównanie jakości regulacji pomiędzy klasycznym regulatorem PID, wieloobszarowym regulatorem PID, regulatorem  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  oraz wieloobszarowym regulatorem  $PI^{\lambda}D^{\mu}$ .

Za najważniejsze osiągnięcia w rozprawie autor uważa:

- opracowanie autorskiego mechanizmu pozwalającego na modelowanie osiowego rozkładu mocy w węzłowych modelach reaktora jądrowego,
- zaproponowanie i przeprowadzenie syntezy układu sterowania mocy cieplnej reaktora jądrowego, w którym wystąpił wieloobszarowy regulator rozmyty z lokalnymi regulatorami  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  opartą o dwuetapowe zadanie optymalizacji,
- zaproponowanie i przeprowadzenie symulacyjnej weryfikacji opracowanego układu regulacji mocy cieplnej reaktora jądrowego, w którym wystąpił wieloobszarowy regulator rozmyty z lokalnymi regulatorami  $PI^{\lambda}D^{\mu}$ , która obejmowała scenariusze regulacji nadążnej oraz stałowartościowej,
- zaproponowanie i przeprowadzenie analizy stabilności w oparciu o zestawy liniowych modeli układu sterowania.

Na podstawie uzyskanych w rozprawie wyników optymalizacji, które zamieszczono w rozdziale 6 oraz na podstawie przeprowadzonej weryfikacji przedstawionej w rozdziale 8 można stwierdzić, że postawiona w rozprawie teza została udowodniona. Jednocześnie przedstawiona w rozprawie metodologia syntezy układu sterowania, w którym wystąpił wieloobszarowy regulator rozmyty z lokalnymi regulatorami  $PI^{\lambda}D^{\mu}$ , oparta o dwuetapowe zadanie optymalizacji może być wykorzystana w znacznie szerszym polu zastosowań, tj. dla innych złożonych i nieliniowych obiektów sterowania, w których przypadku wymagana jest praca w warunkach szerokich zmian punktu pracy. Połączenie technologii rachunku różniczkowo-całkowego oraz systemów rozmytych pozwala na uzyskanie regulatorów pracujących w warunkach szerokich zmian punktu pracy, które będą charakteryzowały się lepszą jakością sterowania w stosunku do ich klasycznych odpowiedników, tj. regulatorów wieloobszarowych z lokalnymi regulatorami PID.

## 9.1 Kierunki dalszych prac

Opierając się na przebiegu prac bezpośrednio związanych z tematyką zaprezentowaną w rozprawie doktorskiej, można wskazać kierunki dalszych badań. Najważniejsze z nich to:

- kontynuacja prac związanych z rozszerzeniem modeli reaktora jądrowego o niestacjonarne parametry związane z zjawiskami wymiany ciepła pomiędzy paliwem a chłodziwem, które bezpośrednio zależą od temperatury i ciśnienia panujących w rdzeniu reaktora,
- badania nad zastosowaniem zaprezentowanego w pracy podejścia do sterowania obiektami nieliniowymi w warunkach szerokich zmian punktu pracy w układzie regulacji poziomu wody w pionowej wytwornicy pary występującej w elektrowni jądrowej typu PWR,
- badania nad wykorzystaniem sterowania predykcyjnego (*ang. Model Predictive Control*) w sterowaniu elektrownią jądrową i jej najważniejszymi elementami,
- badania nad wykorzystaniem innych metod aproksymacji operatorów rachunku niecałkowitego rzędu w sterowaniu oraz w modelowaniu procesów charakteryzujących się nieliniowością oraz niestacjonarnością.

## Bibliografia

---

- [1] International Atomic Energy Agency, *Implementing Digital Instrumentation and Control Systems in the Modernization of Nuclear Power Plants*. Vienna: International Atomic Energy Agency, 2009.
- [2] G. Jezierski, *Energia jądrowa wczoraj i dziś*. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, 2005.
- [3] K. Duzinkiewicz, „Reaktor jądrowy jako obiekt sterowania. Wykłady z przedmiotu Dynamika i sterowanie reaktorem jądrowym energetycznym dla studium podyplomowego Podstaw Energetyki Jądrowej.”, Wydział Elektrotechniki i Automatyki, Politechnika Gdańska, 2011-2010.
- [4] R. Murray, *Nuclear Energy, Sixth Edition: An Introduction to the Concepts, Systems, and Applications of Nuclear Processes*, 6. wyd. Butterworth-Heinemann, 2008.
- [5] Z. Celiński, *Energetyka jądrowa*. PWN, 1991.
- [6] J. J. Duderstadt i L. J. Hamilton, *Nuclear Reactor Analysis*, 1. wyd. New York: Wiley, 1976.
- [7] S. J. Green i G. Hetsroni, „PWR steam generators”, *International Journal of Multiphase Flow*, t. 21, Supplement, s. 1–97, grudz. 1995.
- [8] J. I. Choi, „Nonlinear digital computer control for the steam generator system in a pressurized water reactor plant”, Thesis, Massachusetts Institute of Technology, 1987.
- [9] G. Ackerman, *Eksploracja elektrowni jądrowych*. Warszawa: Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, 1987.
- [10] J. Kubowski, *Nowoczesne elektrownie jądrowe*. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, 2009.
- [11] D. Halliday, R. Resnick, i J. Walker, *Podstawy fizyki Tom 5*, 1. wyd. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN, 2003.
- [12] E. E. Lewis, *Fundamentals of Nuclear Reactor Physics*, 1. wyd. Amsterdam ; Boston: Academic Press, 2008.
- [13] M. A. Schultz, *Control of nuclear reactors and power plants*. McGraw-Hill, 1961.
- [14] H. Anglart, *Mały leksykon energetyki jądrowej*. Institute of Heat Engineering – Warsaw University of Technology, 2014.
- [15] „Control Rods – Nuclear Power”. [Online]. Dostępne na: <http://www.nuclear-power.net/nuclear-power-plant/control-rods/>. [Udostępniono: 08-lis-2016].
- [16] „Radioactivity: Control rods”. [Online]. Dostępne na: [http://www.radioactivity.eu.com/site/pages/Reactor\\_control\\_Rods.htm](http://www.radioactivity.eu.com/site/pages/Reactor_control_Rods.htm). [Udostępniono: 08-lis-2016].
- [17] *The Westinghouse Pressurized Water Reactor Nuclear Power Plant*. Westinghouse Electric Corporation, Water Reactor Divisions, 1984.
- [18] „Westinghouse Technology Systems Manual, Section 3.1, Reactor Vessel and Internals”. [Online]. Dostępne na: <https://www.nrc.gov/docs/ML1122/ML11223A212.pdf>. [Udostępniono: 18-wrz-2017].
- [19] H. M. Hashemian, *Nuclear Power Plant Instrumentation and Control*. INTECH Open Access Publisher, 2011.
- [20] A. Strupczewski, „Porównanie dostępnych na rynku reaktorów jądrowych: zalety i wady techniczne, ekologiczne i ekonomiczne”, *Energetyka*, nr 8, s. 499–506, 2009.



- [21] T. Takagi i M. Sugeno, „Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control”, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, t. SMC-15, nr 1, s. 116–132, sty. 1985.
- [22] A. Chenini, „Set-theoretic control of a pressurized water nuclear power plant”, Thesis, Massachusetts Institute of Technology, 1980.
- [23] „Westinghouse Technology Systems Manual, Section 8.1, Rod Control System”. [Online]. Dostępne na: <https://www.nrc.gov/docs/ML1122/ML11223A252.pdf>. [Udostępniono: 04-luty-2017].
- [24] S. Das, S. Das, i A. Gupta, „Fractional Order Modeling of a PHWR Under Step-Back Condition and Control of Its Global Power With a Robust Controller”, *IEEE Transactions on Nuclear Science*, t. 58, nr 5, s. 2431–2441, paź. 2011.
- [25] S. E. Arda, K. E. Holbert, J. Undrill, i D. Tylavsky, „Implementing a Nuclear Power Plant Model for Evaluating Load-Following Capability on a Small Grid”, w *ASU Electronic Dissertations and Theses*, Arizona State University, 2013.
- [26] S. Das, I. Pan, i S. Das, „Fractional order fuzzy control of nuclear reactor power with thermal-hydraulic effects in the presence of random network induced delay and sensor noise having long range dependence”, *Energy Conversion and Management*, t. 68, s. 200–218, kwi. 2013.
- [27] M. Naghedolfeizi, „Dynamic Modeling of a Pressurized Water Reactor Plant for Diagnostics and Control”, Thesis, University of Tennessee, Knoxville, 1990.
- [28] R. Janczak, A. Mikulski, i E. Staroń, „Charakterystyka techniczna elektrowni jądrowych nowej generacji”.
- [29] T. Hagglund, *PID Controllers: Theory, Design, and Tuning*, 2. wyd. Research Triangle Park, N.C: ISA: The Instrumentation, Systems, and Automation Society, 1995.
- [30] A. O’Dwyer, *Handbook Of PI And PID Controller Tuning Rules*, 3 edition. London : Hackensack, NJ: Imperial College Press, 2009.
- [31] D. Xue, Y. Chen, i D. Atherton, *Linear Feedback Control*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2007.
- [32] H. Ying, *Fuzzy control and modeling: analytical foundations and applications*. Wiley-IEEE Press, 2000.
- [33] „Fuzzy Logic Toolbox™ Users’s Guide”. The MathWorks, Inc., mar-2017.
- [34] B. Puchalski, T. Rutkowski, J. Tarnawski, i K. Duzinkiewicz, „Comparison of tuning procedures based on evolutionary algorithm for multi-region fuzzy-logi PID controller for non-linear plant”, w *2015 20th International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics (MMAR)*, 2015, s. 897–902.
- [35] J. R. Lamarsh i A. J. Baratta, *Introduction to Nuclear Engineering*, 3. wyd. Upper Saddle River, N.J: Pearson, 2001.
- [36] V. Feliu-Battle, R. Rivas-Perez, F. J. Castillo-Garcia, L. Sanchez-Rodriguez, i A. Linarez-Saez, „Robust fractional order controller for irrigation main canal pools with time-varying dynamical parameters”, *Computers and Electronics in Agriculture*, t. 76, nr 2, s. 205–217, maj 2011.
- [37] C. A. Monje, B. M. Vinagre, V. Feliu, i Y. Chen, „Tuning and auto-tuning of fractional order controllers for industry applications”, *Control Engineering Practice*, t. 16, nr 7, s. 798–812, lip. 2008.
- [38] I. Pan, S. Das, i A. Gupta, „Handling packet dropouts and random delays for unstable delayed processes in NCS by optimal tuning of controllers with evolutionary algorithms”, *ISA Transactions*, t. 50, nr 4, s. 557–572, paź. 2011.

- [39] C.-H. Lin, C.-H. Huang, Y.-C. Du, i J.-L. Chen, „Maximum photovoltaic power tracking for the PV array using the fractional-order incremental conductance method”, *Applied Energy*, t. 88, nr 12, s. 4840–4847, grudz. 2011.
- [40] Z. Chen, X. Yuan, B. Ji, P. Wang, i H. Tian, „Design of a fractional order PID controller for hydraulic turbine regulating system using chaotic non-dominated sorting genetic algorithm II”, *Energy Conversion and Management*, t. 84, s. 390–404, sie. 2014.
- [41] S. Sondhi i Y. V. Hote, „Fractional order PID controller for load frequency control”, *Energy Conversion and Management*, t. 85, s. 343–353, wrz. 2014.
- [42] V. Kumar i K. P. S. Rana, „Nonlinear adaptive fractional order fuzzy PID control of a 2-link planar rigid manipulator with payload”, *Journal of the Franklin Institute*, t. 354, nr 2, s. 993–1022, sty. 2017.
- [43] W. M. Ahmad i J. C. Sprott, „Chaos in fractional-order autonomous nonlinear systems”, *Chaos, Solitons & Fractals*, t. 16, nr 2, s. 339–351, mar. 2003.
- [44] T. T. Hartley, C. F. Lorenzo, i H. K. Qammer, „Chaos in a fractional order Chua’s system”, *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, t. 42, nr 8, s. 485–490, sie. 1995.
- [45] C. Li i G. Peng, „Chaos in Chen’s system with a fractional order”, *Chaos, Solitons & Fractals*, t. 22, nr 2, s. 443–450, paź. 2004.
- [46] W.-C. Chen, „Nonlinear dynamics and chaos in a fractional-order financial system”, *Chaos, Solitons & Fractals*, t. 36, nr 5, s. 1305–1314, cze. 2008.
- [47] Z. Wang, X. Huang, i G. Shi, „Analysis of nonlinear dynamics and chaos in a fractional order financial system with time delay”, *Computers & Mathematics with Applications*, t. 62, nr 3, s. 1531–1539, sie. 2011.
- [48] R. Marazzato i A. C. Sparavigna, „Astronomical image processing based on fractional calculus: the AstroFracTool”, *arXiv:0910.4637 [astro-ph]*, paź. 2009.
- [49] A. C. Sparavigna i P. Milligan, „Using fractional differentiation in astronomy”, *arXiv:0910.4243 [astro-ph]*, paź. 2009.
- [50] J. T. Machado, V. Kiryakova, i F. Mainardi, „Recent history of fractional calculus”, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, t. 16, nr 3, s. 1140–1153, mar. 2011.
- [51] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations: An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of their Solution and some of their Applications*, 1. wyd. Academic Press, 1998.
- [52] C. Li, Y. Mao, J. Zhou, N. Zhang, i X. An, „Design of a fuzzy-PID controller for a nonlinear hydraulic turbine governing system by using a novel gravitational search algorithm based on Cauchy mutation and mass weighting”, *Applied Soft Computing*, t. 52, s. 290–305, mar. 2017.
- [53] B. K. Yoo i W. C. Ham, „Adaptive control of robot manipulator using fuzzy compensator”, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, t. 8, nr 2, s. 186–199, kwi. 2000.
- [54] H. O. Wang, K. Tanaka, i T. Ikeda, „Fuzzy modeling and control of chaotic systems”, w *1996 IEEE International Symposium on Circuits and Systems. Circuits and Systems Connecting the World. ISCAS 96*, 1996, t. 3, s. 209–212 t.3.
- [55] J.-I. Horiuchi, „Fuzzy modeling and control of biological processes”, *Journal of Bioscience and Bioengineering*, t. 94, nr 6, s. 574–578, grudz. 2002.
- [56] H. Zarei, A. V. Kamyad, i A. A. Heydari, „Fuzzy Modeling and Control of HIV Infection”, *Computational and Mathematical Methods in Medicine*, t. 2012, s. e893474, mar. 2012.



- [57] J. A. Wilson i E. C. Martinez, „Neuro-fuzzy modeling and control of a batch process involving simultaneous reaction and distillation”, *Computers & Chemical Engineering*, t. 21, Supplement, s. S1233–S1238, maj 1997.
- [58] D. V. D. Ville, M. Nachtegael, D. V. der Weken, E. E. Kerre, W. Philips, i I. Lemahieu, „Noise reduction by fuzzy image filtering”, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, t. 11, nr 4, s. 429–436, sie. 2003.
- [59] K. P. Adlassnig, „Fuzzy Set Theory in Medical Diagnosis”, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, t. 16, nr 2, s. 260–265, mar. 1986.
- [60] I. Pan i S. Das, „Fractional order fuzzy control of hybrid power system with renewable generation using chaotic PSO”, *ISA Transactions*, t. 62, s. 19–29, maj 2016.
- [61] M. Ö. Efe, „Fractional Fuzzy Adaptive Sliding-Mode Control of a 2-DOF Direct-Drive Robot Arm”, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)*, t. 38, nr 6, s. 1561–1570, grudz. 2008.
- [62] R. Sharma, K. P. S. Rana, i V. Kumar, „Performance analysis of fractional order fuzzy PID controllers applied to a robotic manipulator”, *Expert Systems with Applications*, t. 41, nr 9, s. 4274–4289, lip. 2014.
- [63] I. Pan, A. Korre, S. Das, i S. Durucan, „Chaos suppression in a fractional order financial system using intelligent regrouping PSO based fractional fuzzy control policy in the presence of fractional Gaussian noise”, *Nonlinear Dyn*, t. 70, nr 4, s. 2445–2461, grudz. 2012.
- [64] S. K. Gupta i P. Varshney, „Fractional Fuzzy PID Controller for Speed Control of DC Motor”, w *2013 Third International Conference on Advances in Computing and Communications*, 2013, s. 1–4.
- [65] S. Saha *i in.*, „Design of a Fractional Order Phase Shaper for Iso-Damped Control of a PHWR Under Step-Back Condition”, *IEEE Transactions on Nuclear Science*, t. 57, nr 3, s. 1602–1612, cze. 2010.
- [66] R. Coban, „A fuzzy controller design for nuclear research reactors using the particle swarm optimization algorithm”, *Nuclear Engineering and Design*, t. 241, nr 5, s. 1899–1908, maj 2011.
- [67] H. L. Akin i V. Altin, „Rule-based fuzzy logic controller for a PWR-type nuclear power plant”, *IEEE Transactions on Nuclear Science*, t. 38, nr 2, s. 883–890, kwi. 1991.
- [68] S. Das, I. Pan, B. Majumder, S. Das, i A. Gupta, „Control of nuclear reactor power with thermal-hydraulic effects via fuzzy  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  controllers”, w *2011 International Conference on Communication and Industrial Application*, 2011, s. 1–5.
- [69] T. K. Nowak, K. Duzinkiewicz, i R. Piotrowski, „Numerical Solution of Fractional Neutron Point Kinetics Model in Nuclear Reactor”, *Archives of Control Sciences*, t. 24, nr 2, s. 129–154, 2014.
- [70] T. K. Nowak, K. Duzinkiewicz, i R. Piotrowski, „Fractional neutron point kinetics equations for nuclear reactor dynamics – Numerical solution investigations”, *Annals of Nuclear Energy*, t. 73, s. 317–329, lis. 2014.
- [71] T. K. Nowak, K. Duzinkiewicz, i R. Piotrowski, „Numerical solution analysis of fractional point kinetics and heat exchange in nuclear reactor”, *Nuclear Engineering and Design*, t. 281, s. 121–130, sty. 2015.
- [72] K. Zhao i B. R. Upadhyaya, „Adaptive fuzzy inference causal graph approach to fault detection and isolation of field devices in nuclear power plants”, *Progress in Nuclear Energy*, t. 46, nr 3, s. 226–240, sty. 2005.
- [73] M. G. Na, „Design of a genetic fuzzy controller for the nuclear steam generator water level control”, *IEEE Transactions on Nuclear Science*, t. 45, nr 4, s. 2261–2271, sie. 1998.

- [74] S. R. Munasinghe, M.-S. Kim, i J.-J. Lee, „Adaptive neurofuzzy controller to regulate UTSG water level in nuclear power plants”, *IEEE Transactions on Nuclear Science*, t. 52, nr 1, s. 421–429, luty 2005.
- [75] A. Fakhrazari i M. Boroushaki, „Adaptive Critic-based Neurofuzzy Controller for the Steam Generator Water Level”, *IEEE Transactions on Nuclear Science*, t. 55, nr 3, s. 1678–1685, cze. 2008.
- [76] M. V. Kothare, B. Mettler, M. Morari, P. Bendotti, i C. M. Falinower, „Level control in the steam generator of a nuclear power plant”, *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, t. 8, nr 1, s. 55–69, sty. 2000.
- [77] H. Eliasi, M. B. Menhaj, i H. Davilu, „Robust nonlinear model predictive control for nuclear power plants in load following operations with bounded xenon oscillations”, *Nuclear Engineering and Design*, t. 241, nr 2, s. 533–543, luty 2011.
- [78] M. Das i in., „Network Control System Applied to a Large Pressurized Heavy Water Reactor”, *IEEE Transactions on Nuclear Science*, t. 53, nr 5, s. 2948–2956, paź. 2006.
- [79] A. P. Tiwari, B. Banyopadhyay, i G. Govindarajan, „Spatial control of a large pressurized heavy water reactor”, *IEEE Transactions on Nuclear Science*, t. 43, nr 4, s. 2440–2453, sie. 1996.
- [80] G. L. Sharma, B. Bandyopadhyay, i A. P. Tiwari, „Spatial control of a large pressurized heavy water reactor by fast output sampling technique”, *IEEE Transactions on Nuclear Science*, t. 50, nr 5, s. 1740–1751, paź. 2003.
- [81] K. Torabi, O. Safarzadeh, i A. Rahimi-Moghaddam, „Robust Control of the PWR Core Power Using Quantitative Feedback Theory”, *IEEE Transactions on Nuclear Science*, t. 58, nr 1, s. 258–266, luty 2011.
- [82] A. J. Gaikwad, P. K. Vijayan, S. Bhartiya, R. Kumar, H. G. Lele, i K. K. Vaze, „An innovative approach for Steam Generator Pressure Control of a nuclear power plant”, *Nuclear Engineering and Design*, t. 241, nr 12, s. 5113–5126, grudz. 2011.
- [83] G. R. Ansarifar, H. A. Talebi, i H. Davilu, „Adaptive estimator-based dynamic sliding mode control for the water level of nuclear steam generators”, *Progress in Nuclear Energy*, t. 56, s. 61–70, kwi. 2012.
- [84] I. A. E. Agency (IAEA), „Official Web Site of the IAEA”. [Online]. Dostępne na: <https://www.iaea.org>. [Udostępniono: 04-lis-2017].
- [85] „NRC: Home Page”. [Online]. Dostępne na: <https://www.nrc.gov/>. [Udostępniono: 04-lis-2017].
- [86] C. Junyi i C. Binggang, „Fractional-Order Control of Pneumatic Position Servosystems”, *Mathematical Problems in Engineering*, t. 2011, s. e287565, cze. 2011.
- [87] I. Petras, „The fractional - order controllers: Methods for their synthesis and application”, *arXiv:math/0004064*, kwi. 2000.
- [88] Y. Luo i Y. Chen, „Stabilizing and robust fractional order PI controller synthesis for first order plus time delay systems”, *Automatica*, t. 48, nr 9, s. 2159–2167, wrz. 2012.
- [89] K. S. Tang, K. F. Man, G. Chen, i S. Kwong, „An optimal fuzzy PID controller”, *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, t. 48, nr 4, s. 757–765, sie. 2001.
- [90] D. Maiti, A. Acharya, M. Chakraborty, A. Konar, i R. Janarthanan, „Tuning PID and FOPID Controllers using the Integral Time Absolute Error Criterion”, *arXiv:0811.0083 [cs]*, lis. 2008.
- [91] S. Das, S. Saha, S. Das, i A. Gupta, „On the selection of tuning methodology of FOPID controllers for the control of higher order processes”, *ISA Transactions*, t. 50, nr 3, s. 376–388, lip. 2011.

- [92] S. Das, I. Pan, S. Das, i A. Gupta, „A novel fractional order fuzzy PID controller and its optimal time domain tuning based on integral performance indices”, *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, t. 25, nr 2, s. 430–442, mar. 2012.
- [93] A. Soukkou, M. C. Belhour, i S. Leulmi, „Review, Design, Optimization and Stability Analysis of Fractional-Order PID Controller”, *International Journal of Intelligent Systems and Applications(IJISA)*, t. 8, nr 7, s. 73, lip. 2016.
- [94] C. A. Monje, B. M. Vinagre, V. Feliu, i Y. Chen, „Tuning and auto-tuning of fractional order controllers for industry applications”, *Control Engineering Practice*, t. 16, nr 7, s. 798–812, lip. 2008.
- [95] R. K. Mudi i N. R. Pal, „A self-tuning fuzzy PI controller”, *Fuzzy Sets and Systems*, t. 115, nr 2, s. 327–338, paź. 2000.
- [96] Z.-W. Woo, H.-Y. Chung, i J.-J. Lin, „A PID type fuzzy controller with self-tuning scaling factors”, *Fuzzy Sets and Systems*, t. 115, nr 2, s. 321–326, paź. 2000.
- [97] B. Puchalski, T. Rutkowski, i K. Duzinkiewicz, „Wieloobszarowa rozmyta regulacja PID mocy reaktora jądrowego”, *Pomiary Automatyka Kontrola*, t. 59, nr 12, 2013.
- [98] B. Puchalski, K. Duzinkiewicz, i T. Rutkowski, „Analiza sterowania ułamkowego  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  mocą reaktora jądrowego”, *Informatyka, Automatyka, Pomiar w Gospodarce i Ochronie Środowiska*, t. 4, s. 63–68, 2013.
- [99] B. Puchalski, K. Duzinkiewicz, i T. Rutkowski, „Wieloobszarowa rozmyta regulacja  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  mocy reaktora jądrowego”, w *Aktualne Problemy Automatyki i Robotyki*, t. 20, Warszawa: Akademicka Oficyna Wydawnicza EXIT, 2014, s. 544–557.
- [100] B. Puchalski, K. Duzinkiewicz, i T. Rutkowski, „Multi-region fuzzy logic controller with local PID controllers for U-tube steam generator in nuclear power plant”, *Archives of Control Sciences*, t. 25, nr 4, s. 429–444, 2015.
- [101] T. Zhang, „Comparison of Distributed Parameter and Multi-lump Models for a Pressurized Water Reactor Core”, Thesis, Arizona State University, 2012.
- [102] J. R. Kapernick, „Dynamic Modeling of a Small Modular Reactor for Control and Monitoring”, Thesis, University of Tennessee, Knoxville, 2015.
- [103] X. Liu, „Modeling and Simulation of a Prototypical Advanced Reactor”, Thesis, University of Tennessee, Knoxville, 2015.
- [104] S. R. P. Perillo, „Multi-Modular Integral Pressurized Water Reactor Control and Operational Reconfiguration for a Flow Control Loop”, Thesis, University of Tennessee, Knoxville, 2010.
- [105] T. W. Kerlin, „Dynamic Analysis and Control of Pressurized Water Reactors”, w *Control and Dynamic Systems*, t. 14, Supplement C t., C. T. Leondes, Red. Academic Press, 1978, s. 103–212.
- [106] H. Anglart, *Nuclear Reactor Dynamics and Stability*. Warsaw University of Technology Publishing House, 2013.
- [107] B. Puchalski, T. A. Rutkowski, i K. Duzinkiewicz, „Nodal models of Pressurized Water Reactor core for control purposes – A comparison study”, *Nuclear Engineering and Design*, t. 322, s. 444–463, paź. 2017.
- [108] J. H. Lienhard, *A Heat Transfer Textbook: Fourth Edition*, 4. wyd. Courier Corporation, 2013.
- [109] D. G. Zill i W. S. Wright, *Differential Equations with Boundary-Value Problems, 8th Edition*, 8. wyd. Boston, MA: Brooks Cole, 2012.
- [110] W. Kryszicki i L. Włodarski, *Analiza matematyczna w zadaniach 2*, 27. wyd. Warszawa: PWN, 2014.

- [111] W. Kryszicki i L. Włodarski, *Analiza matematyczna w zadaniach 1*, 29. wyd. Warszawa: PWN, 2014.
- [112] D. Cafagna, „Fractional calculus: A mathematical tool from the past for present engineers [Past and present]”, *IEEE Industrial Electronics Magazine*, t. 1, nr 2, s. 35–40, 2007.
- [113] J. M. Kimeu, „Fractional calculus: Definitions and applications”, *Masters Theses*, s. 115, 2009.
- [114] E. C. de Oliveira i J. A. Tenreiro Machado, „A Review of Definitions for Fractional Derivatives and Integral”, *Mathematical Problems in Engineering*, t. 2014, s. e238459, cze. 2014.
- [115] B. Ross, *Fractional Calculus and Its Applications: Proceedings of the International Conference held at the University of New Haven, June 1974*. Springer, 2006.
- [116] C. A. Monje, Y. Chen, B. M. Vinagre, D. Xue, i V. Feliu, *Fractional-order Systems and Controls*. London: Springer London, 2010.
- [117] R. Gorenflo i F. Mainardi, „Fractional Calculus: Integral and Differential Equations of Fractional Order”, *arXiv:0805.3823 [cond-mat, physics:math-ph]*, maj 2008.
- [118] A. Oustaloup, F. Levron, B. Mathieu, i F. M. Nanot, „Frequency-band complex noninteger differentiator: characterization and synthesis”, *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, t. 47, nr 1, s. 25–39, sty. 2000.
- [119] I. Petras, *Fractional-order nonlinear systems: modeling, analysis and simulation*. Springer Science & Business Media, 2011.
- [120] K. Duzinkiewicz, „Systemy sztucznej inteligencji. Wykłady z przedmiotu Metody Sztucznej Inteligencji w Sterowaniu dla kierunku Automatyka i Robotyka.”, Wydział Elektrotechniki i Automatyki, Politechnika Gdańska, 2010-2009.
- [121] E. H. Mamdani, „Application of fuzzy algorithms for control of simple dynamic plant”, *Proceedings of the Institution of Electrical Engineers*, t. 121, nr 12, s. 1585–1588, grudz. 1974.
- [122] L. A. Zadeh, „Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes”, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetic*, t. 3, s. 28–44, 1973.
- [123] A. Piegat, *Modelowanie i sterowanie rozmyte*. Akademicka Oficyna Wydawnicza "Exit", 1999.
- [124] K. Duzinkiewicz, „Systemy rozmyte: podstawy, struktury. Wykłady z przedmiotu Metody Sztucznej Inteligencji w Sterowaniu dla kierunku Automatyka i Robotyka.”, Wydział Elektrotechniki i Automatyki, Politechnika Gdańska, 2010-2009.
- [125] K. Duzinkiewicz, „Wnioskowanie Mamdaniego i inne systemy. Wykłady z przedmiotu Metody Sztucznej Inteligencji w Sterowaniu dla kierunku Automatyka i Robotyka.”, Wydział Elektrotechniki i Automatyki, Politechnika Gdańska, 2010-2009.
- [126] W. Byrski, *Obserwacja i sterowanie w systemach dynamicznych*. Uczelniane Wydawnictwa Naukowo-Dydaktyczne Akademii Górniczo-Hutniczej, 2007.
- [127] A. Markowski, J. Kostro, i A. Lewandowski, *Automatyka w pytaniach i odpowiedziach*, Wydanie drugie. Warszawa: WNT, 1985.
- [128] D. E. Seborg, D. A. Mellichamp, T. F. Edgar, i F. J. Doyle III, *Process dynamics and control*. John Wiley & Sons, 2010.
- [129] C. Audet, V. Bécharde, i J. Chaouki, „Spent potliner treatment process optimization using a MADS algorithm”, *Optim Eng*, t. 9, nr 2, s. 143–160, cze. 2008.
- [130] C. Audet, J. E. Dennis, i S. L. Digabel, „Globalization strategies for Mesh Adaptive Direct Search”, *Comput Optim Appl*, t. 46, nr 2, s. 193–215, cze. 2010.

- [131] R. Bowden i J. D. Hall, „Simulation optimization research and development”, w *Proceedings of the 30th conference on Winter simulation*, 1998, s. 1693–1698.
- [132] „Types of Optimization Problems | NEOS”. [Online]. Dostępne na: <https://neos-guide.org/optimization-tree>. [Udostępniono: 18-lip-2017].
- [133] A. R. Conn, K. Scheinberg, i L. N. Vicente, *Introduction to derivative-free optimization*. SIAM, 2009.
- [134] D. E. Goldberg, *Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning*, 1st wyd. Boston, MA, USA: Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc., 1989.
- [135] Z. Michalewicz, *Genetic Algorithms + Data Structures = Evolution Programs*, 3. wyd. London, UK, UK: Springer-Verlag, 1996.
- [136] R. Eberhart i J. Kennedy, „A new optimizer using particle swarm theory”, w *Micro Machine and Human Science, 1995. MHS'95., Proceedings of the Sixth International Symposium on*, 1995, s. 39–43.
- [137] R. Poli, J. Kennedy, i T. Blackwell, „Particle swarm optimization”, *Swarm intelligence*, t. 1, nr 1, s. 33–57, 2007.
- [138] S. Kirkpatrick, C. D. Gelatt, M. P. Vecchi, i others, „Optimization by simulated annealing”, *science*, t. 220, nr 4598, s. 671–680, 1983.
- [139] P. J. Van Laarhoven i E. H. Aarts, „Simulated annealing”, w *Simulated annealing: Theory and applications*, Springer, 1987, s. 7–15.
- [140] R. Hooke i T. A. Jeeves, „“Direct Search” Solution of Numerical and Statistical Problems”, *Journal of the ACM (JACM)*, t. 8, nr 2, s. 212–229, 1961.
- [141] R. M. Lewis, V. Torczon, i M. W. Trosset, „Direct search methods: then and now”, *Journal of computational and Applied Mathematics*, t. 124, nr 1, s. 191–207, 2000.
- [142] J. A. Nelder i R. Mead, „A simplex method for function minimization”, *The computer journal*, t. 7, nr 4, s. 308–313, 1965.
- [143] G. E. Box i K. B. Wilson, „On the experimental attainment of optimum conditions”, w *Breakthroughs in Statistics*, Springer, 1992, s. 270–310.
- [144] J. E. Dennis i V. Torczon, „Direct search methods on parallel machines”, *SIAM Journal on Optimization*, t. 1, nr 4, s. 448–474, 1991.
- [145] C. Audet i J. E. Dennis Jr, „Mesh adaptive direct search algorithms for constrained optimization”, *SIAM Journal on optimization*, t. 17, nr 1, s. 188–217, 2006.
- [146] J. Dennis i V. Torczon, „Derivative-free pattern search methods for multidisciplinary design problems”, w *5th Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization*, 1994, s. 4349.
- [147] R. M. Lewis i V. Torczon, „Pattern search algorithms for bound constrained minimization”, *SIAM Journal on Optimization*, t. 9, nr 4, s. 1082–1099, 1999.
- [148] R. M. Lewis i V. Torczon, „Pattern search methods for linearly constrained minimization”, *SIAM Journal on Optimization*, t. 10, nr 3, s. 917–941, 2000.
- [149] M. A. Abramson i C. Audet, „Convergence of mesh adaptive direct search to second-order stationary points”, *SIAM Journal on Optimization*, t. 17, nr 2, s. 606–619, 2006.
- [150] R. M. Lewis i V. Torczon, „Rank Ordering and Positive Bases in Pattern Search Algorithms.”, DTIC Document, 1996.
- [151] „MathWorks - Makers of MATLAB and Simulink”. [Online]. Dostępne na: <https://www.mathworks.com/>. [Udostępniono: 22-kwi-2017].
- [152] „Global Optimization Toolbox Users’s Guide”. The MathWorks, Inc., mar-2017.
- [153] „Simulink® User’s Guide”. The MathWorks, Inc., mar-2017.



- [154] „Simulink® Developing S-Functions”. The MathWorks, Inc., mar-2017.
- [155] A. Tepljakov, „FOMCON | Fractional-order Modeling and Control”. [Online]. Dostępne na: <http://fomcon.net/>. [Udostępniono: 05-maj-2017].
- [156] A. Tepljakov, E. Petlenkov, i J. Belikov, „FOMCON: a MATLAB toolbox for fractional-order system identification and control”, *International Journal of Microelectronics and Computer Science*, t. 2, nr 2, s. 51–62, 2011.
- [157] A. Tepljakov, E. Petlenkov, J. Belikov, i J. Finajev, „Fractional-order controller design and digital implementation using FOMCON toolbox for MATLAB”, w *2013 IEEE Conference on Computer Aided Control System Design (CACSD)*, 2013, s. 340–345.
- [158] „MATLAB Documentation”. [Online]. Dostępne na: <https://www.mathworks.com/help/index.html>. [Udostępniono: 13-wrz-2017].
- [159] V. Torczon, „On the convergence of pattern search algorithms”, *SIAM Journal on optimization*, t. 7, nr 1, s. 1–25, 1997.
- [160] C. Audet i J. E. Dennis Jr, „Analysis of generalized pattern searches”, *SIAM Journal on Optimization*, t. 13, nr 3, s. 889–903, 2002.
- [161] T. G. Kolda, R. M. Lewis, i V. Torczon, „A generating set direct search augmented Lagrangian algorithm for optimization with a combination of general and linear constraints”, *Sandia National Laboratories*, t. 6, 2006.
- [162] K. R. Davey, „Latin Hypercube Sampling and Pattern Search in Magnetic Field Optimization Problems”, *IEEE Transactions on Magnetics*, t. 44, nr 6, s. 974–977, cze. 2008.
- [163] „Parallel Computing Toolbox™ User’s Guide”. The MathWorks, Inc., mar-2017.
- [164] R. H. Cannon jr., *Dynamika układów fizycznych*. Warszawa: Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, 1973.
- [165] R. Gessing, *Control fundamentals*. Silesian University of Technology, 2004.
- [166] A. Sinha, *Linear systems: optimal and robust control*. CRC Press, 2007.
- [167] B. Puchalski, T. A. Rutkowski, i K. Duzinkiewicz, „Multi-nodal PWR reactor model — Methodology proposition for power distribution coefficients calculation”, w *2016 21st International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics (MMAR)*, 2016, s. 385–390.
- [168] „Westinghouse Technology Systems Manual, Section 2.1, Reactor Physics Review”. [Online]. Dostępne na: <https://www.nrc.gov/docs/ML1122/ML11223A212.pdf>. [Udostępniono: 18-wrz-2017].
- [169] „The Westinghouse Pressurized Water Reactor Nuclear Power Plant”. [Online]. Dostępne na: [www4.ncsu.edu/~doster/NE405/Manuals/PWR\\_Manual.pdf](http://www4.ncsu.edu/~doster/NE405/Manuals/PWR_Manual.pdf). [Udostępniono: 27-paź-2017].
- [170] N. E. Todreas i M. S. Kazimi, *Nuclear systems: thermal hydraulic fundamentals*, t. 1. CRC press, 2012.

## Załącznik 1: Funkcje Bessela

---

Opracowano na podstawie [14]

Równanie różniczkowe zwyczajne mające następującą postać

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \left( \alpha^2 - \frac{n^2}{x^2} \right) y = 0, \quad (Z1.1)$$

gdzie  $\alpha$  i  $n$  są stałymi, jest nazywane równaniem różniczkowym Bessela. Jeżeli stała  $n$  jest liczbą naturalną lub przyjmuje wartość zero to równanie Bessela jest spełnione przez dwie niezależne funkcje  $J_n(\alpha x)$  oraz  $Y_n(\alpha x)$  nazwane odpowiednio funkcją Bessela pierwszego i drugiego rodzaju o rzędzie  $n$ .

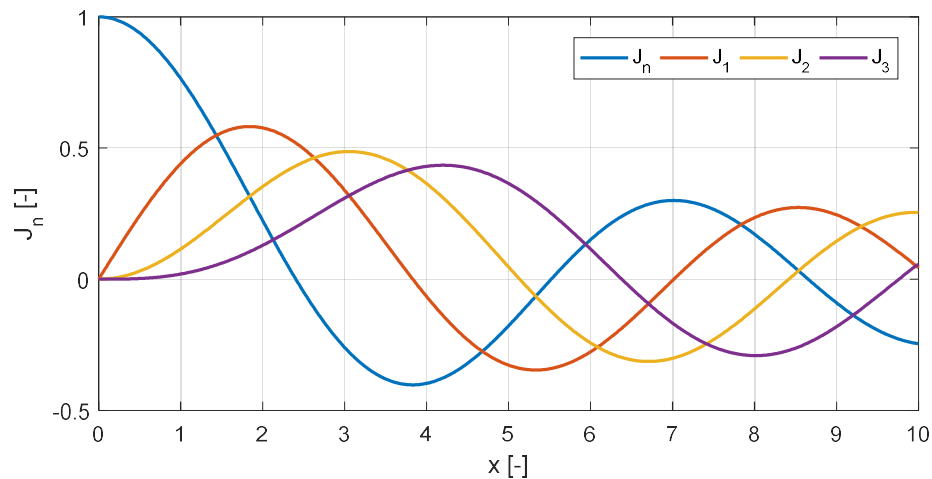
Ogólna postać funkcji Bessela pierwszego rodzaju jest następująca

$$J_n(\alpha x) = \left( \frac{\alpha x}{2} \right)^n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \left( \frac{1}{2} \alpha x \right)^{2k}}{k! (n+k)!}. \quad (Z1.2)$$

Jeżeli  $n$  jest liczbą całkowitą, powyższa zależność może być przedstawiona w postaci całkowej

$$J_n(\alpha x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(n\tau - \alpha x \sin(\tau)) d\tau. \quad (Z1.3)$$

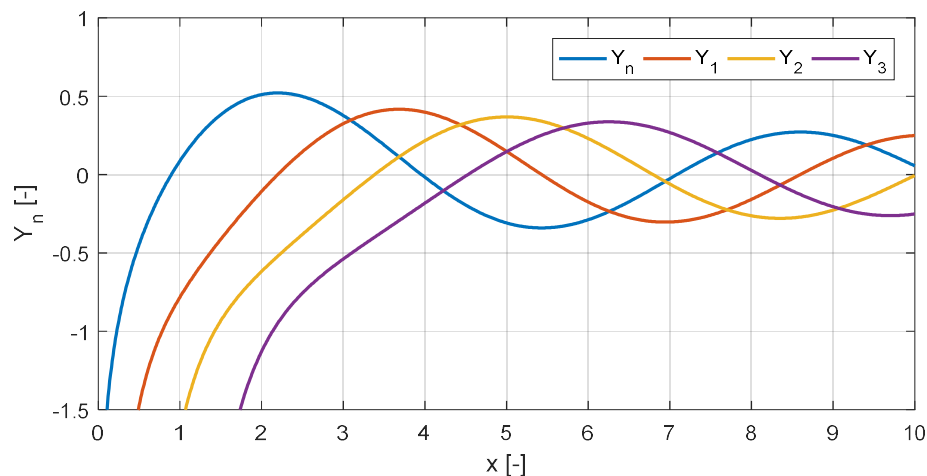
Przykładowe funkcje Bessela pierwszego rodzaju, dla parametru  $\alpha = 1$ , zostały przedstawione na rysunku Z1.1.

Rysunek Z1.1. Funkcje Bessela pierwszego rodzaju dla  $\alpha = 1$ .

Postać funkcji Bessela drugiego rodzaju może być wyrażona za pomocą funkcji pierwszego rodzaju  $J_n$  oraz  $J_{-n}$  w następującej postaci

$$Y_n(\alpha x) = \frac{J_n(\alpha x) \cos(n\pi) - J_{-n}(\alpha x)}{\sin(n\pi)}. \quad (Z1.4)$$

Funkcja Bessela drugiego rodzaju nie jest określona w punkcie  $x = 0$ . Przykładowe funkcje Bessela drugiego rodzaju, dla parametru  $\alpha = 1$ , zostały przedstawione na rysunku Z1.2.

Rysunek Z1.2. Funkcje Bessela drugiego rodzaju dla  $\alpha = 1$ .



## Załącznik 2: Parametry reaktora jądrowego typu PWR

Tabela Z2.1. Parametry reaktora jądrowego typu PWR.

Symbol	Nazwa	Wartość	Jednostka	Źródło
$A$	efektywne pole powierzchni wymiany ciepła pomiędzy paliwem a chłodziwem	5564,8921	m <sup>2</sup>	[22], [27]
$\alpha_C$	temperaturowy współczynnik reaktywności dla chłodziwa	$-3,60 \cdot 10^{-4}$	1/°C	[22], [27]
$\alpha_F$	temperaturowy współczynnik reaktywności dla paliwa	$-1,98 \cdot 10^{-5}$	1/°C	[22], [27]
$B_r$	składowa promieniowa parametru geometrycznego reaktora	1,4273	-	obliczone
$B_z$	składowa osiowa parametru geometrycznego reaktora	0,8584	-	obliczone
$\beta$	udział neutronów opóźnionych, stosunek średniej liczby neutronów opóźnionych do liczby wszystkich neutronów przypadających na jedno rozszczepienie	0,006502	-	[35], [106]
$\beta_1$	wydajność prekursorów neutronów opóźnionych pierwszej grupy	0,000215	-	[35], [106]
$\beta_2$	wydajność prekursorów neutronów opóźnionych drugiej grupy	0,001424	-	[35], [106]
$\beta_3$	wydajność prekursorów neutronów opóźnionych trzeciej grupy	0,001274	-	[35], [106]
$\beta_4$	wydajność prekursorów neutronów opóźnionych czwartej grupy	0,002568	-	[35], [106]
$\beta_5$	wydajność prekursorów neutronów opóźnionych piątej grupy	0,000748	-	[35], [106]
$\beta_6$	wydajność prekursorów neutronów opóźnionych szóstej grupy	0,000273	-	[35], [106]
$c_{pC}$	ciepło właściwe chłodziwa	5819,6520	J/(kg·°C)	[22], [27]
$c_{pF}$	ciepło właściwe paliwa jądrowego	247,0212	J/(kg·°C)	[22], [27]
$f_F$	współczynnik definiujący ilość mocy cieplnej generowanej w paliwie	0,974	-	[22], [27]
$\tilde{H}$	wysokość rdzenia reaktora	3,66	m	[27]
$h$	średni współczynnik przenikania ciepła z paliwa do chłodziwa	1135,6527	W/(m <sup>2</sup> ·°C)	[22], [27]
$k_\infty$	współczynnik mnożenia neutronów w ośrodku nieskończonym	1,025	-	[6]
$k_r$	wartość współczynnika mnożenia $k$ dla pełnego zagłębienia zespołu prętów sterujących	0,9852	$\Delta k/k$	obliczone
$k_u$	wartość współczynnika mnożenia $k$ dla pełnego wysunięcia zespołu prętów sterujących	1,0088	$\Delta k/k$	obliczone
$\Lambda$	średni czas generacji neutronów	$17,9 \cdot 10^{-6}$	s	[22], [27]

$\lambda_1$	stała rozpadu prekursorów neutronów opóźnionych pierwszej grupy	0,0124	1/s	[3]
$\lambda_2$	stała rozpadu prekursorów neutronów opóźnionych drugiej grupy	0,0305	1/s	[3]
$\lambda_3$	stała rozpadu prekursorów neutronów opóźnionych trzeciej grupy	0,111	1/s	[3]
$\lambda_4$	stała rozpadu prekursorów neutronów opóźnionych czwartej grupy	0,301	1/s	[3]
$\lambda_5$	stała rozpadu prekursorów neutronów opóźnionych piątej grupy	1,14	1/s	[3]
$\lambda_6$	stała rozpadu prekursorów neutronów opóźnionych szóstej grupy	3,01	1/s	[3]
$M$	długość migracji neutronów	0,0762	m	[12]
$m_C$	masa chłodziwa	11196,2019	kg	obliczone
$m_f$	masa paliwa jądrowego w rdzeniu reaktora	101032,7109	kg	[22], [27]
${}^{235}\text{U}N$	liczba atomów uranu ${}^{235}\text{U}$ na jednostkę objętości	$1,909 \cdot 10^{-4}$	1/(b·cm)	[6]
${}^{238}\text{U}N$	liczba atomów uranu ${}^{238}\text{U}$ na jednostkę objętości	$6,592 \cdot 10^{-3}$	1/(b·cm)	[6]
$N_N$	nominalna gęstość neutronów	$2,4995 \cdot 10^8$	#/cm <sup>3</sup>	oszacowane
$\bar{v}$	średnia prędkość neutronów termicznych	3000	m/s	[6]
$P_{TH,N}$	nominalna moc cieplna wytwarzana przez reaktor	3436	MW	[22], [27]
$\tilde{r}$	promień rdzenia reaktora	1,685	m	[6]
$\rho_b$	wkład reaktywności zespołu prętów sterujących przy całkowitym jego zanurzeniu w rdzeń reaktora	0,02334	$\Delta k/k$	[168]
$\rho_m$	średnia gęstość chłodziwa	732,204	kg/m <sup>3</sup>	[22], [27]
${}^{235}\text{U}\sigma_F$	mikroskopowy przekrój czynny na rozszczepienie dla uranu ${}^{235}\text{U}$	312,0	b	[6]
${}^{238}\text{U}\sigma_F$	mikroskopowy przekrój czynny na rozszczepienie dla uranu ${}^{238}\text{U}$	0,638	b	[6]
$T_{C,in}$	temperatura chłodziwa na wejściu do reaktora	281,9444	°C	[27]
$V_m$	objętość chłodziwa	15,291	m <sup>3</sup>	[22], [27]
$v_{R,sat,max}$	maksymalna prędkość przemieszczania prętów sterujących	$\pm 0,019$	m/s	[169]
$w$	energia powstała wskutek aktu rozszczepienia	190	MeV	[170]
$W_C$	masowy przepływ chłodziwa przez reaktor	19851,9236	kg/s	[27]

Tabela Z2.2. Parametry nominalnego punktu pracy reaktora jądrowego typu PWR.

Symbol	Nazwa	Wartość	Jednostka	Źródło
$\bar{n}$	uśredniona po objętości rdzenia gęstość neutronów termicznych	$2,4995 \cdot 10^8$	$\#/\text{cm}^3$	oszacowane
$C_1$	gęstość pierwszej grupy prekursorów neutronów opóźnionych	$2,4212 \cdot 10^{11}$	$\#/\text{cm}^3$	obliczone
$C_2$	gęstość drugiej grupy prekursorów neutronów opóźnionych	$6,5195 \cdot 10^{11}$	$\#/\text{cm}^3$	obliczone
$C_3$	gęstość trzeciej grupy prekursorów neutronów opóźnionych	$1,6027 \cdot 10^{11}$	$\#/\text{cm}^3$	obliczone
$C_4$	gęstość czwartej grupy prekursorów neutronów opóźnionych	$1,1913 \cdot 10^{11}$	$\#/\text{cm}^3$	obliczone
$C_5$	gęstość piątej grupy prekursorów neutronów opóźnionych	$9,1622 \cdot 10^9$	$\#/\text{cm}^3$	obliczone
$C_6$	gęstość szóstej grupy prekursorów neutronów opóźnionych	$1,2665 \cdot 10^9$	$\#/\text{cm}^3$	obliczone
$D_{C1}$	pierwszy współczynniki określający osiowy profil generacji mocy cieplnej w rdzeniu reaktora	0,1288	-	obliczone <sup>4</sup>
$D_{C2}$	drugi współczynniki określający osiowy profil generacji mocy cieplnej w rdzeniu reaktora	0,3172	-	obliczone <sup>4</sup>
$D_{C3}$	trzeci współczynniki określający osiowy profil generacji mocy cieplnej w rdzeniu reaktora	0,3359	-	obliczone <sup>4</sup>
$D_{C4}$	czwarty współczynniki określający osiowy profil generacji mocy cieplnej w rdzeniu reaktora	0,1792	-	obliczone <sup>4</sup>
$D_{C5}$	piąty współczynniki określający osiowy profil generacji mocy cieplnej w rdzeniu reaktora	0,0388	-	obliczone <sup>4</sup>
$P_{TH}$	średnia moc cieplna reaktora jądrowego	3436	MW	[22], [27]
$\rho$	reaktywność	0,00	$\Delta k/k$	obliczone
${}_2T_{C1}$	temperatura chłodziwa w pierwszym węźle paliwowym modelu projektowego	296,8149	$^{\circ}\text{C}$	obliczone
${}_2T_{C2}$	temperatura chłodziwa w drugim węźle paliwowym modelu projektowego	311,6853	$^{\circ}\text{C}$	obliczone
${}_{10}T_{C1}$	temperatura chłodziwa w pierwszym węźle paliwowym obiektu wirtualnego	283,8606	$^{\circ}\text{C}$	obliczone
${}_{10}T_{C2}$	temperatura chłodziwa w drugim węźle paliwowym obiektu wirtualnego	285,7768	$^{\circ}\text{C}$	obliczone
${}_{10}T_{C3}$	temperatura chłodziwa w trzecim węźle paliwowym obiektu wirtualnego	290,4949	$^{\circ}\text{C}$	obliczone
${}_{10}T_{C4}$	temperatura chłodziwa w czwartym węźle paliwowym obiektu wirtualnego	295,2130	$^{\circ}\text{C}$	obliczone
${}_{10}T_{C5}$	temperatura chłodziwa w piątym węźle paliwowym obiektu wirtualnego	300,2085	$^{\circ}\text{C}$	obliczone

<sup>4</sup> Wartości obliczone na podstawie aproksymacji wielomianem czwartego rzędu

${}_{10}T_{C6}$	temperatura chłodziwa w szóstym węźle paliwowym obiektu wirtualnego	305,2041	°C	obliczone
${}_{10}T_{C7}$	temperatura chłodziwa w siódmym węźle paliwowym obiektu wirtualnego	307,8684	°C	obliczone
${}_{10}T_{C8}$	temperatura chłodziwa w ósmym węźle paliwowym obiektu wirtualnego	310,5328	°C	obliczone
${}_{10}T_{C9}$	temperatura chłodziwa w dziewiątym węźle paliwowym obiektu wirtualnego	311,1090	°C	obliczone
${}_{10}T_{C10}$	temperatura chłodziwa w dziesiątym węźle paliwowym obiektu wirtualnego	311,6853	°C	obliczone
${}_1T_F$	temperatura paliwa w modelu projektowym	826,3684	°C	obliczone
${}_5T_{F1}$	temperatura paliwa w pierwszym węźle paliwowym obiektu wirtualnego	625,0456	°C	obliczone
${}_5T_{F2}$	temperatura paliwa w drugim węźle paliwowym obiektu wirtualnego	1130,5780	°C	obliczone
${}_5T_{F3}$	temperatura paliwa w trzecim węźle paliwowym obiektu wirtualnego	1189,7028	°C	obliczone
${}_5T_{F4}$	temperatura paliwa w czwartym węźle paliwowym obiektu wirtualnego	782,2639	°C	obliczone
${}_5T_{F5}$	temperatura paliwa w piątym węźle paliwowym obiektu wirtualnego	413,7187	°C	obliczone
$W_C$	masowy przepływ chłodziwa przez reaktor	19851,9236	kg/s	[27]
$x$	poziom zagłębienia prętów sterujących w rdzeniu reaktora	-1,098	m	obliczone

Tabela Z2.3. Stany modelu projektowego i urządzenia wykonawczego w wybranych punktach pracy.

Wielkość	Jednostka	Punkt pracy			
		100% $P_{TH,N}$	80% $P_{TH,N}$	60% $P_{TH,N}$	40% $P_{TH,N}$
$T_{C,in}$	°C	281,9444			
$W_C$	kg/s	19851,9236			
$x$	m	-1,0980	-1,4708	-1,7769	-2,0755
$\rho_{EXT,R}$	$\Delta k/k$	0	-0,0037619	-0,0075239	-0,011286
$\bar{n}$	$\#/cm^3$	$2,4995 \cdot 10^8$	$1,9996 \cdot 10^8$	$1,4997 \cdot 10^8$	$9,9981 \cdot 10^7$
$C_1$	$\#/cm^3$	$2,4212 \cdot 10^{11}$	$1,9369 \cdot 10^{11}$	$1,4527 \cdot 10^{11}$	$9,6846 \cdot 10^{10}$
$C_2$	$\#/cm^3$	$6,5195 \cdot 10^{11}$	$5,2156 \cdot 10^{11}$	$3,9117 \cdot 10^{11}$	$2,6078 \cdot 10^{11}$
$C_3$	$\#/cm^3$	$1,6027 \cdot 10^{11}$	$1,2822 \cdot 10^{11}$	$9,6162 \cdot 10^{10}$	$6,4108 \cdot 10^{10}$
$C_4$	$\#/cm^3$	$1,1913 \cdot 10^{11}$	$9,5307 \cdot 10^{10}$	$7,148 \cdot 10^{10}$	$4,7653 \cdot 10^{10}$
$C_5$	$\#/cm^3$	$9,1622 \cdot 10^9$	$7,3298 \cdot 10^9$	$5,4973 \cdot 10^9$	$3,6649 \cdot 10^9$
$C_6$	$\#/cm^3$	$1,2665 \cdot 10^9$	$1,0132 \cdot 10^9$	$7,5989 \cdot 10^8$	$5,066 \cdot 10^8$
$T_F$	°C	826,3684	717,4836	608,5988	499,7140
$T_{C1}$	°C	296,8149	293,8408	290,8667	287,8926
$T_{C2}$	°C	311,6853	305,7371	299,7890	293,8408
$\bar{n}/N_N$	-	1	0,8	0,6	0,4

## Załącznik 3: Liniowy model projektowy reaktora jądrowego

Nieliniowy model projektowy reaktora jądrowego jest opisany za pomocą następującej nieliniowej przestrzeni stanu

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{z}), \quad (\text{Z3.1})$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{z}), \quad (\text{Z3.2})$$

gdzie  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ ,  $\mathbf{u} = [u_1, u_2, \dots, u_r]^T$ ,  $\mathbf{z} = [z_1, z_2, \dots, z_m]^T$ ,  $\mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_p]^T$  oraz

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{z}) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{z}) \\ f_2(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{z}) \\ \dots \\ f_n(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{z}) \end{bmatrix}, \quad (\text{Z3.3})$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{z}) = \begin{bmatrix} g_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{z}) \\ g_2(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{z}) \\ \dots \\ g_p(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{z}) \end{bmatrix}. \quad (\text{Z3.4})$$

Funkcje występujące w wektorze (Z3.3) są zdefiniowane w następujący sposób

$$f_1 = \frac{\rho(t)}{\Lambda} \bar{n}(t) - \frac{\beta}{\Lambda} \bar{n}(t) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i(t), \quad (\text{Z3.5})$$

$$f_i = \frac{dC_i(t)}{dt} = \frac{\beta_i}{\Lambda} \bar{n}(t) - \lambda_i C_i(t), \quad i = 2, \dots, 7, \quad (\text{Z3.6})$$

$$f_8 = \frac{f_F P_{TH,N}}{m_F c_{pF} N_N} \bar{n}(t) - \frac{Ah}{m_F c_{pF}} (T_F(t) - T_{C1}(t)), \quad (\text{Z3.7})$$

$$f_9 = \frac{(1 - f_F) P_{TH,N}}{m_C c_{pC} N_N} \bar{n}(t) + \frac{Ah}{m_C c_{pC}} (T_F(t) - T_{C1}(t)) - \frac{2W_C(t)}{m_C} (T_{C1}(t) - T_{Cin}(t)), \quad (\text{Z3.8})$$

$$f_{10} = \frac{(1 - f_F) P_{TH,N}}{m_C c_{pC} N_N} \bar{n}(t) + \frac{Ah}{m_C c_{pC}} (T_F(t) - T_{C1}(t)) - \frac{2W_C(t)}{m_C} (T_{C2}(t) - T_{C1}(t)), \quad (\text{Z3.9})$$

gdzie

$$\rho(t) = \rho_{EXT,R}(t) + \alpha_F (T_F(t) - T_{F,N}) + \frac{\alpha_C}{2} (T_{C1}(t) - T_{C1,N}) + \frac{\alpha_C}{2} (T_{C2}(t) - T_{C2,N}), \quad (\text{Z3.10})$$

oraz  $\mathbf{u} = u_1 = [\rho_{EXT,R}]$ ,  $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_{10}] = [\bar{n}, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, T_F, T_{C1}, T_{C2}]^T$ ,  $\mathbf{z} = [z_1, z_2] = [T_{Cin}, W_C]^T$ .

Wektor wyjść (Z3.4) zdefiniowany jest za pomocą pojedynczej funkcji

$$g_1 = \frac{\bar{n}(t)}{N_N}. \quad (Z3.11)$$

Liniowy model projektowy reaktora jądrowego otrzymuje się poprzez linearyzację wyżej wymienionej nieliniowej przestrzeni stanu w oparciu o następujące zależności

$$\Delta \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \Delta \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \Delta \mathbf{u}(t) + \mathbf{B}_Z \Delta \mathbf{z}(t), \quad (Z3.12)$$

$$\Delta \mathbf{y} = \mathbf{C} \Delta \mathbf{x}(t), \quad (Z3.13)$$

$$\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{10}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_{10}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_{10}}{\partial x_{10}} \end{bmatrix}_0, \quad (Z3.14)$$

$$\mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_{10}}{\partial u_1} \end{bmatrix}_0, \quad \mathbf{B}_Z = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z_1} & \frac{\partial f_1}{\partial z_2} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_{10}}{\partial z_1} & \frac{\partial f_{10}}{\partial z_2} \end{bmatrix}_0, \quad (Z3.15)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{1}{N_N} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (Z3.16)$$

Ogólne postaci macierzy  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  oraz  $\mathbf{B}_Z$  modelu liniowego (Z3.12)-(Z3.13) są następujące

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}
 -\frac{\beta}{\Lambda} & \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 & \lambda_5 & \lambda_6 & \frac{\alpha_F \bar{n}}{\Lambda} & \frac{\alpha_C \bar{n}}{2\Lambda} & \frac{\alpha_C \bar{n}}{2\Lambda} \\
 \frac{\beta_1}{\Lambda} & -\lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{\beta_2}{\Lambda} & 0 & -\lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{\beta_3}{\Lambda} & 0 & 0 & -\lambda_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{\beta_4}{\Lambda} & 0 & 0 & 0 & -\lambda_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{\beta_5}{\Lambda} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{\beta_6}{\Lambda} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_6 & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{f_F P_{TH,N}}{m_F c_{pF} N_N} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{Ah}{m_F c_{pF}} & \frac{Ah}{m_F c_{pF}} & 0 \\
 \frac{(1-f_F) P_{TH,N}}{m_C c_{pC} N_N} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{Ah}{m_C c_{pC}} & -\left(\frac{Ah}{m_C c_{pC}} + \frac{2W_C}{m_C}\right) & 0 \\
 \frac{(1-f_F) P_{TH,N}}{m_C c_{pC} N_N} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{Ah}{m_C c_{pC}} & -\left(\frac{Ah}{m_C c_{pC}} - \frac{2W_C}{m_C}\right) & -\frac{2W_C}{m_C}
 \end{bmatrix}_0, \quad (Z3.17)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \bar{n} \\ \frac{\bar{n}}{\Lambda} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_0, \quad \mathbf{B}_z = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{2W_C}{m_C} & -\frac{2T_{C1}}{m_C} + \frac{2T_{C,in}}{m_C} \\ 0 & \frac{2T_{C1}}{m_C} - \frac{2T_{C2}}{m_C} \end{bmatrix}_0. \quad (Z3.18)$$

## Liniowy model projektowy w wybranych punktach pracy

Macierze  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  oraz  $\mathbf{B}_z$  modelu liniowego (Z3.12)-(Z3.13) można przedstawić w następującej postaci współzynniskowej

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}
 a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & a_{1,5} & a_{1,6} & a_{1,7} & a_{1,8} & a_{1,9} & a_{1,10} \\
 a_{2,1} & a_{2,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 a_{3,1} & 0 & a_{3,3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 a_{4,1} & 0 & 0 & a_{4,4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 a_{5,1} & 0 & 0 & 0 & a_{5,5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 a_{6,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{6,6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 a_{7,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{7,7} & 0 & 0 & 0 \\
 a_{8,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{8,8} & a_{8,9} & 0 \\
 a_{9,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{9,8} & a_{9,9} & 0 \\
 a_{10,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{10,8} & a_{10,9} & a_{10,10}
 \end{bmatrix}_0, \quad (Z3.19)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_z = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ b_{z,9,1} & b_{z,9,2} \\ 0 & b_{z,10,2} \end{bmatrix}. \quad (Z3.20)$$

W tabeli Z3.1 zostały zestawione współczynniki macierzy  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  i  $\mathbf{B}_z$ , które opisano za pomocą zależności (Z3.19) i (Z3.20) odpowiednio dla czterech punktów pracy, tj. 100%, 80%, 60% oraz 40%  $P_{TH,N}$ .

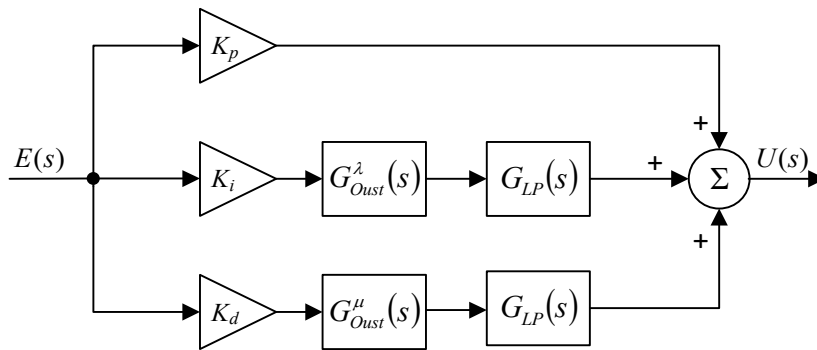
Tabela Z3.1. Współczynniki macierzy  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{B}_z$  liniowych modeli projektowych reaktora jądrowego.

Współczynnik	Punkt pracy				Zmiana współczynnika
	100% $P_{TH,N}$	80% $P_{TH,N}$	60% $P_{TH,N}$	40% $P_{TH,N}$	
$a_{1,1}$	-363,240223463687	-363,240223463687	-363,240223463688	-363,240223463688	
$a_{2,2}$	0,0124				
$a_{1,3}$	0,0305				
$a_{1,4}$	0,1110				
$a_{1,5}$	0,3010				
$a_{1,6}$	1,1400				
$a_{1,7}$	3,0100				
$a_{1,8}$	-276484124,396023	-221187299,516818	-165890474,637614	-110593649,758409	
$a_{1,9}$	-2513492039,963850	-2010793631,971080	-1508095223,978310	-1005396815,985540	
$a_{1,10}$	-2513492039,963850	-2010793631,971080	-1508095223,978310	-1005396815,985540	
$a_{2,1}$	12,0111731843575				
$a_{2,2}$	-0,0124				
$a_{3,1}$	79,5530726256983				
$a_{3,3}$	-0,0305				
$a_{4,1}$	71,1731843575419				
$a_{4,4}$	-0,111				
$a_{5,1}$	143,463687150838				
$a_{5,5}$	-0,301				
$a_{6,1}$	41,7877094972067				
$a_{6,6}$	-1,14				
$a_{7,1}$	15,2513966480447				
$a_{7,7}$	-3,01				
$a_{8,1}$	0,000000536485315048376				
$a_{8,8}$	-0,253224685315373				
$a_{8,9}$	0,253224685315373				
$a_{9,1}$	0,0000000548530430440513				
$a_{9,8}$	0,0969916920749239				
$a_{9,9}$	-3,64318062869849				
$a_{10,1}$	0,0000000548530430440513				
$a_{10,8}$	0,0969916920749239				
$a_{10,9}$	3,44919724454864				
$a_{10,10}$	-3,54618893662356				
$b_1$	13963844666465,80	11171075733172,60	8378306799879,48	5585537866586,32	
$b_{z,9,1}$	3,54618893662356				
$b_{z,9,2}$	-0,00265633485657328	-0,00212506788525862	-0,00159380091394397	-0,00106253394262931	
$b_{z,10,2}$	-0,00265633485657329	-0,00212506788525864	-0,00159380091394397	-0,00106253394262931	



## Załącznik 4: Modele regulatorów niecałkowitego rzędu

Uproszczona struktura regulatora  $PI^\lambda D^\mu$ , w którym operatory różniczkowania i całkowania niecałkowitego rzędu zostały aproksymowane filtrami Oustaloup'a została obrazowo przedstawiona na poniższym rysunku.



Rysunek Z4.1. Uproszczona struktura regulatora  $PI^\lambda D^\mu$ .

Transmitancja zastępcza tego regulatora może być wyrażona w ogólnej postaci jako

$$G_{PI^\lambda D^\mu}(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{\sum_{j=0}^m b_j s^j}{\sum_{i=0}^n a_i s^i}. \quad (Z4.1)$$

W tabelach Z4.1, Z4.2 oraz Z4.3 zostały zestawione współczynniki  $a_i$  oraz  $b_j$  zastępczych transmitancji lokalnych regulatorów  $PI^\lambda D^\mu$ , których nastawy zostały dobrane w pierwszym etapie każdego wariantu optymalizacji (podrozdział 6.1.3).

Tabela Z4.1. Współczynniki zastępczych transmitancji lokalnych regulatorów  $P^iD^u$ , których nastawy dobrano w pierwszym etapie pierwszego wariantu optymalizacji (kryterium jakości ISE).

Współ- czynnik	Punk pracy			
	100% $P_{TH,N}$	80% $P_{TH,N}$	60% $P_{TH,N}$	40% $P_{TH,N}$
$a_{32}$	1,00E+00	1,00E+00	1,00E+00	
$a_{31}$	1,22219050121797E+05	1,19679077626429E+05	1,25196987233734E+05	
$a_{30}$	5,77854207759530E+09	5,50386281400254E+09	6,09132319155288E+09	
$a_{29}$	1,34300542638804E+14	1,23379157764660E+14	1,46343137197529E+14	
$a_{28}$	1,63395431088716E+18	1,43569833959117E+18	1,84679596681622E+18	
$a_{27}$	1,04996281513368E+22	8,77186476169385E+21	1,23576554499567E+22	
$a_{26}$	3,56593981056846E+25	2,81965057164693E+25	4,37575208474153E+25	
$a_{25}$	6,35653748694660E+28	4,74746681236713E+28	8,14790460358197E+28	
$a_{24}$	5,94745879747251E+31	4,18749463951242E+31	7,96066712258586E+31	
$a_{23}$	2,90639243425505E+34	1,92845988811901E+34	4,06616600319811E+34	
$a_{22}$	7,43350746606680E+36	4,64356802156298E+36	1,08601831466088E+37	
$a_{21}$	9,91374489187572E+38	5,83147368927020E+38	1,51350604873678E+39	
$a_{20}$	6,91389540940113E+40	3,82677663665722E+40	1,10179232171111E+41	
$a_{19}$	2,51309739944741E+42	1,30928720791090E+42	4,18283414578238E+42	
$a_{18}$	4,77563706329595E+43	2,34041281229568E+43	8,29248051972591E+43	
$a_{17}$	4,72930774672646E+44	2,18100997087925E+44	8,57208268952033E+44	
$a_{16}$	2,44832005314332E+45	1,06183365936995E+45	4,62694715666725E+45	
$a_{15}$	6,60485460131360E+45	2,69493323834410E+45	1,30217166151574E+46	5,91606516242283E+04
$a_{14}$	9,31421619136093E+45	3,57321559443949E+45	1,91350796368532E+46	9,40549923168778E+08
$a_{13}$	6,84436378543601E+45	2,46969682955438E+45	1,46600777276642E+46	4,18560350597470E+12
$a_{12}$	2,62890232237459E+45	8,91691874690496E+44	5,86403310111785E+45	5,12191010711274E+15
$a_{11}$	5,26086985847229E+44	1,67802096130379E+44	1,22275111511001E+45	1,71042461439184E+18
$a_{10}$	5,50148487817359E+43	1,64911351908546E+43	1,33081247682673E+44	1,55517362124165E+20
$a_9$	2,99585058934983E+42	8,44287963890797E+41	7,54661334829626E+42	3,84749596793688E+21
$a_8$	8,51681808668795E+40	2,25514969669248E+40	2,23149654237797E+41	2,58954660591470E+22
$a_7$	1,25842818847966E+39	3,13198780283640E+38	3,43137409250730E+39	4,74119571091141E+22
$a_6$	9,67242653663322E+36	2,26117690460131E+36	2,74135123237590E+37	2,36123710495436E+22
$a_5$	3,83678709490588E+34	8,42808016090813E+33	1,13084048120904E+35	3,19804112691140E+21
$a_4$	7,81026628598745E+31	1,61082491419577E+31	2,39046021749601E+32	1,17700289713332E+20
$a_3$	7,98355258378553E+28	1,54634997069503E+28	2,53822318250884E+29	1,17369159438545E+18
$a_2$	3,96237745015535E+25	7,19816865855235E+24	1,30552689889116E+26	3,13692196319271E+15
$a_1$	8,71200097663724E+21	1,48402093233198E+21	2,97319853550723E+22	2,15534061611349E+12
$a_0$	6,68469927666336E+17	1,06203836061952E+17	2,34119770705778E+18	3,16701642500113E+08
$b_{32}$	8,04411392062461E-02	7,64099121093750E-02	9,60661392062460E-02	
$b_{31}$	2,36986066531324E+04	2,60541549758596E+04	6,28865272173045E+04	
$b_{30}$	1,53791120713140E+09	1,71432606655089E+09	4,42174606414189E+09	
$b_{29}$	3,98191534303228E+13	4,37886604719636E+13	1,14066467293418E+14	
$b_{28}$	4,88216661349608E+17	5,22291321540789E+17	1,35740260797393E+18	
$b_{27}$	2,98074274709422E+21	3,07635655534789E+21	7,94082356430664E+21	
$b_{26}$	9,37428373945251E+24	9,26872896703693E+24	2,38236969757798E+25	
$b_{25}$	1,52766836327113E+28	1,43947642116263E+28	3,69897043912474E+28	
$b_{24}$	1,307101066358309E+31	1,16708382000142E+31	3,02215516083022E+31	
$b_{23}$	5,85982167707351E+33	4,93285136307630E+33	1,29860148232068E+34	
$b_{22}$	1,38873224434445E+36	1,09552921456037E+36	2,96680093005197E+36	
$b_{21}$	1,73460687690799E+38	1,27494187751162E+38	3,59675004965955E+38	
$b_{20}$	1,15167393091787E+40	7,83442144503136E+39	2,33560317532673E+40	
$b_{19}$	4,05577451847193E+41	2,53855205120323E+41	8,11184066358093E+41	
$b_{18}$	7,64573497730148E+42	4,37900268682652E+42	1,51995923268219E+43	
$b_{17}$	7,70548037042652E+43	4,02842256331189E+43	1,53472172605698E+44	
$b_{16}$	4,19014447032360E+44	2,00157953413936E+44	8,41387975326480E+44	
$b_{15}$	1,22655601156172E+45	5,39427118290430E+44	2,49813916384231E+45	7,73794751587036E+02
$b_{14}$	1,94669611232537E+45	7,98657343240996E+44	4,03782757344350E+45	2,29982230233114E+07
$b_{13}$	1,66512419529277E+45	6,49642946782961E+44	3,53125735820984E+45	1,46178998671805E+11
$b_{12}$	7,70481435888432E+44	2,91771373839309E+44	1,67481356222121E+45	2,38857093994530E+14
$b_{11}$	1,90949929616028E+44	7,16085475233640E+43	4,26559048673428E+44	1,04607904043534E+17
$b_{10}$	2,53914240000183E+43	9,57476292059873E+42	5,83988487812278E+43	1,24129097707869E+19
$b_9$	1,79062641000305E+42	6,86829443802687E+41	4,24793681565459E+42	4,00249576062010E+20
$b_8$	6,70980694456171E+40	2,63455767138654E+40	1,64429758060979E+41	3,50976256602544E+21
$b_7$	1,32008838441944E+39	5,32788547849984E+38	3,34575202800546E+39	8,37144764712534E+21
$b_6$	1,36621629732548E+37	5,67373923169574E+36	3,58516502708855E+37	5,43124463233934E+21
$b_5$	7,33217424556403E+34	3,13573050863968E+34	1,99344828504853E+35	9,58269660967999E+20
$b_4$	2,03485126108348E+32	8,95279807719401E+31	5,73626818537542E+32	4,59435232312503E+19
$b_3$	2,84139721797845E+29	1,28587505571219E+29	8,30749321780684E+29	5,96820313187225E+17
$b_2$	1,94092408343738E+26	9,01751927709373E+25	5,88983780203321E+26	2,07795477198440E+15
$b_1$	5,88471001764277E+22	2,80512058168141E+22	1,85372022464216E+23	1,85990621260121E+12
$b_0$	6,36233491381363E+18	3,09428391835091E+18	2,08472974364459E+19	3,56014920746754E+08

Tabela Z4.2. Współczynniki zastępczych transmitancji lokalnych regulatorów  $P^D D^\mu$ , których nastawy dobrano w drugim etapie pierwszego wariantu optymalizacji (kryterium jakości ITAE).

Współ- czynnik	Punk pracy			
	100% $P_{TH,N}$	80% $P_{TH,N}$	60% $P_{TH,N}$	40% $P_{TH,N}$
$a_{32}$	1,00E+00			
$a_{31}$	1,24706151596703E+05			
$a_{30}$	6,06928783312379E+09			
$a_{29}$	1,46973726406036E+14			
$a_{28}$	1,88814810334586E+18			
$a_{27}$	1,29105482076516E+22			
$a_{26}$	4,70546455826802E+25			
$a_{25}$	9,01535543787917E+28			
$a_{24}$	9,10734551557662E+31			
$a_{23}$	4,79926662982699E+34			
$a_{22}$	1,32771752623275E+37			
$a_{21}$	1,91125927356839E+39			
$a_{20}$	1,44250740004412E+41			
$a_{19}$	5,66093015025202E+42			
$a_{18}$	1,16435166075830E+44			
$a_{17}$	1,24498666017999E+45		1,00E+00	1,00E+00
$a_{16}$	6,97632151185353E+45		9,87932223626401E+04	9,89973143836169E+04
$a_{15}$	2,03209734723596E+46		3,36460645437002E+09	3,38122637391259E+09
$a_{14}$	3,10187185551958E+46		4,53092353514202E+13	4,57226066183491E+13
$a_{13}$	2,46114232592872E+46		2,08120558566779E+17	2,11142773785211E+17
$a_{12}$	1,02324057364892E+46		2,83115550250196E+20	2,88786616835065E+20
$a_{11}$	2,21101013489378E+45		1,07543791369312E+23	1,10235978377481E+23
$a_{10}$	2,50276988514503E+44		1,12009385207985E+25	1,15293804644229E+25
$a_9$	1,47164384825223E+43		3,18222835109037E+26	3,28672044625809E+26
$a_8$	4,52894077689526E+41		2,46262564200076E+27	2,55017672169305E+27
$a_7$	7,22656199619361E+39		5,18896228421553E+27	5,38334275510192E+27
$a_6$	6,01425506232172E+37		2,97650341477248E+27	3,09126682935836E+27
$a_5$	2,57724053269988E+35		4,64696983039579E+26	4,82745021443530E+26
$a_4$	5,68586509278213E+32		1,97298190415437E+25	2,04856277164697E+25
$a_3$	6,28722968903889E+29		2,27141241354471E+23	2,35539651680192E+23
$a_2$	3,39456119588852E+26	1,00E+00	7,01406909202313E+20	7,25858759192773E+20
$a_1$	8,11883978008191E+22	7,26521383037849E+04	5,57204208827302E+17	5,75046170308703E+17
$a_0$	6,93308688235505E+18	1,31958330002807E+09	9,47216534919938E+13	9,74261452781241E+13
$b_{32}$	1,17578125E-01			
$b_{31}$	2,11535747232082E+05			
$b_{30}$	1,81137191894927E+10			
$b_{29}$	5,80091292396140E+14			
$b_{28}$	8,71142073898218E+18			
$b_{27}$	6,48154534230770E+22			
$b_{26}$	2,47391541743185E+26			
$b_{25}$	4,85592014289162E+29			
$b_{24}$	4,96901655316963E+32			
$b_{23}$	2,63585990855460E+35			
$b_{22}$	7,31723904363950E+37			
$b_{21}$	1,05512522306653E+40			
$b_{20}$	7,97018059298433E+41			
$b_{19}$	3,12894787138879E+43			
$b_{18}$	6,43653780567897E+44			
$b_{17}$	6,88231637598483E+45		1,09375E-01	0,00E+00
$b_{16}$	3,85629575157923E+46		2,09020353768438E+05	1,71003337621934E+05
$b_{15}$	1,12317436513270E+47		1,27372948910107E+10	1,06796635206809E+10
$b_{14}$	1,71426482291375E+47		2,21525585536168E+14	1,87192145031195E+14
$b_{13}$	1,35999778860454E+47		1,11142283596042E+18	9,41835674864285E+17
$b_{12}$	5,65359589227533E+46		1,54982120107584E+21	1,31449811805279E+21
$b_{11}$	1,22146867052673E+46		5,91938436984703E+23	5,01972274806265E+23
$b_{10}$	1,38247329388705E+45		6,16546162526075E+25	5,22333120585187E+25
$b_9$	8,12798056355616E+43		1,74911473912797E+27	1,47932602136977E+27
$b_8$	2,50104060076982E+42		1,35109992692078E+28	1,13996077539147E+28
$b_7$	3,99024992245416E+40		2,84136179128825E+28	2,38990795248780E+28
$b_6$	3,32043239215304E+38		1,62666902390980E+28	1,36301901119495E+28
$b_5$	1,42269678687342E+36		2,53459645795127E+27	2,11424736515226E+27
$b_4$	3,13833102826955E+33		1,07401461885309E+26	8,91247932882153E+25
$b_3$	3,46981652408512E+30		1,23405316116523E+24	1,01803729930154E+24
$b_2$	1,87316500386195E+27	1,435546875E-01	3,80330844512090E+21	3,11703182747530E+21
$b_1$	4,47952297476057E+23	2,25512521092364E+05	3,01552150255992E+18	2,45369229872850E+18
$b_0$	3,82481250825319E+19	8,00255106755306E+09	5,11630885696997E+14	4,13104295628678E+14

Tabela Z4.3. Współczynniki zastępczych transmitancji lokalnych regulatorów  $P^I D^\mu$ , których nastawy dobrano w trzecim etapie pierwszego wariantu optymalizacji (kryterium jakości LQ).

Współ- czynnik	Punk pracy			
	100% $P_{THN}$	80% $P_{THN}$	60% $P_{THN}$	40% $P_{THN}$
$a_{32}$	1,00E+00		1,00E+00	1,00E+00
$a_{31}$	1,2303746609691E+05		1,22699645006564E+05	1,19083142672232E+05
$a_{30}$	5,8863925897421E+09		5,84847051176266E+09	5,4555321017197E+09
$a_{29}$	1,3953959788196E+14		1,37968108960299E+14	1,22239544071734E+14
$a_{28}$	1,7481570530549E+18		1,71816645127751E+18	1,42973661515633E+18
$a_{27}$	1,1619326192388E+22		1,13405821967018E+22	8,78955987403450E+21
$a_{26}$	4,1075111193304E+25		3,97793248032962E+25	2,85303199308239E+25
$a_{25}$	7,6233699241285E+28		7,32145560556975E+28	4,84437246924076E+28
$a_{24}$	7,4540310680886E+31		7,09577433301377E+31	4,31866002288961E+31
$a_{23}$	3,8007030951733E+34		3,58483844681428E+34	2,00554545381236E+34
$a_{22}$	1,0170822589884E+37		9,50158569063646E+36	4,87807326810981E+36
$a_{21}$	1,4161721778248E+39		1,30996395827475E+39	6,17205380265199E+38
$a_{20}$	1,0337105688632E+41		9,46451477561425E+40	4,08720840203152E+40
$a_{19}$	3,9235123379172E+42		3,55474272347026E+42	1,40739322556609E+42
$a_{18}$	7,8043140039260E+43		6,99453565418167E+43	2,53589196330173E+43
$a_{17}$	8,0706908364134E+44		7,15329231766565E+44	2,37568326030106E+44
$a_{16}$	4,3735094885043E+45	1,00E+00	3,83225970900001E+45	1,16451870562534E+45
$a_{15}$	1,2320847092879E+46	6,05863830072365E+04	1,06702804158687E+46	2,96776428451122E+45
$a_{14}$	1,8187620982912E+46	1,00726465465079E+09	1,55625380472757E+46	3,95728809984873E+45
$a_{13}$	1,3956625086784E+46	4,74482216606479E+12	1,17960134939379E+46	2,74328629378471E+45
$a_{12}$	5,6114736394860E+45	6,17628975383419E+15	4,68318305183561E+45	9,94942475243552E+44
$a_{11}$	1,1726846365519E+45	2,19893444834746E+18	9,66131121165153E+44	1,87572563257702E+44
$a_{10}$	1,2837089273311E+44	2,13469592988284E+20	1,04368956097296E+44	1,84962045025101E+44
$a_9$	7,3002761478498E+42	5,64578712267361E+21	5,85565906508196E+42	9,47589787540185E+41
$a_8$	2,1726383864833E+41	4,06699164564753E+22	1,71876158287250E+41	2,53683021210642E+40
$a_7$	3,3528351753687E+39	7,97898092541432E+22	2,61526190280226E+39	3,52188919020159E+38
$a_6$	2,6984435083370E+37	4,26298452002568E+22	2,07468733258904E+37	2,54612879513454E+36
$a_5$	1,1183338997709E+35	6,20120831944131E+21	8,47292674498680E+34	9,47923417061922E+33
$a_4$	2,385898775836E+32	2,45408492580906E+20	1,78074158484332E+32	1,81372867993415E+31
$a_3$	2,5514230045676E+29	2,63440554389237E+18	1,87547302932663E+29	1,73947475543318E+28
$a_2$	1,3319771285574E+26	7,58810069857123E+15	9,63980431826714E+25	8,12547250300980E+24
$a_1$	3,0803797731168E+22	5,62471616031560E+12	2,19440889880915E+22	1,68067065284239E+21
$a_0$	2,5417247647560E+18	8,92455609759254E+08	1,78146231929078E+18	1,23120783117714E+17
$b_{32}$	8,32153320312501E-03		2,5625E-02	0,00E+00
$b_{31}$	4,11335482866164E+03		5,36476978916184E+03	7,17693778423175E+03
$b_{30}$	3,23968639282356E+08		3,47771317302170E+08	5,88813224339996E+08
$b_{29}$	1,01389702637380E+13		1,00073114978783E+13	1,72377783363199E+13
$b_{28}$	1,51515381284978E+17		1,42970137824098E+17	2,31473515067475E+17
$b_{27}$	1,13187914677682E+21		1,04035524380201E+21	1,52204361368059E+21
$b_{26}$	4,35873595059820E+24		3,93769626716023E+24	5,09660582326639E+24
$b_{25}$	8,66053727481531E+27		7,72804654795233E+27	8,75173303362537E+27
$b_{24}$	8,99156753280853E+30		7,94592434622480E+30	7,81726818190467E+30
$b_{23}$	4,84880549169080E+33		4,25059067313742E+33	3,62098778334660E+33
$b_{22}$	1,37055822411456E+36		1,19309631539315E+36	8,7765437239980E+35
$b_{21}$	2,01542779460222E+38		1,74370541978337E+38	1,10724678050783E+38
$b_{20}$	1,55461999513941E+40		1,33764106486192E+40	7,32861312260457E+39
$b_{19}$	6,24083001668441E+41		5,34358453222445E+41	2,53058823359037E+41
$b_{18}$	1,31432111326702E+43		1,12044804445284E+43	4,59500207929483E+42
$b_{17}$	1,44055104577432E+44		1,22332966508916E+44	4,36415337061066E+43
$b_{16}$	8,28276752283481E+44	1,3427734375E-02	7,00982787613031E+44	2,18611875225701E+44
$b_{15}$	2,47830121888797E+45	3,14750405035108E+03	2,09120493408835E+45	5,74753023422761E+44
$b_{14}$	3,88960326805920E+45	7,88251268811321E+07	3,27356151923089E+45	8,00018835858648E+44
$b_{13}$	3,17636257818916E+45	4,54776552259458E+11	2,66734995673874E+45	5,86826385528815E+44
$b_{12}$	1,36036135822935E+45	6,85633781580402E+14	1,14016901999849E+45	2,28811756655264E+44
$b_{11}$	3,03074172127148E+44	2,78763298095450E+17	2,53605214693072E+44	4,71857716243418E+43
$b_{10}$	3,53989392733753E+43	3,08241355640304E+19	2,95795553657494E+43	5,18689016171019E+42
$b_9$	2,14951436303181E+42	9,28991887135872E+20	1,79403387222110E+42	3,01980696578887E+41
$b_8$	6,83583503991710E+40	7,63492868664282E+21	5,69950488009729E+40	9,36786957279935E+39
$b_7$	1,12798150343379E+39	1,71107392381329E+22	9,39656487796763E+38	1,53486537720492E+38
$b_6$	9,7135448426936E+36	1,04551929761250E+22	8,08544943461992E+36	1,33231894552171E+36
$b_5$	4,30980579435989E+34	1,74118876411011E+21	3,58495356353515E+34	6,04612848834641E+33
$b_4$	9,84957181741931E+31	7,89608848531967E+19	8,18758853997708E+31	1,42912725522974E+31
$b_3$	1,12886833555087E+29	9,72100621696413E+17	9,37810475541969E+28	1,71190771139970E+28
$b_2$	6,31960836773271E+25	3,21349606298878E+15	5,24670616227142E+25	1,00835998693172E+25
$b_1$	1,56792256940584E+22	2,73547536745048E+12	1,30092323546854E+22	2,64952612573260E+21
$b_0$	1,38887228987141E+18	4,98704967838578E+08	1,15145502305139E+18	2,48401327506871E+17

